С. Лычев

# НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## КЛАССИЧЕСКАЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

27 ноября 2023 г.

Обо всех найденных опечатках и ошибках просьба сообщать Константину Койфману на почту koifman.bmstu@yandex.ru

Файл периодически обновляется, следите за обновлениями!

# Оглавление

# Глава 1.

# Классическая нелинейная теория упругости

## 1.1. Формы и деформации

В рамках классической механики континуума физическое пространство формализуется как трехмерное аффинно-евклидово пространство $\mathscr{E}$ с трансляционным векторным пространством $\mathscr{V}$ и скалярным произведением $(\cdot)$. Тела моделируются в виде подмножеств $\mathscr{E}$, наделенных специальными свойствами. Как правило, предполагается, что эти подмножества открыты в $\mathscr{E}$ и обладают регулярной границей[1] (в смысле О. Келлога [1]). В настоящей главе такие подмножества называются **формами**. Рассмотрим их определение более детально.

**Формы.** Поскольку пространство $\mathscr{E}$ предполагается евклидовым, на нем можно ввести функцию расстояния $d : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ в соответствии с равенством

$$d(x, y) := \sqrt{\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{xy}}.$$

Там самым определена структура метрического пространства $(\mathscr{E}, d)$, что позволяет, в частности, рассматривать открытые множества.

Регулярную границу таких множеств определим индуктивно, начиная с одномерных множеств [1]:

**1)** Регулярной дугой назовем множество $\mathfrak{a} \subset \mathscr{E}$, которое в некоторой

[1] Требование регулярности накладывается в силу того, что в дальнейшем используется теорема Стокса для получения уравнений баланса в дифференциальной форме.

системе прямоугольных координат допускает представление

$$\mathfrak{a} = \{x \in \mathscr{E} \mid x^2 = f(x^1),\ x^3 = g(x^1),\ x^1 \in [a,\ b]\},$$

где $a < b$, а $f,\ g \in C^\infty([a,\ b])$.

**2)** Регулярная кривая — это множество $\mathfrak{c} \subset \mathscr{E}$, состоящее из конечного числа упорядоченных регулярных дуг. Эти дуги примыкают друг к другу в том смысле, что конечная точка каждой дуги (отличной от последней) является начальной точкой следующей за ней дуги. Дуги не могут иметь иных общих точек, за исключением того случая, когда конечная точка последней дуги является начальной точкой первой дуги (тогда $\mathfrak{c}$ есть замкнутая регулярная кривая).

**3)** Регулярным элементом поверхности назовем непустое множество $\mathfrak{s}$, которое при некотором выборе прямоугольных координат допускает представление

$$\mathfrak{s} = \{x \in \mathscr{E} \mid x^3 = f(x^1,\ x^2),\ (x^1,\ x^2) \in K\},$$

где $K \subset \mathbb{R}^2$ — компактное связное множество, граница которого, $\operatorname{Fr} K$, — замкнутая регулярная кривая, а $f \in C^\infty(K;\ \mathbb{R})$.

**4)** Объединение конечного числа регулярных элементов поверхности представляет регулярную поверхность, если:

**(a)** пересечение любых двух элементов поверхности либо пусто, либо является точкой — вершиной для обоих, или одной регулярной кривой — общим ребром;

**(b)** пересечение любой совокупности трех и более элементов поверхности состоит, по большей части, из вершин;

**(c)** любые два элемента поверхности являются первым и последним в цепочке элементов поверхности, в которой каждый элемент имеет общее ребро с последующим;

**(d)** все элементы, имеющие общую вершину, образуют последовательность, в которой каждый элемент имеет ребро, оканчивающееся на этой вершине, общее с последующим элементом; последний элемент последовательности может иметь, или же не иметь, общее ребро с первым.

Термин «ребро» употребляется здесь для обозначения одной из (конечного числа) регулярных дуг, составляющих границу регулярного поверхностного элемента, в то время как «вершина» есть точка, в которой два ребра соединяются. Если все ребра регулярной поверхности принадлежат каким-то двум различным составляющим ее элементам поверхности, то исходную поверхность назовем замкнутой.

**5)** Непустое множество $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}$ имеет регулярную границу, если $\mathrm{Fr}\,\mathscr{S}$ есть замкнутая регулярная поверхность.

Все готово для следующего определения:

**Определение 1.1.** ***Формой*** *называется непустое открытое множество $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}$, граница которого, $\mathrm{Fr}\,\mathscr{S}$, является регулярной по Келлогу.*

Привилегированную форму $\mathscr{B}$ назовем **отсчетной формой**. Ее элементы используются в качестве меток частиц для идентификации деформации тела. Любую другую форму $\mathscr{S}$ будем в таком случае называть **актуальной формой**. В соответствии с классическими обозначениями (см., например, в [**?** ]), точки $\mathscr{B}$ обозначаются прописными латинскими символами $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, …, а точки $\mathscr{S}$ — строчными латинскими символами $\mathscr{x}$, $\mathscr{y}$, …

**Деформация.** Деформацией назовем отображение

$$\gamma : \mathscr{B} \to \mathscr{S}, \quad \gamma : \mathscr{X} \mapsto \mathscr{x},$$

удовлетворяющее следующим постулатам [2]:

($\gamma_1$) **Постулат непроницаемости.** Две частицы не могут занимать одно и то же место в одно и то же время.

($\gamma_2$) Любая точка из $\mathscr{S}$ есть место для некоторой точки из $\mathscr{B}$.

($\gamma_3$) **Аксиома непрерывности.** Отображение $\gamma$ непрерывно дифференцируема столько раз, сколько требуется.

Таким образом, в математических терминах, эти постулаты означают, что $\gamma$ есть инъективное и сюръективное $C^\infty$-отображение.

До сих пор форма $\mathscr{B}$ рассматривалась в качестве недеформированной, а $\mathscr{S}$ — как деформированная. Однако эту точку зрения можно обратить, считая, напротив, форму $\mathscr{S}$ отсчетной, а $\mathscr{B}$ — актуальной. Поскольку обе точки зрения равноправны, отображение $\gamma^{-1} : \mathscr{S} \to \mathscr{B}$ также должно быть гладким. Таким образом, в итоге необходимо предположить, что $\gamma$ есть $C^\infty$-диффеоморфизм. Это предположение используется далее. Учитывая сказанное, приходим к следующему определению:

**Определение 1.2.** ***Деформация*** *есть* $C^\infty$*-диффеоморфизм* $\gamma : \mathscr{B} \to \mathscr{S}$. *Обратный диффеоморфизм* $\gamma^{-1} : \mathscr{S} \to \mathscr{B}$ *называется* ***обратной деформацией****.*

## 1.2. Координаты на формах и базисы

Поскольку формы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{S}$ являются открытыми подмножествами $\mathscr{E}$, то они, в частности, являются открытыми трехмерными подмногообразиями $\mathscr{E}$. Следовательно, их точки можно параметризовать. Помимо этого, скалярное произведение $(\cdot)$ индуцирует метрические тензоры $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{g}$ на $\mathscr{B}$ и $\mathscr{S}$ соответственно.

**Картрирование прямоугольными координатами.** Обозначим через $\mathscr{D}_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^3$ и $\mathscr{D}_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^3$ ограничения декартова картрирования $\mathscr{D} : \mathscr{E} \to \mathbb{R}^3$ на формы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{S}$. Таким образом, $\mathscr{A}_{\mathscr{B};\,d} = \{(\mathscr{B},\, \mathscr{D}_{\mathscr{B}})\}$ и $\mathscr{A}_{\mathscr{S};\,d} = \{(\mathscr{S},\, \mathscr{D}_{\mathscr{S}})\}$ есть атласы. Координатное представление деформации $\gamma$ определяется как композиция

$$\gamma_d = \mathscr{D}_{\mathscr{S}} \circ \gamma \circ \mathscr{D}_{\mathscr{B}}^{-1} : \mathscr{D} \circ \mathscr{B} \to \mathbb{R}^3, \tag{1.1.21}$$

где $\mathscr{D} \circ \mathscr{B}$ есть открытое подмножество $\mathbb{R}^3$. Соотношение между отображениями $\gamma$ и $\gamma_d$ иллюстрируется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} & \mathbb{R}^3 \\
\mathscr{S} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\mathscr{D}_{\mathscr{S}}"] & \mathscr{D} \circ \mathscr{S} \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
\mathscr{B} \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\mathscr{D}_{\mathscr{B}}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathscr{D} \circ \mathscr{B} \arrow[u, "\gamma_d"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
\mathscr{E} & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

В дальнейшем тройка $(X^i)_{i=1}^3$ обозначает глобальные координаты на форме $\mathscr{B}$, индуцированные картрированием $\mathscr{D}_{\mathscr{B}}$, а тройка $(x^i)_{i=1}^3$ обозначает глобальные координаты, индуцированные на форму $\mathscr{S}$ отображением $\mathscr{D}_{\mathscr{S}}$.

**Картрирование криволинейными координатам.** Предположим, что в пространстве $\mathscr{E}$ заданы криволинейные координаты, ассоциированные с отсчетной и актуальной формами[2]. Эти координаты порождаются атласами $\mathscr{A}_1 = \{(U_\alpha,\, \sigma_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ и $\mathscr{A}_2 = \{(V_\beta,\, \psi_\beta)\}_{\beta\in J}$ на $\mathscr{E}$, сужение которых на формы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{S}$ приводит к атласам $\mathscr{A}_{\mathscr{B};\,c} = \{(\mathscr{B}\cap U_\alpha,\, \widetilde{\sigma}_\alpha)\}_{\alpha\in I_{\mathscr{B}}}$ и $\mathscr{A}_{\mathscr{S};\,c} = \{(\mathscr{S}\cap V_\beta,\, \widetilde{\psi}_\beta)\}_{\beta\in J_{\mathscr{S}}}$. Здесь $\widetilde{\sigma}_\alpha$ и $\widetilde{\psi}_\beta$ — ограничения координатных отображений $\sigma_\alpha$ и $\psi_\beta$. Рассмотрим представление деформации $\gamma$ в координатах, порождаемых последними атласами. Пусть $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$.

Выберем $\alpha \in I_{\mathscr{B}}$, $\beta \in J_{\mathscr{S}}$, такие, что $\mathscr{X} \in U_\alpha$ и $\gamma(\mathscr{X}) \in V_\beta$. Обозначая $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap \gamma^{-1}(V_\beta)$, приходим к желаемому координатному представлению:

$$\gamma_c = \widetilde{\psi}_\beta \circ \gamma \circ \widetilde{\sigma}_\alpha^{-1} :\ \mathbb{R}^3 \supset \sigma_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \mathbb{R}^3. \tag{1.1.22}$$

Соотношение между $\gamma$ и $\gamma_c$ показано на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} & \mathbb{R}^3 \\
\gamma(U_{\alpha\beta}) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\widetilde{\psi}_\beta"] & \psi_\beta \circ \gamma(U_{\alpha\beta}) \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
U_{\alpha\beta} \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_\alpha"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \sigma_\alpha(U_{\alpha\beta}) \arrow[u, "\gamma_c"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
\mathscr{E} & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

**Локальные базисы и метрики.** Пусть тройка $(Q^i)_{i=1}^3$ соответствует криволинейным координатам, индуцированным на форму $\mathscr{B}$ отображением $\widetilde{\sigma}_\alpha$, а тройка $(q^i)_{i=1}^3$ — криволинейным координатам, индуцированным на форму $\mathscr{S}$. В соответствии с общими определениями можно записать равенства

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\partial X^k}{\partial Q^i}\boldsymbol{i}_k, \quad E^i = \frac{\partial Q^i}{\partial X^k} i^k, \tag{1.1.23}$$

[2] Например, если $\mathscr{B}$ — открытый шар, а $\mathscr{S}$ — открытый куб, то можно ввести сферические и прямоугольные координаты на $\mathscr{E}$.

для локального базиса $(\boldsymbol{E}_i)_{i=1}^3$ и дуального базиса $(E^i)_{i=1}^3$, ассоциированных с $\mathscr{B}$. Аналогично, имеем равенства

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\boldsymbol{i}_k, \quad e^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^k} i^k, \tag{1.1.24}$$

для локального базиса $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^3$ и дуального базиса $(e^i)_{i=1}^3$ на $\mathscr{S}$.

Метрический тензор $\boldsymbol{G}$ и ассоциированный с ним, $\overset{*}{\boldsymbol{G}}$, имеют разложения

$$\boldsymbol{G} = G_{ij} E^i \otimes E^j, \quad G_{ij} = \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j,$$
$$\overset{*}{\boldsymbol{G}} = G^{ij} \boldsymbol{E}_i \otimes \boldsymbol{E}_j,$$

в то время как метрический тензор $\boldsymbol{g}$ и ассоциированный с ним, $\overset{*}{\boldsymbol{g}}$, представлены равенствами

$$\boldsymbol{g} = g_{ij} e^i \otimes e^j, \quad g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j,$$
$$\overset{*}{\boldsymbol{g}} = g^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j.$$

Здесь $[G^{ij}] = [G_{ij}]^{-1}$ и $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$.

**Связь между локальными базисами.** Поскольку поля локальных базисов $(\boldsymbol{E}_i)$ и $(\boldsymbol{e}_i)$ в (1.1.23) и (1.1.24) принимают значения в одном и том же пространстве $\mathscr{V}$, то существует гладкое поле $[\Omega^i_j] : \mathscr{B} \to \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$ матриц перехода:

$$\boldsymbol{E}_i = \Omega^j_i \boldsymbol{e}_j.$$

Используя определения $(\boldsymbol{E}_i)$ и $(\boldsymbol{e}_i)$, можно получить явную формулу для $[\Omega^i_j]$. Действительно, поскольку

$$\frac{\partial X^k}{\partial Q^i} = \Omega^j_i \frac{\partial x^k}{\partial q^j}, \quad k = 1,\ 2,\ 3,$$

то

$$\Omega^j_i = \frac{\partial q^j}{\partial x^k} \frac{\partial X^k}{\partial Q^i}.$$

Для полей дуальных базисов $(E^i)$ и $(e^i)$ в (1.1.23) и (1.1.24) можно записать, что, аналогично,

$$E^i = \mho^i_j e^j,$$

где $[\mho^i_j] : \mathscr{B} \to \mathrm{GL}(3;\ \mathbb{R})$ — гладкое поле матриц. Из соотношения $\langle E^i,\ \boldsymbol{E}_j \rangle = \delta^i_j$ получаем в итоге, что $[\mho^i_j] = [\Omega^i_j]^{-1}$.

**Связь между представлениями $\gamma$.** Отображения (1.1.21) и (1.1.22) связаны между собой как

$$\gamma_d = \mathscr{D}_{\mathcal{S}} \circ \widetilde{\psi}_\beta^{-1} \circ \gamma_c \circ \widetilde{\sigma}_\alpha \circ \mathscr{D}_{\mathscr{B}}^{-1}. \qquad (1.1.25)$$

Здесь

$$\mathscr{D}_{\mathscr{B}} \circ \widetilde{\sigma}_\alpha^{-1} : \ (Q^i) \mapsto (X^i),$$
$$\mathscr{D}_{\mathcal{S}} \circ \widetilde{\psi}_\beta^{-1} : \ (q^i) \mapsto (x^i),$$

— функции замены координат.

