

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ**

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

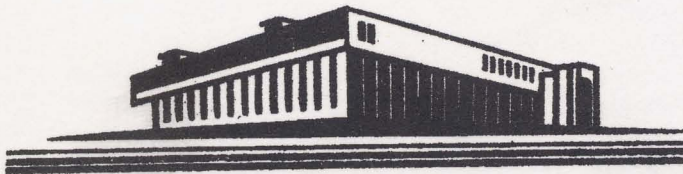


С.А. Лычев, К.Г. Койфман

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ  
ТЕОРИИ НЕСОВМЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

**Напряжения. Материальные связности**

Препринт № 1157



**Москва, 2018 г.**

## Аннотация

Работа посвящена геометрическим методам моделирования конечных несовместных деформаций твердых тел. Несовместность деформаций может быть вызвана различными физическими явлениями, например, распределенными дислокациями и дисклинациями, точечными дефектами, неоднородными температурными полями, усадкой, ростом, и т.п. Следствиями несовместных деформаций являются остаточные напряжения и искажение геометрической формы тела. Эти факторы определяют критические параметры современных высокоточных технологий, в частности, в технологиях аддитивного изготовления. В этой связи развитие методов их количественного описания является актуальной проблемой современной механики деформируемого твердого тела. Геометрические методы основаны на представлении тела и физического пространства гладкими многообразиями: материальным и физическим. На этих многообразиях задаются специальные метрики и связности, в общем случае, неевклидовы, наделяющие их свойствами неевклидовых пространств.

## Summary

This paper is intended to provide a systematic treatment of those parts of modern differential geometry that are essential for modeling of incompatible finite deformations in solids. The incompatibility of deformations may be caused by a variety of physical phenomena; among them are: distributed dislocations and disclinations, point defects, non-uniform thermal fields, shrinkage, growth, *etc.* Incompatible deformations results in residual stresses and distortion of geometrical shape. These factors are associated with critical parameters in modern high-precision technologies, particularly, in additive manufacturing, and considered to be *Ipsa Facto* essential constituents in corresponding mathematical models. In this context, the development of methods for their quantitative description is the actual problem of modern solid mechanics. The methods in question are based on the representation of a body and physical space in terms of differentiable manifolds, namely material manifold and physical manifold. These manifolds are equipped with specific metrics and connections, non-Euclidian in general.

ISBN 978-5-91741-211-5

055(02)2 © Институт проблем механики РАН 2018

---

## Оглавление

---

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>Список основных обозначений</b>	<b>7</b>
<b>1 Меры напряжений</b>	<b>9</b>
1. Введение . . . . .	9
2. Материальное многообразие. Тело и его части как подмногообразие с краем . . . . .	17
3. Напряжения как ковекторзначные формы . . . . .	22
<b>2 Материальные связности</b>	<b>37</b>
1. Потоки и производные Ли . . . . .	37
2. Дивергенция и теорема Гаусса . . . . .	49
3. Теорема Рейнольдса . . . . .	52
4. Связность на многообразии . . . . .	53
4.1. Определение связности . . . . .	53
4.2. Метод подвижного репера . . . . .	58
4.3. Пространства Римана и Вайценбока . . . . .	62
4.4. Связность в физическом пространстве . . . . .	72
5. Уравнения поля и законы сохранения . . . . .	77
5.1. Принцип ковариантности . . . . .	77
5.2. Аналогии операторов дивергенции в отсчетной и актуальной конфигурации . . . . .	78

5.3.	Преобразование баланса мощности . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Необходимые математические сведения</b>	<b>89</b>
1.	«Башня» тензорных пространств . . . . .	89
1.1.	Касательное пространство к многообразию . . . . .	89
1.2.	Сопряженное (кокасательное) пространство над касательным пространством . . . . .	93
1.3.	«Башня» тензорных пространств . . . . .	95
2.	Векторные расслоения и их сечения . . . . .	98
2.1.	Векторные расслоения . . . . .	98
2.2.	Сечения . . . . .	100
2.3.	Риманова метрика и музыкальные изоморфизмы . . . . .	102
3.	Касательное отображение. «Pullback» и «pushforward» . . . . .	104
3.1.	Касательное отображение . . . . .	104
3.2.	«Pullback» и «pushforward» сечений . . . . .	105
4.	Расслоение внешних форм . . . . .	108
4.1.	Внешние формы . . . . .	108
4.2.	Форма объема и ориентация многообразия . . . . .	109
4.3.	Внешнее дифференцирование . . . . .	111
4.4.	Интегрирование внешних форм и теорема Стокса . . . . .	112
4.5.	Оператор Ходжа . . . . .	114
4.6.	ℰ-значные внешние формы . . . . .	116
	<b>Литература</b>	<b>118</b>

## Предисловие

Настоящая работа продолжает изложение геометрических аспектов моделирования конечных несовместных деформаций твердых тел, начатое в [1], и разделена на три главы.

Первая глава посвящена формализации мер напряжений и мощности на гладких многообразиях, представляющих тело и пространство. Она содержит краткий обзор известных геометрических способов описания напряженного состояния таких тел и систематическое построение теории для общего неевклидоваго случая. Силы интерпретируются как ковекторы, т.е. как линейные функционалы, действие которых на векторы скорости точек среды определяют мощность. Соответственно, поля напряжений интерпретируются как ковекторнозначные внешние два-формы, а массовые силы — как скалярнозначные три-формы. Абстрактная теория интегрирования, основанная на исчислении внешних форм, адаптирована для элементов этой структуры, что позволяет сформулировать уравнения баланса мощности как на материальном многообразии (аналог отсчетного описания в классической механике совместных деформаций), так и на физическом многообразии (аналог пространственного описания). Построенные уравнения могут быть использованы для реализации численных процедур вычисления силовых и деформационных полей деформируемых твердых тел, у которых отсутствует единая конфигурация в евклидовом смысле.

