Нелинейная механика деформируемого твердого тела

Теоретическая часть
Часть I

С. А. Лычев

Составители презентации: С. А. Лычев и К. Г. Койфман

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН
Москва

lychevsa@mail.ru

http://ipmnet.ru/~lychev

8 декабря 2016 г.

Разделы курса

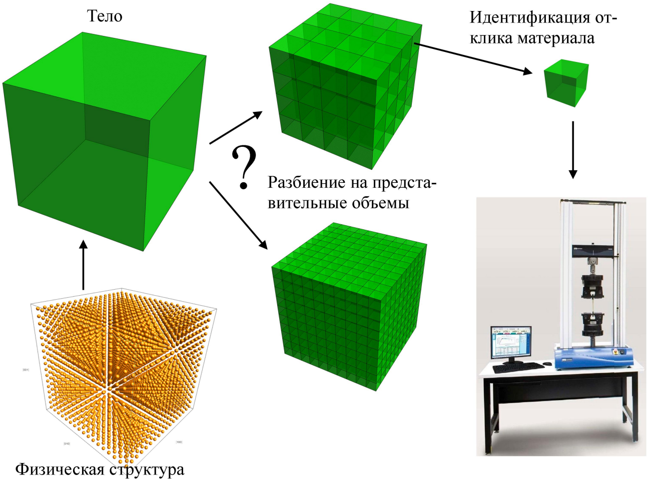
1. Введение
2. Математические основы
3. Тензорные функции

1 Введение
- Представительный объем
- Материальные неоднородности
- Уравнения из различных областей физики
- Литература
- Геометрическая мотивация
- Нелинейная механика. Основные принципы
- Нелинейная механика. Законы состояния на примере нелинейной (вязко)упругой среды

2 Математические основы

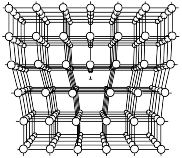
3 Тензорные функции

Введение. От физической структуры — к представительному объему

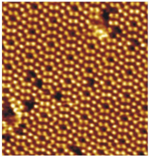


Введение. Материальные неоднородности (Material inhomogeneities)

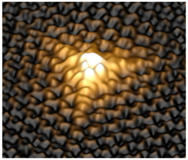
Дислокации



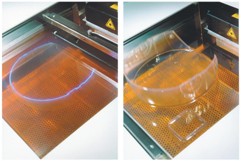
Дефекты в монокристалле кремния (ТСМ)

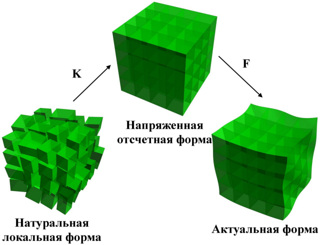


Дефекты в графитовой поверхности (ТСМ)



Послойное изготовление (LbL)





Уравнения из различных областей физики. Что общего?

- Уравнение движения Navier–Cauchy:

$$\mu \Delta \underline{\mathbf{u}} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{f}} = \rho \ddot{\underline{\mathbf{u}}}.$$

- Уравнение Beltrami–Michell (статика):

$$\Delta \underline{\underline{\mathbf{T}}} + 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{T}}}) + 2 [\nabla \underline{\mathbf{f}}]^{\mathrm{sym}} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \nabla \cdot \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

- Волновые уравнения для электрического и магнитного векторов:

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\mathbf{0}}, \quad \Delta \underline{\mathbf{H}} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\underline{\mathbf{H}}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

- Полевые уравнения Einstein (слабое поле):

$$\Delta g_{00} = 8 \pi \rho.$$

Геометрический подход в физике и механике

1. Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge University Press, 2010. 312 p.
2. Epstein M., Elzanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Springer Science & Business Media, 2007. 274 p.
3. Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. CRC Press, 1993. Vol. 3. 276 p.
4. Kadic A., Edelen D. A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1983. 293 p.
5. Frankel T. The geometry of physics: an introduction. Cambridge University Press, 2003. 694 p.
6. Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications, 1994. 556 p.

Работы по рациональной механике

1. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Archive for rational Mechanics and Analysis. 1958. Vol. 2, no. 1. P. 197–226.
2. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. 1967. Vol. 27, no. 1. P. 1–32.
3. Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. 1967. Vol. 27, no. 1. P. 33–94.
4. Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics/Die Nicht-Linearen Feldtheorien der Mechanik. Springer Science & Business Media, 1965.
5. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. 1975. Vol. 57, no. 4. P. 291–323.

Введение. Литература

Работы по рациональной механике (продолжение)

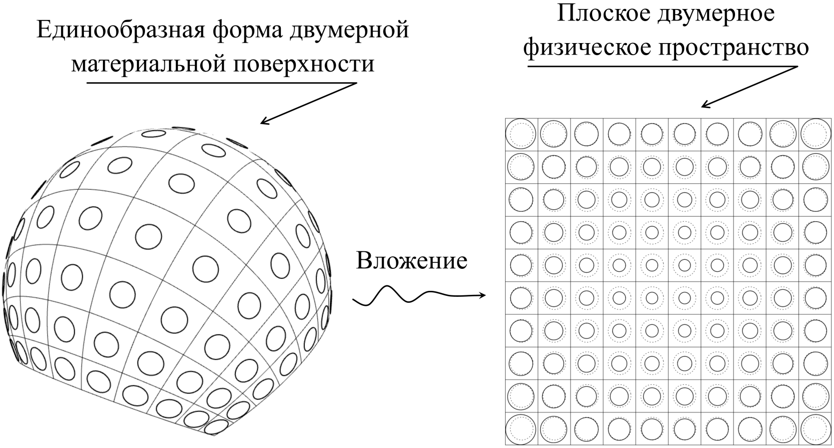
6. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
7. Noll W., Coleman B. Foundations of Linear Viscoelasticity. Reviews of Modern Physics, Volume 33, 1961. P. 239–249.
8. Noll W., Coleman B. The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 13, 1963. P. 167–178.
9. Noll W. Euclidean Geometry and Minkowskian Chronometry, American Mathematical Monthly, Volume 71, 1964. P. 129–144.
10. Noll W. The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics, pp. 266-281 of The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics (Symposium at Berkeley, 1957), Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959.

Работы W. Noll можно найти на сайте
http://www.math.cmu.edu/ wn0g/

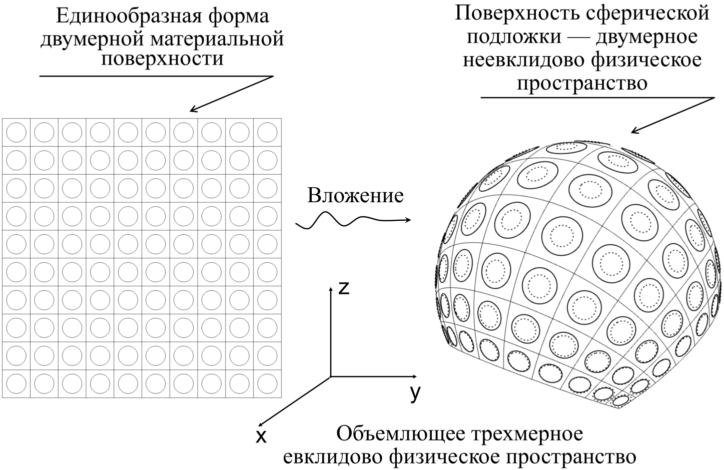
Введение. Литература

Работы по теории поля и гравитации

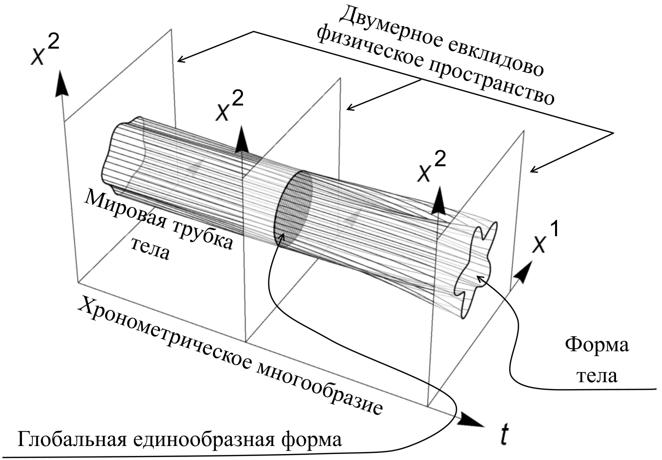
1. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация, Т. 1, 2, 3. — М.: Мир.
2. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.1. Геометрия и классические поля. — М.: УРСС, 1996.
3. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.2. Геометрия и классическая механика — М.: УРСС, 1998.
4. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.3. Алгебраическая квантовая теория — М.: УРСС, 1999.
5. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.4. Геометрия и квантовые поля — М.: УРСС, 2000.
6. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.5. Гравитация — М.: УРСС, 2011.



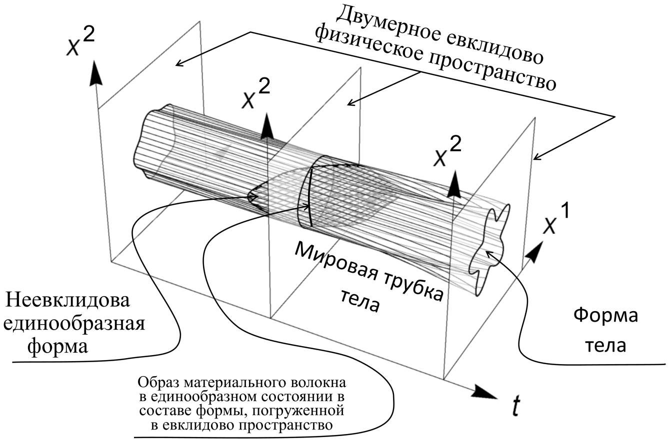
Вложение двумерного тела с неевклидовой внутренней геометрией в плоское физическое пространство



Вложение двумерного тела с евклидовой внутренней геометрией в неевклидово физическое пространство

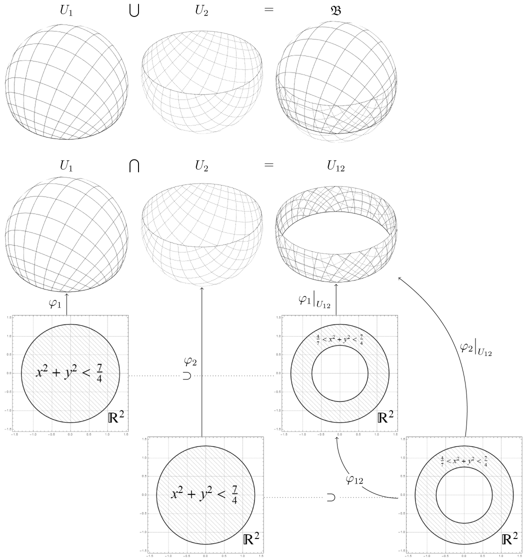


Единообразная отсчетная конфигурация полностью погружена в физическое пространство наблюдателя



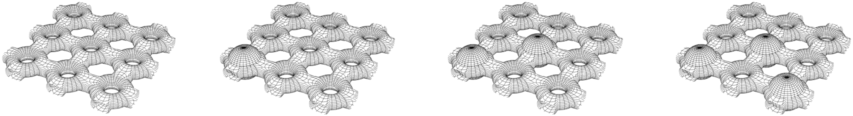
Единообразная отсчетная конфигурация частично погружена в физическое пространство наблюдателя

Пример сетчатой оболочки



Картрирование единичной сферы

Введение. Геометрическая мотивация



$$k = 1,\ \chi(\Omega_1) = n \longrightarrow k = 2,\ \chi(\Omega_2) = n + 2 \to k = 3,\ \chi(\Omega_3) = n + 4 \to k = 4,\ \chi(\Omega_4) = n + 6$$

Эволюция тела

Введение. Зачем нужна нелинейная механика?

Robert Hooke (1635 — 1703)

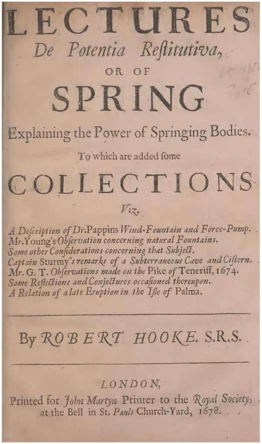
Рисунок карандашом, принадлежащий Rita Greer, 2006, и основанный на воспоминаниях друзей Гука. Портретов Гука не сохранилось...

1660: ceiiinosssttuv

1678:

Ut tensio, sic vis

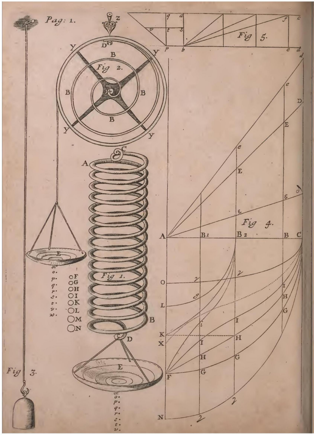
Введение. Зачем нужна нелинейная механика?