**Частный случай.** Пусть $\mathscr{A}_{\mathscr{B}} = \{(U_\alpha,\ \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I_{\mathscr{B}}}$ — гладкий атлас на $\mathscr{B}$. Деформация $\gamma$ позволяет определить по этому атласу такой атлас формы $\mathcal{S}$, что точки $\boldsymbol{x} = \gamma(\mathscr{X})$ имеют те же координаты, что и точки $\mathscr{X}$. Действительно, достаточно положить $\mathscr{A}_{\mathcal{S}} = \{(\gamma(U_\alpha),\ \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I_{\mathscr{B}}}$. Здесь $\psi_\alpha = \sigma_\alpha \circ \gamma^{-1}$. Координатное представление $\gamma_c$ относительно таких атласов становится всего лишь тождественным отображением:

$$\gamma_c = \psi_\alpha \circ \gamma \circ \sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha^{-1} = \mathrm{Id}.$$

**Два описания.** Лагранжево (отсчетное) и эйлерово (пространственное) описания являются стандартными в классической механике континуума. В случае отсчетного описания рассматривается поведение каждой частицы $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$. Тогда используются отображения, заданные на $\mathscr{B}$. В частности, актуальная позиция точки $\mathscr{X}$ выражается как значение функции $\mathscr{X}$, а именно, деформации $\gamma$. Напротив, в случае пространственного описания точки из $\mathcal{S}$ рассматриваются в качестве независимых переменных; тогда поля задаются на $\mathcal{S}$. В частности, обратная деформация $\gamma^{-1}$ может быть использована для представления точки отсчетной формы как функции точки актуальной формы.

# 1.3. Градиент деформации и меры деформации

## 1.3.1. Градиент деформации

**Градиент деформации как главная линейная часть.** Рассмотрим произвольную деформацию $\gamma : \ \mathscr{B} \to \mathcal{S}$ из заданной отсчетной формы $\mathscr{B}$ в некоторую актуальную форму $\mathcal{S}$.

**Определение 1.3.** ***Градиентом деформации*** $\gamma$ ***в точке*** $\mathscr{X}_0 \in \mathscr{B}$ *называется ее полная производная* $D_{\mathscr{X}_0}\gamma \in \mathrm{End}(\mathscr{V})$ *в этой точке.*

Если ясно, о какой деформации идет речь, то используется обозначение

$$\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}_0} := D_{\mathscr{X}_0}\gamma.$$

**Замечание 1.1.** *В классических руководствах по механике континуума (см., например, [3–5]) градиент деформации часто обозначается символом* $\nabla\gamma$*. В настоящей работе такое обозначение не используется в силу возможной коллизии с обозначением ковариантной производной.*

Таким образом, в соответствии с определением, $\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}_0}$ является линейным отображением $\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}_0} : \mathscr{V} \ni \boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}_0}[\boldsymbol{h}] \in \mathscr{V}$ и наряду с этим справедливо равенство

$$\gamma(\mathscr{X}_0 + \boldsymbol{h}) = \gamma(\mathscr{X}_0) + \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}_0}[\boldsymbol{h}] + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}, \tag{1.1.31}$$

где $\boldsymbol{h} \in \mathscr{V}$ — произвольный вектор, для которого $\mathscr{X}_0 + \boldsymbol{h} \in \mathscr{B}$. Соотношение (1.1.31) означает, что аффинная функция

$$\mathscr{Y} \mapsto \gamma(\mathscr{X}_0) + \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}_0}[\overrightarrow{\mathscr{X}_0\mathscr{Y}}]$$

является главной частью деформации $\gamma$ в окрестности точки $\mathscr{X}_0$.

Осуществляя линеаризацию деформации $\gamma$ в окрестности каждой точки формы $\mathscr{B}$, приходим к полю линейных отображений

$$\boldsymbol{F} : \mathscr{B} \to \mathrm{End}(\mathscr{V}), \quad \mathscr{X} \mapsto \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}},$$

которое будем называть **градиентом деформации**.

С физической точки зрения возможна следующая интерпретация градиента деформации. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — произвольные точки $\mathscr{B}$. Когда точка $\mathscr{Y}$ бесконечно близка к $\mathscr{X}$, вектор $\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}$ можно рассматривать как инфинитезимальное материальное волокно в отсчетном состоянии. После деформации оно преобразуется в волокно $\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})}$. Тогда равенство (1.1.31) означает, что деформированное волокно $\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})}$, с точностью до $\boldsymbol{o}(\|\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\|)$, есть значение градиента деформации $\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}]$ на исходном волокне. Следовательно, градиент деформации определяет преобразование инфинитезимальных материальных волокон из отсчетного состояния в актуальное. По этой причине, в классических курсах по механике континуума иногда используется не вполне строгая запись

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X},$$

означающая преобразование отсчетного инфинитезимального волокна $d\boldsymbol{X}$ в актуальное состояние, представленное вектором $d\boldsymbol{x}$.

**Замечание 1.2.** *В общем случае, предполагая отображение $\gamma$ гладким вплоть до порядка $r$, можно использовать разложение по формуле Тейлора:*

$$\gamma(\mathscr{X}_0+\boldsymbol{h}) = \gamma(\mathscr{X}_0) + D_{\mathscr{X}_0}\gamma[\boldsymbol{h}] + \dots + \frac{D^{(r)}_{\mathscr{X}_0}\gamma[\boldsymbol{h}^r]}{r!} + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|^r) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0},$$

*где $k$-линейное отображение $D^{(k)}_{\mathscr{X}_0}\gamma \in \mathrm{Lin}_k(\mathscr{V}, \dots, \mathscr{V}; \mathscr{V})$ является полной производной $k$-го порядка ($k = 1, \dots, r$) от $\gamma$ в точке $\mathscr{X}_0$, а*

$$D^{(k)}_{\mathscr{X}_0}\gamma[\boldsymbol{h}^k] := D^{(k)}_{\mathscr{X}_0}\gamma[\boldsymbol{h}, \dots, \boldsymbol{h}].$$

*Приходим к градиентам деформации высшего порядка:*

$$\gamma(\mathscr{X}_0+\boldsymbol{h}) = \gamma(\mathscr{X}_0) + \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}_0}[\boldsymbol{h}] + \dots + \frac{\boldsymbol{F}^{(r)}_{\mathscr{X}_0}[\boldsymbol{h}^r]}{r!} + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|^r) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0},$$

*где $\boldsymbol{F}^{(k)}_{\mathscr{X}_0} := D^{(k)}_{\mathscr{X}_0}\gamma$ для всех $k = 1, \dots, r$.*

*Возвращаясь к материальным волокнам, можно теперь сказать, что деформированное волокно $\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})}$, с точностью до $\boldsymbol{o}(\|\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\|^r)$, определяется выражением*

$$\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}] + \dots + \frac{\boldsymbol{F}^{(r)}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}, \dots, \overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}]}{r!}.$$

*Выбор $r$ определяет точность аппроксимации и соответствующую теорию.*

**Случай прямоугольных координат.** В прямоугольном репере $(o, (\boldsymbol{i}_k)_{k=1}^3)$ деформация $\gamma$ имеет представление $\gamma(\mathscr{X}) = o + \gamma^s_d \circ \mathscr{D}(\mathscr{X})\boldsymbol{i}_s$ относительно любой точки $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$, где

$$\gamma_d : \mathscr{D}\circ\mathscr{B} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_d : (X^1, X^2, X^3) \mapsto (x^1, x^2, x^3),$$

есть отображение (1.1.21). В таком случае градиент деформации имеет следующее диадное разложение в точке $\mathscr{X}$:

$$\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}} = \left.\frac{\partial x^s}{\partial X^k}\right|_{\mathscr{X}} \boldsymbol{i}_s \otimes i^k. \tag{1.1.32}$$

В нем числа

$$\frac{\partial x^s}{\partial X^k}\bigg|_{\mathscr{X}} := \lim_{\mathscr{B}_{\mathscr{X};\,\boldsymbol{i}_k}\ni t\to 0} \frac{\gamma_d^s(\mathscr{X}+t\boldsymbol{i}_k)-\gamma_d^s(\mathscr{X})}{t},$$

являются частными производными $\gamma_d$. Символ $\mathscr{B}_{\mathscr{X};\,\boldsymbol{i}_k}$ обозначает множество

$$\mathscr{B}_{\mathscr{X};\,\boldsymbol{i}_k} = \{t\in\mathbb{R} \mid t\neq 0,\ \mathscr{X}+t\boldsymbol{i}_k\in\mathscr{B}\},$$

являющееся проколотой окрестностью точки $t = 0$. Альтернативно, (1.1.32) можно записать в виде

$$\boldsymbol{F} = F_k^s \boldsymbol{i}_s \otimes i^k, \quad \text{где} \quad F_k^s = \frac{\partial x^s}{\partial X^k}.$$

В дальнейшем мы будем иногда представлять компоненты тензоров второго ранга элементами прямоугольных матриц. Такие матрицы мы будем обозначать, заключая символ тензора в квадратные скобки. В частности, $[F_j^i]$ обозначает матрицу компонент $\boldsymbol{F}$. Чтобы установить соответствие между индексируемыми компонентами и элементами матрицы, принимается соглашение: первый индекс определяет строку, а второй — столбец матрицы. Например,

$$[F_j^i] = \begin{pmatrix} F_1^1 & F_2^1 & F_3^1 \\ F_1^2 & F_2^2 & F_3^2 \\ F_1^3 & F_2^3 & F_3^3 \end{pmatrix}. \tag{1.1.33}$$

Следует отметить, что соответствие между тензорами второго ранга и их матрицами не является взаимно однозначным, поскольку переход от тензоров к матрицам приводит к потере информации о типе тензора.

**Случай криволинейных координат.** Выведем представление градиента деформации в криволинейных координатах, используя для этой цели результаты раздела 1.2. Пусть $(Q^i)_{i=1}^3$ — криволинейные координаты, ассоциированные с отсчетной формой $\mathscr{B}$, а $(q^i)_{i=1}^3$ — криволинейные координаты, связанные с актуальной формой $\mathscr{S}$. Используя соотношение (1.1.25) между представлением $\gamma_d$ (1.1.21) деформации $\gamma$ в прямоугольных координатах и представлением $\gamma_c$ (1.1.22) той же деформации $\gamma$ в криволинейных координатах, цепное правило дифференцирования

$$\frac{\partial x^s}{\partial X^k} = \frac{\partial x^s}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial X^k},$$

и соотношения (1.1.23), (1.1.24), получим из (1.1.32), что справедливо представление

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{X}} = \left.\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathcal{X})} \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(\mathcal{X})} \otimes E^j|_{\mathcal{X}}. \tag{1.1.34}$$

Здесь $\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}$ — частные производные отображения $\gamma_c\,:\;(Q^1,\,Q^2,\,Q^3) \mapsto (q^1,\,q^2,\,q^3)$.

Если $\gamma_c = \mathrm{Id}$, то $\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = \delta^i_j$ и разложение (1.1.34) заменяется на более простое:

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{X}} = \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(\mathcal{X})} \otimes E^i|_{\mathcal{X}}.$$

**Определитель градиента деформации.** Для определителя $\boldsymbol{F}$ принимается обозначение $J$, т.е., полагаем

$$J := \det \boldsymbol{F}. \tag{1.1.35}$$

В терминах поля матриц (1.1.33) имеем равенство $J = \det\,[F^i_j]$, что дает явную формулу вычисления определителя. Поскольку отображение $\gamma$ инъективно, справедливо свойство:

$$\forall \mathcal{X} \in \mathscr{B}:\; J_{\mathcal{X}} \neq 0.$$

Иными словами, градиент деформации $\boldsymbol{F}$ может быть рассмотрен как поле $\boldsymbol{F} : \mathscr{B} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ линейных автоморфизмов.

**Замечание 1.3.** *В классических курсах линейной алгебры определитель линейного преобразования вводится через определитель его матрицы в любом базисе. Далее показывается, что это определение не зависит от выбора базиса. В трехмерном случае имеет место следующее определение в инвариантной форме. Если $\mathcal{X} \in \mathscr{B}$ — произвольная точка, то*

$$J_{\mathcal{X}} = \frac{(\boldsymbol{F}_{\mathcal{X}}[\boldsymbol{u}],\, \boldsymbol{F}_{\mathcal{X}}[\boldsymbol{v}],\, \boldsymbol{F}_{\mathcal{X}}[\boldsymbol{w}])}{(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})}, \tag{1.1.36}$$

*для любого линейно независимого семейства векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. Символ $(\cdot,\,\cdot,\,\cdot)$ обозначает смешанное произведение в $\mathscr{V}$.*

Далее будем полагать, что $\gamma$ удовлетворяет следующему свойству:

($\gamma_4$) **Сохранение ориентации.** Любая упорядоченная тройка некомпланарных материальных волокон в $\mathscr{B}$ под действием $\boldsymbol{F}_{\mathcal{X}}$ переходит в тройку некомпланарных волокон с той же ориентацией.

Формально, с учетом (1.1.36), имеем

$$\forall \mathcal{X} \in \mathscr{B}:\; J_{\mathcal{X}} > 0.$$

**Обратный градиент деформации.** Как уже отмечалось, наряду с прямой деформацией $\gamma : \mathscr{B} \to \mathscr{S}$ можно рассматривать обратную деформацию $\gamma^{-1} : \ \mathscr{S} \to \mathscr{B}$. В соответствии с теоремой о дифференцировании обратного отображения, градиент $D_{\boldsymbol{x}}(\gamma^{-1})$ последней в точке $\boldsymbol{x} \in \mathscr{S}$ совпадает с обратным отображением $\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}^{-1}$ к градиенту деформации в точке $\mathscr{X} = \gamma^{-1}(\boldsymbol{x})$. В прямоугольном репере $(o, \ (\boldsymbol{i}_s)_{s=1}^3)$ выполняется следующее разложение :

$$\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}^{-1} = \left.\frac{\partial X^m}{\partial x^n}\right|_{\gamma(\mathscr{X})} \boldsymbol{i}_m \otimes i^n.$$

**Градиент перемещений.** С градиентом деформации тесно связано поле иного рода, не имеющее непосредственного аналога в случае гладких многообразий. Действительно, для любой точки $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$ **вектор перемещений** есть вектор $\boldsymbol{u}(\mathscr{X}) := \gamma(\mathscr{X}) - \mathscr{X}$. Таким образом, приходим к гладкому отображению

$$\boldsymbol{u} : \ \mathscr{B} \to \mathscr{V}, \quad \boldsymbol{u} : \ \mathscr{X} \mapsto \gamma(\mathscr{X}) - \mathscr{X},$$

называемому **полем перемещений**.

Градиент поля перемещений есть соответствие

$$\boldsymbol{\beta} = D\boldsymbol{u} : \ \mathscr{B} \to \mathrm{End}(\mathscr{V}),$$

значения которого определяют линеаризации отображения $\boldsymbol{u}$, т.е., в точке $\mathscr{X}_0 \in \mathscr{B}$,

$$\boldsymbol{u}(\mathscr{X}_0 + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{u}(\mathscr{X}_0) + \boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}_0}[\boldsymbol{h}] + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}.$$

Из этого определения непосредственно вытекает, что

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\beta}, \tag{1.1.37}$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор в $\mathscr{V}$, и, таким образом, градиент перемещений может быть представлен посредством разложения

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_n^m \, \boldsymbol{i}_m \otimes i^n, \quad \beta_n^m = \frac{\partial}{\partial X^n} \, x^m - \delta_n^m = \frac{\partial}{\partial X^n} \, u^m.$$

На первый взгляд кажется, что все эти определения могут быть перенесены на гладкие многообразия без существенных изменений. Однако, здесь нас ожидает сюрприз: оказывается, что градиент деформации не является градиентом векторного поля, а, напротив, является совокупностью трех градиентов скалярных функций, определяющих координаты на многообразии. Лишь особая структура аффинно-евклидова пространства, в которой возможно отождествить по изоморфизму точки и их радиус-векторы, позволяет интерпретировать $\boldsymbol{F}$ как тензорное поле второго ранга над $\mathscr{V}$. В противоположность этому, градиент перемещений не имеет аналога в случае гладких многообразий, поскольку на последних не определены трансляции. Указанные обстоятельства важны с идейной точки зрения и по этой причине поясним их более детально.