Во второй главе исследуются различные способы задания аффинных связностей общего вида на материальном и физическом многообразиях. Связность наделяет многообразия геометрическими свойствами, в частности, способом параллельного переноса векторных полей. Для простых материалов параллельный перенос является изящной математической формализацией концепции материально единой (в частности, со свободной от напряжений) неевклидовой отсчетной формы. Действительно, определяя параллельный перенос как преобразование касательного вектора, согласованное с структурой физического пространства, содержащего формы тела, можно получить связность физического многообразия. Определяя параллельный перенос как преобразование касательного вектора, при котором его прообраз относительно локально единых вложений не изменяется, можно получить связность материального многообразия. Использование материальной связности и со-

ответствующего аппарата неевклидовой геометрии позволяет существенно упростить постановку начально–краевых задач теории несовместных деформаций, поэтому вопрос о выборе связностей представляется важным. Связность на физическом многообразии полагается согласованной с метрикой и определяется соотношениями Леви–Чивиты. Связность на материальном многообразии рассматривается в двух альтернативных вариантах. Первый приводит к пространству Вайценбока (пространству абсолютного параллелизма, телепараллелизма, т.е. пространству с нулевыми кривизной и неметричностью связности, но отличным от нуля кручением) и дает явную интерпретацию материальной связности в терминах локальных линейных преобразований, трансформирующих элементарный объем простого материала в единообразное состояние. Второй позволяет задать на материальном многообразии пространство Римана (с нулевым кручением и неметричностью связности, но отличной от нуля кривизной) и является наиболее удобным для построения полевых уравнений. Уравнения баланса в терминах внешней ковариантной производной Картана получены из общего принципа ковариантности.

В последней, третьей, главе приведены необходимые математические сведения, адаптированные к настоящей работе.

## Список основных обозначений

$\mathfrak{B}$	— Тело
$\vee$	— Операция соединения тел
$\mathfrak{P}$	— Физическое пространство
$\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$	— Множество всех конфигураций $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$
$V, v$	— Материальная и пространственная скорости движения тела
$\mathcal{E}$	— Правый тензор Коши – Грина
$\mathcal{B}$	— Левый тензор Коши – Грина
$\mathcal{T}, \sigma$	— Напряжения Коши
$\mathcal{P}, p$	— Напряжения Пиолы – Кирхгофа первого рода
$\mathcal{S}, s$	— Напряжения Пиолы – Кирхгофа второго рода
$e$	— Тензор Эшелби
$\mathfrak{M}^n$	— Абстрактное многообразие размерности $n$
$\mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$	— Множество всех отображений из $\mathfrak{M}^n$ в $\mathfrak{N}^m$ класса $C^r$
$\mathcal{O}^k(p)$	— Множество всех отображений из $\mathfrak{M}^n$ в $\mathbb{R}$ , имеющих класс $C^k$ в некоторой окрестности $p \in \mathfrak{M}^n$
$T_p \mathfrak{M}^n$	— Касательное пространство к многообразию $\mathfrak{M}^n$ в точке $p$
$T\mathfrak{M}^n$	— Касательное расслоение многообразия $\mathfrak{M}^n$
$T_p^* \mathfrak{M}^n$	— Кокасательное пространство к многообразию $\mathfrak{M}^n$ в точке $p$
$T^* \mathfrak{M}^n$	— Кокасательное расслоение многообразия $\mathfrak{M}^n$
$\mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n)$	— Множество всех векторных полей на $\mathfrak{M}^n$ класса $C^r$
$\mathcal{F}_k^r(\mathfrak{M}^n)$	— Множество всех $k$ -форм на $\mathfrak{M}^n$ класса $C^r$
$u$	— Вектор, векторное поле (сечение касательного расслоения)
$(\partial_i), (dx^i)$	— Координатный репер и корепер
$\omega$	— Внешняя форма, поле форм (греческий шрифт)

$\otimes$	— Тензорное произведение векторных пространств, тензорное произведение элементов векторных пространств
$\wedge$	— Внешнее произведение
$\mathcal{L}_u$	— Производная Ли вдоль векторного поля $u$
$[u, v]$	— Скобки Ли векторных полей $u$ и $v$
$g$	— Риманова метрика
$(\cdot)^b, (\cdot)^\#$	— «Музыкальные» изоморфизмы
$Tf$	— Касательное отображение к $f$
$f^*$	— Обратный образ («pullback»)
$f_*$	— Прямой образ («pushforward»)
$\nabla$	— Аффинная связность
$\mathfrak{T}$	— Кручение аффинной связности
$\mathfrak{R}$	— Кривизна аффинной связности
$\Omega$	— Неметричность
$*$	— Оператор («звезда») Ходжа
$\mathfrak{d}, \mathfrak{D}$	— Операторы Картана
$(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$	— Аффинное пространство $\mathcal{E}^m$ с трансляционным векторным пространством $\mathcal{V}^m$ размерности $m$
$u, T$	— вектор из $\mathcal{V}^m$ и любой из тензоров, принадлежащих $\mathcal{V}^m \otimes \mathcal{V}^m, \mathcal{V}^m \otimes (\mathcal{V}^m)^*$ и тд.
$(\cdot)$	— скалярное произведение, $\cdot : \mathcal{V}^m \times \mathcal{V}^m \rightarrow \mathbb{R}$
$\lrcorner, \llcorner$	— Операции свертки

Используются соглашения из [1]. В частности, если  $f : X \rightarrow Y$  — биекция на свой образ, т.е. на  $f(X)$ , то с таким отображением ассоциируется биекция  $\widehat{f} : X \rightarrow f(X)$ , получаемая сужением области прибытия  $f$  до его множества значений. Таким образом,  $\widehat{f}$  определяется правилом:  $\widehat{f} : x \mapsto f(x)$ .