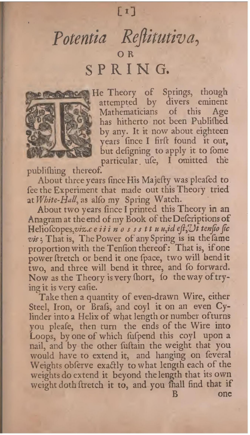


LECTURES
De Potentia Reſtitutiva,
OR OF
SPRING
Explaining the Power of Springing Bodies.
To which are added ſome
COLLECTIONS
Viz.
A Deſcription of Dr. Pappins *Wind-Fountain and Force-Pump.*
Mr. Young's *Obſervation concerning natural Fountains.*
Some other Conſiderations concerning that Subject.
Captain Sturmy's *remarks of a Subterraneous Cave and Ciſtern.*
Mr. G. T. *Obſervations made on the* Pike *of* Teneriff, 1674.
Some Reflections and Conjectures occaſioned thereupon.
A Relation of a late Eruption in the Iſle of Palma.

By ROBERT HOOKE. S.R.S.

LONDON,
Printed for *John Martyn* Printer to the *Royal Society*, at the Bell in St. *Pauls* Church-Yard, 1678.





[1]

Potentia Reſtitutiva,
OR
SPRING.

THe Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It is now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

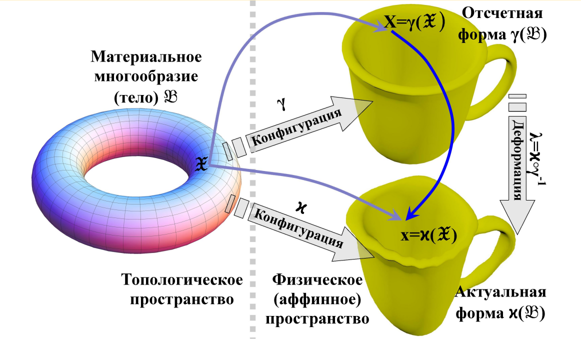
About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Helioſcopes, *viz.* c e i i i n o s s s t t u u, *id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an even Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

Введение. Зачем нужна нелинейная механика?

Тела, конфигурации и деформации



Гипотеза о гладкости

- Все конфигурации — C^r–вложения.
  См. *Введение в топологию. 2-е изд., доп. / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. М.: Наука. Физматлит, 1995. 416 с.*

Введение. Зачем нужна нелинейная механика?

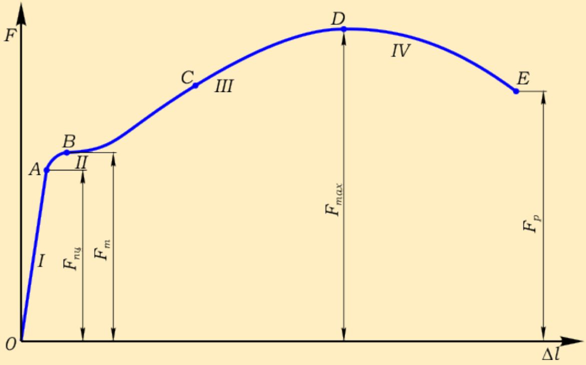
Контрпример 1

Гиперупругое тело

$$\mathcal{W} = \int\limits_{\mathfrak{B}} \underset{\mathfrak{Y}\in\mathfrak{B}}{W}(\varkappa(\mathfrak{Y}), \mathfrak{X})\, d\mathfrak{B}$$

- $\mathfrak{B}$ – тело,
- $\mathcal{E}$ – физическое пространство,
- $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$ – материальные частицы,
- $\varkappa : \mathfrak{B} \to \mathcal{E}$ – конфигурация (вложение тела в физическое пространство),
- $\varkappa \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ – множество всех конфигураций,
- $\mathcal{W} : \mathfrak{C} \to \mathbb{R}$ – суммарная энергия, запасаемая телом при вложении $\varkappa$,
- $W : \mathfrak{C} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ – плотность распределения энергии.

Контрпример 2



Введение. Существование глобальной натуральной конфигурации

Гипотеза о существовании глобальной натуральной конфигурации

- Существует конфигурация, в образе которой физическое состояние материальных точек единообразно.

Гиперупругое тело, обладающее натуральной конфигурацией

$$\mathcal{W} = \int\limits_{\varkappa_R(\mathfrak{B})} \underset{y \in \varkappa_R(\mathfrak{B})}{W}(\lambda(y), x)\, dV$$

- $\mathfrak{C} \ni \varkappa_R$ – натуральная конфигурация,
- $\varkappa_R(\mathfrak{B})$ – образ натуральной конфигурации,
- $x, y \in \mathcal{E}$ – точки физического пространства,
- W – удельная плотность энергии, отнесенная к единице объема образа натуральной конфигурации.

Введение. Существование глобальной натуральной конфигурации

Контрпример 3

Введение. Существование глобальной натуральной конфигурации

Американский физик Карл Генри Экарт:

Традиционная теория твердого тела основана на двух ошибочных утверждениях. Первое — это принцип **фиксированного свободного от напряжений (стандартного) состояния**. Второе — **принцип возможности преобразования всего тела в целом в ненапряженное состояние**, который впервые сформулировал в математических терминах Сен-Венан. Его уравнения фактически идентичны уравнениям Римана, выражающим условие, при котором геометрия тела целиком погружена в евклидово пространство ("*The traditional theory of the solid state rests on two false assumptions. One is the principle of a constant relaxed (or standard) state. The other is the principle of relaxability-in-the-large, first formulated mathematically by de Saint-Venant. His equations are essentially identical with Riemann's equations expressing the condition that a geometry be Euclidean-in-the-large*").

Eckart Carl. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. — 1948. — Vol. 73, no. 4. — P. 373.

Введение. Гипотеза о близкодействии. Простой материал

Гипотеза о близкодействии

- Удельная плотность энергии в точке зависит только от деформации ее бесконечно малой окрестности.

Простой материал (формула Тейлора первого порядка)

$$\underset{y\in\gamma(\mathfrak{B})}{W}(\lambda(y),x) = W(\lambda(x),\nabla_x\lambda,x),$$

$$W\ :\ \mathcal{E}\times\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}.$$

Градиент деформации. Нотация Трусделла (не путать с нотацией Гиббса!)

$$\nabla_x\lambda = \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{\partial\underline{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{X}},t)}{\partial\underline{\mathbf{X}}},\quad \underline{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{X}}+\delta\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\underline{\mathbf{F}}}\cdot\delta\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{o}}\|\delta\underline{\mathbf{X}}\|,$$

где $\underline{\mathbf{o}}\|\delta\underline{\mathbf{X}}\| = \varphi(\delta\underline{\mathbf{X}})\|\delta\underline{\mathbf{X}}\|$, $\varphi(\delta\underline{\mathbf{X}})\to\underline{\mathbf{0}}$ при $\delta\underline{\mathbf{X}}\to\underline{\mathbf{0}}$.

Гипотеза о материальной индифферентности (объективности)

- Свойства материала, характеризующие его возможность запасать энергию при деформировании, не зависят от способа деформирования (испытания).

Объемная плотность упругой энергии

$$W(\lambda(x), \underline{\underline{\mathbf{F}}}, x) = W(\underline{\underline{\mathbf{B}}}, x)$$

Левый тензор деформаций Коши-Грина

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{\mathrm{T}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}$$

Siméon Denis Poisson
(1781 — 1840)

Пуассон впервые обратил внимание на то, что **от жестких поворотов тела напряжения в нем не должны изменяться**: "*Si lón fait tourner le corps autour de láxe des x, et que chacun de ses points decrive un trés-petit angle ... pour un tel déplacement, le corps demeure dans son etat naturel, et les pressions interieures doivent encore être nulles*" (Если тело вращается вокруг оси x и каждая из его точек описывает очень малый угол ... то при таком перемещении тело остается в своем естественном состоянии и внутренние усилия должны быть нулевыми).

Poisson, S.-D. Memoire sur les equations generates de l'equilibre et du mouvement des corps elastiques et des fluids 1829 (1831). J. Ecole Poly. 13, Cahier 20, 1—174.

Введение. Закон состояния для нелинейной упругой среды

Напряжения Пиолы

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_R = \frac{\partial W(\underline{\underline{\mathbf{F}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{F}}}}$$

Напряжения Коши

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = J^{-1} \frac{\partial W(\underline{\underline{\mathbf{F}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{\mathrm{T}}, \quad J = \det \underline{\underline{\mathbf{F}}}$$

Выражения в терминах тензора Коши-Грина

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_R = 2 \frac{\partial \tilde{W}(\underline{\underline{\mathbf{B}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{B}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}, \qquad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = 2 J^{-1} \frac{\partial \tilde{W}(\underline{\underline{\mathbf{B}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{B}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}$$

Введение. Закон состояния для нелинейной вязкоупругой среды

Замечание

Для моделирования сред с памятью модифицируется закон состояния. Его структура наследуется из теории гиперупругости, добавляется зависимость от истории деформирования. Эта модификация делает теорию менее строгой, поскольку производится "по ходу теории".

Замечание

Частный случай моделей сред с памятью – модели дифференциального типа. Это – нелинейные аналоги обобщенных линейных вязкоупругих моделей (Фохта, Максвелла и т.д.). Далее рассматриваются именно такие модели.

Введение. Закон состояния для нелинейной вязкоупругой среды

Тензор напряжения Коши

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \mathfrak{S}\left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_r\right)$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k$ – тензоры Ривлина-Эриксена (индифферентные производные тензора Коши-Грина порядка r), $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1 = 2\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

"Деформация скорости"

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} + \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{\mathrm{T}}\right)$$

Градиент скорости деформации

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \operatorname{grad} \underline{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1}$$

Введение. Вязкоупругость дифференциального типа

Упрощающие предположения

1. Ограничимся только зависимостями от производных первого порядка (нелинейный аналог среды Фохта)
2. Полагаем, что среда изотропна
3. "Коэффициенты реакции" зависят только от инвариантов тензора Коши-Грина

Вязкоупругость дифференциального типа первого порядка

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \phi_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \phi_1 \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \phi_2 \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 + \phi_3 \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \phi_4 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 + \\ + \phi_5 \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}\right) + \phi_6 \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2\right) + \\ + \phi_7 \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}\right) + \phi_8 \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2\right),$$

$$\phi_k = \phi_k(I_1, I_2, I_3), \quad \phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

1 Введение

2 Математические основы
- Векторные пространства
- Линейные отображения
- Сопряженное пространство
- Евклидовы векторные пространства
- Тензоры второго ранга
- Тензоры второго ранга в евклидовом пространстве
- Сравнение представлений тензоров в евклидовом и общих случаях
- Литература

3 Тензорные функции

Roger Bacon (1214 — 1294)

"Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества".

Векторное пространство

Векторным пространством $\mathcal{V}$ над полем $\mathbb{R}$ называется множество, снабженное двумя операциями:

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) \mapsto \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \quad \text{(сумма)};$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad (\lambda, \underline{\mathbf{u}}) \mapsto \lambda \cdot \underline{\mathbf{u}} = \lambda \underline{\mathbf{u}} \quad \text{(умножение на скаляр)},$$

которые удовлетворяют следующим правилам (здесь и далее $\cdot$ имеет более высокий приоритет чем $+$):

1. $\forall \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{u}})$
   — *коммутативность сложения*;
2. $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{V} \quad (\underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) + \underline{\mathbf{w}})$
   — *ассоциативность сложения*;
3. $\exists \underline{\mathbf{0}}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V} \quad \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{0}}_{\mathcal{V}} = \underline{\mathbf{u}})$
   — *существование нейтрального элемента относительно сложения*;
4. $\forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad \exists (-\underline{\mathbf{u}}) \in \mathcal{V} \quad (\underline{\mathbf{u}} + (-\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{0}}_{\mathcal{V}})$
   — *существование обратного элемента относительно сложения*;
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad (\lambda(\mu \underline{\mathbf{u}}) = (\lambda\mu)\underline{\mathbf{u}})$
   — *ассоциативность умножения*;
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad ((\lambda + \mu)\underline{\mathbf{u}} = \lambda \underline{\mathbf{u}} + \mu \underline{\mathbf{u}})$
   — *дистрибутивность умножения относительно сложения*;
7. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad (\lambda(\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = \lambda \underline{\mathbf{u}} + \lambda \underline{\mathbf{v}})$
   — *дистрибутивность умножения относительно сложения*;
8. $\forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad (1\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}})$.

Векторное пространство

Элементы векторного пространства $\mathcal{V}$ — **векторы**.

Линейно–зависимые и линейно–независимые системы векторов

Множество векторов $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathcal{V}$ **линейно–независимо**, если равенство

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $a_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$. В противном случае множество $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathcal{V}$ называют **линейно–зависимым**.

Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства. Размерность

Векторное пространство $\mathcal{V}$ называется **конечномерным**, если существует такое число $n \in \mathbb{N}$, для которого: **i)** существует линейно–независимая система векторов $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ и **ii)** любая система $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathcal{V}$ из $k > n$ векторов линейно–зависима. Это число n называют **размерностью** $\mathcal{V}$ и пишут $\dim \mathcal{V} = n$.

Если для всякого числа $n \in \mathbb{N}$ найдется линейно–независимая система векторов $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{V}$, то говорят, что $\mathcal{V}$ **бесконечномерно**.

Базис векторного пространства

Базис конечномерного векторного пространства. Компоненты вектора

Базис n–мерного векторного пространства $\mathcal{V}$ — любая упорядоченная линейно–независимая система $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$. Каждый вектор $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ может быть представлен как линейная комбинация

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} u^k \mathbf{e}_k, \quad u^i \in \mathbb{R}.$$

Числа u^i называются **компонентами** вектора $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ в базисе $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$. Они определяются единственным образом, так как множество $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$ есть максимальная линейно–независимая система.