**Градиент деформации vs. градиент перемещений.** Важно отметить, что фундаментальное различие между градиентом деформации и градиентом перемещений проявляет себя уже в евклидовом пространстве при использовании криволинейных координат. Действительно, предположим общую ситуацию, когда отсчетная форма $\mathscr{B}$ представлена в криволинейных координатах $(Q^i)_{i=1}^3$, а актуальная форма $\mathscr{S}$ представлена в некоторых других криволинейных координатах $(q^i)_{i=1}^3$. Для простоты будем полагать, что каждая из форм покрывается лишь одной картой, т.е, что имеются карты $(\mathscr{B}, \sigma)$ и $(\mathscr{S}, \psi)$, где $\sigma : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^3$ и $\psi : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^3$ — координатные отображения. Такое предположение не умаляет общности дальнейших рассуждений, но, вместе с тем, позволяет избежать лишних технических усложнений.

При пересчете декартовых компонент поля $\boldsymbol{\beta}$, представленных частными производными, к криволинейным координатам, получаем разложение

$$\boldsymbol{\beta} = \left( \frac{\partial u^i}{\partial Q^k} + u^j \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} \right) \boldsymbol{E}_i \otimes \boldsymbol{E}^k, \tag{1.1.38}$$

в котором $\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{E}_i$ — поле перемещений, разложенное по локальным базисам $(\boldsymbol{E}_k)_{k=1}^3$. В равенстве (1.1.38) содержатся символы Кристоффеля $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$, определяемые как $\frac{\partial \boldsymbol{E}_i}{\partial q^k} = \Gamma^{l\cdot\cdot}_{\cdot ik} \boldsymbol{E}_l$. Формула (1.1.38) действительно имеет место, поскольку $\boldsymbol{\beta}$ — градиент векторного поля, разложенного по локальному базису, меняющемуся от точки к точке. Тогда, в ходе дифференцирования этого разложения, необходимо привлекать правило Лейбница.

Вместе с тем, представление градиента деформации в криволинейных координатах типографически подобно его представлению в декартовых координатах (см. формулы (1.1.32) и (1.1.34)). Инвариантность формы $\boldsymbol{F}$ является не просто формальным результатом. Она наталкивает на мысль, что $\boldsymbol{F}$ есть больше, чем градиент векторного поля. Действительно, при его определении (в отличие от $\boldsymbol{\beta}$) нет необходимости использовать элементы трансляционного пространства $\mathscr{V}$, а достаточно работать лишь с координатными представлениями. Рассмотрим более детально, как исчезают символы Кристоффеля при переходе от перемещений к координатам.

Начнем рассуждение с формулы (1.1.37), связывающей градиент деформации с градиентом перемещений (1.1.38). Преобразуем равенство (1.1.38) перейдя от перемещений к координатам. Мы покажем, что в ходе этого преобразования символы Кристоффеля уйдут и в действительности $\boldsymbol{F}$ полностью определяется частными производными координат.

Во-первых, для компонент $u^i = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{E}^i$ поля перемещений $\boldsymbol{u}$ справедливы соотношения

$$u^i = u_d^s \, \boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{E}^i = u_d^s \frac{\partial Q^i}{\partial X^s}.$$

Здесь $u_d^s = x^s(q^1, q^2, q^3) - X^s(Q^1, Q^2, Q^3)$ — компоненты поля перемещений в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i}_k)_{k=1}^3$, представленные разностями актуальных и отсчетных прямоугольных координат. Следует иметь в виду, что величины $q^i$ являются, в свою очередь, функциями $(Q^1, Q^2, Q^3)$. Применяя правило Лейбница к производной $\frac{\partial u^i}{\partial Q^k}$, получаем

$$\frac{\partial u^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial u_d^s}{\partial Q^k} + u_d^s \frac{\partial}{\partial Q^k} \left( \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \right).$$

Выполняя дифференцирование и принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial X^s}{\partial Q^k} = \delta_k^i, \qquad \frac{\partial}{\partial Q^k} \left( \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \right) = \frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^r \partial X^s} \frac{\partial X^r}{\partial Q^k},$$

приходим к соотношению

$$\frac{\partial u^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} - \delta_k^i + u_d^s \frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^r \partial X^s} \frac{\partial X^r}{\partial Q^k}.$$

Таким образом, компонента градиента перемещений $\boldsymbol{\beta}$, соответствующая диаде $\boldsymbol{E}_i \otimes \boldsymbol{E}^k$, имеет вид:

$$\beta_k^i = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} - \delta_k^i + u_d^s \left( \frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^r \partial X^s} \frac{\partial X^r}{\partial Q^k} + \frac{\partial Q^j}{\partial X^s} \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} \right).$$

Во-вторых, покажем, что выражение в скобках тождественно равно нулю. Для этой цели обозначим его через $A^{i\cdot\cdot}_{\cdot sk}$. Используя соотношение

$\boldsymbol{E}_k = \frac{\partial X^l}{\partial Q^k}\boldsymbol{i}_l$ совместно с определением символов Кристоффеля, получаем следующее явное представление для последних:

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^n}\frac{\partial^2 X^n}{\partial Q^j \partial Q^k}.$$

По этой причине,

$$A^{i\cdot\cdot}_{\cdot sk} = \frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^n \partial X^s}\frac{\partial X^n}{\partial Q^k} + \frac{\partial Q^j}{\partial X^s}\frac{\partial Q^i}{\partial X^n}\frac{\partial^2 X^n}{\partial Q^j \partial Q^k}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial Q^j}{\partial X^s}\frac{\partial^2 X^n}{\partial Q^j \partial Q^k} = \frac{\partial}{\partial X^s}\left(\frac{\partial X^n}{\partial Q^k}\right),$$

то, используя правило Лейбница, получаем желаемый результат:

$$\begin{aligned} A^{i\cdot\cdot}_{\cdot sk} &= \frac{\partial X^n}{\partial Q^k}\frac{\partial}{\partial X^s}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial X^n}\right) + \frac{\partial Q^i}{\partial X^n}\frac{\partial}{\partial X^s}\left(\frac{\partial X^n}{\partial Q^k}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X^s}\left(\frac{\partial Q^i}{\partial X^n}\frac{\partial X^n}{\partial Q^k}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X^s}\delta^i_k = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, после замены компонент вектора перемещений координатами векторов мест, формула (1.1.38) переходит в

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s}\frac{\partial x^s}{\partial Q^k}\boldsymbol{E}_i \otimes \boldsymbol{E}^k - \boldsymbol{I},$$

и для $\boldsymbol{F}$ получается следующее соотношение:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s}\frac{\partial x^s}{\partial Q^k}\boldsymbol{E}_i \otimes \boldsymbol{E}^k.$$

На финальном шаге преобразуем полученное диадное представление к разложению относительно диад вида $\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{E}^k$. Поскольку

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\partial X^r}{\partial Q^i}\boldsymbol{i}_r = \frac{\partial X^r}{\partial Q^i}\frac{\partial q^m}{\partial x^r}\boldsymbol{e}_m,$$

то, в силу цепного правила дифференцирования,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial Q^i}{\partial X^s}\frac{\partial x^s}{\partial Q^k}\frac{\partial X^r}{\partial Q^i}\frac{\partial q^m}{\partial x^r}\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{E}^k \\ &= \delta^r_s \frac{\partial x^s}{\partial Q^k}\frac{\partial q^m}{\partial x^r}\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{E}^k \\ &= \frac{\partial x^s}{\partial Q^k}\frac{\partial q^m}{\partial x^s}\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{E}^k \\ &= \frac{\partial q^m}{\partial Q^k}\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{E}^k,\end{aligned}$$

что приводит к выражению (1.1.34), как и требовалось.

Как уже отмечалось, представление градиента деформации $\boldsymbol{F}$ посредством перемещений содержит символы Кристоффеля. Вместе с тем, такое представление является слишком узким: оно справедливо только для евклидова пространства, поскольку лишь последнее допускает существование векторного поля перемещений. В противоположность этому, формула (1.1.34) по-прежнему справедлива для многообразий, поскольку последние допускают координатное описание.

**Градиент деформации как тройка ковекторных полей.** На градиент деформации можно эквивалентно смотреть как на тройку ковекторных полей, что может быть полезно при переносе положений механики континуума на гладкие многообразия [6, 7]. Действительно, напомним, что каждое из множеств $\mathscr{B}$ и $\mathscr{S}$ является открытым подмногообразием $\mathscr{E}$. Отождествим касательные пространства $T_{\mathscr{X}}\mathscr{B}$ и $T_{\boldsymbol{x}}\mathscr{S}$ с касательными пространствами $T_{\mathscr{X}}\mathscr{E}$ и $T_{\boldsymbol{x}}\mathscr{E}$ соответственно для всех точек $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$, и $\boldsymbol{x} \in \mathscr{S}$. В таком случае градиент деформации $\boldsymbol{F}$ можно отождествить с касательным отображением $T\gamma : T\mathscr{B} \to T\mathscr{S}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{F} = F^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dX^j,$$

и мы приходим к соотношению

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes F^i, \quad \text{где} \quad F^i = F^i_j dX^j, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{1.1.39}$$

При фиксированных координатах на актуальной форме тройка ковекторных полей $F^i : \mathscr{B} \to \mathscr{V}^*$, $i = 1,\ 2,\ 3$, полностью определяет градиент деформации $\boldsymbol{F}$.

## 1.3.2. Меры деформации

**Тензоры Коши – Грина.** Поскольку векторное пространство $\mathscr{V}$ евклидово, то можно вывести выражение для длины деформированного волокна. Действительно, пусть $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$ — точка отсчетной формы. Тогда для точки $\mathscr{Y} \in \mathscr{B}$, лежащей рядом с $\mathscr{X}$, имеем представление

$$\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})} = \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}] + \boldsymbol{o}(\|\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\|).$$

Здесь $\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})}$ — деформированное волокно. Умножая это равенство скалярно на себя, приходим к соотношению

$$\|\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})}\|^2 = \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}]\cdot\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\|^2) \quad \text{при} \quad \mathscr{Y} \to \mathscr{X}.$$

Используя определение транспонированного линейного отображения, которое в случае $\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}$ принимает вид

$$\forall \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}:\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}}[\boldsymbol{v}], \tag{1.1.310}$$

где $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}} \in \mathrm{End}(\mathscr{V})$, приходим к формуле

$$\|\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})}\|^2 = \overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}}\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\|^2) \quad \text{при} \quad \mathscr{Y} \to \mathscr{X}.$$

Симметричное отображение $\boldsymbol{C}_{\mathscr{X}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}}\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}} \in \mathrm{Sym}(\mathscr{V})$ называется **правым тензором Коши – Грина**. Таким образом, предыдущее равенство можно записать в виде

$$\|\overrightarrow{\gamma(\mathscr{X})\gamma(\mathscr{Y})}\|^2 = \overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\cdot\boldsymbol{C}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\|^2) \quad \text{при} \quad \mathscr{Y} \to \mathscr{X}. \tag{1.1.311}$$

С точностью до малых порядка $o(\|\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\|^2)$, квадрат деформированного материального волокна равен $\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}\cdot\boldsymbol{C}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\mathscr{X}\mathscr{Y}}]$.

Тензоры $\boldsymbol{C}_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$, в совокупности определяют гладкое тензорное поле

$$\boldsymbol{C}:\ \mathscr{B} \to \mathrm{Sym}(\mathscr{V}), \quad \mathscr{X} \mapsto \boldsymbol{C}_{\mathscr{X}},$$

называемое **полем правых тензоров Коши – Грина**.

Теперь рассмотрим обратную деформацию, $\gamma^{-1}$. Пусть $\boldsymbol{x} = \gamma(\mathscr{X})$. Тогда

$$\overrightarrow{\gamma^{-1}(\boldsymbol{x})\gamma^{-1}(\boldsymbol{y})} = \boldsymbol{F}^{-1}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}] + \boldsymbol{o}(\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}\|) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}.$$

Домножая последнее равенство скалярно на себя и полагая $\boldsymbol{B}_{\mathscr{X}} = \boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}}$, получаем

$$\|\overrightarrow{\gamma^{-1}(\boldsymbol{x})\gamma^{-1}(\boldsymbol{y})}\|^2 = \overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}_{\mathscr{X}}[\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}] + o(\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}\|^2) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}. \tag{1.1.312}$$

С точностью до малых порядка $o(\|\overrightarrow{\mathscr{x}\mathscr{y}}\|^2)$ квадрат длины недеформированного материального волокна равен $\overrightarrow{\mathscr{x}\mathscr{y}}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathscr{X}}^{-1}[\overrightarrow{\mathscr{x}\mathscr{y}}]$. Тензор $\boldsymbol{B}_{\mathscr{X}}\in\mathrm{Sym}(\mathscr{V})$ называется **левым тензором Коши – Грина**. Приходим, таким образом, к полю

$$\boldsymbol{B}:\mathscr{B}\to\mathrm{Sym}(\mathscr{V}),\quad \mathscr{X}\mapsto\boldsymbol{B}_{\mathscr{X}},$$

называемому **полем левых тензоров Коши – Грина**.