### 1. Введение

**1°.** Первая глава настоящей работы посвящена формализации плотностей напряжений и мощности на гладких многообразиях общего вида, представляющих тело и физическое пространство. Эта формализация дается на языке геометрической теории интегрирования полей, определенных на гладких многообразиях [2], и обобщает классические понятия, определение которых подразумевает наличие евклидовой связности. Общим построениям предшествует краткий обзор различных подходов к формализации мер напряжений.

**2°.** Идеи, приводящие к математической формулировке напряжений в деформируемом твердом теле<sup>1</sup>, восходят к работам Бернулли и Эйлера [6, 7]. Концепция напряжений, обобщающая понятие гидростатического давления в идеальной жидкости как тензорного поля второго ранга, была сформулирована в работах Коши [8, 9] и развита в исследованиях Пуассона и Навье [10]. Заметим, что координатная формулировка таких полей предполагала определенную аналитическую свободу, поскольку использовались различные системы координат, ассоциирован-

---

<sup>1</sup>Детальное изложение исторических аспектов теории напряжений см. в [3, 4], а также см. статью К. Труделла, Р. Тупина [5], в которой со стр. 530 излагается теория напряжений с историческими комментариями.

ные с отсчетной и деформированной формами тела. При этом возникала необходимость в преобразованиях одних координат к другим, общий вид которых был дан Пиола [11]. Обобщение преобразований Пиолы позволило в дальнейшем вести речь о напряжениях, определенных на многообразиях с неевклидовой связностью [12].

Классическая теория Коши опиралась на принципы разрезания (сечений) и замораживания<sup>2</sup>. Согласно первому из них, при вырезании из тела части  $\mathfrak{B}$  с произвольной кусочно-гладкой границей  $\partial\mathfrak{B}$ , действие тела на эту часть заменялось поверхностными силами  $t_n$ , распределенными по  $\partial\mathfrak{B}$  [14, 15]. При этом постулировалось, что результирующая сила  $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ , действующая на часть  $\mathfrak{B}$  тела, представляется суммой поверхностных и объемных сил:

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{B}} = \int_{\partial\mathfrak{B}} \mathbf{t}_n dS + \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{b} dV, \quad (1.1.1)$$

где  $\mathbf{b}$  — плотность объемных сил. Для формализации поверхностных сил Коши использовал постулат о зависимости их плотности  $\mathbf{t}_n$  только от нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности разреза, т.е.

$$\mathbf{t}_n(x) = \mathbf{t}(x, \mathbf{n}). \quad (1.1.2)$$

Это позволило (при определенных соглашениях о гладкости и используя знаменитое построение с тетраэдром) доказать равенство «действия и противодействия»:

$$-\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_{-\mathbf{n}}, \quad (1.1.3)$$

и существование тензорного поля напряжений  $\mathbf{T}$ , т.е. поля линейного преобразования внешних нормалей  $\mathbf{n}$  в плотности контактных сил  $\mathbf{t}_n$ :

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.1.4)$$

Здесь точка  $(\cdot)$  означает евклидово произведение.

**Замечание 1.** В середине XX века теорема Коши о существовании тензора напряжений была переформулирована в работах Нолла и было построено более общее

---

<sup>2</sup>Принцип разрезания, по-видимому, восходит к работам Галилея, а принцип замораживания был сформулирован в труде Симона Стевина [13] в 1586 году (Stevin S. De beghinselen des waterwichts, 1586). Копию соответствующей страницы можно найти в [4, с. 198]. Заметим, что Стевин рассматривал равновесие жидкости, мысленно перенося законы равновесия для твердого тела на ее произвольную часть, что и отражено в названии «замораживание».

доказательство, которое использовало не три линейно-независимых вектора, а всего лишь два. Доказательство распалось на доказательство однородности и аддитивности соотношений, определяющих зависимость между нормалью и плотностью контактных усилий [16]. ♠

Следует отметить, что в классических рассуждениях под частью тела понималась достаточно «хорошая» область евклидова пространства, занимаемая некоторым подмножеством материальных точек, составляющих тело. Позднее, в работах по теории потенциала (О. Келлог [17]) было уточнено понятие «хорошей области»: это область, ограниченная конечным набором гладких регулярных элементарных поверхностей, каждая из которых может быть представлена как график некоторой гладкой функции. При этом указываются условия на пересечения элементарных поверхностей друг с другом (см. также М. Гёртин [18, с. 13]). Последнее требование позволяло использовать теорему Стокса в ее формулировке для евклидова пространства, и из двух законов динамики Эйлера, применяемых к произвольной «замороженной» части тела (в приводимых ниже равенствах  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\mathbf{x}$  — поле векторов места,  $\rho$  — массовая плотность)

$$\int_{\partial\mathfrak{B}} \mathbf{t}_n dS + \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}} \rho \dot{\mathbf{u}} dV,$$

$$\int_{\partial\mathfrak{B}} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS + \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{u}} dV,$$

получить уравнения движения в дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{T}.$$

**3°.** Рассуждения, набросок которых мы привели выше, являются основой классической теории деформируемого твердого тела и приводятся почти без изменений в большинстве руководств и учебников. Вместе с тем, эти рассуждения содержат тонкие места, которые привлекают внимание до сих пор. Акцентируем внимание на некоторых из них.