Соглашение о суммировании

Здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Для вектора $\mathbf{u}$ с учетом этого соглашения имеем:

$$\mathbf{u} = u^k \mathbf{e}_k.$$

Пусть $\mathcal{V}$ — векторное пространство размерности $\dim \mathcal{V} = n$, а $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$, $(\underline{\mathbf{f}}_k)_{k=1}^n$ — два базиса в нем ("старый" и "новый"). Как и любой вектор $\mathcal{V}$, векторы $(\underline{\mathbf{f}}_k)_{k=1}^n$ можно разложить по базису $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$:

$$\underline{\mathbf{f}}_j = M^{i\cdot}_{\cdot j}\underline{\mathbf{e}}_i, \quad M^{i\cdot}_{\cdot j} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Матрица $M = (M^{i\cdot}_{\cdot j})$ — <u>**матрица перехода**</u> от $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$ к $(\underline{\mathbf{f}}_k)_{k=1}^n$. Это — невырожденная $n \times n$ матрица.

Пусть теперь $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$, $\underline{\mathbf{u}} = u^i\underline{\mathbf{e}}_i = v^j\underline{\mathbf{f}}_j$. Используя матрицу перехода, запишем:

$$u^i\underline{\mathbf{e}}_i = v^j M^{i\cdot}_{\cdot j}\underline{\mathbf{e}}_i,$$

откуда $u^i = v^j M^{i\cdot}_{\cdot j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. В матричной форме:

$$[u^i] = M[v^j] \quad \text{или} \quad [v^j] = M^{-1}[u^i].$$

Контравариантные компоненты

Переход от $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$ к $(\underline{\mathbf{f}}_k)_{k=1}^n$ осуществляется с помощью матрицы M, переход от $[u^i]$ к $[v^j]$ — с помощью матрицы M^{-1}. Поэтому говорят, что u^i — **контравариантные** компоненты вектора.

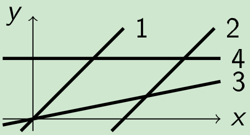
Теперь будем рассматривать линейные отображения. Пусть $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ — векторные пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $u:\ \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ называется **линейным**, если

(i) $\forall \underline{\mathbf{x}},\ \underline{\mathbf{y}} \in \mathcal{V} \quad (u(\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}}) = u(\underline{\mathbf{x}}) + u(\underline{\mathbf{y}}))$ — *аддитивность*;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{V} \quad (u(\lambda\underline{\mathbf{x}}) = \lambda u(\underline{\mathbf{x}}))$ — *однородность*.

Важный частный случай: линейное отображение из $\mathcal{V}$ в $\mathbb{R}$. Это — линейный функционал или **ковектор**.

График линейной функции



Отметим, что на рисунке графики 1, 3 являются графиком линейной функции, а 2, 4 не являются, т.к. не выполняется однородность: $f(0\cdot x) \neq 0\cdot f(x)$.

Функции, которым соответствует графики 2, 4 иногда называют *полулинейной* или *аффинно линейной* функцией.

Изоморфизм

Линейное отображение $u : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ называется **изоморфизмом**, если оно взаимно–однозначно (биекция). Если такое отображение существует, то векторные пространства $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ **изоморфны**: $\mathcal{V} \cong \mathcal{W}$.

Теорема

Два векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Линейные отображения

Для двух заданных пространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ обозначим множество всех линейных отображений из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{W}$ символом $\mathcal{L}(\mathcal{V};\,\mathcal{W})$. Введем на множестве $\mathcal{L}(\mathcal{V};\,\mathcal{W})$ операции сложения и умножения на скаляр. Для $u_1,\ u_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\,\mathcal{W})$ определим отображение

$$(u_1+u_2) : \mathcal{V} \to \mathcal{W}, \quad (u_1+u_2) : \underline{\mathbf{x}} \mapsto (u_1+u_2)(\underline{\mathbf{x}}) := u_1(\underline{\mathbf{x}})+u_2(\underline{\mathbf{x}}),$$

а для $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\,\mathcal{W})$ — отображение

$$(\lambda u) : \ \mathcal{V} \to \mathcal{W}, \quad (\lambda u) : \ \underline{\mathbf{x}} \mapsto (\lambda u)(\underline{\mathbf{x}}) := \lambda \cdot u(\underline{\mathbf{x}}).$$

По построению, $(u_1 + u_2)$, $(\lambda u) \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\,\mathcal{W})$. Кроме того, определим линейные отображения O, $I \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\,\mathcal{W})$ равенствами

$$O(\underline{\mathbf{x}}) := \underline{\mathbf{0}}_{\mathcal{W}}, \quad I(\underline{\mathbf{x}}) := \underline{\mathbf{x}},$$

для любого $x \in \mathcal{V}$. Эти отображения называются, соответственно, **нулевым** и **единичным** отображениями. По отношению к введенным операциям $\mathcal{L}(\mathcal{V};\,\mathcal{W})$ — векторное пространство.

Размерность $\mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{W})$

Для конечномерных $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ имеем

$$\dim\, \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{W}) = (\dim\, \mathcal{V})(\dim\, \mathcal{W}).$$

Сопряженное пространство

Пространство $\mathcal{V}^* = \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathbb{R})$ ковекторов называют **сопряженным** к $\mathcal{V}$.

Пусть $\dim \mathcal{V} = n$, а $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$ — некоторый базис. Тогда $\dim \mathcal{V}^* = n$ и в $\mathcal{V}^*$ можно выбрать особый базис $(e^k)_{k=1}^n$. Этот базис определяется как совокупность линейных функционалов с условиями:

$$e^i(\underline{\mathbf{e}}_j) = \delta^i_j, \quad i,\, j = 1,\, \ldots,\, n.$$

Тогда, если $\underline{\mathbf{u}} = u^k \underline{\mathbf{e}}_k \in \mathcal{V}$, то $e^i(\underline{\mathbf{u}}) = u^i$. Элементы $(e^k)_{k=1}^n$ представляют собой "машины", которые считывают соответствующие компоненты вектора. Базис $(e^k)_{k=1}^n$ называют **дуальным** к $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$.
Элемент $\nu \in \mathcal{V}^*$ имеет представление: $\nu = \nu_i e^i$.

Теорема

Существует канонический изоморфизм $\mathcal{V} \cong \mathcal{V}^{**}$, где $\mathcal{V}^{**} = (\mathcal{V}^*)^*$.

Действие ковектора на вектор удобно записывать в виде $\langle \nu,\, \underline{\mathbf{x}} \rangle = \nu(\underline{\mathbf{x}})$. В силу теоремы о $\mathcal{V} \cong \mathcal{V}^{**}$, пишут

$$\langle \underline{\mathbf{x}},\, \nu \rangle = \langle \nu,\, \underline{\mathbf{x}} \rangle = \nu(\underline{\mathbf{x}}).$$

Перейдем к рассмотрению векторных пространств с дополнительной, евклидовой, структурой.

Определение скалярного произведения

Скалярным произведением в пространстве $\mathcal{V}$ называется отображение

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющее следующим условиям: $\forall \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

1. $(\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}}) = (\underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{u}})$;
2. $(\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{w}}) + (\underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}})$;
3. $(\lambda \underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}}) = \lambda (\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}})$;
4. $(\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{u}}) \geqslant 0$ для любого $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$, при этом, $(\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{u}}) = 0$ в том и только в том случае, когда $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}_{\mathcal{V}}$.

Из п.1–3. определения скалярного произведения следует, что $\forall \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

1. $(\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{w}})$;
2. $(\underline{\mathbf{u}} \mid \lambda\underline{\mathbf{v}}) = \lambda(\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}})$.

Векторное пространство $\mathcal{V}$ с заданным на нем скалярным произведением $(\cdot \mid \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ называется **евклидовым пространством**.

Скалярное произведение векторов $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ обозначается также в виде $\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}}$.

Теорема Рисса

Пусть $\mathcal{V}$ — конечномерное евклидово пространство. Тогда для всякого линейного функционала $\nu \in \mathcal{V}^*$ существует, и притом единственный, вектор $\underline{\mathbf{h}} \in \mathcal{V}$, такой, что

$$\langle \nu, \underline{\mathbf{u}} \rangle = \nu(\underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\mathbf{h}} \mid \underline{\mathbf{u}}),$$

для любого $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$.

Музыкальные изоморфизмы

Согласно теореме Рисса о представлении любому ковектору ν может быть поставлен во взаимно однозначное соответствие вектор $\underline{\mathbf{u}}$, такой, что $\langle \nu, \underline{\mathbf{v}} \rangle = (\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}})$, для любых $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$. Это соответствие порождает два взаимно обратных отображения: **бемоль**

$$(\cdot)^\flat : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*, \quad (\cdot)^\flat : \underline{\mathbf{u}} \mapsto \underline{\mathbf{u}}^\flat, \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} : \quad \langle \underline{\mathbf{u}}^\flat, \underline{\mathbf{v}} \rangle = (\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{v}}),$$

и **диез**

$$(\cdot)^\sharp : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}, \quad (\cdot)^\sharp : \nu \mapsto \nu^\sharp, \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} : \quad \langle \nu, \underline{\mathbf{v}} \rangle = (\nu^\sharp \mid \underline{\mathbf{v}}).$$

Сила — вектор или ковектор?

В механике, как правило, не делается различия между векторами и ковекторами. Вместе с тем надстройка над векторным пространством в форме пространства линейных функционалов представляется более естественной с физических позиций. Действительно, если все величины, обладающие векторной природой, определять в одном и том же векторном пространстве, которое, как правило, оснащается скалярным произведением, то возникает вполне оправданное желание трактовать, например, вектор скорости и вектор силы как равноправные элементы векторного пространства, которые в скалярном произведении дают скаляр — мощность. С другой стороны, учитывая их "равноправность", формально можно рассматривать и их сумму, которая, конечно же, лишена всякого физического смысла.

Сила — вектор или ковектор? (продолжение)

Описанную ситуацию исправляет следующее соображение: сила должна соответствовать ковектору, а скорость вектору.
Ковектор силы, как линейный функционал действует на вектор скорости, результатом чего является скаляр мощности.
Разумеется, сумма вектора и ковектора не определена.
Следует отметить, что различие вектороподобных величин, таких, как сила и перемещение, обсуждалось еще в пионерских работах по векторному и тензорному исчислению (см. *Вейль Г. Пространство, время, материя. Янус. 1996. 480 с.*, *Лагалли М. Векторное исчисление в применении к математической физике. УРСС. 2010. 344 с.*)
Физическая интерпретация музыкальных изоморфизмов — использование единиц измерения для физических величин, не свойственных им, например, измерение силы в единицах расстояния.

Тензоры второго ранга

Термин "**тензор** (**второго ранга**)" используется как синоним для "линейное преобразование из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{V}$". Таким образом, тензор $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ есть линейное отображение, которое присваивает каждому вектору $\underline{\mathbf{v}}$ вектор

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}\,\underline{\mathbf{v}}.$$

Единичный тензор обозначается, как $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$, а нулевой тензор, как $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}\,\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} \quad \text{и} \quad \underline{\underline{\mathbf{0}}}\,\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \text{для любого вектора } \underline{\mathbf{v}}.$$

Произведение $\underline{\underline{\mathbf{S}}}\,\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ двух тензоров определяется, как композиция:

$$(\underline{\underline{\mathbf{S}}}\,\underline{\underline{\mathbf{T}}})(\underline{\mathbf{v}}) := \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{T}}}\,\underline{\mathbf{v}}) \quad \text{для любого вектора } \underline{\mathbf{v}}.$$

Если $\mathcal{V}$ — евклидово пространство, то через $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\mathrm{T}}$ обозначается тензор, **транспонированный** к $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$; это единственный тензор со следующим свойством

$$(\underline{\underline{\mathbf{S}}}\,\underline{\mathbf{u}}\,|\,\underline{\mathbf{v}}) = (\underline{\mathbf{u}}\,|\,\underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\mathrm{T}}\,\underline{\mathbf{v}}) \quad \text{для любых векторов } \underline{\mathbf{u}} \text{ и } \underline{\mathbf{v}}.$$

Тензор $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ называется **симметричным**, если $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\mathrm{T}}$, и **кососимметричным**, если $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = -\underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\mathrm{T}}$.
Тензор $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ называется **ортогональным**, если выполнено условие

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}.$$

Множество всех ортогональных тензоров образует группу, называемую **ортогональной группой**.

Если $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$ — базис $\mathcal{V}$, то система $(\mathbf{e}^k)_{k=1}^n$ векторов, определенных равенствами

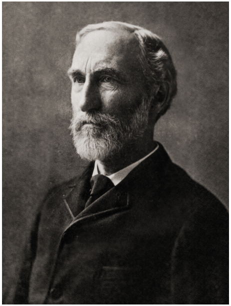
$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

образует базис $\mathcal{V}$, называемый **дуальным** к $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$. Пара базисов $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^n$, $(\mathbf{e}^k)_{k=1}^n$ используется в классической механике континуума.

Обозначим $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j)$. Матрица $G = (g_{ij})$ есть обратимая матрица Грама размерности $n \times n$. Для фиксированного i матрица системы n уравнений $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$ есть G и потому эта система имеет единственное решение. Оно имеет вид

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $G^{-1} = (g^{ij})$ — обратная к G матрица. Можно показать, что $g^{ij} = (\mathbf{e}^i \mid \mathbf{e}^j)$.