**Замечание 1.4.** *Меры Коши – Грина порождают новые меры:* $\boldsymbol{C}^{-1}$ *(мера Фингера) и* $\boldsymbol{B}^{-1}$ *(мера Альманси).*

**Замечание 1.5.** *Построение мер Коши – Грина посредством сравнения длин деформированных и недеформированных материальных волокон (и аналогичного рассмотрения углов между материальными волокнами) является в известной мере искусственным, хотя и непосредственно иллюстрирует их геометрический смысл. В действительности, целесообразность перехода к правой мере Коши – Грина диктуется принципом материальной индифферентности, который в случае простого материала требует исключить из рассмотрения повороты отсчетных волокон. Переход к левой мере Коши – Грина определяется наличием изотропии материала, т.е., образно говоря, инвариантности его отклика при вращениях деформированных волокон.*

**Выражение через перемещения.** Правый и левый тензоры Коши – Грина $\boldsymbol{C}_{\mathscr{X}}=\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathscr{X}}=\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}\boldsymbol{F}_{\mathscr{X}}^{\mathrm{T}}$, $\mathscr{X}\in\mathscr{B}$, могут быть представлены через перемещения. Действительно, используя соотношение (1.1.37), приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{\mathscr{X}}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}}+\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}},\\ \boldsymbol{B}_{\mathscr{X}}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}}+\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}}\boldsymbol{\beta}_{\mathscr{X}}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{1.1.313}$$

**Меры деформации в криволинейных координатах.** Определим представление мер Коши – Грина в криволинейных координатах. Для этого, в силу их определения, необходимо вначале найти компоненты транспонированного отображения $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ в локальном базисе. Если $\boldsymbol{F}=F^i_j\boldsymbol{e}_i\otimes E^j$ — представление исходного градиента деформации в криволинейных координатах, то представление транспонированного отображения имеет вид $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^k_l\boldsymbol{E}_k\otimes e^l$. Полагая $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{E}_j$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_l$ в (1.1.310), получаем

$$g_{il}F^i_j=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^k_lG_{jk}.$$

Домножая обе части последнего равенства на $G^{js}$ и суммируя по $j$, окончательно приходим к формуле

$$(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})_l^{\,s} = g_{il} G^{js} F^i_j. \tag{1.1.314}$$

Получим теперь соответствующее представление для правого тензора Коши – Грина. Поскольку $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$, получаем $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})_i^{\,k} F^i_j \boldsymbol{E}_k \otimes E^j$. Это соотношение и (1.1.314) влекут

$$\boldsymbol{C}_{\mathscr{X}} = g_{si}|_{\gamma(\mathscr{X})} G^{kl}|_{\mathscr{X}} \left.\frac{\partial q^s}{\partial Q^l}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} \left.\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} \boldsymbol{E}_k|_{\mathscr{X}} \otimes E^j|_{\mathscr{X}}.$$

Аналогично можно прийти к соотношению для левого тензора Коши – Грина. Действительно, поскольку $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$, получаем $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})_l^{\,k} F^i_k \boldsymbol{e}_i \otimes e^l$. Из последнего выражения и той же формулы (1.1.314) вытекает, что

$$\boldsymbol{B}_{\mathscr{X}} = g_{sl}|_{\gamma(\mathscr{X})} G^{jk}|_{\mathscr{X}} \left.\frac{\partial q^s}{\partial Q^j}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} \left.\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(\mathscr{X})} \otimes e^l|_{\gamma(\mathscr{X})}.$$

**Связь с метриками.** Меры Коши – Грина связаны с метрическими тензорами посредством следующих геометрических соотношений. Применяя музыкальный изоморфизм $(\cdot)^{\flat_b}$, ассоциированный с метрическим тензором $\boldsymbol{G}$, к полю $\boldsymbol{C}$, приходим к полю билинейных функционалов $\boldsymbol{C}^{\flat_b} : \mathscr{X} \mapsto \boldsymbol{C}^{\flat_b}_{\mathscr{X}}$,

$$\boldsymbol{C}^{\flat_b}_{\mathscr{X}} = g_{si}|_{\gamma(\mathscr{X})} \left.\frac{\partial q^s}{\partial Q^m}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} \left.\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} E^m|_{\mathscr{X}} \otimes E^j|_{\mathscr{X}}.$$

Последнее равенство влечет, что

$$\boldsymbol{C}^{\flat_b} = \gamma^* \boldsymbol{g}.$$

Пусть теперь $(\cdot)^{\sharp_p}$ обозначает музыкальный изоморфизм, порожденный тензором $\boldsymbol{g}$. Тогда для поля $\boldsymbol{B}$ имеем поле билинейных функционалов $\boldsymbol{B}^{\sharp_p} : \mathscr{X} \mapsto \boldsymbol{B}^{\sharp_p}_{\mathscr{X}}$,

$$\boldsymbol{B}^{\sharp_p}_{\mathscr{X}} = G^{jk}|_{\mathscr{X}} \left.\frac{\partial q^m}{\partial Q^j}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} \left.\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\right|_{\widetilde{\sigma}_\alpha(\mathscr{X})} \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(\mathscr{X})} \otimes \boldsymbol{e}_m|_{\gamma(\mathscr{X})}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{B}^{\sharp_p} = \gamma_*(\overset{*}{\boldsymbol{G}}).$$

## 1.4. Условия совместности

**Вопрос:** Дано гладкое тензорное поле $\boldsymbol{F} : \mathscr{B} \to \mathrm{End}(\mathscr{V})$. При каких условиях оно является совместным, т.е., порождается некоторой деформацией?

### 1.4.1. Обзор когомологий де Рама

**Точные и замкнутые формы.** Соотношения (1.1.39) показывают, что градиент деформации $\boldsymbol{F}$ может быть рассмотрен как тройка дифференциальных 1-форм на $\mathscr{B}$. Это наблюдение позволяет использовать такие понятия, как *точная форма*, *замкнутая форма*, и т.д., для изучения вопроса об условии совместности.

Пусть $\mathscr{M}$ — гладкое $n$-мерное многообразие. Определена последовательность $\{\Omega^k(\mathscr{M})\}$ модулей дифференциальных форм и операций внешнего дифференцирования $\{d^k : \Omega^k(\mathscr{M}) \to \Omega^{k+1}(\mathscr{M})\}$:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathscr{M}) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(\mathscr{M}) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(\mathscr{M}) \xrightarrow{d^2} \Omega^3(\mathscr{M}) \longrightarrow \ldots \tag{1.1.41}$$

В соответствии с свойством $d \circ d = 0$ внешнего дифференциала, выполняются равенства

$$d^{k+1} \circ d^k = 0. \tag{1.1.42}$$

**Определение 1.4.** *Последовательность* (1.1.41) *называется* ***комплексом де Рама****.*

Дифференциальная $k$-форма $\omega \in \Omega^k(\mathscr{M})$ называется **замкнутой**, если $d^k\omega = 0$, и **точной** при $\omega = d^{k-1}\eta$ для некоторой дифференциальной $(k-1)$-формы $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathscr{M})$. Согласно равенству (1.1.42), каждая точная форма замкнута. Вместе с тем, обратное утверждение в общем случае не верно. Его истинность зависит от топологии полдежащего многообразия и изучается в рамках теории когомологий де Рама.

Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Введем обозначения:

$$Z^k(\mathscr{M}) = \mathrm{Ker}\,(d^k : \Omega^k(\mathscr{M}) \to \Omega^{k+1}(\mathscr{M})),$$
$$B^k(\mathscr{M}) = \mathrm{Im}\,(d^{k-1} : \Omega^{k-1}(\mathscr{M}) \to \Omega^k(\mathscr{M})).$$

Векторное пространство $Z^k(\mathscr{M})$ является пространством всех замкнутых $k$-форм, а векторное пространство $B^k(\mathscr{M})$ является векторным пространством всех точных $k$-форм. Поскольку $B^k(\mathscr{M}) \subset Z^k(\mathscr{M})$, можно ввести следующее отношение эквивалентности:

$$\forall \omega,\ \eta \in \Omega^k(\mathscr{M})) :\ (\omega \sim \eta)\ \Leftrightarrow\ (\exists \tau \in \Omega^{k-1}(\mathscr{M})) :\ \omega - \eta = d^{k-1}\tau).$$

**Определение 1.5.** *Факторпространство*

$$H^k_{dR}(\mathscr{M}) := Z^k(\mathscr{M}) \Big/ B^k(\mathscr{M})$$

*называется* ***$k$-мерной группой когомологий де Рама***.

**Нулевые когомологии.** По построению, утверждение «каждая замкнутая $k$-форма на $\mathscr{M}$ точна» эквивалентна равенству $H^k_{dR}(\mathscr{M}) = 0$. В частности (см., например, [8]):

- Если многообразие $\mathscr{M}$ стягиваемо в точку, т.е., тождественное отображение $\mathrm{Id}_{\mathscr{M}}$ гладко гомотопно[3] постоянному отображению, то $H^k_{dR}(\mathscr{M}) = 0$.
- Если $\mathscr{M}$ — гладкое многообразие, то каждая точка $\mathscr{M}$ имеет окрестность, на которой каждая замкнутая форма точна.

### 1.4.2. Необходимые и достаточные условия совместности

**Совместность и точность.** Пусть $\gamma : \mathscr{B} \to \mathscr{S}$ — некоторая деформация. Поскольку каждое координатное отображение $\gamma^i$, $i = 1,\ 2,\ 3$, есть гладкая скалярная функция, то к нему применим внешний дифференциал, что дает

$$d\gamma^i = F^i \in \Omega^1(\mathscr{B}), \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Полученные поля $F^i$ являются точными формами на $\mathscr{B}$. Обратно, если $F^i \in \Omega^1(\mathscr{B})$, $i = 1,\ 2,\ 3$, — некоторые точные 1-формы, то можно найти три гладкие функции $\gamma^i : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ 2,\ 3$, такие, что $F^i = d\gamma^i$. Эти функции могут быть рассмотрены как компоненты некоторого гладкого отображения $\gamma$. Для последнего, $T\gamma = \partial_{x^i} \otimes F^i$.

Пусть $F^i \in \Omega^1(\mathscr{B})$, $i = 1,\ 2,\ 3$, — произвольные 1-формы. Если существует гладкое отображение $\gamma : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$, для которого $F^i = d\gamma^i$, $i = 1,\ 2,\ 3$, то эти формы называются **совместными**. Приходим, таким образом, к необходимому и достаточному условию: 1-формы $F^i \in \Omega^1(\mathscr{B})$, $i = 1,\ 2,\ 3$, совместны тогда и только тогда, когда они все точны.

[3] Два гладких отображения $f_0$ и $f_1$ гладких многообразий $\mathscr{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются гладко гомотопными, если существует гладкое отображение $F : \mathscr{M} \times [0,\ 1] \to \mathfrak{N}$, такое, что $F(\cdot,\ i) = f_i$, $i = 0,\ 1$.

**Совместность и односвязность.** Вопрос о совместности деформаций, таким образом, тесно связан с внутренними свойствами топологического пространства $\mathscr{B}$. В частности, пусть пространство $\mathscr{B}$ односвязно, т.е., любая замкнутая кривая в нем может быть непрерывно стянута в точку, оставаясь всегда внутри $\mathscr{B}$. Тогда $H^1_{dR}(\mathscr{B}) = 0$ и требование точности может быть заменено более слабым требованием замкнутости: 1-формы $F^i$, $i = 1, 2, 3$, совместны если и только если они все замкнуты. Аналитически это условие означает, что $dF^i = 0$, $i = 1, 2, 3$. В терминах классической механики это условие записывается в виде одного равенства:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}.$$

**Совместность в общем случае.** Условия $dF^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, становятся лишь необходимыми и теряют достаточность в том случае, когда форма $\mathscr{B}$ имеет дыры или иные патологии, нарушающие односвязность. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия совместности в этом случае:

**Теорема 1.1.** *Необходимыми и достаточными условиями совместности полей $F^i$ являются следующие соотношения:*

**(i)** $dF^i = 0$, $i = 1, 2, 3$*;*

**(ii)** $\displaystyle\int\limits_{c_k} F^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, \ldots, \beta_1(\mathscr{B})$. *Здесь $\beta_1(\mathscr{B})$ — число Бетти, соответствующее $\mathscr{B}$, а $c_k$ — генераторы*[4] $H_1(\mathscr{B}; \mathbb{R})$.

Доказательство этого утверждения содержится в [10].

**Замечание 1.6.** *Число Бетти $\beta_k(\mathscr{B})$ является топологическим инвариантом, характеризующим число $k$-мерных дыр [9, 11].*

**Локальные условия совместности.** Физическое пространство, вмещающее формы тел, евклидово. Это означает, в частности, что его тензор кривизны равен нулю: $\mathfrak{R}(\boldsymbol{g}) = \mathbf{0}$, где $\boldsymbol{g}$ — пифагорова метрика. Поэтому отсчетная форма также является евклидовым многообразием:

$$\gamma^* \mathfrak{R}(\boldsymbol{g}) = \mathbf{0}.$$

[4] Здесь $H_1(\mathscr{B}; \mathbb{R})$ — первая группа гомологий с вещественными коэффициентами [9].

С другой стороны,

$$\gamma^* \mathfrak{R}(\boldsymbol{g}) = \mathfrak{R}(\gamma^* \boldsymbol{g}) = \mathfrak{R}(\boldsymbol{C}^\flat),$$

где $\boldsymbol{C}^\flat$ — поле билинейных функционалов, полученное опусканием индекса у правого тензора Коши – Грина $\boldsymbol{C}$. Таким образом, необходимым условием совместности тензора $\boldsymbol{C}$ является равенство

$$\mathfrak{R}(\boldsymbol{C}^\flat) = \mathbf{0}.$$

Наряду с этим, как показано в [7], это условие также достаточно, но лишь локально.

**Замечание 1.7.** *Применяя музыкальный изоморфизм $(\cdot)^\flat$ к первой «лапе» базисной диады, приходим к следующему представлению:*

$$\boldsymbol{C}^\flat_{\mathcal{X}} = C_{mn}|_{\mathcal{X}} \boldsymbol{i}^m \otimes \boldsymbol{i}^n, \quad \text{где} \quad C_{mn}|_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial X^m}\bigg|_{\mathcal{X}} \frac{\partial x^k}{\partial X^n}\bigg|_{\mathcal{X}}.$$

В компонентах равенство $\mathfrak{R}(\boldsymbol{C}^\flat) = \mathbf{0}$ может быть записано как

$$\mathfrak{R}(\boldsymbol{C}^\flat) = \frac{1}{2}(\partial_k \partial_j C_{im} + \partial_i \partial_m C_{jk} - \partial_m \partial_j C_{ik} - \partial_i \partial_k C_{jm}) + \\ + (\boldsymbol{C}^{-1})^{rs}(A_{jkr} A_{ims} - A_{jmr} A_{iks}) = 0, \quad (1.1.43)$$

где

$$A_{ijk} = A_{jik} = \frac{1}{2}(\partial_j C_{ik} + \partial_i C_{jk} - \partial_k C_{ij}).$$

**Приближение малых деформаций.** При аппроксимации конечных деформаций инфинитезимальными, квадратичными членами в (1.1.43) можно пренебречь. В этом случае последнее условие можно записать в более простой форме Сен-Венана:

$$\partial_k \partial_j \varepsilon_{im} + \partial_i \partial_m \varepsilon_{jk} - \partial_m \partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \partial_k \varepsilon_{jm} = 0.$$

Аналог этого соотношения в криволинейных координатах можно найти в [12]. Используя оператор Гамильтона $\boldsymbol{\nabla}$ можно записать

$$\operatorname{Ink}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{Ink}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \operatorname{curl}\operatorname{curl}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}.$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon} := [\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}]^{\mathrm{sym}}$, а $\boldsymbol{u}$ — векторное поле перемещений.

В классических работах по теории упругости условия интегрируемости формулируются в терминах полей малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\nabla u}]^{\mathrm{sym}}$ и вихрей $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\nabla u}]^{\mathrm{asym}}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{\nabla} \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0},$$

где $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ — векторное поле, ассоциированное с $\boldsymbol{\omega}$. Повышая порядок дифференцирования в левой части этого равенства, получаем независимые соотношения для $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Ими являются: уравнение Сен-Венана.

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0},$$

и равенство

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = 0.$$

Вместе с тем, эти условия необходимы, но недостаточны; при их выполнении поле перемещений, соответствующее заданным $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$, определяется с точностью до жесткого движения и градиента некоторой скалярной функции [13]. Если этот произвол нивелируется дополнительными условиями (например, граничными условиями), то перемещения однозначно определяются по формулам Чезаро.

С использованием тензора изгиба-кручения[5]

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\nabla} \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$$

можно сформулировать более общие условия совместности [13]:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\kappa} = -(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}. \tag{1.1.44}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными. Последнее условие явно показывает связь между малыми деформациями и вихрями.