**i)** Рассуждения Коши подразумевают «наивное» разбиение тела, как множества материальных точек, на подмножества — части тела (в литературе используются такие термины, как «элементарные» или «представительные» объемы), для которых формулируются принципы разрезания и замораживания. Подобное выделение частей тела предполагает,

что с этими частями ассоциированы массовые и поверхностные силы, т.е. на языке теории меры они должны быть измеримыми с измеримой границей. Вместе с тем, из теории меры известно, что далеко не все подмножества заданного множества измеримы [19]: измеримыми являются лишь те, которые принадлежат специальным семействам. В этой связи, для построения аксиоматически строгой теории напряжений требуется привлечение элементов теории меры. Такое развитие идей Коши, Пуассона было осуществлено в работе Нолла [16]. В ней тело  $\mathfrak{B}$  являлось измеримым множеством (с мерой, называемой распределением массы), а в качестве частей тела Нолл рассматривал его подмножества, принадлежащие борелеву семейству компактных множеств с кусочно-гладкой границей. Это позволяло рассматривать части тела как самостоятельные тела, конфигурации и распределения масс которых — сужение, соответственно, исходных конфигураций и меры на части тел. Таким образом, разбиение тела на части (по Ноллу) дает более узкий класс его подмножеств, по сравнению с «наивным» разбиением Коши. Однако этого разбиения достаточно для формулировки и доказательства теорем, связанных с существованием тензора напряжений.

ii) Обобщение представлений, данных в [16], предложили М. Гёртин и Л. Мартинз в работе [20]. Они высказали идею о том, что первичным объектом является суммарная контактная сила, а не ее плотность. Последняя является производной контактной силы по мере Лебега (мере площади). Это позволило расширить класс множеств, трактуемых как части тела. Авторами работы [20] было введено понятие обобщенного потока Коши (Cauchy flux), который может быть определен на множествах со сложной (фрактальной) структурой, например, салфетке Серпинского. Следует отметить, что обоснование линейности в этом случае требует дополнительных гипотез [21]. Такой подход получил свое дальнейшее развитие и отражен, например, в работах [22–24].

iii) Как было отмечено в Главе 1, для описания тел с дефектами может быть эффективно использована формализация деформируемого континуума на языке гладких многообразий с неевклидовой связностью. Вместе с тем, классическая теория напряжений явно использует аффинные и метрические свойства евклидова пространства. Аффинная структура позволяет интегрировать векторные поля, представляющие плотности физических величин, входящих в уравнения баланса сил. Евклидова структура пространства позволяет определить поле единичных нор-

малей, существование которого является необходимым атрибутом для формулировки постулата Коши.

Формулировка соотношений, определяющих напряжения на многообразиях с неевклидовой связностью, требует обобщения указанных понятий. Подобные обобщения даны в работах М. Эпштейна, Р. Сегёва и Г. Роднея [25–27]. В пространстве с неевклидовой связностью представляется трудоемким определить «результатирующую» силу аналогично равенству (1.1.1), т.е. как интеграл по векторной плотности: при таком интегрировании необходимо учитывать связность. Вместо этого предлагается использовать обобщенную мощность — функционал над векторными полями обобщенных скоростей, рассматриваемых как сечения векторного расслоения  $\mathscr{W}$  над материальным многообразием [25, 26]. Поскольку в результате получается скалярное поле, то явно учитывать правило параллельного перенесения нет необходимости. Разумеется, оно содержится в связности материального многообразия.

*Замечание 2.* Существуют отличия в терминологии, используемой в настоящей работе от терминологии в [26]. Если в настоящей работе «тело» и «материальное многообразие» являются синонимами (здесь мы следуем терминологии Нолла [16]), то в работе Р. Сегёва и Г. Роднея «материальное многообразие» — это термин, обозначающий вселенную тел — множество, вмещающее тела [28]. По предположению, оно является многообразием, содержащим тела как подмножества. В свою очередь, под телами понимаются компактные подмногообразия материального многообразия, имеющие равные с ним размерности. Край тела, при этом, имеет «угловые точки» [29]. Такой подход представляется более общим. ♠

При рассмотрении [26], мы будем придерживаться терминологии, принятой в этой работе, обозначая через  $\mathscr{M}$  материальное многообразие, а через  $\mathscr{B}$  — произвольное тело, т.е. подмногообразие  $\mathscr{M}$ . Для  $\mathscr{B}$  полагается, что мощность, развиваемая результирующей силой на обобщенных скоростях, представляется суммой мощностей поверхностных и объемных сил. В виду неевклидовой связности на  $\mathscr{B}$  плотности объемных и поверхностных сил следует представлять в более абстрактной форме, чем в классической теории Коши. Как было отмечено, последняя подразумевает евклидово правило параллельного переноса. Согласно [26] плотности объемных и поверхностных сил представлены сечениями  $\beta_{\mathscr{B}}$  и  $\tau_{\mathscr{B}}$  расслоений  $\mathscr{W}^* \otimes \Lambda^n(T\mathscr{B})$  и  $\mathscr{W}^* \otimes \Lambda^{n-1}(T\partial\mathscr{B})$  ковекторзначных форм над многообразиями  $\mathscr{B}$  и  $\partial\mathscr{B}$ . Действие результирующей силы на

тело  $\mathfrak{B}$  определяется как мощность

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(w) = \int_{\partial\mathfrak{B}} \tau_{\mathfrak{B}}(w) + \int_{\mathfrak{B}} \beta_{\mathfrak{B}}(w), \quad (1.1.5)$$

развиваемая результирующей силой на обобщенной скорости  $w$  [26]. Заметим, что интегралы здесь понимаются в рамках геометрической теории интегрирования на гладких многообразиях [2].

Для формулировки постулата Коши необходимо обобщение понятия «ориентированной площадки» для гладких многообразий. Это может быть осуществлено следующим образом (подробнее см. [26]): каждой точке  $\mathfrak{X}$   $n$ -мерного материального многообразия  $\mathfrak{M}$  ставится в соответствие совокупность всевозможных  $(n-1)$ -мерных подпространств  $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$  — пучок гиперплоскостей, образующих многообразие Грассмана  $G_{n-1}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M})$ . Совокупность таких пучков образует расслоение Грассмана с тотальным пространством  $G_{n-1}(T\mathfrak{M}) = \bigcup_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}} G_{n-1}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M})$  [26]. Для того, чтобы говорить о телах, касающихся в некоторой точке, но расположенных по разные стороны от касательной гиперплоскости (т.е. чтобы говорить о внутренности объема, выделенного в теле, и внешнем к нему окружении), вводится понятие инклинации (внешней ориентации) [26].