Josiah Willard Gibbs (1839 — 1903)

Frontispiece of The Scientific Papers of J. Willard Gibbs, in two volumes, eds. H. A. Bumstead and R. G. Van Name, (London and New York: Longmans, Green, and Co., 1906

Один из создателей векторного анализа. По–видимому, он был первым, кто стал использовать диадную нотацию.

Тензоры второго ранга в евклидовом пространстве

<u>**Тензорное произведение**</u> $\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}$ двух векторов $\underline{\mathbf{a}}$ и $\underline{\mathbf{b}}$ есть тензор, который сопоставляет каждому вектору $\underline{\mathbf{u}}$ вектор $\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{u}})$:

$$(\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}})(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \quad \text{для любого вектора } \underline{\mathbf{u}}.$$

Если $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$ — базис $\mathcal{V}$, то системы $(\underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j)_{i,\,j=1}^n$, $(\underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j)_{i,\,j=1}^n$, $(\underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j)_{i,\,j=1}^n$ и $(\underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j)_{i,\,j=1}^n$ из n^2 векторов линейно–независимы. Каждая из них образует базис $\mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$. Для $\underline{\underline{\mathbf{T}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$ имеем разложения

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = T^{ij}_{\cdot\cdot}\,\underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = T_{i\cdot}^{\cdot j}\,\underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = T^{i\cdot}_{\cdot j}\,\underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j = T^{\cdot\cdot}_{ij}\,\underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j.$$

Тензоры второго ранга в евклидовом пространстве

Скалярное произведение в $\mathcal{V}$ индуцирует два вида скалярных произведений (**внутренние произведения**) в $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ следующим образом. Для диад полагаем

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} = (\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}) : (\underline{\mathbf{c}} \otimes \underline{\mathbf{d}}) = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}})(\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{d}}) \qquad \text{и} \qquad \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\mathbf{B}}} = (\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}) \cdot\cdot\, (\underline{\mathbf{c}} \otimes \underline{\mathbf{d}})$$

а затем продолжаем на произвольные тензоры по линейности.

След тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:

$$\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} = A^{k\,\cdot}_{\,\cdot\,k} = A_{k\,\cdot}^{\,\cdot\,k} = g^{km} A^{\cdot\,\cdot}_{km} = g_{km} A^{km}_{\cdot\,\cdot}\,,$$

где $g_{km} = (\underline{\mathbf{e}}_k \mid \underline{\mathbf{e}}_m)$, $g^{km} = (\underline{\mathbf{e}}^k \mid \underline{\mathbf{e}}^m)$.

Внутреннее произведение тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ с использованием операции следа имеет вид

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\, \underline{\underline{\mathbf{B}}}) \quad \text{или} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\underline{\mathbf{B}}}).$$

Сравнение представлений тензоров в евклидовом и общих случаях. Случай евклидова пространства

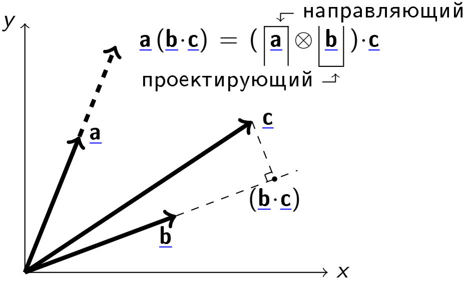
Рассмотрим классический случай, когда имеется скалярное произведение $(\cdot)$. Если $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$ — базис $\mathcal{V}$, то дуальный базис к нему вводится по определению, как система $(\underline{\mathbf{e}}^k)_{k=1}^n$, удовлетворяющая условию $\underline{\mathbf{e}}^i \cdot \underline{\mathbf{e}}_j = \delta^i_j$. Как было показано ранее, $\underline{\mathbf{e}}^i = g^{ij}\underline{\mathbf{e}}_j, \quad i,\, j = 1,\, \ldots,\, n$.

Диада $\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}$ определяется по действию:

(i) $(\underline{\mathbf{a}} \otimes \underbrace{\underline{\mathbf{b}}) \cdot \underline{\mathbf{c}}} = \underline{\mathbf{a}}\,(\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{c}})$,

и

(ii) $\underbrace{\underline{\mathbf{c}} \cdot (\underline{\mathbf{a}}} \otimes \underline{\mathbf{b}}) = (\underline{\mathbf{c}} \cdot \underline{\mathbf{a}})\,\underline{\mathbf{b}}$.



Сравнение представлений тензоров в евклидовом и общих случаях. Общий случай

Допустим теперь, что $\mathcal{V}$ **не обладает** евклидовой структурой, зато имеется сопряженное, $\mathcal{V}^*$. Для векторов $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ и ковекторов μ, $\nu \in \mathcal{V}^*$ можно образовать 4 диады (напомним, что $\mathcal{V} \cong \mathcal{V}^{**}$):

(i) $\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{v}} : \ \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}, \quad (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{v}})(\nu) = \langle \nu, \underline{\mathbf{v}} \rangle \underline{\mathbf{u}};$

(ii) $\underline{\mathbf{u}} \otimes \nu : \ \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad (\underline{\mathbf{u}} \otimes \nu)(\underline{\mathbf{v}}) = \langle \nu, \underline{\mathbf{v}} \rangle \underline{\mathbf{u}};$

(iii) $\mu \otimes \underline{\mathbf{v}} : \ \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*, \quad (\mu \otimes \underline{\mathbf{v}})(\nu) = \langle \nu, \underline{\mathbf{v}} \rangle \mu;$

(iv) $\mu \otimes \nu : \ \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*, \quad (\mu \otimes \nu)(\underline{\mathbf{v}}) = \langle \nu, \underline{\mathbf{v}} \rangle \mu.$

Диады вида (i)–(iv) порождают, соответственно, следующие тензорные пространства:

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}^*;\, \mathcal{V}), \quad \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V}), \quad \mathcal{L}(\mathcal{V}^*;\, \mathcal{V}^*), \quad \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V}^*),$$

в которых тензоры имеют компоненты, соответственно, следующего вида:

$$T^{ij}_{\cdot\cdot} \text{ – тип } \binom{2}{0}, \quad T^{i\cdot}_{\cdot j} \text{ – тип } \binom{1}{1}, \quad T^{\cdot j}_{i\cdot} \text{ – тип } \binom{1}{1}, \quad T^{\cdot\cdot}_{ij} \text{ – тип } \binom{0}{2}.$$

Сравнение представлений тензоров в евклидовом и общих случаях. Сведение общего случая к евклидову

Пусть $\mathcal{V}$ **обладает** евклидовой структурой, и имеется сопряженное, $\mathcal{V}^*$. Тогда существуют музыкальные изоморфизмы. От дуального базиса $(e^k)_{k=1}^n$ пространства $\mathcal{V}^*$ можно перейти к дуальному базису $(\underline{\mathbf{e}}^k)_{k=1}^n$ пространства $\mathcal{V}$. Действительно, если $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^n$ — базис $\mathcal{V}$, а $(e^k)_{k=1}^n$ — соответствующий ему дуальный базис $\mathcal{V}^*$, то система $(\underline{\mathbf{e}}^k)_{k=1}^n$ векторов, определенных равенствами

$$\underline{\mathbf{e}}^k = (e^k)^\sharp, \quad k = 1, \ldots, n,$$

образует базис $\mathcal{V}$, причем, $\underline{\mathbf{e}}^i \cdot \underline{\mathbf{e}}_j = \delta^i_j$.
В силу музыкальных изоморфизмов можно говорить только о пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$, причем для одного тензора $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ одновременно определены как смешанные, так и дважды ко- и контра- вариантные компоненты.

Литература

Исчерпывающее изложение по линейной алгебре содержится в

- Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1980. 303 с.

Применение тензоров второго ранга в классической механике. Например,

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 274 с.
3. Зубов Л.М., Карякин М.И. Элементы тензорного исчисления. Ростов: РГУ, 2003. 108 с.
4. Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity. Handbuch der Physik (ed. S. Flugge). Vol. VI a/2 // Mechanics of Solids II. Ed. C. Truesdell. Springer, 1972. 295 p.

1 Введение

2 Математические основы

3 Тензорные функции
- Определение
- Скалярнозначные тензорные функции
- Тензорнозначные тензорные функции
- Линейные тензорные функции
- Мультилинейные тензорные функции
- Изотропные тензорные функции
- Инварианты
- Критерий изотропности тензорной функции
- Производное отображение для случая двух векторных пространств
- Градиент скалярнозначной тензорной функции
- Градиенты главных инвариантов
- Градиент тензорнозначной тензорной функции
- Градиенты моментов
- Теоремы о представлении
- Основная теорема Коши о представлении совместных инвариантов от

Линейное отображение $\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ векторного пространства $\mathcal{V}$ в себя определяет тензор второго ранга; $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ — векторное пространство тензоров второго ранга. Оно имеет размерность n^2, где $n = \dim \mathcal{V}$.
Через $\mathcal{J}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ обозначается пространство симметричных тензоров — подпространство $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$. Это векторное пространство размерности $\frac{1}{2}n(n+1)$.
В случае, когда $\mathcal{V}$ евклидово, пространство $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ также евклидово и скалярное произведение в нем — или $(:)$, или $(\cdot\cdot)$. Считаем, что выбрано первое из них. Нормы вектора $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ и тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$:

$$\|\underline{\mathbf{u}}\| = \sqrt{(\underline{\mathbf{u}} \mid \underline{\mathbf{u}})}, \quad \|\underline{\underline{\mathbf{A}}}\| = \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}}}.$$

Таким образом, можно говорить о сходимости последовательностей как в $\mathcal{V}$, так и в $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$.

Тензорные функции

Пусть $\mathcal{V}$ — евклидово пространство, а $\{\underline{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^n$ — базис $\mathcal{V}$.
Введем обозначения:

$$\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})^s := \underbrace{\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V}) \times \ldots \times \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})}_{s \text{ раз}},\ s \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})^1 := \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V}).$$

Пусть $\mathcal{W}$ — векторное пространство. Любое отображение из $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})^s$ в $\mathcal{W}$ называется **тензорной функцией** (ТФ).
В наших рассмотрениях $\mathcal{W}$ либо поле скаляров $\mathbb{R}$, либо пространство $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$, либо $\mathcal{V}$.

Скалярнозначные ТФ ($\mathcal{W} = \mathbb{R}$)

Скалярнозначная ТФ — функция $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})^s$ (или $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})^s$).

Пусть A_{km} — ковариантные компоненты тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{D}$ в выбранном базисе.

Формы записи

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varepsilon(A_{pq};\, \underline{\mathbf{e}}_k) = \varepsilon(A_{pq}),$$

где последние два равенства соответствуют тому, хотим ли мы подчеркнуть зависимость от базиса $\{\underline{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^n$, или нет.

Примеры

$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^m)$, $\quad \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\quad \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}},\, \underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}})$.

Тензорнозначные ТФ

Тензорнозначная ТФ — функция $\underline{\mathbf{f}}: \mathcal{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$, где $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})^s$ (или $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})^s$).

Формы записи

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$$

— прямая,

$$B_{km} = f_{km}(A_{pq};\, \underline{\mathbf{e}}_r) = f_{km}(A_{pq})$$

— компонентная, A_{km} — ковариантные компоненты тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{D}$ в базисе $\{\underline{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^n$, причем равенства соответствуют тому, хотим ли мы подчеркнуть зависимость от базиса, или нет.

Тензорнозначные тензорные функции

Примеры

1. **Тензорные полиномы**. Тензорный полином от переменных $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l$ — конечная сумма выражений вида

$$c\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1^{p_1} \ldots \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^{p_l},$$

где c — постоянная, а p_j — неотрицательные целые числа.

2. **Тензорные степенные ряды**. Тензорный степенной ряд от одной переменной имеет вид

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underline{\underline{\mathbf{A}}}^k.$$

Сходимость ряда по норме $\|\underline{\underline{\mathbf{A}}}\| = \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ пространства $\mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$:

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \lim_{k\to\infty} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_k\right) := \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k > n_0 \quad (\|\underline{\underline{\mathbf{B}}}_k - \underline{\underline{\mathbf{B}}}\| < \varepsilon).$$

ТФ не обязательно должна быть представима в виде степенного ряда, или полинома.

Примеры (продолжение)

3. **Не представимы в виде ряда или полинома.**

$$\underline{\mathbf{f}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}, \quad \underline{\mathbf{f}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = (\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\mathbf{I}}, \quad \underline{\mathbf{f}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\mathbf{I}}},$$

где, в последнем равенстве, тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ таков, что $\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\mathbf{I}}$ — положительно определенный[a] и симметричный[b] тензор.

[a] Тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ называется **положительно определенным**, если для всякого $\underline{\mathbf{u}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ справедливо $\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\mathbf{u}}) > 0$.

[b] Тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ называется **симметричным**, если $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}$.

Линейные тензорные функции

Линейная ТФ

Тензорная функция одного тензорного переменного $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ называется **линейной**, если она аддитивна и однородна по $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Линейные тензорные функции

Общий вид линейной скалярнозначной ТФ

Из общей теоремы Рисса о представлении линейного функционала в форме скалярного произведения, для линейной скалярнозначной ТФ λ существует тензор $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$, зависящий от области определения λ, такой, что

$$\lambda(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{L}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} = L^{km} A_{km}.$$

Общий вид линейной тензорнозначной ТФ

Для линейной тензорнозначной ТФ используем обозначение

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}[\underline{\underline{\mathbf{A}}}].$$

Компонентная форма этого равенства имеет вид

$$B_{km} = L_{kmpq} A^{pq},$$

поэтому $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ можно ассоциировать с тензором четвертого ранга, компоненты которого L_{kmpq}.