**Замечание 1.8.** *Условия совместности можно вывести без использования рассуждений, апеллирующих к неевклидовой геометрии. Действительно, в случае малых деформаций совместность деформаций является тривиальным следствием симметрии частных производных относительно порядка дифференцирования (теорема Шварца). Этот вывод воспроизводится во всех руководствах по линейной теории упругости. В случае конечных деформаций условие совместности можно получить прямым дифференцированием мер деформации, см., например [15].*

[5] В работе [14] тензор $\kappa$ называется диадой кривизны-поворота.

**Определение перемещений по известной мере деформаций.** Для заданных 1-форм $F^i$ можно определить позиции материальных точек в актуальной форме:

$$x(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \partial_i \otimes F^i \llcorner \dot{\chi},$$

где $\chi$ — кривая в отсчетной форме, которая начинается в $p_0$ и заканчивается в переменной точке $p$.

Если поля $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ известны и удовлетворяют условию (1.1.44), то искомые вихри и перемещения определяются формулами типа Чезаро [13]:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r}) = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r}_0) + \int\limits_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{r}'),$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r}_0) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) + \int\limits_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}' \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\},$$

в которых $\boldsymbol{r}_0$ есть радиус-вектор фиксированной точки. Эти соотношения определяют однозначные векторные поля, которые не зависят от пути интегрирования (что следует из теоремы Стокса и условий совместности (1.1.44)).

## 1.5. Движение

**Движение** — это однопараметрическое семейство деформаций: $M = \{\gamma_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, где $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ — хронометрический интервал вещественной оси, а $\gamma_t : \mathscr{B} \to \mathscr{S}_t$ — деформация. Выбирая точку $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$, определим кривую

$$\chi_{M;\mathscr{X}} : \mathbb{T} \to \mathscr{E}, \quad \chi_{M;\mathscr{X}}(t) := \gamma_t(\mathscr{X}),$$

представляющую пространственную траекторию частицы с меткой $\mathscr{X}$.

Часто удобно рассматривать движение $M$ как отображение

$$\gamma : \mathscr{B} \times \mathbb{T} \to \mathscr{E}, \quad \gamma(\mathscr{X}, t) := \gamma_t(\mathscr{X}),$$

от двух переменных. Предположим, что для всех $\mathscr{X} \in \mathscr{B}$ и $t \in \mathbb{T}$ частные отображения

$$\gamma(\cdot, t) : \mathscr{B} \to \mathscr{E}, \quad \gamma(\mathscr{X}, \cdot) : \mathbb{T} \to \mathscr{E},$$

являются гладкими. В таком случае движение $M$ называется **гладким движением**.

Для гладкого движения определяется градиент деформации

$$\boldsymbol{F} : \mathscr{B} \times \mathbb{T} \to \operatorname{End}(\mathscr{V}), \quad \boldsymbol{F}(\mathscr{X},\, t) := \frac{\partial \gamma(\mathscr{X},\, t)}{\partial \mathscr{X}},$$

а также поля скорости и ускорения:

$$\boldsymbol{V} : \mathscr{B} \times \mathbb{T} \to \mathscr{V}, \quad \boldsymbol{V}(\mathscr{X},\, t) := \lim_{\mathbb{T}_t \ni s \to 0} \frac{\gamma(\mathscr{X},\, t+s) - \gamma(\mathscr{X},\, t)}{s},$$

$$\boldsymbol{A} : \mathscr{B} \times \mathbb{T} \to \mathscr{V}, \quad \boldsymbol{A}(\mathscr{X},\, t) := \lim_{\mathbb{T}_t \ni s \to 0} \frac{\boldsymbol{V}(\mathscr{X},\, t+s) - \boldsymbol{V}(\mathscr{X},\, t)}{s},$$

где $\mathbb{T}_t = \{s \in \mathbb{R} \mid (s \neq 0) \wedge (t + s \in \mathbb{T})\}$.

## 1.6. Напряжения

Идеи, приводящие к математической формализации напряжений в деформируемом твердом теле[6], содержатся в работах Якоба Бернулли, Иоганна Бернулли и Леонарда Эйлера [18, 19]. Понятие напряжений как тензорного поля второго ранга, обобщающее понятие гидростатического давления в идеальной жидкости, было сформулировано в работах Коши [20, 21] и развито в исследованиях Пуассона и Навье [22]. Отметим, что координатное представление таких полей предполагало определенную аналитическую свободу, поскольку использовались различные системы координат, связанные с отсчетной и актуальной формами. В этом случае возникает необходимость в координатных преобразованиях, общий вид которых был дан Пиола [23].

Классическая теория Коши основана на принципах *разрезания* и *замораживания*[7]. В соответствии с первым из них, при вырезании *части* $\mathscr{U}$ — открытого подмножества с произвольной кусочно-гладкой границей $\operatorname{Fr}\mathscr{U}$, — из актуальной формы $\mathscr{S}$ действие оставшейся части формы на $\mathscr{U}$ может быть заменено плотностью контактных сил $\boldsymbol{t_n}$, распределенной

[6]Подробное изложение исторических аспектов теории напряжений приведено в работах [16, 17].

[7]По-видимому, принцип разрезания восходит к работам Галилея, а принцип замораживания был сформулирован Симоном Стевином [24] в 1586 году (Stevin S. De beghinselen des waterwichts, 1586). Копия соответствующей страницы может быть найдена в работе [17, стр. 198]. Заметим, что Стевин рассматривал равновесие жидкости, мысленно перенося законы статики абсолютно твердого тела на произвольную ее часть. Это и отражено в названии «замораживание».

по границе $\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}$ [25, 26]. Здесь $\boldsymbol{n}$ — векторное поле внешних единичных нормалей к $\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}$. Принимается, что результирующая сила $\mathscr{F}_{\mathscr{U}}$, действующая на часть $\mathscr{U}$, является суммой контактных и объемных сил:

$$\mathscr{F}_{\mathscr{U}} = \int\limits_{\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}\, dS + \int\limits_{\mathscr{U}} \boldsymbol{b}\, dV,$$

где $\boldsymbol{b}$ — плотность контактных сил. Для формализации контактных сил Коши принял постулат о зависимости их плотности $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}$ лишь от нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности разреза, т.е.,

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}(x) := \boldsymbol{t}(x,\ \boldsymbol{n}).$$

Это позволило ему (в соответствии с определенными соглашениями о гладкости и благодаря знаменитому доказательству, использующему тетраэдр) доказать «равенство действия и противодействия»:

$$-\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{n}},$$

а затем — доказать существование тензорного поля напряжений $\boldsymbol{T} : \mathscr{S} \to \mathscr{V} \otimes \mathscr{V}^*$, т.е., поля линейных преобразований внешней единичной нормали $\boldsymbol{n}$ к плотности контактных сил: $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}$:

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}.$$

**Замечание 1.9.** *В середине XX века в работах Нолла была переформулирована теорема Коши о существовании тензора напряжений и построено более общее доказательство, в котором использовались не три линейно независимых вектора, а всего два. Доказательство было разделено на доказательство однородности и аддитивности соотношений, определяющих связь между единичной нормалью и плотностью контактных сил [27].*

Заметим, что в классических рассуждениях часть формы рассматривалась как «хорошее» подмножество евклидова пространства. Позднее, в рамках теории потенциала (О. Келлог [1]), понятие «хорошего» подмножества было уточнено: это открытое множество, которое ограничено конечным числом гладких регулярных элементарных поверхностей. Каждая из последних, в свою очередь, представляется в виде графика некоторой гладкой функции (см. раздел 1.1). Такое требование позволяет использовать теорему Стокса в ее евклидовой формулировке. Наконец, применяя принцип замораживания и используя законы динамики Эйлера, можно записать:

$$\int\limits_{\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}\, dS + \int\limits_{\mathscr{U}} \boldsymbol{b}\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{U}} \rho\dot{\boldsymbol{u}}\, dV,$$

$$\int\limits_{\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}} \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}\, dS + \int\limits_{\mathscr{U}} \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{b}\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{U}} \rho\boldsymbol{p}\times\dot{\boldsymbol{u}}\, dV.$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — векторное поле перемещений, $\boldsymbol{p}$ — поле векторов места, $\rho$ — плотность массы. Поскольку часть $\mathscr{U}$ произвольна, из теоремы Рейнольдса о переносе получаем дифференциальные уравнения движения:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}.$$

Предположим теперь, что имеются отсчетная и актуальная формы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{S}$ соответственно, которые связаны деформацией $\gamma : \mathscr{B} \to \mathscr{S}$. Пусть $\mathscr{U}_0$ — часть $\mathscr{B}$, сама являющаяся формой, а $\mathscr{U} = \gamma(\mathscr{U}_0)$. Пусть, далее, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{n}$ — поля внешних единичных нормалей к границам $\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}_0$ и $\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}$.

Плотность контактных сил $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}$ и тензор напряжений Коши $\boldsymbol{T} : \mathscr{S} \to \mathscr{V}\otimes\mathscr{V}^*$ относятся к эйлеровому описанию, т.е., они позволяют определить контактную силу, действующую на $\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}$ в актуальных координатах. Преобразуя поверхностный интеграл по $\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}$ в интеграл по $\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}_0$, приходим к равенству [2]

$$\mathscr{C} = \int\limits_{\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\, dS = \int\limits_{\mathrm{Fr}\,\mathscr{U}_0} \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}\, dS_0,$$

где $dS_0$ — отсчетный элемент поверхности, а $dS$ — актуальный элемент, связанные *формулой Нансона* [6]

$$\boldsymbol{n}\, dS = J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{N} dS_0,$$

а $\boldsymbol{P} : \mathscr{B} \to \mathscr{V}\otimes\mathscr{V}^*$ — первый тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа, связанный с тензором Коши $\boldsymbol{T}$ *преобразованием Пиолы* [4]

$$J\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}},$$

в котором $J$ — определитель $\boldsymbol{F}$ (1.1.35). Вводя плотность контактных сил в отсчетной форме, $\boldsymbol{t}_{R;\,\boldsymbol{N}}$, приходим к равенству

$$\boldsymbol{t}_{R;\,\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}.$$

**Замечание 1.10.** *В рамках этой книги мы используем тензоры напряжений Коши и Пиолы – Кирхгофа первого рода, хотя существуют и другие меры напряжений. Примерами могут служить второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа* $\boldsymbol{S}$ *и тензор напряжений Кирхгофа* $\boldsymbol{\tau}$*. Они связаны с тензорами напряжений Коши и Пиолы – Кирхгофа первого рода следующим образом: [28]:*

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{T}.$$

# 1.7. Нелинейная упругость как теория поля

## 1.7.1. Действие и лагранжиан

Рассмотрим элементы теории поля, позволяющие вывести уравнения движения и законы сохранения для деформируемого твердого тела в отсчетном и пространственном описаниях. Для этой цели используется наиболее «экономичный» способ рассуждений (по Э. Маху), основанный на вариационном исчислении. Пусть $\mathscr{B}$ — произвольная форма, выбранная в качестве отсчетной, и пусть $\mathfrak{M} \subset \mathscr{E}^{\mathscr{B}\times\mathbb{T}}$ — множество всех движений. Основной объект настоящих рассуждений — *действие*, которое является отображением

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}.$$

Предполагается справедливым *принцип аддитивности действия*: существует гладкое отображение

$$\mathfrak{L} : \mathscr{B} \times \mathbb{T} \times \mathscr{E} \times \mathscr{V} \times \mathrm{End}(\mathscr{V}) \times \cdots \times \mathrm{Lin}_r(\mathscr{V}, \ldots, \mathscr{V}; \mathscr{V}) \to \mathbb{R},$$

$$\mathfrak{L} : (X, t, x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r) \mapsto \mathfrak{L}(X, t; x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r),$$

называемое *плотностью лагранжиана*, такое, что

$$\mathfrak{A}(\gamma) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{R}} \mathfrak{L}(X, t, \gamma(X, t), \boldsymbol{V}(X, t), \boldsymbol{F}(X, t), \ldots, \boldsymbol{F}^{(r)}(X, t))\, dV\, dt, \tag{1.1.71}$$

для любых движений $\gamma \in \mathfrak{M}$, моментов времени $t_1$, $t_2 \in \mathbb{T}$, и части $\mathscr{R} \subset \mathscr{B}$ отсчетной формы. Значение $r$ в (1.1.71) определяет порядок теории (в рассматриваемом случае мы имеем *упругое тело в теории r-того градиента*).

**Замечание 1.11.** *Список переменных, представленных в плотности лагранжиана, зависит от рассматриваемой теории. Например, в термоупругости к этому списку следует добавить скалярное поле температуры. В более общем случае плотность лагранжиана может содержать также смешанные производные по пространству и времени и высокие производные по времени.*

Далее рассматривается случай $r = 1$. Таким образом, формула (1.1.71) сводится к

$$\mathfrak{A}(\gamma) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{R}} \mathfrak{L}(X,\, t,\, \gamma(X,\, t),\, \boldsymbol{V}(X,\, t),\, \boldsymbol{F}(X,\, t))\, dV\, dt. \tag{1.1.72}$$

Будем говорить, что рассматривается теория *первого градиента* или *простого материала.*

Помимо этого, ограничим себя следующей формой плотности лагранжиана[8]:

$$\mathfrak{L}(X,\, t,\, \gamma(\mathfrak{X}),\, \boldsymbol{V}(\mathfrak{X}),\, \boldsymbol{F}(\mathfrak{X})) = \frac{1}{2}\rho_R(X)\boldsymbol{V}(\mathfrak{X})^2 - W(X,\, \boldsymbol{F}(\mathfrak{X})) - \Phi(\gamma(\mathfrak{X}),\, t), \tag{1.1.73}$$

где $\rho_R$ — объемная плотность тела в отсчетном состоянии, $W$ — упругий потенциал, а $\Phi$ — потенциал физических полей.

**Замечание 1.12.** *Эквивалентно, действие* (1.1.72) *может быть записано в виде*

$$\mathfrak{A}(\gamma) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{K} - \mathfrak{W} + \mathfrak{P})\; dt,$$

*где* $\mathfrak{K} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathscr{R}} \rho_R \boldsymbol{V}^2\, dV$ *— кинетическая энергия,* $\mathfrak{W} = \int\limits_{\mathscr{R}} W\, dV$ *— запасенная упругая энергия, а* $\mathfrak{P} = -\int\limits_{\mathscr{R}} \Phi\, dV$ *— работа, совершаемая внешними силами.*

## 1.7.2. Частные и полные вариации

**Вариации.** Определим однопараметрическое семейство $\{g(\varepsilon)\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}}$ преобразований координат и полей. Предполагается, что элементы этого семейства образуют группу Ли $G$ с групповыми свойствами

$$g(0) = \mathrm{Id}, \quad g(\varepsilon)\circ g(\mu) = g(\varepsilon + \mu).$$

[8]Здесь символ $\mathfrak{X}$ обозначает пару $(X,\, t)$.

Действие $(X,\ t,\ \gamma(X,\ t)) \mapsto g(\varepsilon)\circ(X,\ t,\ \gamma(X,\ t))$ группы $G$ на тройку $(X,\ t,\ \gamma(X,\ t))$ порождает следующие отображения:

$$\widetilde{X}:\ (X,\ t,\ \varepsilon)\mapsto \widetilde{X}(X,\ t,\ \varepsilon),\quad \widetilde{t}:\ (X,\ t,\ \varepsilon)\mapsto \widetilde{t}(X,\ t,\ \varepsilon),$$
$$\widetilde{\gamma}:\ (X,\ t,\ \varepsilon)\mapsto \widetilde{\gamma}(\widetilde{X}(X,\ t,\ \varepsilon),\ \widetilde{t}(X,\ t,\ \varepsilon);\ \varepsilon).$$

Здесь $\widetilde{X}(X,t,0)=X, \widetilde{t}(X,t,0)=t$, и $\widetilde{\gamma}(\widetilde{X}(X,t,0),\widetilde{t}(X,t,0);0)=\gamma(X,t)$.