*Замечание 3.* Понятие инклинации основано на том, что гиперплоскость  $H \subset T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$  может быть определена единственным образом заданием аннигилятора  $H$  — ковектора, который обращается в нуль на всех векторах из  $H$ . Используя этот аннигилятор (или любой другой, из множества всех аннигиляторов  $H$ ), можно говорить о векторах  $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M} \setminus H$ , лежащих по одну/разные стороны от  $H$ . На множестве  $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M} \setminus H$  вводится отношение эквивалентности: «векторы  $v_1$  и  $v_2$  лежат по одну сторону от  $H$ », которое индуцирует разбиение  $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M} \setminus H$  на два класса: две стороны  $H$ . Гиперплоскость с инклинацией — это гиперплоскость с выбранным классом эквивалентности (стороной). ♠

Построив в каждой точке  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$  материального многообразия множество всех гиперплоскостей  $G_{n-1}^{\perp}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M})$  с инклинациями, можно определить расслоение инклинаций с тотальным пространством

$$G_{n-1}^{\perp}(T\mathfrak{M}) = \bigcup_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}} G_{n-1}^{\perp}(T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M})$$

и определить морфизм расслоений [26]:

$$p : G_{n-1}^{\perp}(T\mathfrak{M}) \rightarrow G_{n-1}(T\mathfrak{M}).$$

Образно говоря, если инклинацию рассматривать как плоскость с приложенным к ней вектором — выбранным направлением внешней нормали, то морфизм  $p$  «убирает» этот вектор, оставляя саму плоскость.

С использованием расслоения инклинаций строится сечение Коши [26], посредством которого формализуется постулат Коши (1.1.2). При этом, вместо зависимости от вектора единичной нормали говорится о зависимости от гиперплоскости с инклинацией. Определим расслоение плотностей взаимодействий (interaction density bundle):

$$p^* \left( \mathcal{W}^* \otimes \bigwedge^{n-1} G_{n-1}(T\mathcal{M}) \right) =: D \rightarrow G_{n-1}^\perp(T\mathcal{M}).$$

Сечение Коши — это отображение

$$\tau : G_{n-1}^\perp(T\mathcal{M}) \rightarrow D,$$

такое, что для любого тела  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{M}$  справедливо равенство  $\tau_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{X}) = \tau(h)$ , где  $h$  — касательное пространство к  $\partial\mathfrak{B}$  в точке  $\mathfrak{X}$ , снабженное инклинацией. Правой части этого равенства в классической теории соответствует  $t_n dA$ , где  $dA$  — элемент площади, к которому приложен единичный вектор внешней нормали  $n$ .

В терминах «inclined restriction» [26]  $i^*$  строится аналог соотношения (1.1.3):

$$i_h^*(\sigma) = -i_{-h}^*(\sigma),$$

где  $\sigma$  — любая  $W^*$ -значная  $(n-1)$ -форма, заданная на  $\mathfrak{B}$ . Существование и единственность внешней ковекторзначной формы напряжений — сечения расслоения  $W^* \otimes \bigwedge^{n-1}(T\mathcal{M})$ , как показано в [26], для заданных плотности объемной силы и сечения Коши, обеспечивается непрерывностью сечения Коши и оценкой мощности (1.1.5) вида

$$|\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(w)| \leq \int_{\mathfrak{B}} \zeta(w),$$

где  $\zeta$  —  $n$ -форма, одна и та же для всех тел (частей тел). В этом случае для любого тела  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{M}$  и  $\mathfrak{X} \in \partial\mathfrak{B}$  выполнено равенство

$$\tau_{\mathfrak{B}}(x) = i_h^*(\sigma(x)),$$

где  $h$  — касательное пространство к  $\partial\mathfrak{B}$  в точке  $\mathfrak{X}$ , снабженное внешней инклинацией. Форма  $\sigma$  — форма напряжений, представляет аналог тензора напряжений Коши, а само равенство — аналог (1.1.4).

Подход, изложенный в [26], позволяет в более общем виде сформулировать теорию напряжений Коши, которая становится классической, как только мы полагаем, что многообразие обладает римановой структурой и связность на этой структуре евклидова. В настоящей работе рассматривается случай, когда тело и физическое пространство обладают римановыми структурами и для этого случая вводятся ковекторзначные формы напряжений.

iv) В Главе 1 работы [1] отмечалась важность понятия материального многообразия. В связи с этим, упомянем о формализме конфигурационной (материальной) силы, используемом для описания эволюции дефектов в твердом теле в рамках механики континуума. Необходимость использования материального многообразия здесь связана с тем, что при рассмотрении движения дефектов только в физическом пространстве, представляется затруднительным отделить переносное движение дефектов вместе с формой тела, от движения дефектов относительно самой формы тела. Последнее удобно описывать в терминах материального многообразия.

В классической теории упругости подразумевается эволюция образов конфигураций — форм тела, вызванная действующими на него внешними силами; материальное многообразие (тело) при этом, остается фиксированным. В случае, когда рассматривается среда с неоднородностями (например, с дефектами), эволюционирование материальной структуры можно рассматривать как движение неоднородностей (например, фазовой границы) в материальном многообразии. Этому движению отвечают обобщенные силы, называемые конфигурационными.