Общий вид линейной тензорнозначной ТФ (продолжение)

Если $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$, то выполнены соотношения

$$L_{kmpq} = L_{mkpq} = L_{kmqp} = L_{mkqp}.$$

$\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ является симметричным линейным преобразованием в $\mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$ тогда и только тогда, когда

$$L_{kmpq} = L_{pqkm}.$$

Мультилинейная ТФ

Тензорная функция многих тензорных переменного называется **мультилинейной**, если она линейна по каждому аргументу. Мультилинейную ТФ можно ассоциировать с тензором высокого порядка.

Пример

Скалярнозначная билинейная ТФ имеет вид

$$\lambda[\underline{\underline{\mathbf{A}}},\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}] = L_{kmpq}A^{km}B^{pq}.$$

В $\mathcal{J}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ выполняются соотношения

$$L_{kmpq} = L_{mkpq} = L_{kmqp} = L_{mkqp},$$

а соотношение

$$L_{kmpq} = L_{pqkm}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda[\underline{\underline{\mathbf{A}}},\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}] = \lambda[\underline{\underline{\mathbf{B}}},\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}],$$

для всех $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$.

Изотропные тензорные функции

Изотропные ТФ

Скалярнозначная ТФ $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)$ называется **изотропной**, если равенство

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l) = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}})$$

выполнено для всех ортогональных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ и всех наборов $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)$ из области определения ε.
Говорят, что ε **изотропно относительно** g, где g — подгруппа группы всех ортогональных тензоров, если соотношение, записанное выше, выполнено для всех $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \in g$.

Изотропные ТФ (продолжение)

Скалярнозначная изотропная ТФ $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ от одной переменной называется **ортогональным инвариантом** (или просто **инвариантом**) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. В случае нескольких переменных говорят о **совместных инвариантах**.

Примерами совместных инвариантов являются следы произведения тензоров. Их общий вид:

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{f_1}^{p_1} \ldots \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{f_l}^{p_l}),$$

где p_j — целые положительные числа.

Изотропные тензорные функции

Изотропные ТФ (продолжение)

Тензорнозначная ТФ $\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)$ называется **изотропной**, если равенство

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}} = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}})$$

выполнено для всех ортогональных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ и всех наборов $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)$ из области определения ε.
Говорят, что $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ **изотропно относительно** g, где g — подгруппа группы всех ортогональных тензоров, если соотношение, записанное выше, выполнено для всех $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \in g$.

Инварианты

Главные инварианты $I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$, $k = 1, \ldots, n$, тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ определяются как коэффициенты следующего многочлена от λ:

$$\det\left(\lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}\right) = \lambda^n + I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\lambda^{n-1} + \ldots + I_{n-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\lambda + I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}).$$

В частности,

$$I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}, \quad I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}.$$

Другими важными инвариантами являются **моменты** $\bar{I}_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$, определенные как

$$\bar{I}_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^k.$$

Инварианты (продолжение)

В трехмерном случае ($n = 3$) мы используем обозначения

$$I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = I_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}, \quad I_2(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = II_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}, \quad I_3(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = III_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$$

для главных инвариантов, и аналогичные обозначения используются для моментов: $\overline{I}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$, $\overline{II}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$, $\overline{III}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$.

Характеристика изотропных ТФ

Теорема. ТФ изотропна тогда и только тогда, когда ее компоненты зависят от базиса $\{\underline{\mathbf{e}}_k\}_{k=0}^n$ только через компоненты $g_{km} = \underline{\mathbf{e}}_k \cdot \underline{\mathbf{e}}_m$ единичного тензора. В частности, ТФ изотропна тогда и только тогда, когда ее компоненты одинаковы для всех ортонормированных базисов.

Доказательство: Докажем теорему для инварианта $\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ в компонентной записи

$$\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varepsilon(A^{pq}\underline{\mathbf{e}}_p \otimes \underline{\mathbf{e}}_q) \equiv \varepsilon(A^{pq};\ \underline{\mathbf{e}}_r).$$

Ортогональное преобразование $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ отображает базис $\underline{\mathbf{e}}_k$ в базис $\underline{\mathbf{e}}_k^*$:

$$\underline{\mathbf{e}}_k^* = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{e}}_k.$$

Изотропность $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ означает, что

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}),$$

для всех ортогональных $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. Поэтому, мы имеем

$$\varepsilon(A^{pq};\ \underline{\mathbf{e}}_r) = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\{A^{pq}\underline{\mathbf{e}}_p \otimes \underline{\mathbf{e}}_q\}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}) = \varepsilon(A^{pq}\underline{\mathbf{e}}_p^* \otimes \underline{\mathbf{e}}_q^*),$$

откуда

$$\varepsilon(A^{pq};\ \underline{\mathbf{e}}_r) = \varepsilon(A^{pq};\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{e}}_r). \quad \square$$

Замечание

Изотропность по отношению к группе g означает, что функциональное отношение останется неизменным, если каждый тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, входящий как аргумент или значение, заменить на тензор $\underline{\underline{\overline{\mathbf{A}}}}$, компоненты $\overline{A}_{k_1,\ldots,\,k_p}$ которого связаны с компонентами $A_{m_1,\ldots m_p}$ исходного тензора соотношениями

$$\overline{A}_{k_1,\ldots,\,k_p} = Q_{k_1}^{m_1} \ldots Q_{k_p}^{m_p} A_{m_1,\ldots,\,m_p},$$

где $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \in g$.

Пример

В случаях, когда аргумент — вектор, или тензор второго ранга, имеем

$$\underline{\overline{\mathbf{v}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{v}}, \quad \underline{\underline{\overline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}.$$

Например, векторнозначная функция $\underline{\mathbf{h}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}},\, \underline{\mathbf{v}})$ от тензора второго ранга $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$ и вектора $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$, изотропна по отношению к g если

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{h}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}},\, \underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{h}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}},\, \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{v}}),$$

для любых $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$, $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \in g$.

Производное отображение

В дальнейшем будет использоваться понятие производного отображения, которое вводится следующим образом. Пусть $(\mathcal{V}_1, \|\cdot\|_1)$, $(\mathcal{V}_2, \|\cdot\|_2)$ — нормированные векторные пространства, $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}_1$ — открытое множество. Говорят, что отображение $f : \mathcal{D} \to \mathcal{V}_2$ **дифференцируемо** в точке $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{D}$, если существует **линейное непрерывное** отображение $L : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$, такое, что при $\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{h}} \in \mathcal{D}$,

$$f(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{h}}) = f(\underline{\mathbf{a}}) + L[\underline{\mathbf{h}}] + \varphi(\underline{\mathbf{h}})\|\underline{\mathbf{h}}\|_1,$$

где $\varphi(\underline{\mathbf{h}}) \to \underline{\mathbf{0}}$ при $\underline{\mathbf{h}} \to \underline{\mathbf{0}}$. Иначе говоря, $\varphi(\underline{\mathbf{h}})\|\underline{\mathbf{h}}\|_1 = \underline{\mathbf{o}}(\|\underline{\mathbf{h}}\|_1)$ при $\underline{\mathbf{h}} \to \underline{\mathbf{0}}$. Отображение L называется **производным отображением** f в точке $\underline{\mathbf{a}}$ и обозначается $f'(\underline{\mathbf{a}})$ или $Df(\underline{\mathbf{a}})$.

Пусть $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_1$ — некоторый вектор, тогда предел (если он существует)

$$D_{\underline{\mathbf{u}}} f(\underline{\mathbf{a}}) = \frac{d}{dt} f(\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{u}})\Big|_{t=0} := \lim_{\underline{\mathbf{a}}+t\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{D},\, t \neq 0,\, t \to 0} \frac{f(\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{u}}) - f(\underline{\mathbf{a}})}{t},$$

называется **производной** f **в точке** $\underline{\mathbf{a}}$ **вдоль вектора** $\underline{\mathbf{u}}$. Если существует $f'(\underline{\mathbf{a}})$, то для любого $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_1$,

$$D_{\underline{\mathbf{u}}} f(\underline{\mathbf{a}}) = f'(\underline{\mathbf{a}})[\underline{\mathbf{u}}]. \tag{1}$$

Из этой формулы вытекает единственность $f'(\underline{\mathbf{a}})$ для данных f и a.
Если существует $f'(\underline{\mathbf{a}})$, то f непрерывна в точке $\underline{\mathbf{a}}$. Это следует из того, что разность $f(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{h}}) - f(\underline{\mathbf{a}})$ сколь угодно мала при $\underline{\mathbf{h}}$, достаточно близком к $\underline{\mathbf{0}}$. Здесь учитывается, что $f'(\underline{\mathbf{a}})$ — **непрерывно**.

Пусть отображение $f : \mathcal{D} \to \mathcal{V}_2$ дифференцируемо в точке $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{D}$. Пусть $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_1$ — произвольный вектор. Ясно, что в случае $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}$ равенство (1) выполняется, поэтому далее считаем, что $\underline{\mathbf{u}} \neq \underline{\mathbf{0}}$.
Возьмем ненулевое число $t \in \mathbb{R}$ настолько малым, что $\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}$. Тогда

$$f(\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{u}}) = f(\underline{\mathbf{a}}) + L[t\underline{\mathbf{u}}] + \underline{\mathbf{o}}(\|t\underline{\mathbf{u}}\|_1).$$

Представим $\underline{\mathbf{o}}(\|t\underline{\mathbf{u}}\|_1) = \varphi(t\underline{\mathbf{u}})\|t\underline{\mathbf{u}}\|_1$. Используя *линейность* L, приходим к

$$\frac{f(\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{u}}) - f(\underline{\mathbf{a}})}{t} = L[\underline{\mathbf{u}}] + \operatorname{sign} t\, \varphi(t\underline{\mathbf{u}})\|\underline{\mathbf{u}}\|_1.$$

Устремляя t к нулю, по множеству $\{t \in \mathbb{R} \mid (t \neq 0) \wedge (\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{D})\}$, в силу того, что $\frac{|t|}{t}\varphi(t\underline{\mathbf{u}})\|\underline{\mathbf{u}}\|_1 =$ Ограниченная $\times$ б.м., получаем (1).

Непрерывность линейного отображения — контрпример

Линейное отображение **конечномерных** нормированных пространств **всегда** непрерывно. Что будет в случае бесконечномерного пространства?
Пусть E — векторное пространство всех полиномов с вещественными коэффициентами над полем $\mathbb{R}$. Это — **бесконечномерное пространство**. Определим на нем норму, полагая $\|P\| = \max\limits_{t\in[0,\,1]} |P(t)|$, для любого $P \in E$. Рассмотрим линейное отображение

$$u:\ E \to \mathbb{R}, \quad u:\ P \mapsto P(3).$$

Как и для любого линейного отображения, $u(0) = 0$. Пусть $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность полиномов, определенная равенством

$$P_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\|P_n - 0\| = 2^{-n}$, то $P_n \to 0$ при $n \to \infty$. Однако

$$|u(P_n) - 0| = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Следовательно, u разрывно в нуле, а потому **не является непрерывным отображением** E в $\mathbb{R}$.

Градиент скалярнозначной тензорной функции

Рассмотрим частный случай (см. раздел "Производное отображение"), когда $\mathcal{V}_1 = \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$, $\mathcal{V}_2 = \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Дифференцируемость в точке $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{D}$ означает, что

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{H}}}) = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{H}}}] + o(\|\underline{\underline{\mathbf{H}}}\|), \quad \underline{\underline{\mathbf{H}}} \to \underline{\underline{\mathbf{O}}},$$

где $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V});\ \mathbb{R})$. Если производное отображение существует во всех точках $\mathcal{D}$, то можно говорить об отображении $\mathcal{D}$ в $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V});\ \mathbb{R})$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mapsto \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}$. Эта тензорнозначная ТФ обозначается

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \varepsilon_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varepsilon_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$$

и называется **градиентом** ε.

Градиент скалярнозначной ТФ

Пусть соответствующая функция компонент $\varepsilon(A_{km})$ имеет непрерывные частные производные по всем своим переменным A_{km}. Тогда функции

$$f^{km} := \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_{km}}$$

являются контравариантными компонентами градиента.

Если существует градиент скалярнозначной ТФ, то можно вычислить его значение на тензоре, используя связь с производной вдоль вектора (1). Именно, для произвольного тензора $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ справедливо равенство

$$\varepsilon_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \frac{d}{ds}\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + s\underline{\underline{\mathbf{C}}})\Big|_{s=0} = \mathrm{tr}(\varepsilon_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}{}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}) = \mathrm{tr}(\varepsilon_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\mathrm{T}}) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_{km}} C_{km}.$$

Замечание. Градиент симметричного тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{J}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$

Множество тензоров $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ ограничивается на $\mathcal{J}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$, $\varepsilon_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \varepsilon_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}{}^{\mathrm{T}}$.

Для определения компонент $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial A_{km}}$ функция ε расширяется на $\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ равенством $\overline{\varepsilon}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varepsilon\left(\dfrac{\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}}{2}\right)$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$, от полученной функции берется производная $\overline{\varepsilon}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$, затем $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ограничивается на $\mathcal{J}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$.