Под действием группы $G$ интеграл (1.1.72) преобразуется в

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\varepsilon)=\int\limits_{\widetilde{t}_1(\varepsilon)}^{\widetilde{t}_2(\varepsilon)}\int\limits_{\widetilde{\mathscr{R}}(\varepsilon)}\mathfrak{L}(\widetilde{X}(X,\ t,\ \varepsilon),\ \widetilde{t}(X,\ t,\ \varepsilon),\ \ldots)\,d\widetilde{V}(\varepsilon)\,d\widetilde{t}(\varepsilon). \tag{1.1.74}$$

Вариации пространственных и временных переменных имеют вид[9]:

$$\overrightarrow{\delta X}=\left.\frac{d\widetilde{X}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon,\quad \delta t=\left.\frac{d\widetilde{t}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon.$$

По определению, полная вариация деформации может быть варажена как

$$\delta\gamma=\left.\frac{d\widetilde{\gamma}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon=\left.\left(\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial\widetilde{X}}\frac{d\widetilde{X}}{d\varepsilon}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial\widetilde{t}}\frac{d\widetilde{t}}{d\varepsilon}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial\varepsilon}\right)\right|_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon,$$

и, соответственно,

$$\delta\gamma=\bar{\delta}\gamma+\boldsymbol{F}[\overrightarrow{\delta X}]+\boldsymbol{V}\delta t, \tag{1.1.75}$$

где $\bar{\delta}\gamma$ обозначает частную вариацию

$$\bar{\delta}\gamma=\left.\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon.$$

Определим следующие отображения:

$$\mathfrak{f}:\ \mathscr{B}\times\mathbb{T}\to\mathscr{B}\times\mathbb{T}\times\mathscr{E}\times\mathscr{V}\times\mathrm{End}(\mathscr{V}),$$

такое, что $\mathfrak{f}(X,\ t):=(X,\ t,\ \gamma(X,\ t),\ \boldsymbol{V}(X,\ t),\ \boldsymbol{F}(X,\ t))$, и

$$\widetilde{\mathfrak{f}}:\ \mathscr{B}\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathscr{B}\times\mathbb{T}\times\mathscr{E}\times\mathscr{V}\times\mathrm{End}(\mathscr{V}),$$

такое, что $\mathfrak{f}(X,\ t,\ \varepsilon):=\mathfrak{L}(\widetilde{X}(X,\ t,\ \varepsilon),\ \widetilde{t}(X,\ t,\ \varepsilon),\ \ldots)$. Их композиции с плотностью лагранжиана

$$\mathfrak{L}:\ (X,\ t,\ x,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f})\mapsto\mathfrak{L}(X,\ t,\ x,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f})$$

[9]Заметим, что $\overrightarrow{\delta X}$ — векторное поле, а $\delta t$ — скалярное поле.

приводят к следующим выражениям:

$$\widehat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \circ \mathfrak{f} : (X, t) \mapsto \mathfrak{L}(X, t, \gamma(X, t), \boldsymbol{V}(X, t), \boldsymbol{F}(X, t)),$$
$$\widetilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \circ \widetilde{\mathfrak{f}} : (X, t, \varepsilon) \mapsto \mathfrak{L}(\widetilde{X}(X, t, \varepsilon), \widetilde{t}(X, t, \varepsilon), \ldots).$$

В настоящем разделе используется следующее обозначение. Если $h : \mathscr{B} \times \mathbb{T} \times \mathscr{E} \times \mathscr{V} \times \mathrm{End}(\mathscr{V}) \to P$ — отображение со значениями в некотором множестве $P$, то $h|_{\mathfrak{f}}$ обозначает $h \circ \mathfrak{f}$. Это отображение, заданное на $\mathscr{B} \times \mathbb{T}$ и со значениями в $P$. Используется аналогичное обозначение для $\widetilde{\mathfrak{f}}$.

**Первая форма $\delta\mathfrak{A}$.** Рассмотрим теперь вариацию действия (1.1.74). Принимая во внимание, что область интегрирования зависит от $\varepsilon$, приходим к равенству

$$\delta\mathfrak{A} = \left.\frac{d\widetilde{\mathfrak{A}}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon =$$
$$= \left.\left[\int\limits_{\widetilde{t}_1(\varepsilon)}^{\widetilde{t}_2(\varepsilon)} \int\limits_{\widetilde{\mathscr{R}}(\varepsilon)} \left(\frac{d\widetilde{\mathfrak{L}}}{d\varepsilon} + \widetilde{\mathfrak{L}}\,\mathrm{div}\left(\frac{d\widetilde{X}}{d\varepsilon}\right) + \widetilde{\mathfrak{L}}\frac{d}{dt}\frac{d\widetilde{t}}{d\varepsilon}\right) d\widetilde{V}\, d\widetilde{t}\,\right]\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon,$$

или, эквивалентно,

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{R}} \left(\delta\widehat{\mathfrak{L}} + \widehat{\mathfrak{L}}\,\mathrm{div}_R\,\overrightarrow{\delta X} + \widehat{\mathfrak{L}}\frac{d}{dt}\delta t\right) dV\, dt. \tag{1.1.76}$$

Здесь $\delta\widehat{\mathfrak{L}} = \left.\dfrac{d\widetilde{\mathfrak{L}}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon$ есть вариация плотности лагранжиана, которая может быть вычислена с использованием цепного правила дифференцирования:

$$\delta\widehat{\mathfrak{L}} = \left(\left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial X}\right|_{\widetilde{\mathfrak{f}}}\left[\frac{d\widetilde{X}}{d\varepsilon}\right] + \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}\right|_{\widetilde{\mathfrak{f}}}\left[\frac{d\widetilde{t}}{d\varepsilon}\right] + \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}\right|_{\widetilde{\mathfrak{f}}}\left[\frac{d\widetilde{\gamma}}{d\varepsilon}\right] + \right.$$
$$\left.\left. + \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\widetilde{\mathfrak{f}}}\left[\frac{d\dot{\widetilde{\gamma}}}{d\varepsilon}\right] + \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{f}}\right|_{\widetilde{\mathfrak{f}}}\left[\frac{d}{d\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial\widetilde{X}}\right]\right)\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon.$$

Принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial\widehat{\mathfrak{L}}}{\partial X} = \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial X}\right|_{\mathfrak{f}} + \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}\right|_{\mathfrak{f}}\frac{\partial\gamma}{\partial X} + \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\mathfrak{f}}\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial X} + \left.\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{f}}\right|_{\mathfrak{f}}\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial X}, \tag{1.1.77}$$

$$\frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial t} = \left.\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\right|_{\mathfrak{f}} + \left.\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \left.\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} + \left.\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{f}}\right|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}, \tag{1.1.78}$$

совместно с (1.1.75), приходим к следующему результату[10]:

$$\delta \widehat{\mathfrak{L}} = \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial X}\left[\overrightarrow{\delta X}\right] + \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial t}[\delta t] + \left.\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right|_{\mathfrak{f}}\left[\bar{\delta}\gamma\right] + \left.\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\mathfrak{f}}\left[\frac{d}{dt}\bar{\delta}\gamma\right] + \left.\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{f}}\right|_{\mathfrak{f}}\left[\frac{\partial \bar{\delta}\gamma}{\partial X}\right]. \tag{1.1.79}$$

Значения $\mathfrak{x} \mapsto \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{f}}(\mathfrak{x})$ являются линейными отображениями из $\mathrm{End}(\mathscr{V})$ в $\mathbb{R}$. Поскольку пространство $\mathrm{End}(\mathscr{V})$ снабжено скалярным произведением $(:)$, существует единственное поле $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}} : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}(\mathfrak{x}) \in \mathrm{End}(\mathscr{V})$ линейных отображений, такое, что для любого поля $\boldsymbol{T} : \mathfrak{x} \mapsto \boldsymbol{T}(\mathfrak{x}) \in \mathrm{End}(\mathscr{V})$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{f}}[\boldsymbol{T}] = \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{T}.$$

Аналогичные представления справедливы для полей $\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{u}}$ линейных функционалов. Существуют единственные векторные поля $\mathfrak{L}_x : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{L}_x(\mathfrak{x}) \in \mathscr{V}$ и $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}} : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}(\mathfrak{x}) \in \mathscr{V}$, такие, что для любого векторного поля $\boldsymbol{v} : \mathfrak{x} \mapsto \boldsymbol{v}(\mathfrak{x}) \in \mathscr{V}$ выполнены следующие представления:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}[\boldsymbol{v}] = \mathfrak{L}_x \cdot \boldsymbol{v}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{u}}[\boldsymbol{v}] = \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Следовательно, выражение (1.1.79) для $\delta \widehat{\mathfrak{L}}$ принимает вид:

$$\delta \widehat{\mathfrak{L}} = \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial X}\left[\overrightarrow{\delta X}\right] + \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial t}[\delta t] + \mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} \cdot \bar{\delta}\gamma + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}} \cdot \frac{d}{dt}\bar{\delta}\gamma + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}|_{\mathfrak{f}} : \frac{\partial \bar{\delta}\gamma}{\partial X}. \tag{1.1.710}$$

Подставляя (1.1.710) в (1.1.76) с учетом равенства

$$\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}} \cdot \bar{\delta}\gamma\right) = \frac{d}{dt}\,\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}} \cdot \bar{\delta}\gamma + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}} \cdot \frac{d}{dt}\bar{\delta}\gamma,$$

[10]Заметим, что частная вариация перестановочна с операторами дифференцирования. То есть, $\bar{\delta}\dot{\gamma} = (d/dt)\bar{\delta}\gamma$, и $\bar{\delta}\dfrac{\partial \gamma}{\partial X} = \dfrac{\partial \bar{\delta}\gamma}{\partial X}$.

получаем

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathscr{R}} \left\{ \operatorname{div}_R \left( \widehat{\mathfrak{L}}\overrightarrow{\delta X} + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\big|_{\mathfrak{f}} \left[\overline{\delta}\gamma\right] \right) + \frac{d}{dt}\left( \widehat{\mathfrak{L}}\delta t + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}\big|_{\mathfrak{f}} \cdot \overline{\delta}\gamma \right) + \right.$$
$$\left. + \left( \mathfrak{L}_x\big|_{\mathfrak{f}} - \operatorname{div}_R \left( \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}} \right) - \frac{d}{dt}\left( \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}\big|_{\mathfrak{f}} \right) \right) \cdot \overline{\delta}\gamma \right\} dV\, dt. \quad (1.1.711)$$

Вводя следующие обозначения для компонент *тока Нетер*:

$$\delta \boldsymbol{J}_1 = \mathfrak{L}\big|_{\mathfrak{f}}\overrightarrow{\delta X} + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\big|_{\mathfrak{f}}\left[\overline{\delta}\gamma\right], \quad (1.1.712)$$

$$\delta \boldsymbol{J}_2 = \mathfrak{L}\big|_{\mathfrak{f}}\delta t + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}\big|_{\mathfrak{f}} \cdot \overline{\delta}\gamma, \quad (1.1.713)$$

и *оператора Эйлера – Лагранжа*:

$$\mathbb{E}_\gamma = \mathfrak{L}_x\big|_{\mathfrak{f}} - \operatorname{div}_R\left(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}\big|_{\mathfrak{f}}\right), \quad (1.1.714)$$

можно переписать (1.1.711) в лаконичной форме:

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathscr{R}} \left\{ \operatorname{div}_R \delta\boldsymbol{J}_1 + \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{J}_2 + \mathbb{E}_\gamma \cdot \overline{\delta}\gamma \right\} dV\, dt. \quad (1.1.715)$$

**Вторая форма $\delta\mathfrak{A}$.** Получим теперь вторую форму для вариации действия $\delta\mathfrak{A}$. Имея в виду выражения (1.1.77), (1.1.78), и (1.1.710), наряду с соотношением (1.1.75) между частными и полными вариациями, приходим к равенству

$$\delta\widehat{\mathfrak{L}} + \widehat{\mathfrak{L}}\operatorname{div}_R\overrightarrow{\delta X} + \widehat{\mathfrak{L}}\frac{d}{dt}\delta t =$$
$$= \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}}[\overrightarrow{\delta X}] + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}\bigg|_{\mathfrak{f}}\delta t + \mathfrak{L}_x\big|_{\mathfrak{f}}\cdot\delta\gamma + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}\big|_{\mathfrak{f}}\cdot\delta\dot{\gamma} +$$
$$+ \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}} : \delta\frac{\partial\gamma}{\partial X} + \widehat{\mathfrak{L}}\operatorname{div}_R\overrightarrow{\delta X} + \widehat{\mathfrak{L}}\frac{d}{dt}\delta t.$$

Принимая во внимание коммутационные соотношения

$$\delta\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}\delta\gamma - \frac{\partial\gamma}{\partial X}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\delta X}\right] - \dot{\gamma}\frac{d}{dt}\delta t,$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial X}\gamma = \frac{\partial}{\partial X}\delta\gamma - \frac{\partial\gamma}{\partial X}\frac{\partial\overrightarrow{\delta X}}{\partial X} - \dot{\gamma}\otimes\frac{\partial}{\partial X}\delta t,$$

и тождества

$$\operatorname{div}_R\overrightarrow{\delta X} = \boldsymbol{I} : \frac{\partial\overrightarrow{\delta X}}{\partial X},$$

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}} : \frac{\partial\gamma}{\partial X}\frac{\partial\overrightarrow{\delta X}}{\partial X} = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}} : \frac{\partial\overrightarrow{\delta X}}{\partial X},$$

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}} : \left(\dot{\gamma}\otimes\frac{\partial}{\partial X}\delta t\right) = \mathfrak{L}^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}}[\dot{\gamma}] \lrcorner \frac{\partial}{\partial X}\delta t,$$

приходим к следующему выражению для $\delta\mathfrak{A}$:

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathscr{R}}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}}[\overrightarrow{\delta X}] + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}\bigg|_{\mathfrak{f}}\delta t + \left(\mathfrak{L}|_{\mathfrak{f}}\boldsymbol{I} - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}}\right) : \frac{\partial}{\partial X}\overrightarrow{\delta X} + \right.$$
$$+\left(\mathfrak{L}|_{\mathfrak{f}} - \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}}\cdot\dot{\gamma}\right)\frac{d}{dt}\delta t + \mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}}\cdot\delta\gamma + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}}\cdot\frac{d}{dt}\delta\gamma -$$
$$\left. - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}}\right]\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{\delta X} + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}} : \frac{\partial}{\partial X}\delta\gamma - \mathfrak{L}^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}}[\dot{\gamma}] \lrcorner \frac{\partial}{\partial X}\delta t\right\} dV\,dt. \tag{1.1.716}$$

**Стандартные обозначения.** Введем теперь следующие обозначения для полей:

- *тензор энергии-импульса Эшелби*,

$$\boldsymbol{e} = \mathfrak{L}|_{\mathfrak{f}}\boldsymbol{I} - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}},$$

- *плотность гамильтониана*,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}|_{\mathfrak{f}} - \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}}\cdot\dot{\gamma},$$

- *плотность потока энергии* (*вектор Умова – Пойнтинга*),

$$\boldsymbol{U} = \mathfrak{L}^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{f}}\big|_{\mathfrak{f}}[\dot{\gamma}],$$