*Замечание 4.* Впервые понятие конфигурационной силы было использовано Эшелби [30, 31] и позволяло охарактеризовать эволюцию материальной структуры, развитие дефектов и границы фазовой трансформации, границы роста. ♠

Эволюция материальной структуры представляется как движение тела в материальном многообразии. Само тело рассматривается как подмногообразие материального многообразия. Эволюция тела может быть описана с использованием семейства  $\{\mathfrak{w}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  отображений

$$\mathfrak{w}_\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha. \quad (1.1.6)$$



Эшелби определял конфигурационную силу как обобщенную силу, соответствующую позиции дефекта, рассматриваемой как обобщенное перемещение. Им был введен тензор

$$\mathbf{e} = W\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{p},$$

названный впоследствии тензором энергии-импульса Эшелби. Здесь  $W$  — плотность упругой энергии,  $\mathbf{F}$  — тензор деформаций,  $\mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$  — тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор. Величина

$$\mathbf{f}^{\text{inh}} = \mathbf{e}\mathbf{N},$$

где  $\mathbf{N}$  — вектор внешней единичной нормали к площадке в отсчетной форме, имеет смысл поверхностной плотности силы, действующей на дефект — конфигурационной силы  $\mathbf{F}^{\text{inh}}$ :

$$\mathbf{F}^{\text{inh}} = \int_S \mathbf{f}^{\text{inh}} dS.$$

## 2. Материальное многообразие. Тело и его части как подмногообразие с краем

4°. В работе [1] рассматривалось тело «в целом», представленное гладким многообразием. Однако не всегда достаточно говорить об одном теле: как указывалось во Введении к настоящей Главе и как показано в примере с растущими цилиндрическими телами в [1], существуют эволюционные процессы (например, процессы роста или фазового перехода), в которых рассматривается семейство  $\{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  тел. Будем считать, что эти тела являются гладкими подмногообразиями некоторого *материального многообразия*  $\mathcal{M}$  размерности  $m$ , совпадающей с размерностью физического пространства. Край каждого из тел предполагается непустым<sup>3</sup> и множество таких тел обозначим через  $\text{Body}(\mathcal{M})$ . В телах выделим классы подмножеств, называемых их *частями*. Если тело  $\mathfrak{B} \in \text{Body}(\mathcal{M})$  представлено гладким  $n$ -мерным многообразием с краем, то его частью

<sup>3</sup>В случае  $m = 3$  это могут быть трехмерные тела, материальные поверхности и волокна.

$\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$  называется любое гладкое  $n$ -мерное подмногообразие  $\mathfrak{B}$  с непустым краем. Требование от части тела быть многообразием с краем связано с тем, что для формулировки баланса мощности на нем необходимо производить интегрирование внешней формы по краю многообразия. В дальнейшем множество всех частей данного тела  $\mathfrak{B}$  обозначается как  $\text{Part}(\mathfrak{B})$ . При необходимости этот класс может сужаться (например, могут рассматриваться только ориентируемые части тела).

*Замечание 5.* С формальной точки зрения, пустое множество можно считать многообразием любой размерности [29]. Но поскольку в механике континуума предполагается, что как тело, так и его части — множества мощности континуум (см. соображения, изложенные в Главе 1 работы [1]), мы всегда считаем, что как тело, так и любая его часть — непустые множества. ♠

5°. В связи с тем, что понятия многообразия с краем и подмногообразия не являются общепринятыми в механике континуума, приведем необходимые пояснения. Многообразие с краем вводится следующим образом [29]. Определим множество  $\mathbb{H}^n$ , называемое замкнутым верхним полупространством  $\mathbb{R}^n$ , равенством:  $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ . Топологическим  $n$ -мерным многообразием с краем называется топологическое пространство  $\mathfrak{M}$ , удовлетворяющее следующим условиям [29]:

а) для  $\mathfrak{M}$  выполняются аксиома отделимости Хаусдорфа и вторая аксиома счетности;

б) задано семейство  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  открытых подмножеств на  $\mathfrak{M}$ , таких, что:

$$(i) \mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha;$$

(ii) Для каждого  $\alpha \in I$  существует только один из двух гомеоморфизмов: **1)**  $\varphi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ , где  $O_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ; **2)**  $\varphi_\alpha : C_\alpha \rightarrow U_\alpha$ , где  $C_\alpha \subset \mathbb{H}^n$  — открытое множество в  $\mathbb{H}^n$ .

Определения карты и атласа в случае многообразия с краем такие же, как и в случае многообразий без края.

*Замечание 6.* Точки многообразия с краем классифицируются на внутренние и краевые [29]. Множество  $\partial\mathfrak{M}$  всех точек  $p \in \mathfrak{M}$ , прообразы которых относительно гомеоморфизмов  $\varphi_\alpha : C_\alpha \rightarrow U_\alpha$  принадлежат границе  $\mathbb{H}^n$ , то есть множеству  $\partial\mathbb{H}^n$  тех упорядоченных  $n$ -ок  $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{H}^n$ , у которых  $x^n = 0$ , называется краем многообразия  $\mathfrak{M}$ . Пространство  $\partial\mathfrak{M}$  есть  $(n - 1)$ -мерное многообразие (без края). Внутренняя точка  $\mathfrak{M}$  — это та точка  $p \in \mathfrak{M}$ , для которой найдется карта  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$ , такая, что либо  $\varphi^{-1}(U)$  открыто в  $\mathbb{R}^n$ , либо  $\varphi^{-1}(U)$  открыто в  $\mathbb{H}^n$ , причем

$\varphi^{-1}(U) \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$ . Множество всех внутренних точек  $\mathfrak{M}$  — внутренность,  $\text{Int } \mathfrak{M}$ . Отметим, что топологические многообразия без края — это те, у которых  $\partial\mathfrak{M} = \emptyset$ . Справедливо разбиение<sup>4</sup>:  $\mathfrak{M} = \text{Int } \mathfrak{M} \sqcup \partial\mathfrak{M}$ . ♠

Многообразия с краем аналогичным образом наделяются  $C^r$ -структурой, как это было сделано для многообразий без края. Небольшая особенность заключается в том, что гомеоморфизмы перехода действуют из множеств, открытых в  $\mathbb{H}^n$ , но не обязательно открытых в  $\mathbb{R}^n$ . Такие отображения называются гладкими, если каждая точка их области определения имеет открытую окрестность в  $\mathbb{R}^n$ , на которую соответствующий гомеоморфизм может быть распространен и полученное отображение будет гладким на этой окрестности.