Градиент скалярнозначной ТФ

Пример производной от симметричного тензора

Пусть $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{J}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$, $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = A_{12}$, тогда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_{12}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_{21}} = \frac{1}{2}.$$

Сначала вычислим градиент $I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Пусть тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ обратим. Тогда

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + s\underline{\underline{\mathbf{C}}}) = s^n \det \underline{\underline{\mathbf{A}}} \det\left(\tfrac{1}{s}\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\right).$$

Используя уравнение

$$\det(\lambda\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \lambda^n + I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\lambda^{n-1} + \ldots + I_{n-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\lambda + I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}),$$

в котором полагаем $\lambda = \frac{1}{s}$, а тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ заменяем на $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, от полученного выше равенства приходим к соотношению

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + s\underline{\underline{\mathbf{C}}}) = (\det \underline{\underline{\mathbf{A}}})\{1 + I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}})s + \ldots + I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}})s^n\},$$

из которого следует

$$\frac{d}{ds}\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + s\underline{\underline{\mathbf{C}}})\Big|_{s=0} = (\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}) I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}}) = \operatorname{tr}((\det \underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}}).$$

Из произвольности $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ получаем

$$\frac{\partial I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \frac{\partial \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = (\det \underline{\underline{\mathbf{A}}})(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

В ортонормированном базисе полученная формула примет вид

$$\frac{\partial \det[A_{pq}]}{\partial A_{km}} = \overline{A}_{km}, \quad \text{где } \overline{A}_{km} = \mathrm{Cof}([\mathrm{A_{km}}]) \text{ — } \textbf{кофактор} \text{ матрицы } [\mathrm{A_{km}}].$$

На основании полученной формулы для $I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ выведем формулы для других главных инвариантов. Полагая $I_0(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = 1$, запишем

$$\det(\lambda \underline{\mathbf{I}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}}).$$

Согласно полученной ранее формуле, имеем

$$\frac{\partial \det(\lambda \underline{\mathbf{I}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = (\det(\lambda \underline{\mathbf{I}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}))[(\lambda \underline{\mathbf{I}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{-1}]^{\mathrm{T}},$$

откуда

$$\underline{\mathbf{I}} \det(\lambda \underline{\mathbf{I}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = (\lambda \underline{\mathbf{I}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}})^{\mathrm{T}} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \frac{\partial I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}},$$

$$\underline{\mathbf{I}} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} I_k = \underline{\mathbf{I}} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k+1} \frac{\partial I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \frac{\partial I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях λ, получаем рекуррентную формулу

$$\frac{\partial I_{k+1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = I_k \underline{\mathbf{I}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}} \frac{\partial I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}, \quad k = 0,\, 1, \ldots,\, n,$$

в которой $I_0 \equiv 1$, $I_{n+1} \equiv 0$. По индукции,

$$\frac{\partial I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j I_{k-j-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \underline{\underline{\mathbf{A}}}^j\right]^{\mathrm{T}}.$$

Это соотношение справедливо и для случая $k = n + 1$, в котором $I_{n+1} = 0$, и приводит к теореме Кэли–Гамильтона:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n - I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{n-1} + I_2(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{n-2} - \ldots + \ldots + (-1)^n I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\mathbf{I}} = \underline{\underline{\mathbf{O}}}.$$

Градиенты главных инвариантов $I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ (продолжение)

В трехмерном случае $(n = 3)$ имеем

$$\frac{\partial I(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}, \quad \frac{\partial II(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = I(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\partial III(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = III(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\right]^{\mathrm{T}} = \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{2} - I(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{A}}} + II(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{I}}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

В компонентах:

$$\frac{\partial I(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial A_{km}} = g^{km}, \quad \frac{\partial II(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial A_{km}} = I(\underline{\underline{\mathbf{A}}})g^{km} - A^{mk},$$

$$\frac{\partial III(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial A_{km}} = III(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\right]^{mk} = \left[A^{m\cdot}_{\cdot p} A^{pk} - I(\underline{\underline{\mathbf{A}}})A^{mk} + II(\underline{\underline{\mathbf{A}}})g^{mk}\right].$$

Градиент тензорнозначной тензорной функции

Пусть теперь $\mathcal{V}_1 = \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$ и имеется тензорнозначная функция $\underline{\underline{\mathbf{f}}} :\ \mathcal{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V})$. Дифференцируемость в точке $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{D}$ означает, что

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{H}}}) = \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) + \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{f}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{H}}}] + \underline{\underline{\mathbf{o}}}(\|\underline{\underline{\mathbf{H}}}\|), \quad \underline{\underline{\mathbf{H}}} \to \underline{\underline{\mathbf{O}}},$$

где $\dfrac{\partial \underline{\underline{\mathbf{f}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V});\ \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V}))$. Если производное отображение существует во всех точках $\mathcal{D}$, то можно говорить об отображении $\mathcal{D}$ в $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V});\ \mathcal{L}(\mathcal{V};\ \mathcal{V}))$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mapsto \dfrac{\partial \underline{\underline{\mathbf{f}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}$. Эта тензорнозначная ТФ обозначается

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{f}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$$

и называется **градиентом** $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$.

Пусть соответствующая функция компонент $f_{km}(A_{pq})$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным A_{pq}. Тогда функции

$$(f_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}})_{km\cdot\cdot}^{\cdot\cdot pq} := \frac{\partial f_{km}}{\partial A_{pq}}$$

являются компонентами градиента.

Если существует градиент $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$, то можно использовать формулу (1). Для произвольного тензора $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ справедливо равенство

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{f}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \frac{d}{ds}\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + s\underline{\underline{\mathbf{C}}})\Big|_{s=0},$$

при этом, будет справедливо равенство

$$(\underline{\underline{\mathbf{f}}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}])_{km} = \frac{\partial f_{km}}{\partial A_{pq}} C_{pq}.$$

Замечание. Случай аргумента $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathcal{J}(\mathcal{V};\, \mathcal{V})$

Поступаем аналогично скалярнозначной ТФ.

Следствия из определения

Из определения тензорнозначной ТФ вытекают следующие соотношения:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \underline{\underline{\mathbf{C}}}, \quad \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{m}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = \sum_{k=0}^{m-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{k}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{m-1-k}, \quad m > 0,$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}[\underline{\underline{\mathbf{C}}}] = -\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}.$$

Градиенты моментов

Поскольку $\overline{I}_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, имеем

$$\frac{\partial I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = (\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}})_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}.$$

Из цепного правила и полученных выше соотношений получаем

$$\operatorname{tr}\left(\left[\frac{\partial \overline{I}_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}}\right]^{\mathrm{T}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}\right) = \operatorname{tr}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^j \underline{\underline{\mathbf{C}}}\, \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{k-1-j}\right) = k \operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{k-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}\right),$$

откуда, из произвольности $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, имеем

$$\frac{\partial \overline{I}_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = k\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Градиенты моментов. Трехмерный случай

В трехмерном случае полученные формулы примут вид:

$$\overline{I}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \frac{\partial \overline{I}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial A_{km}} = g^{mk},$$

$$\overline{II}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \frac{\partial \overline{II}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial A_{km}} = 2A^{mk},$$

$$\overline{III}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \frac{\partial \overline{III}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})}{\partial A_{km}} = 3A^{m\cdot}_{\cdot p}A^{pk}.$$

Представление инвариантов для одного симметричного тензора

Действие происходит в $\mathcal{J}(\mathcal{V},\, \mathcal{V})$.
Пусть тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}} \in \mathcal{J}(\mathcal{V},\, \mathcal{V})$ таковы, что

$$I_k(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = I_k(\underline{\underline{\mathbf{B}}}), \quad k = 1,\, 2, \ldots,\, n.$$

Тогда характеристические уравнения тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ совпадают. Следовательно, эти тензоры имеют одну и ту же систему собственных значений ($\{a_k\}$ для $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\{b_k\}$ для $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$) . Упорядочим собственные числа a_k, b_k тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ так, что $a_k = b_k$, для всех $k = 1,\, 2, \ldots,\, n$.
Из соответствующих теорем линейной алгебры известно, что тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ имеют системы собственных векторов $\{\underline{\mathbf{e}}_k\}$, $\{\underline{\mathbf{f}}_k\}$ соответственно, образующих ОНБ пространства $\mathcal{V}$, при этом,

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{e}}_k = a_k \underline{\mathbf{e}}_k, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\mathbf{f}}_k = b_k \underline{\mathbf{f}}_k.$$

Представление инвариантов для одного симметричного тензора

Для систем $\{\underline{\mathbf{e}}_k\}$ $\{\underline{\mathbf{f}}_k\}$ существует такой ортогональный тензор $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$, что $\underline{\mathbf{f}}_k = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{e}}_k$. Но тогда

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{e}}_k = a_k \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{e}}_k = a_k \underline{\mathbf{f}}_k = b_k \underline{\mathbf{f}}_k = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\mathbf{f}}_k = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{e}}_k,$$

откуда $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$, или $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}$.

Обратно, если $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}$, где $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ — ортогональное преобразование, то

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{B}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right) = \det\left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}\right) =$$

$$= \det\left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}[\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}]\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}\right).$$

Нами доказана

Теорема. Главные инварианты двух симметричных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ совпадают тогда и только тогда, когда существует такое ортогональное преобразование $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$, что $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}$.

Представление инвариантов для одного симметричного тензора

Напомним, что изотропность $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ означает выполнение равенства

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varepsilon\left(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{\mathrm{T}}\right),$$

где $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ — ортогональный тензор. Таким образом, если тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ имеют одинаковую систему инвариантов, то будет выполнено равенство $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$. Это утверждение приводит к следующей **теореме о представлении для инвариантов**:

Теорема. Скалярнозначная функция $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ от симметричного тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ изотропна (инвариант) тогда и только тогда, когда ее можно выразить как функцию от главных инвариантов $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. То есть,

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \widetilde{\varepsilon}(I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}),\ \ldots,\ I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}})).$$

Представление инвариантов для одного симметричного тензора

Сформулированную теорему можно дополнить утверждением:
Утверждение. Если $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ — инвариант, являющийся полиномом относительно компонент $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, то его можно выразить как полином от главных инвариантов тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
Высказанные утверждения можно сформулировать и в терминах моментов. То есть, справедлива следующая
Теорема. Скалярнозначная функция $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ от симметричного тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ инвариант тогда и только тогда, когда ее можно выразить как функцию от первых n моментов $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. То есть,

$$\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \widetilde{\varepsilon}(\bar{I}_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}), \ldots, \bar{I}_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}})).$$

Если $\varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ — инвариант, являющийся полиномом относительно компонент $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, то $\widetilde{\varepsilon}(\bar{I}_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}), \ldots, \bar{I}_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}))$ — полином.

Теорема. Скалярнозначная функция $\gamma(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m)$ от векторов $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m$ является изотропной тогда и только тогда, когда ее можно представить как функцию от скалярных произведений $\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j$, $i, j = 1, \ldots, m$.

◀ Пусть

$$\gamma(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m) = \widetilde{\gamma}(\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j).$$

Рассмотрим множества векторов $\{\underline{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^m$ и $\{\underline{\mathbf{v}}_i\}_{i=1}^m$ таких, что

$$\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Пусть $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m)$ — линейная оболочка, натянутая на векторы $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m$, а $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m)$ — линейная оболочка, натянутая на векторы $\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m$. С точностью до перенумерации можно считать, что базисом $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m)$ является система $\{\underline{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^p$, где $p \leqslant \min(m, n)$.

Основная теорема Коши о представлении совместных инвариантов от векторов

Соответствующий определитель Грама отличен от нуля:

$$\det \left\| \underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j \right\|_{i,\, j=1,\, \ldots,\, p} \neq 0,$$

что является необходимым и достаточным условием линейной независимости системы $\{\underline{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^{p}$. В силу равенств $\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j$, имеем $\det \left\| \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j \right\|_{i,\, j=1,\, \ldots,\, p} \neq 0$. Из этого замечания следует, что $\{\underline{\mathbf{v}}_i\}_{i=1}^{p}$ — базис $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m)$. Существует невырожденное преобразование $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} : \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m) \to \mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m)$, такое, что $\underline{\mathbf{u}}_i = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_i$, для всех $i = 1, \ldots, p$. Преобразование $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ ортогональное. Действительно,

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_j = \underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j.$$

Однако, это еще не значит, что $\underline{\mathbf{u}}_i = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_i$, когда $p < i \leqslant m$.

Рассмотрим этот случай. Пусть

$$\underline{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{\mathbf{u}}_i, \quad p < k \leqslant m.$$

Домножив обе части равенство скалярно на $\underline{\mathbf{u}}_j$, получаем

$$\underline{\mathbf{u}}_k \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j, \quad j = 1, \ldots, p$$

— система из p уравнений, определитель матрицы которой есть определитель Грама, и он невырожден. Таким образом, коэффициенты α_i определяются единственным образом. С учетом равенств $\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j$ получаем, что

$$\underline{\mathbf{v}}_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}_i, \quad p < k \leqslant m.$$

Тогда

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{\mathbf{u}}_i = \underline{\mathbf{u}}_k, \quad p < k \leqslant m.$$

Поэтому, если справедливы равенства $\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j$, то существует ортогональное преобразование $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$, такое, что $\underline{\mathbf{u}}_i = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_i$, для всех $i = 1, \ldots, m$.
Обратно, если $\underline{\mathbf{u}}_i = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\mathbf{v}}_i$, для всех $i = 1, \ldots, m$, то выполнены равенства $\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j$. Из определения изотропии следует, что

$$\gamma(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_m) = \gamma(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m),$$

пока выполнены $\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j = \underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j$. Это и означает, что значения γ зависят от $\underline{\mathbf{u}}_i \cdot \underline{\mathbf{u}}_j$. ▶

Представление совместных инвариантов от симметричных тензоров

а. Пусть $\lambda = \lambda[\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l]$ — мультилинейный инвариант от l симметричных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j \in \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Тогда λ может быть представлено суммой вида

$$\lambda = \sum c\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_s,$$

в каждом слагаемом которой c — постоянная, а φ_j — базовые мультилинейные инваринты, представленные ниже, такие, что произведение $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_s$ содержит каждый из $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j$ в точности один раз.