- *плотность канонического импульса*,

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}}\right],$$

- *плотность физического импульса,*

$$\boldsymbol{p} = \mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}}\,,$$

- *тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа первого рода,*

$$\boldsymbol{P} = -\,\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}|_{\mathfrak{f}}\,.$$

С такими обозначениями выражение (1.1.716) может быть записано в виде:

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathscr{R}}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}}[\overrightarrow{\delta X}] + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}\bigg|_{\mathfrak{f}}\delta t + \boldsymbol{e}:\frac{\partial}{\partial X}\overrightarrow{\delta X} + \mathfrak{H}\frac{d}{dt}\delta t + \mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}}\cdot\delta\gamma + {}\right.$$
$$\left. + \boldsymbol{p}\cdot\frac{d}{dt}\delta\gamma - \boldsymbol{K}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{\delta X} - \boldsymbol{P}:\frac{\partial}{\partial X}\delta\gamma - \boldsymbol{U}\lrcorner\frac{\partial}{\partial X}\delta t\right\}dV\,dt. \quad (1.1.717)$$

**Замечание 1.13.** *Обычно в теории поля используются следующие соглашения об обозначениях. Переменные плотности лагранжиана $\mathfrak{L}$ обозначаются теми же символами, что и соответствующие поля. То есть, пишут*

$$\mathfrak{L}:\ (X,\,t,\,\gamma,\,\boldsymbol{V},\,\boldsymbol{F})\mapsto\mathfrak{L}(X,\,t,\,\gamma,\,\boldsymbol{V},\,\boldsymbol{F}),$$

*и используют обозначения* $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\gamma}$, $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\boldsymbol{V}}$, $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\boldsymbol{F}}$ *для* $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\boldsymbol{u}}$, $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\boldsymbol{f}}$. *Хотя эти обозначения не совсем корректны, они удобны. Другое общепринятое (но также, строго говоря, неверное) соглашение состоит в том, что* $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}$ *обозначается как* $\dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\boldsymbol{F}}$. *Таким образом, имеются одинаковые обозначения для тензорного поля 3-го ранга и для соответствующего единственного тензорного поля 2-го ранга, которое связано с первым посредством операции (:). Аналогичное замечание справедливо для* $\mathfrak{L}_x$ *и* $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}$. *В силу таких соглашений (1.1.714) имеет следующее представление:*

$$\mathbb{E}_{\gamma} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\gamma} - \operatorname{div}_R\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\boldsymbol{F}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\boldsymbol{V}}.$$

### 1.7.3. Уравнения поля

Рассмотрим частный случай, когда лишь физические поля (т.е., $\gamma$) подвергаются вариациям; тогда формула (1.1.715) сводится к равенству

$$\delta\mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathscr{R}} \mathbb{E}_\gamma \bar{\delta}\gamma \, dV \, dt.$$

Из последнего вытекает уравнение поля

$$\mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} - \operatorname{div}_R \left(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{f}}|_{\mathfrak{f}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{u}}|_{\mathfrak{f}}\right) = \mathbf{0},$$

или, в рамках обозначений, введенных выше,

$$\mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} + \operatorname{div}_R \boldsymbol{P} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}.$$

Здесь $\mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}}$ обозначает плотность внешних сил.

Поскольку поле $\mathfrak{L}$ определено равенством (1.1.73), приходим к следующему уравнению поля в прямом описании[11]:

$$\operatorname{div}_R \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \rho_R \dot{\boldsymbol{V}}. \qquad (1.1.718)$$

### 1.7.4. Условия инвариантности действия

Рассмотрим еще один частный случай, когда вариациям подвергаются только координаты. Более того, мы предполагаем, что эти вариации определяются группой Ли.

**I. Сдвиги по пространству.** Пусть $\widetilde{X}(X,t,\varepsilon) = X + \varepsilon\boldsymbol{X}_0$, где $\boldsymbol{X}_0 \in \mathscr{V}$ — постоянный вектор, и пусть $\widetilde{t}(X,\, t,\, \varepsilon) = t$, $\widetilde{\gamma}(X,\, t,\, \varepsilon) = \gamma$. Поскольку

$$\overrightarrow{\delta X} = \boldsymbol{X}_0\delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{\delta X} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial X}\overrightarrow{\delta X} = \mathbf{0},$$

[11] Заметим, что формально $\dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}$ обозначает тензорное поле 3-го ранга. Но традиционно этот символ используется для обозначения единственного тензорного поля 2-го ранга, которое связано с первым посредством операции (:). Мы имеем в виду этот второй случай.

вариация (1.1.717) сводится к выражению

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{R}} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} [\boldsymbol{X}_0]\delta\varepsilon \right\} dV\,dt.$$

Равенство $\delta\mathfrak{A} = 0$ должно выполняться для любого сдвига по пространству. Поскольку вектор $\boldsymbol{X}_0$ произволен, приходим к следующему условию:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} = 0.$$

**II. Сдвиги по времени.** Предположим, что $\widetilde{t}(X,\ t,\ \varepsilon) = t + \varepsilon t_0$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ — постоянное число, и пусть $\widetilde{X}(X,\ t,\ \varepsilon) = X$, $\widetilde{\gamma}(X,\ t,\ \varepsilon) = \gamma$. Так как

$$\delta t = t_0\delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\delta t = 0, \quad \frac{\partial}{\partial X}\delta t = \delta t,$$

то вариация (1.1.717) принимает вид

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{R}} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\bigg|_{\mathfrak{f}} t_0\delta\varepsilon \right\} dV\,dt.$$

Равенство $\delta\mathfrak{A} = 0$ должно быть справедливым для любого сдвига по времени. Следовательно, в силу произвольности $t_0$, приходим к следующему условию:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\bigg|_{\mathfrak{f}} = 0.$$

**III. Пространственные вращения.** Пусть $\widetilde{X}(X, t, \varepsilon) = o + \boldsymbol{Q}(\varepsilon)[X - o]$, где $o \in \mathscr{E}$ — фиксированная точка, а $\mathbb{R} \ni \varepsilon \mapsto \boldsymbol{Q}(\varepsilon) \in O(3)$ — гладкое поле ортогональных преобразований, такое, что $\boldsymbol{Q}(0) = \boldsymbol{I}$. Временная координата и поля фиксированы: $\widetilde{t}(X, t, \varepsilon) = t$, $\widetilde{\gamma}(X, t, \varepsilon) = \gamma$. Поскольку $\boldsymbol{Q}$ гладко, можно записать, что

$$\boldsymbol{Q}(\varepsilon) = \boldsymbol{Q}(0) + \varepsilon\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{o}(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\boldsymbol{Q}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}[1] \in \mathrm{End}(\mathscr{V})$.

**Замечание 1.14.** *Линейное отображение $\boldsymbol{\omega}$ антисимметрично, т.е., $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{\omega}$. Это соотношение можно получить следующим образом. Продифференцируем тождество $\boldsymbol{Q}(\varepsilon)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\varepsilon) = \boldsymbol{I}$ по $\varepsilon$ и положим $\varepsilon = 0$.*

В соответствии с выражениями

$$\overrightarrow{\delta X} = \boldsymbol{\omega}[X - o]\delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{\delta X} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial X}\overrightarrow{\delta X} = \boldsymbol{\omega}\delta\varepsilon,$$

вариация (1.1.717) сводится к

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathscr{R}} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} \boldsymbol{\omega}[X - o] + \boldsymbol{e} : \boldsymbol{\omega} \right\} \delta\varepsilon \, dV \, dt.$$

Равенство $\delta\mathfrak{A} = 0$ должно выполняться для каждого пространственного вращения. Следовательно,

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} \boldsymbol{\omega}[X - o] + \boldsymbol{e} : \boldsymbol{\omega} = 0.$$

В соответствии с тождествами

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} \boldsymbol{\omega}[X - o] = \left\{ (X - o) \otimes \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} \right\} : \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}},$$

и $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}$, имеем

$$\left\{ (X - o) \otimes \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \right\} : \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Наконец, принимая во внимание, что $\boldsymbol{\omega}$ — произвольное антисимметричное отображение, приходим к условию

$$\operatorname{Asym}\left\{ (X - o) \otimes \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X}\bigg|_{\mathfrak{f}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \right\} = \mathbf{0},$$

в котором Asym[...] есть антисимметричная часть линейного отображения, стоящего в скобках [...].

Теперь рассмотрим частный случай вариации, когда координаты фиксированы, а физические поля варьируются, но, в отличие от раздела 1.7.3, их вариация определяется группой Ли.

**IV. Сдвиги деформации.** Пусть $\widetilde{\gamma}(X,\, t,\, \varepsilon) = \gamma(X,\, t) + \varepsilon\boldsymbol{\gamma}_0$, где $\boldsymbol{\gamma}_0 \in \mathscr{V}$ — постоянный вектор, и пусть $\widetilde{X}(X, t, \varepsilon) = X$, $\widetilde{t}(X, t, \varepsilon) = t$. Поскольку

$$\delta\gamma = \boldsymbol{\gamma}_0 \delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\delta\gamma = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial X}\delta\gamma = \mathbf{0},$$

вариация (1.1.717) сводится к

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{R}} \left\{ \mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_0 \delta\varepsilon \right\} dV\, dt.$$

В этом случае равенство $\delta\mathfrak{A} = 0$ должно выполняться для каждого такого сдвига. Поскольку вектор $\boldsymbol{\gamma}_0$ произволен, приходим к следующему условию:

$$\mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} = \mathbf{0}.$$

**V. Вращения деформации.** Наконец, пусть $\widetilde{\gamma}(X,\, t,\, \varepsilon) = o + \boldsymbol{Q}(\varepsilon)[\gamma(X,\, t) - o]$, где $o \in \mathscr{E}$ — фиксированная точка, а $\mathbb{R} \ni \varepsilon \mapsto \boldsymbol{Q}(\varepsilon) \in O(3)$ — гладкое поле ортогональных преобразований, такое, что $\boldsymbol{Q}(0) = \boldsymbol{I}$. Пространственные и временные точки фиксированы: $\widetilde{X}(X,\, t,\, \varepsilon) = X$, $\widetilde{t}(X,\, t,\, \varepsilon) = t$. Подобно случаю **III**, получаем:

$$\delta\gamma = \boldsymbol{\omega}[\gamma(X,\, t) - o]\delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\delta\gamma = \boldsymbol{\omega}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]\delta\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial X}\delta\gamma = \boldsymbol{\omega}\frac{\partial\gamma}{\partial X}\delta\varepsilon,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — антисимметричное линейное отображение, как и в **III**. Тогда вариация (1.1.717) сводится к

$$\delta\mathfrak{A} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{R}} \left\{ \mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} \cdot \boldsymbol{\omega}[\gamma(X,\, t) - o] + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\omega}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right] - \boldsymbol{P}\colon\!\left(\boldsymbol{\omega}\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right) \right\} \delta\varepsilon\, dV\, dt.$$

Условие инвариантности выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} \cdot \boldsymbol{\omega}[\gamma(X,\, t) - o] + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\omega}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right] - \boldsymbol{P}\colon\!\left(\boldsymbol{\omega}\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right) = 0.$$

В силу тождеств

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}^\flat)\colon\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{L}\colon(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})\colon\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}},$$

которые выполняются для любых векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ и любых линейных отображений $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\omega} \in \operatorname{End}(\mathscr{V})$, имеем

$$\left\{ (\gamma(X,\, t) - o) \otimes \mathfrak{L}_x^\flat \Big|_{\mathfrak{f}} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \otimes \boldsymbol{p}^\flat - \frac{\partial \gamma}{\partial X} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \right\} : \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Asym} \left\{ (\gamma(X,\, t) - o) \otimes \mathfrak{L}_x^\flat \Big|_{\mathfrak{f}} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \otimes \boldsymbol{p}^\flat - \frac{\partial \gamma}{\partial X} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \right\} = \mathbf{0}.$$

# 1.8. Определяющие соотношения. Теория Колемана – Нолла

## 1.8.1. Принцип материальной индифферентности

Будем рассматривать замену фрейма

$$(x,\, t) \mapsto (x^*,\, t^*) = \varphi_{12}(x,\, t),$$

определенную соотношениями

$$x^* = a(t) + \boldsymbol{Q}(t)(x - b), \tag{1.1.81}$$

$$t^* = t - c, \tag{1.1.82}$$

в которых $\boldsymbol{Q}$ — поле вращений. Будем полагать, что отображения $a$ и $\boldsymbol{Q}$ являются гладкими. Замена фрейма определяет однопараметрические семейства преобразований скаляров, векторов и тензоров второго ранга:

**(i)** Скаляры остаются неизменными.

**(ii)** Пусть $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ — некоторый вектор. Его можно представить в виде разности точек $\boldsymbol{v} = x - y$ в фрейме $\varphi_1$. Тогда в фрейме $\varphi_2$ выполняются следующие соотношения:

$$x^* = a(t) + \boldsymbol{Q}(t)(x - b), \quad y^* = a(t) + \boldsymbol{Q}(t)(y - b),$$

и для $\boldsymbol{v}^* = x^* - y^*$ мы имеем, что

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{v}. \tag{1.1.83}$$

Последнее равенство определяет однопараметрическое семейство $\{f_t\}_{t \in \mathscr{T}}$ преобразований вектора

$$f_t :\, \mathscr{V} \to \mathscr{V}, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}^*.$$

**(iii)** Пусть $\boldsymbol{T} \in \operatorname{End}(\mathscr{V})$. Если $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{v}]$, то, используя соотношения $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{w}$, приходим к равенству $\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{T}^*[\boldsymbol{v}^*]$, где

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t). \tag{1.1.84}$$

Получили семейство $\{g_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ преобразований тензора

$$g_t : \operatorname{End}(\mathscr{V}) \to \operatorname{End}(\mathscr{V}), \quad \boldsymbol{T} \mapsto \boldsymbol{T}^*.$$

Отображения, значениями которых являются скаляры, векторы и тензоры, называются **фрейм-индифферентными** или **объективными**, если при замене фрейма как зависимые, так и независимые переменные преобразуются в соответствии с выражениями (1.1.81), (1.1.82), (1.1.83), и (1.1.84). То есть, пусть $h$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{T}$ — скалярное, векторное и тензорное поля относительно фрейма $\varphi_1$, а $h^*$, $\boldsymbol{v}^*$ и $\boldsymbol{T}^*$ — скалярное, векторное и тензорное поля относительно фрейма $\varphi_2$. Тогда эти поля фрейм-индифферентны, если

$$\begin{gathered} h^*(x^*,\, t^*) = h(x,\, t), \\ \boldsymbol{v}^*(x^*,\, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{v}(x,\, t), \\ \boldsymbol{T}^*(x^*,\, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{T}(x,\, t)\,\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t), \end{gathered} \tag{1.1.85}$$

где $(x,\, t)$ и $(x^*,\, t^*)$ связаны преобразованиями (1.1.81) и (1.1.82).