*Замечание 7.* Отображение  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ , где  $S \subset \mathbb{R}^n$  — множество, не обязательно являющееся открытым, называется отображением класса  $C^r$ , с  $r \geq 1$ , если для любой точки  $p \in S$  существуют открытое в  $\mathbb{R}^n$  множество  $U$ , содержащее  $p$ , и отображение  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  класса  $C^r$ , такое, что  $F|_{U \cap S} = f$ . ♠

В работе [1] рассматривались регулярные конфигурации, представленные  $C^r$ -вложениями тела в физическое пространство. Образы этих отображений (формы тела) сами являлись гладкими многообразиями; их гладкая  $C^r$ -структура индуцировалась из тела посредством вложений. Это — вложенные  $C^r$ -подмногообразия. Теперь рассматривается ситуация, когда, с одной стороны,  $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ , а с другой,  $\mathfrak{B}_0$ , само по себе, является гладким многообразием с краем, с топологией подпространства,

<sup>4</sup>Символ  $\sqcup$  обозначает объединение непересекающихся множеств. С физической точки зрения для тела (или его части) равенство  $\mathfrak{M} = \text{Int } \mathfrak{M} \sqcup \partial\mathfrak{M}$  имеет следующий смысл. Для описания процесса на  $\mathfrak{M}$  нужно указать, что происходит на  $\text{Int } \mathfrak{M}$  и  $\partial\mathfrak{M}$ . На множестве  $\text{Int } \mathfrak{M}$  записываются уравнения баланса в дифференциальной (полевой) форме, а краевые условия записываются на  $\partial\mathfrak{M}$ . Эти условия выражают баланс рассматриваемой величины на  $\partial\mathfrak{M}$ , но в силу разных масштабов внутренности и края имеют усредненный вид. Однако может быть целесообразным рассмотреть процессы, происходящие в крае, на локальном уровне. Балансы, записанные в точках края и внутренности многообразия, описывают явления разного масштаба. Например, при рассмотрении контакта трехмерного тела (без края) и материальной поверхности, в трехмерном теле определен трехмерный тензор напряжений  $\sigma$ . Вместе с тем, на поверхности определены двумерные усилия  $\sigma_s$ . Для записи равновесия поверхности относительно тела, напрямую записать соотношение между  $\sigma$  и  $\sigma_s$  нельзя в силу того, что это тензоры, относящиеся к разному структурному уровню. Требуется дополнительные условия, которые определяют оператор вложения  $\text{In}$ . В таком случае, равновесие поверхности можно записать в виде:  $\sigma \cdot \mathbf{n} + \mathbf{b} = \text{In} [\text{div}_s \sigma_s]$ , где  $\mathbf{b}$  — объемная плотность сил, действующих на тело,  $\mathbf{n}$  — вектор внешней единичной нормали в актуальной конфигурации, а  $\text{div}_s$  — двумерная дивергенция.

индуцированной из  $\mathfrak{B}$ . При этом,  $C^r$ -структуры на  $\mathfrak{B}_0$  и  $\mathfrak{B}$  связаны между собой следующим требованием [29]: каноническая инъекция

$$j_{\mathfrak{B}_0} : \mathfrak{B}_0 \rightarrow \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X},$$

является  $C^r$ -вложением. В этом случае  $\mathfrak{B}_0$  будем называть  $C^r$ -подмногообразием  $\mathfrak{B}$  с краем. Дополнительно считаем, что  $\dim \mathfrak{B}_0 = \dim \mathfrak{B}$ . Аналогично, тело является  $C^r$ -подмногообразием  $\mathcal{M}$  с краем, но на этот раз  $\dim \mathfrak{B} \leq \dim \mathcal{M}$ .

В дальнейшем, если не указано иное, термин «многообразие» относится к многообразию без края.

6°. Материальное многообразие и физическое пространство являются равноправными объектами. Различие, навязанное извне, состоит лишь в том, что наблюдатель присутствует именно в физическом пространстве, что подчеркивается направлением действия конфигурации.

Пусть  $\{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  — семейство тел со свойством:  $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}_\beta$  при  $\alpha < \beta$ . Здесь  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  — открытый интервал и для всех  $\alpha \in \mathbb{I}$ , справедливо включение  $\mathfrak{B}_\alpha \in \text{Body}(\mathcal{M})$ . Не претендуя на общность, укажем, как можно определить понятие непрерывного поверхностного роста, используя материальное многообразие и понятие расслоения. Обозначим  $\mathfrak{B}^* = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} \mathfrak{B}_\alpha$ .

Это — подмножество  $\mathcal{M}$  и его можно рассматривать как соответствующее подпространство. Будем говорить, что имеется процесс непрерывного поверхностного роста, если задано расслоение  $\pi : \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathbb{I}$ , где  $\mathbb{I}$  — база, а  $\mathfrak{B}^*$  — тотальное пространство, типовой слой  $\Omega$  которого удовлетворяет условию: для любого  $\alpha \in \mathbb{I}$  пространства  $\partial \mathfrak{B}_\alpha$  и  $\Omega$  гомеоморфны.

7°. Рассмотрим подробнее соображения  $\mathfrak{Z}^\circ$ , п. iv), связанные с эволюцией материальной структуры. Будем считать, что задано некоторое однопараметрическое семейство упорядоченных пар  $\{(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ , где  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  — открытый интервал,  $\mathfrak{B}_\alpha \in \text{Body}(\mathcal{M})$  для всех  $\alpha \in \mathbb{I}$ , а  $\mathfrak{w}_\alpha$  — гладкие отображения вида (1.1.6), т.е.

$$\mathfrak{w}_\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha,$$

где  $\mathfrak{B} \in \text{Body}(\mathcal{M})$  — одно и то же для всех  $\alpha$ , и называется отсчетным многообразием эволюционной последовательности.