Представление совместных инвариантов от симметричных тензоров

Список базовых мультилинейных инвариантов

$$\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i, \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j) \quad (i<j), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k) \quad (i<j<k);$$

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k) \quad (i<j<k<l);$$

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m) \quad (i<j<k<l<m);$$

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m\underline{\underline{\mathbf{A}}}_n) \quad (i<j<k<l<m<n).$$

Пример. Представление билинейного инварианта

$$\lambda[\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{B}}}] = c_1 \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}\mathbf{B}}) + c_2(\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}})(\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{B}}}).$$

Представление совместных инвариантов от симметричных тензоров

b. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)$ — полиномиальный инвариант от l симметричных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j \in \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Тогда он может быть представлен в виде полинома от базовых инвариантов, список которых содержит инварианты, приведенные выше, а также те, которые приведены ниже.

Список базовых нелинейных инвариантов

$$\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2, \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^3);$$

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i \underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2) \quad (i < j);$$

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i \underline{\underline{\mathbf{A}}}_j \underline{\underline{\mathbf{A}}}_k^2), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i \underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}_k^2) \quad (i < j < k);$$

Представление совместных инвариантов от симметричных тензоров

Список базовых нелинейных инвариантов (продолжение)

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^2), \quad \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^2) \quad (i<j<k<l);$$

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^2), \quad \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^2), \quad \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k^2) \quad (i<j<k<l);$$

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^2), \quad \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k^2), \quad \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2) \quad (i<j<k<l);$$

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^2) \quad (i<j<k<l);$$

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m^2), \quad \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m^2) \quad (i<j<k<l<m);$$

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m^2), \quad \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m^2) \quad (i<j<k<l<m).$$

Представление совместных инвариантов от симметричных тензоров

Случай двух переменных

$$\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{A}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^3, \quad \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{B}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}^3,$$

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}^2), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{BA}}}^2), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2\underline{\underline{\mathbf{B}}}^2).$$

c. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{B}}})$ — совместный инвариант от двух симметричных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Пусть собственные числа одного из них различны. Тогда $\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{B}}})$ можно выразить как функцию от 10-ти базовых инвариантов, представленных выше.

d. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)$ — полиномиальный инвариант от l симметричных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j \in \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Пусть собственные числа $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1$ различны и внедиагональные элементы матрицы $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2$ в ортонормированном базисе из собственных векторов тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1$ отличны от нуля. Тогда ε можно выразить как функцию от $6l - 2$ базовых инвариантов, которые получены добавлением к списку выше, в котором $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_1$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2$, следующих $6l - 12$ инвариантов:

$$\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i, \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i) \quad (i = 3, \ldots l),$$

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i), \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i) \quad (i = 3, \ldots l).$$

Представление скалярнозначной функции от симметричного тензора и вектора для произвольной размерности n

Теорема. Скалярнозначная функция $\varepsilon : \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\mathbf{u}})$ является ортогональным инвариантом тогда и только тогда, когда ее можно представить как функцию от $2n$ следующих инвариантов:

$$I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}), \ldots, \ I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}), \ \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}}, \ \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{u}}, \ \ldots, \ \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{n-1}\underline{\mathbf{u}}.$$

Если зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\mathbf{u}})$ от $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\mathbf{u}}$ полиномиальная, то зависимость соответствующей функции от инвариантов также полиномиальная.

Представление тензорнозначной функции одного переменного

Согласно определению, симметричная тензорнозначная ТФ $\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ одного переменного изотропна тогда и только тогда, когда равенство

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T)$$

выполнено для любого ортогонального тензора $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. Для такой функции справедлива следующая

Теорема. Тензорнозначная функция $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}} \in \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ изотропна тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varphi_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \varphi_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \varphi_2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 + \ldots + \varphi_{n-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{n-1},$$

в котором $\varphi_k = \varphi_k(I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}), \ldots, I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}))$.

Доказательство: ◀ Рассмотрим собственный вектор $\underline{\mathbf{e}}$ тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и определим ортогональное преобразование $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ равенствами

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{e}} = -\underline{\mathbf{e}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{f}}, \quad \text{если}\underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{e}} = 0.$$

Легко показать, что $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$, и, следовательно, согласно определению изотропной функции, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{D}}}$, или, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. Поэтому, мы имеем

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\mathbf{e}}) = \underline{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{e}}) = -\underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\mathbf{e}}.$$

Отсюда следует, что вектор $\underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\mathbf{e}}$ трансформируется отображением $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ в противоположный. Но это может быть лишь в том случае, когда $\underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\mathbf{e}} = d\underline{\mathbf{e}}$, то есть, когда $\underline{\mathbf{e}}$ — собственный вектор $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

Представление тензорнозначной функции одного переменного

Аналогично, рассматриваем другие собственные вектора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и определяем соответствующее преобразование $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. Таким образом, получаем, что все собственные векторы $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ являются собственными векторами $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.
Обозначим все различные собственные числа тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ через $a_1, \ldots, a_m$, где $m \leqslant n$, а множество соответствующих собственных векторов — через $\underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_m$. Они также являются собственными векторами тензора $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, отвечающими собственным числам $d_1, \ldots, d_m$. Эти числа не обязаны различаться.

Представление тензорнозначной функции одного переменного

Система m уравнений

$$d_k = \varphi_0 + \varphi_1 a_k + \varphi_2 a_k^2 + \ldots + \varphi_{m-1} a_k^{m-1}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

имеет единственное решение $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$, ибо ее определитель есть $\prod\limits_{j<k}(a_j - a_k) \neq 0$. Отсюда получаем

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varphi_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \varphi_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \varphi_2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 + \ldots + \varphi_{m-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{m-1}, \quad m \leqslant n.$$

Поскольку $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}})$, то

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}}) = \varphi_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \varphi_1 (\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}}) + \varphi_2 (\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}})^2 + \ldots + \varphi_{m-1} (\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}})^{m-1}.$$

Поэтому коэффициенты φ_k не изменятся, если $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ заменить на $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. Следовательно, они инварианты $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Теорема доказана. ▶

Представление тензорнозначной функции одного переменного

Замечание к теореме

Коэффициенты φ_k в формулировке теоремы определены единственным образом, если все собственные числа различны, то есть, в случае $n = m$. До тех пор, пока собственные числа тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ различаются, коэффициенты φ_k наследуют непрерывностные и дифференциальные свойства $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$. Если $m < n$, то последние $n - m$ φ_k-х могут считаться нулями. Однако, такая замена может повлечь за собой нарушение непрерывности некоторых φ_k, в то время, как $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$ остается непрерывной.

Представление тензорнозначной функции одного переменного

Доказанную теорему можно дополнить следующим предложением, которое примем без доказательства.

Теорема. Если $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}} \in \mathcal{J}(\mathcal{V},\ \mathcal{V})$ изотропная полиномиальная тензорнозначная функция то коэффициенты $\varphi_k = \varphi_k(I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}),\ \ldots,\ I_n(\underline{\underline{\mathbf{A}}}))$ могут быть выражены как полиномы от главных инвариантов $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Частный случай: любая линейная изотропная тензорнозначная функция $\underline{\underline{\mathbf{L}}}[\underline{\underline{\mathbf{A}}}]$ имеет представление

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}[\underline{\underline{\mathbf{A}}}] = c_0(\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\mathbf{I}} + c_1\underline{\underline{\mathbf{A}}},$$

в котором c_0, c_1 — постоянные.

Пример

В трехмерном случае представление из доказанной теоремы имеет вид:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \varphi_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \varphi_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \varphi_2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2,$$

где $\varphi_k = \varphi_k(I_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}},\ II_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}},\ III_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}})$.

Если $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — обратимый тензор, то справедливо альтернативное представление:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \psi_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \psi_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \psi_{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1},$$

где $\psi_k = \psi_k(I_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}},\ II_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}},\ III_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}})$.

Представление тензорнозначной функции от нескольких переменных

Аналогично случаю скалярнозначной функции, известны лишь частные результаты для трехмерного случая. Приведем некоторые из них.

а. Всякая мультилинейная изотропная тензорнозначная функция $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}[\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l]$, где $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j \in \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, имеет представление в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \sum \psi(\underline{\underline{\mathbf{P}}} + \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T),$$

где $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ — произведение из представленного далее списка, а ψ — это мультилинейный инвариант от тех тензоров (из $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l$), которые не содержатся в произведении $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$.

Представление тензорнозначной функции от нескольких переменных

Список базовых мультилинейных произведений

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m.$$

Представление билинейной изотропной тензорнозначной ТФ

Пусть $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}[\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{B}}}]$ — билинейная изотропная тензорнозначной ТФ. Тогда

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = [c_1(\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}})(\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{B}}})+c_2\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}})]\underline{\underline{\mathbf{I}}}+c_3(\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{B}}})\underline{\underline{\mathbf{A}}}+c_4(\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{B}}}+c_5(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}}+\underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}).$$

Представление тензорнозначной функции от нескольких переменных

b. Пусть $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \ldots, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_l)$ — полиномиальная изотропная тензорнозначная функция, где $\underline{\underline{\mathbf{D}}}, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_j \in \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Такая функция имеет представление, аналогичное функции из a, но $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ — это произведение из списка, представленного выше, а также следующего списка

Список базовых нелинейных произведений

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2,$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l^2,$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_i^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_i\underline{\underline{\mathbf{A}}}_j^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}_k\underline{\underline{\mathbf{A}}}_l.$$

Представление полиномиальной изотропной тензорнозначной ТФ двух переменных

Пусть $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{B}}})$ — полиномиальная изотропная тензорнозначной ТФ. Тогда

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \psi_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \psi_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \psi_2 \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \psi_3 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 + \psi_4 \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 + \psi_5 (\underline{\underline{\mathbf{A}\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}\mathbf{A}}})$$
$$+ + \psi_6 (\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}\mathbf{A}}}^2) + \psi_7 (\underline{\underline{\mathbf{A}\mathbf{B}}}^2 + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}) + \psi_8 (\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2),$$

где ψ_j — полиномы от базовых инвариантов.

Представление векторнозначной функции от симметричного тензора и вектора для произвольной размерности n

Теорема. Векторнозначная функция $\underline{\mathbf{b}} : \mathcal{J}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{b}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\mathbf{u}})$ изотропна тогда и только тогда, когда она допускает следующее представление:

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{b}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\mathbf{u}}) = (\varphi_0 \underline{\mathbf{I}} + \varphi_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \ldots + \varphi_{n-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{n-1}) \underline{\mathbf{u}},$$

в котором φ_k — совместные инварианты от $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\mathbf{u}}$.

Spencer, A. J. M., and R. S. Rivlin: The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua. Arch. Rational Mech. Anal. 2 (1958/59), 309-336. (11, 13)

The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua

A. J. M. Spencer & R. S. Rivlin

Contents

	Page
Abstract	309
1. Introduction	309
2. Some consequences of the Hamilton-Cayley theorem	311
3. The contraction of matrix polynomials in R, 3×3 matrices	316
4. The contraction of matrix polynomials in five or fewer 3×3 matrices	321
5. Scalar invariants under the orthogonal group of R symmetric 3×3 matrices	325
6. Some relations concerning the reducibility of scalar invariants of symmetric 3×3 matrices	326
7. The reduction of the invariants for R, 3×3 matrices	328
8. Integrity bases for five or fewer symmetric matrices	330
9. Application of Peano's theorem to the determination of an integrity basis for R symmetric 3×3 matrices	332
10. Application of Peano's theorem to the contraction of isotropic matrix polynomials	333
11. Appendix	335
References	336

Abstract

In this paper we show that a symmetric isotropic matrix polynomial in any number of symmetric 3×3 matrices can be expressed as a symmetric isotropic matrix polynomial, in which each of the matrix products is formed from at most six matrices and has one of a certain number of forms which are explicitly given. The significance of these results in the mechanics of isotropic continua is indicated.

Переход от тензоров к матрицам

Будем рассматривать тензоры в трехмерном пространстве ($\dim \mathcal{V} = 3$).
Выберем в $\mathcal{V}$ ортонормированный базис и зафиксируем его.
Тогда каждому тензору $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ взаимно однозначно соответствует матрица $A = (a_{ij})$ размерности 3×3, при этом, единичному тензору $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ соответствует единичная матрица E:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее рассматриваем такие матрицы.

Напоминание

Для матрицы A выполняется тождество (теорема Гамильтона–Кэйли):

$$A^3 - I_A A^2 + II_A A - III_A E = 0,$$

где E — единичная матрица, $I_A = \operatorname{tr} A$, $II_A = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2)$, $III_A = \det A = \frac{1}{6}((\operatorname{tr} A)^3 + 2 \operatorname{tr} A^3 - 3 \operatorname{tr} A \operatorname{tr} A^2)$.