Рассмотрим движение в фрейме $\varphi_1$, определенное отображением

$$\gamma : \mathscr{B} \times \mathbb{T} \to \mathscr{E}, \quad (X,\, t) \mapsto x.$$

Отсчетной форме $\mathscr{B}$, рассматриваемой в фрейме $\varphi_1$, отвечает отсчетная форма $\mathscr{B}^*$, рассматриваемая в фрейме $\varphi_2$. В соответствии с (1.1.81) и (1.1.82) эти формы связаны равенствами $X^* = a(\widetilde{t}) + \boldsymbol{Q}(\widetilde{t})(X - b)$, и $\widetilde{t}^* = \widetilde{t} - c$, в которых $\widetilde{t}$ фиксировано. То же движение рассматривается во фрейме $\varphi_2$ как

$$x^* = \gamma^*(X^*,\, t^*) = a(t) + \boldsymbol{Q}(t)\,(\gamma(X,\, t) - b), \quad t^* = t - c. \tag{1.1.86}$$

Равенство (1.1.86) позволяет получить соотношение между градиентами деформации $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^*$. Первый из них определяется относительно фрейма $\varphi_1$, т.е., $\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial\gamma}{\partial X}$, а последний — относительно фрейма $\varphi_2$, т.е., $\boldsymbol{F}^* = \dfrac{\partial\gamma^*}{\partial X^*}$. Из цепного правила дифференцирования следует, что

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{Q}(t)\frac{\partial\gamma}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial X^*},$$

и, потому,

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\widetilde{t}). \tag{1.1.87}$$

Дадим теперь определение физических процессов, которые являются «подобными». Под **динамическим процессом** будем подразумевать упорядоченную пару $(\gamma,\, \boldsymbol{T})$, состоящую из однопараметрического семейства деформаций $\gamma$ и тензора напряжений Коши. Два динамических процесса $(\gamma,\, \boldsymbol{T})$ и $(\gamma^*,\, \boldsymbol{T}^*)$, заданные в различных фреймах, называются **эквивалентными**, если они связаны друг с другом соотношениями (1.1.85) и (1.1.86).

Опыт показывает, что два тела с одинаковой формой и одинаковым распределением массы могут совершенно по-разному реагировать под действием одних и тех же сил. Это различие описывается следующим образом: мы говорим, что два твердых тела состоят из разных материалов. Свойства материала твердого тела описываются как условия, ограничивающие возможные динамические процессы. Эти условия называются **определяющими уравнениями** или **определяющими предположениями**. В книге мы рассматриваем материальные уравнения, включающие только движение и тензор напряжений Коши.

Сформулируем фундаментальный физический принцип, согласно которому свойства материала индифферентны, т.е., независимы от системы отсчета. В математических терминах это означает, что определяющие уравнения подчиняются следующему условию[12]:

**Принцип материальной индифферентности.** *Определяющие уравнения должны быть инвариантными при изменении системы отсчета. Если определяющее уравнение выполняется для процесса с движением и тензором напряжений Коши*

$$x = \gamma(X,\, t), \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(X,\, t),$$

*то оно должно выполняться и для любого эквивалентного процесса* $(\gamma^*,\, \boldsymbol{T}^*)$.

## 1.8.2. Теорема Коши о полярном разложении

Далее будем использовать следующий результат, полученный Коши:

**Теорема 1.2** (О полярном разложении)**.** *Для любого линейного отображения* $\boldsymbol{T} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ *существуют единственные ортогональное линей-*

[12] Мы даем формулировку, аналогичную формулировке Труселла и Нолла в книге [4].

*ное преобразование* $\boldsymbol{R} \in \mathrm{O}(3)$ *и положительно определенные*[13] *симметричные линейные отображения* $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$, *такие, что выполняются следующие равенства:*

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}.$$

*Здесь* $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$ *и* $\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$.

**Замечание 1.15.** *Доказательство теоремы можно найти, например, в [29]. Его можно провести в соответствии со следующим рассуждением. Преобразование* $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$ *положительно*[14] *и поэтому можно построить его квадратный корень* $\boldsymbol{U} := \sqrt{\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}}$, *являющийся обратимым и симметричным. Теперь положим* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^{-1}$. *Поскольку*

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}^{-T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}^2)^{-1}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

*мы имеем, что* $\boldsymbol{R} \in \mathrm{O}(3)$. *Тем самым приходим к желаемому разложению* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$. *Второй случай рассматривается аналогично.*

**Меры Коши – Грина.** В применении к градиенту деформации $\boldsymbol{F}$ теорема о полярном разложении утверждает, что имеется единственное ортогональное линейное отображение $\boldsymbol{R} \in \mathrm{O}(3)$, такое, что[15] $\det \boldsymbol{R} = 1$, и положительно определенные симметричные линейные отображения $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$, называемые **правым** и **левым тензорами искажений**; при этом выполнены равенства

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}. \tag{1.1.88}$$

Правый и левый тензоры искажений определяют **правый** и **левый тензоры Коши – Грина**:

$$\boldsymbol{C} := \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}, \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} := \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}.$$

[13]Линейный оператор $\boldsymbol{L}$ называется положительно определенным, если $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{L}[\boldsymbol{u}] > 0$ для всякого ненулевого вектора $\boldsymbol{u}$. Для положительно определенного оператора определен квадратный корень.

[14]Действительно, для любого вектора $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, имеем

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}] \geqslant 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{T}$ обратимо, $\boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}] \neq \boldsymbol{0}$ и знак $\geqslant$ можно заменить на $>$.

[15]Поскольку $\det \boldsymbol{F} > 0$.

Рассмотрим механический смысл равенств (1.1.88). Согласно равенству (1.1.31), градиент деформации отображает недеформированное бесконечно малое волокно в деформированное. Деформация волокна распадается на вращение, определяемое $\boldsymbol{R}$, и растяжение, определяемое $\boldsymbol{U}$ или $\boldsymbol{V}$. Вращение — это «жесткое движение», которое может видеть наблюдатель, связанный с пространством $\mathscr{E}$. Другой наблюдатель, вращающийся вместе с рассматриваемым волокном, увидит только растяжения. Таким образом, объективные величины, которые можно назвать мерами деформации, представляются $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ или, что то же самое, правыми и левыми тензорами Коши-Грина $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}$.

## 1.8.3. Простой материал

Пусть $\mathrm{Sh}(\mathscr{E})$ — множество всех форм в $\mathscr{E}$. Определим семейство $\{\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}\}_{\mathscr{B}\in\mathrm{Sh}(\mathscr{E})}$ отображений

$$\mathfrak{g}_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \times \mathrm{End}(\mathscr{V}) \to \mathrm{Sym}(\mathscr{V}),$$

которые назовем **функционалами отклика**. Такое семейство представляет собой механическое поведение твердого тела. Определяющим соотношением тела из **простого материала** относительно отсчетной формы $\mathscr{B}$ является следующее соотношение:

$$\boldsymbol{T}_X = \mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X). \tag{1.1.89}$$

Пусть $\mathscr{B}$ и $\widetilde{\mathscr{B}}$ — любые две отсчетные формы, и пусть $\mathscr{S}$ — некоторая актуальная форма. Далее, пусть $\gamma : \mathscr{B} \to \mathscr{S}$ и $\widetilde{\gamma} : \widetilde{\mathscr{B}} \to \mathscr{S}$ — деформации, а $\lambda = \widetilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma : \mathscr{B} \to \widetilde{\mathscr{B}}$. Следующая диаграмма иллюстрирует связь между $\gamma$, $\widetilde{\gamma}$, $\lambda$, и их градиентами:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\lambda = \widetilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma"'] & \mathscr{S} \\ & \widetilde{\mathscr{B}} \arrow[u, "\widetilde{\gamma}"'] \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathscr{V} \arrow[r, "\boldsymbol{F}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{P} = \widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1}\circ\boldsymbol{F}"'] & \mathscr{V} \\ & \mathscr{V} \arrow[u, "\widetilde{\boldsymbol{F}}"'] \end{tikzcd}$$

Таким образом, справедливо соотношение:

$$\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X) = \mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \widetilde{\boldsymbol{F}}_{\lambda(X)}\boldsymbol{P}_X).$$

Правую часть этого равенства можно обозначить как $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{\mathscr{B}}}(\widetilde{X},\ \widetilde{\boldsymbol{F}}_{\widetilde{X}})$, т.е.,

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{\mathscr{B}}}(\widetilde{X},\ \widetilde{\boldsymbol{F}}_{\widetilde{X}}) := \mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(\lambda^{-1}(\widetilde{X}),\ \widetilde{\boldsymbol{F}}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{P}_{\lambda^{-1}(\widetilde{X})}).$$

Так, мы имеем функционал отклика $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{\mathscr{B}}}$. Однако нам нужно отразить, что в действительности мы имеем дело с тем же телом. Следовательно, должно быть $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{\mathscr{B}}} = \mathfrak{g}_{\widetilde{\mathscr{B}}}$. Это мотивирует следующую аксиому:

**Аксиома.** *Для любых форм $\mathscr{B}$ и $\widetilde{\mathscr{B}}$ функционалы отклика $\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}$ и $\mathfrak{g}_{\widetilde{\mathscr{B}}}$ связаны соотношением*

$$\mathfrak{g}_{\widetilde{\mathscr{B}}}(\widetilde{X},\ \widetilde{\boldsymbol{F}}_{\widetilde{X}}) = \mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X), \quad \text{где} \quad \widetilde{X} = \lambda(X), \quad \widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{1.1.810}$$

**Замечание 1.16.** *Мы можем рассматривать $\mathscr{B}$ как «тестовую» отсчетную форму. Относительно нее в результате экспериментов был получен функционал $\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}$. Тогда по отношению (1.1.810) можно построить функционалы отклика одного и того же тела относительно другой отсчетной формы.*

Не все отображения $\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}$ удовлетворяют принципу материальной индифферентности. Для определения подходящего типа таких отображений, пусть $\boldsymbol{Q}$ — ортогональный тензор. Тогда, в соответствии с (1.1.85) и принципом материальной индифферентности[16] имеем:

$$\mathfrak{g}_{\mathscr{B}^*}(X^*,\ \boldsymbol{F}^*_{X^*}) = \boldsymbol{Q}(t)\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t).$$

Левую часть равенства можно рассматривать как значение функционала отклика, относящегося к отсчетной форме $\mathscr{B}^*$. В соответствии с Аксиомой, полагая $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}(\widetilde{t})$, приходим к следующему равенству:

$$\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}^*_{X^*}\boldsymbol{Q}(\widetilde{t})) = \boldsymbol{Q}(t)\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t).$$

Принимая во внимание соотношение (1.1.87) и тождество $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\widetilde{t})\boldsymbol{Q}(\widetilde{t}) = \boldsymbol{I}$, приходим к следующему выражению:

$$\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}_X) = \boldsymbol{Q}(t)\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t),$$

которое должно выполняться для каждого ортогонального тензора $\boldsymbol{Q}$. Пусть теперь $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$ — полярное разложение (см. (1.1.88)). Полагая $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$, получаем окончательный результат:

$$\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{U}_X) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X)\boldsymbol{R}. \tag{1.1.811}$$

[16] Рассматриваются эквивалентные процессы. В соответствии с принципом материальной индифферентности, так как $\boldsymbol{T}_X = \mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\ \boldsymbol{F}_X)$, то $\boldsymbol{T}^*_X = \mathfrak{g}_{\mathscr{B}^*}(X^*,\ \boldsymbol{F}^*_X)$, и символ $\mathfrak{g}$ один и тот же.

Это выражение определяет функциональное ограничение на возможные отображения $\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}$ и отражает требование принципа материальной индифферентности. Из (1.1.811) следует, что

$$\boldsymbol{T}_X = \boldsymbol{R}\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\, \boldsymbol{U}_X)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}. \tag{1.1.812}$$

Отсчетная форма $\mathscr{B}$ является **свободной от напряжений**, если $\mathfrak{g}_{\mathscr{B}}(X,\, \boldsymbol{I}_X) = \boldsymbol{0}$ для каждого $X \in \mathscr{B}$. Предположение о существовании свободной от напряжений отсчетной формы любого тела является стандартным для классической теории упругости.

# Библиография


1. Kellogg Oliver Dimon. Foundations of Potential Theory. — Springer Nature, 1967.

2. Truesdell Clifford, Toupin Richard. The classical field theories. — Springer, 1960.

3. Truesdell Clifford A. A first course in rational continuum mechanics. Volume 1-General concepts. — Academic Press, Inc., 1977. — Vol. 1.

4. Truesdell Clifford, Noll Walter. The Non-Linear Field Theories of Mechanics / Ed. by Stuart S. Antman. — Springer Berlin Heidelberg, 2004.

5. Lurie Anatolii Isakovich. Non-linear theory of elasticity. — Elsevier, 2012.

6. Maugin Gérard A. Material inhomogeneities in elasticity. — CRC Press, 1993. — Vol. 3.

7. Marsden Jerrold E, Hughes Thomas JR. Mathematical foundations of elasticity. — Courier Corporation, 1994.

8. Lee John M. Introduction to Smooth Manifolds. — Springer New York, 2012.

9. Hatcher A. Algebraic Topology. Algebraic Topology. — Cambridge University Press, 2002. — ISBN: 9780521795401.

10. Yavari Arash. Compatibility Equations of Nonlinear Elasticity for Non-Simply-Connected Bodies // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2013. — Vol. 209, no. 1. — P. 237–253.

11. Lee John M. Introduction to Topological Manifolds. — Springer New York, 2011.

12. Ciarlet Philippe G., Mardare Cristinel, Shen Ming. Saint Venant compatibility equations in curvilinear coordinates // Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 5, no. 3. — P. 231–251.

13. de Wit R. Fundamental aspects of dislocation theory / Ed. by John A. Simmons, R. de Wit, R. Bullough. — National Bureau of Standards (U.S.), 1970. — Vol. I. — P. 651–673.

14. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. — 1962. — Vol. 11, no. 1. — P. 415–448.

15. Ryzhak E.I. Direct coordinate-free derivation of the compatibility equation for finite strains // Mechanics of Solids. — 2014. — Vol. 49, no. 4. — P. 382–388.

16. Maugin Gérard A. Continuum Mechanics Through the Eighteenth and Nineteenth Centuries. — Springer International Publishing, 2014.

17. Truesdell C. Essays in the History of Mechanics. — Springer Science & Business Media, 1968.

18. Euler L. Continuation des recherches sur la theorie du mouvement des fluides // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. — 1757. — P. 316–361.

19. Euler L. Sectio tertia de motu fluidorum lineari potissimum aquae // Novi Commentarii academiae scientiarum Petrop. — 1771. — P. 219–360.

20. Cauchy A.-L. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intŕieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques // Bulletin de la Société philomatique. — 1823. — P. 9–13.

21. Cauchy A.-L. De la pression ou tension dans un corps solide // Ex. de Math. — 1827. — P. 42–56.

22. Poisson S.-D. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques // Mem. Acad. Sci. Inst. France. — 1829. — Vol. 8. — P. 356.

23. Capecchi Danilo, Ruta Giuseppe C. Piola's contribution to continuum mechanics // Archive for History of Exact Sciences. — 2007. — mar. —

Vol. 61, no. 4. — P. 303–342. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00407-007-0002-x.

24. Devreese J. T., Berghe G. V. 'Magic is no magic': the wonderful world of Simon Stevin. — WIT Press, 2008.

25. Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides // Ex. de Math. — 1827. — P. 60–69.

26. Cauchy A.-L. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique // Oeuvres (2) Gauthier–Villars. — 1890. — Vol. 8. — P. 195–226.

27. Noll Walter. The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics // The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. — Springer Science $ Business Media, 1974. — P. 31–47.

28. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. — Cambridge University Press, 2008. — ISBN: 9781139467544.

29. Halmos P. R. Finite-Dimensional Vector Spaces. — Springer, 1993. — ISBN: 0387900934.