Матричный одночлен (моном)

Под матричным мономом от $n \times n$ матриц $A_1, \ldots, A_R$ мы понимаем следующий объект:

$$\Pi = A_{i_1}^{\alpha_1} A_{i_2}^{\alpha_2} \ldots A_{i_s}^{\alpha_s}, \qquad (2)$$

в котором $i_k \in \{1, \ldots, R\}$, а $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+$ — степень матрицы A_{i_k}. Без потери общности, $i_k \neq i_l$, если $k \neq l$. Степень монома — сумма $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s$.

Многочлен $P[A_1, \ldots, A_R]$ от матриц $A_1, \ldots, A_R$ — линейная комбинация мономов:

$$P[A_1, \ldots, A_R] = \sum_{k=1}^{K} c_k \Pi_k,$$

где c_k — скаляры, Π_k — мономы вида (2).

Целостный базис

Цель

Хотим выразить матричный полином через разложение по «каноническим» мономам. Какой вид имеют эти мономы? Предполагается при этом, что полином является изотропной функцией.

Тождество с определителем

Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Тогда

$$\begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \delta_{i_1 j_3} & \delta_{i_1 j_4} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \delta_{i_2 j_3} & \delta_{i_2 j_4} \\ \delta_{i_3 j_1} & \delta_{i_3 j_2} & \delta_{i_3 j_3} & \delta_{i_3 j_4} \\ \delta_{i_4 j_1} & \delta_{i_4 j_2} & \delta_{i_4 j_3} & \delta_{i_4 j_4} \end{vmatrix} a_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} c_{i_3 j_3} = 0,$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера.

Матричное тождество

Приведенное выше тождество в матричной форме:

$$\begin{gathered}ABC+BCA+CAB+BAC+ACB+CBA=(BC+CB)\operatorname{tr}A+\\+(CA+AC)\operatorname{tr}B+(AB+BA)\operatorname{tr}C+A(\operatorname{tr}(BC)-\operatorname{tr}B\operatorname{tr}C)+\\+B(\operatorname{tr}(CA)-\operatorname{tr}C\operatorname{tr}A)+C(\operatorname{tr}(AB)-\operatorname{tr}A\operatorname{tr}B)+\\+I(\operatorname{tr}A\operatorname{tr}B\operatorname{tr}C-\operatorname{tr}A\operatorname{tr}(BC)-\operatorname{tr}B\operatorname{tr}(CA)-\\-\operatorname{tr}C\operatorname{tr}(AB)+\operatorname{tr}(ABC)+\operatorname{tr}(CBA)),\end{gathered}\tag{3}$$

для любых 3×3 матриц A, B, C.

Следствия из матричного тождества (3)

1. Случай $A = B = C$. Получаем теорему Гамильтона–Кэйли.
2. Случай $C = A$. Имеем

$$ABA + A^2B + BA^2 = A(\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B) + \frac{1}{2}B[\operatorname{tr} A^2 - (\operatorname{tr} A)^2] + \\ + (AB + BA)\operatorname{tr} A + A^2 \operatorname{tr} B + E\{\operatorname{tr}(A^2B) - \operatorname{tr} A \operatorname{tr}(AB) + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{tr} B[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2]\}. \quad (4)$$

Следствия из матричного тождества (продолжение)

Умножим обе части полученного тождества (4) на A справа, потом домножим обе части того же тождества (4) на A слева, сложим полученные тождества и учтем теорему Гамильтона–Кэйли (для A^3). Получим

$$ABA^2+A^2BA = ABA\operatorname{tr}A+A^2\operatorname{tr}(AB)+A(\operatorname{tr}(A^2B)-\operatorname{tr}A\operatorname{tr}(AB))- \\ - B\det A + E\det A\operatorname{tr}B. \quad (5)$$

Вернемся к тождеству (4). Умножая обе части тождества на A и снова учитывая теорему Гамильтона–Кэйли, приходим к соотношению

$$A^2BA^2 = \tfrac{1}{2}ABA\left[(\operatorname{tr}A)^2-\operatorname{tr}A^2\right]-(AB+BA)\det A+A^2\operatorname{tr}(A^2B)+ \\ + A\left\{\det A\operatorname{tr}B-\tfrac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}A)^2-\operatorname{tr}A^2\right]\operatorname{tr}(AB)\right\}+E\det A\operatorname{tr}(AB).$$

Некоторые разложения

Будем выражать мономы через комбинации правой части (4). Определим матричный полином $G(A,\ B)$ соотношением (это — правая часть (4))

$$G(A,\ B) = A^2 \operatorname{tr} B + (AB + BA) \operatorname{tr} A + A(\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B) +$$
$$+ \frac{1}{2} B[\operatorname{tr} A^2 - (\operatorname{tr} A)^2] + E\{\operatorname{tr}(A^2 B) - \operatorname{tr} A \operatorname{tr}(AB) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} B[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2]\}.$$

Из (4) имеем

$$ABA + A^2 B + BA^2 = G(A,\ B). \qquad (6)$$

Некоторые разложения (продолжение)

Пусть X — произвольная 3×3 матрица. Для нее

$$A^2XB^2 = A(AXB^2).$$

В (6) заменим A на B, а B на AX, в полученном равенстве выразим AXB^2. Тогда

$$A^2XB^2 = -(AB^2A)X - (ABA)XB + AG(B, AX). \tag{7}$$

В (6) заменим B на B^2 и используем полученное соотношение для того, чтобы заменить в (7) моном AB^2A. Также мы используем (6) для замены ABA в (7). Тогда

$$A^2XB^2 = A^2B^2X + B^2A^2X + A^2(BXB) + B(A^2X)B- \\ - G(A, B^2)X - G(A, B)XB + AG(B, AX).$$

Некоторые разложения (продолжение)

Аналогично, используя (6), в полученном равенстве можно заменить BXB и $B(A^2X)B$. Мы таким образом получим выражение

$$A^2XB^2 = A^2B^2X + B^2A^2X - A^2[B^2X - XB^2 - G(B,\ X)] - \\ - [B^2A^2X + A^2XB^2 - G(B,\ A^2X)] - G(A,\ B^2)X - \\ - G(A,\ B)XB + AG(B,\ AX).$$

Полученное выражение можно переписать как

$$3A^2XB^2 = A^2G(B,\ X) - G(A,\ B)XB + AG(B,\ AX) - \\ - G(A,\ B^2)X + G(B,\ A^2X).$$

Некоторые разложения (продолжение)

Пусть A, B, C, X, Y — 3×3 матрицы. Аналогичным путем мы можем получить выражения для монома $A^2XB^2YC^2$. Приходим к соотношению

$$
\begin{aligned}
3A^2XB^2YC^2 &= A^2XB^2G(C,\ Y) + G(A,\ X)B^2YC^2 + \\
&+ A^2XBG(C,\ BY) + G(A,\ XB)BYC^2 + AXG(B,\ AC)YC + \\
&+ A^2XG(C,\ B^2Y) + G(A,\ XB^2)YC^2 + AXG(B,\ AC^2)Y + \\
&+ XG(B,\ A^2C)YC + XG(B,\ A^2C^2)Y - G(A,\ XB^2)G(C,\ Y) - \\
&- G(A,\ X)G(C,\ B^2Y) - G(A,\ XB)G(C,\ BY).
\end{aligned}
$$

Некоторые разложения (продолжение)

Обозначим правую часть равенства (5) через $H(A,\ B)$. То есть,

$$H(A,\ B) = ABA\operatorname{tr}A + A^2\operatorname{tr}(AB) + A(\operatorname{tr}(A^2B) - \operatorname{tr}A\operatorname{tr}(AB)) - \\ - B\det A + E\det A\operatorname{tr}B. \quad (8)$$

Тогда имеем тождество

$$ABA^2 + A^2BA = H(A,\ B). \quad (9)$$

Некоторые разложения (продолжение)

Заменяя в (9) B на B^2 и умножая полученное соотношение на Y справа, приходим к выражению

$$AB^2A^2Y + A^2B^2AY = H(A,\ B^2)Y.$$

Используя полученное соотношение, и преобразования, аналогичные предыдущим, получим, например, что

$$2AB^2A^2Y = H(A,\ B^2)Y + \frac{1}{3}[B^2G(A,\ AY) - G(B,\ A)AYA+ \\ + BG(A,\ BAY) - G(B,\ A^2)AY + AG(B,\ A)YA - ABG(A,\ BY)+ \\ +AG(B,\ A^2)Y - AG(A,\ B^2Y) - 2G(A,\ B^2AY) + 2AB^2G(A,\ Y)].$$

Целостный базис

Если в мономе (2) какая-либо из степеней α_k больше двух, то с помощью теоремы Гамильтона–Кэйли мы можем преобразовать этот моном так, что он превратится в полином, в котором ни один из сомножителей любого его монома не имеет степень, большую чем 2. Отсюда следует

Лемма 1. Любой матричный одночлен вида (2) от R матриц A_k размерности 3×3 может быть представлен как матричный полином, одночлены которого имеют такое же количество сомножителей и либо вырождаются в матрицу E, либо являются произведениями всех или нескольких сомножителей A_k, A_k^2, где $k = 1, \ldots, R$, при этом суммарная степень каждого из A_k не превосходит ту, с которой он входил в (2).

Следующая лемма является следствием предыдущей и формулы (5).
Лемма 2. Любой матричный полином $P[A_1, \ldots, A_R]$ от R матриц A_k размерности 3×3 может быть представлен как матричный полином $Q[A_1, \ldots, A_R]$, наибольшая длина среди входящих в него одночленов и степень которого не превосходят соответствующие параметры исходного многочлена. В каждом одночлене любая входящая в него матрица имеет суммарную степень, не превосходящую суммарную степень той же матрицы, входящей в $P[A_1, \ldots, A_R]$. При этом, одночлены не содержат двух одинаковых множителей и либо вырождаются в матрицу E, либо являются произведениями всех или нескольких сомножителей A_k, A_k^2, где $k = 1, \ldots, R$.

Целостный базис

Основная теорема

Используя приведенные леммы и рассуждения о виде матричных мономов, Rivlin и Spencer показали, что справедлива следующая

Теорема. Любой матричный полином $P[A_1, \ldots, A_R]$ от R матриц A_k размерности 3×3 может быть представлен как матричный полином, наибольшая длина среди входящих в него одночленов и степень которого не превосходят соответствующие параметры исходного многочлена. При этом,
a) каждый моном это либо матрица E, либо произведение всех или нескольких сомножителей A_k и, максимум, двух сомножителей A_k^2 где $k = 1, \ldots, R$;
b) моном не содержит одинаковых сомножителей;
c) в каждом одночлене любая входящая в него матрица имеет суммарную степень, не превосходящую суммарную степень той же матрицы, входящей в $P[A_1, \ldots, A_R]$;

Целостный базис

Основная теорема (продолжение)

d) если моном содержит два сомножителя A_k^2, то они стоят рядом;
e) если моном содержит A_k^2, A_l^2, то он не содержит A_k, A_l, за исключением ситуации, когда он имеет вид $A_k A_l^2 A_k^2$;
e) A_k предшествует A_k^2 в любом мономе, содержащем A_k и A_l^2 одновременно.

Случай симметричного полинома

Если $P[A_1, \ldots, A_R]$ — симметричен, то $P = \frac{1}{2}(P + P^T)$. Из этого вытекает

Следствие. Любой симметричный матричный полином $P[A_1, \ldots, A_R]$ от симметричных матриц 3×3 можно представить как симметричный матричный полином с наибольшей длиной среди входящих в него одночленов $\leqslant R + 1$ и степенью $\leqslant R + 2$.

1. Модель Треолара материал:

$$W = C_1(I_1 - 3), \quad C_1 > 0,$$

2. Потенциал Муни:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad C_1 > 0, \quad C_2 \geq 0.$$

3. Модель Ривлина–Сандерса:

$$W = C_1(I_1 - 3) + F(I_2 - 3).$$

4. Клоснер и Сегал предположили следующую аппроксимацию для $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_2 - 3)^2 + C_4(I_2 - 3)^3.$$

5. Модель Бондермана (для резин, наполненных серой):

$$W = C_1(I_1 - 3) + B_1(I_1 - 3)^2 + B_2(I_1 - 3)^3 + C_2(I_2 - 3).$$

6. Модель Харта–Смита:

$$W = C\left[\int \exp^{k_1(I_1-3)^2} dI_1 + k_2 \ln\frac{I_2}{3}\right].$$

7. Модель Александера:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3 \ln \frac{I_2 - 3 + k}{k}$$

и

$$W = C_1 + \int \exp^{k_1(I_1-3)^2} dI_1 + C_2(I_2 - 3) + C_3 \ln \frac{I_2 - 3 + k_2}{k_2},$$

8. Модель Хатчинсона, Беккера и Лэндела (силиконовый каучук):

$$W = C_1(I_1-3)+B_1(I_1-3)^2+B_2(1-\exp^{k_1(I_2-3)})+B_3(1-\exp^{k_2(I_2-3)}).$$

9. Модель Огдена (функция энергии от собственных значений λ_1, λ_2, λ_3):

$$W = \sum_{n=1}^{N} \frac{2\mu}{\alpha_n}(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3).$$

10. Модель Черных–Шубиной:

$$W = \mu[(1+\beta)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-3)+(1-\beta)(\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}+\lambda_3^{-1}-3)].$$

11. Модель Бартенева–Хазановича:

$$W = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3).$$