В физическом пространстве  $\mathfrak{P}$  введена шкала абсолютного времени, которому соответствует параметр  $t$ , пробегающий открытый интервал

$\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ . Предположим при этом, что задан закон пересчета временного параметра в эволюционный, т.е. задан диффеоморфизм

$$\mathfrak{Z} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{I}, \quad t \mapsto \mathfrak{Z}(t) = \alpha.$$

Это отображение должно быть задано вместе с однопараметрическим семейством  $\{(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ : в совокупности они определяют эволюционный процесс. Для рассмотрения движения некоторой материальной частицы  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$  определим отображение

$$\gamma_{\mathfrak{X}} : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \gamma_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \mathfrak{w}_\alpha(\mathfrak{X}).$$

Это есть ни что иное, как кривая на  $\mathcal{M}$ , а множество  $\gamma_{\mathfrak{X}}(\mathbb{I})$  — траектория  $\mathfrak{X}$  в материальном многообразии  $\mathcal{M}$ .

Темп  $\tilde{V}$  эволюционного процесса определяется следующим образом. Для материальной частицы  $\mathfrak{X}$  ее скорость  $\tilde{V}(\mathfrak{X}, \alpha_0)$  при значении эволюционного параметра  $\alpha_0 \in \mathbb{I}$  представлена касательным вектором к кривой  $\gamma_{\mathfrak{X}}$  в точке  $\gamma_{\mathfrak{X}}(\alpha_0)$ :  $\tilde{V}(\mathfrak{X}, \alpha_0) = (\gamma_{\mathfrak{X}}(\alpha_0), [\gamma]_{\mathfrak{X}})$ . Этот вектор принадлежит  $T_{\gamma_{\mathfrak{X}}(\alpha_0)}\mathcal{M}$ . Поле скоростей материальных точек при значении эволюционного параметра  $\alpha_0 \in \mathbb{I}$  есть отображение

$$\tilde{V}(\cdot, \alpha_0) : \mathfrak{B} \rightarrow T\mathcal{M}, \quad \mathfrak{B} \ni \mathfrak{X} \mapsto \tilde{V}(\mathfrak{X}, \alpha_0) \in T_{\gamma_{\mathfrak{X}}(\alpha_0)}\mathcal{M},$$

то есть сечение векторного расслоения над  $\mathfrak{B}$ . Таким образом,

$$\tilde{V} : \mathfrak{B} \times \mathbb{I} \rightarrow T\mathcal{M}, \quad (\mathfrak{X}, \alpha) \mapsto \tilde{V}(\mathfrak{X}, \alpha).$$

Отображение  $\tilde{V}$  является внутренней характеристикой быстроты эволюционного процесса, что следует из его определения.

Рассмотрим движение  $\{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ , согласованное с эволюционным процессом, т.е.  $\varkappa_t : \mathfrak{B}_{\mathfrak{Z}(t)} \rightarrow \mathfrak{P}$ . В этом случае, композиция

$$\tau : \mathfrak{B} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathfrak{P}, \quad \tau(\mathfrak{X}, t) = \varkappa_t \circ \mathfrak{w}_{\mathfrak{Z}(t)}(\mathfrak{X}) = \tilde{\varkappa}(\tilde{\mathfrak{w}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}(t)), t),$$

представляет движение частицы  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$  в физическом пространстве. Пусть  $\varphi$  — картирующее отображение в физическом пространстве в окрестности  $\tau(\mathfrak{X}, t)$ ,  $\xi$  — картирующее отображение  $\mathfrak{M}$  в окрестности  $\mathfrak{X}$ . Тогда координатное представление  $\tau$  будет иметь вид:

$$\tilde{\tau} = \varphi^{-1} \circ \varkappa_t \circ \mathfrak{w}_{\mathfrak{Z}(t)} \circ \sigma.$$

При фиксированном  $\mathfrak{X}$  отображение  $\tau(\mathfrak{X}, \cdot)$  представляет собой кривую в пространстве  $\mathfrak{P}$ .

### 3. Напряжения как ковекторзначные формы

8°. В классических курсах механики континуума напряжения определяются как векторные и тензорные плотности [32, 33], то есть величины, которые становятся истинными векторами или, соответственно, тензорами, в результате интегрирования по поверхностям, заданным в физическом (евклидовом) пространстве. В зависимости от способа описания, напряжения в простых материалах характеризуются полями напряжений Коши (истинными напряжениями)  $\sigma$ , Пиолы – Кирхгофа первого рода (номинальными напряжениями)  $\rho$ , Пиолы – Кирхгофа второго рода  $\mathcal{J}$  [33]. Здесь предполагается, что тело  $\mathfrak{B}$  содержится в некотором евклидовом пространстве. Если же оно отождествляется со своей отсчетной формой, то различие между указанными полями напряжений пропадает: соответствующие поля получаются одно из другого с помощью замены координат. При деформации  $\gamma$ , связь напряжений Коши и Пиолы в таком случае определяется преобразованием Пиолы [33]:

$$J\sigma = \rho \cdot \mathbf{F}^T,$$

где  $\mathbf{F} = \nabla\gamma$ , а  $J = \det \mathbf{F}$ . В последнем случае справедливы соотношения

$$\mathbf{t}(X, \mathbf{n}) = \langle \sigma(X), \mathbf{n} \rangle, \quad \mathbf{t}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{X}, \mathbf{N}) = \langle \rho(\mathfrak{X}), \mathbf{N} \rangle,$$

где  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t}_{\mathfrak{B}}$  — плотности векторных полей контактных сил, отнесенных к единице площади актуальной и отсчетной форм, а угловые скобки обозначают скалярное произведение в объемлющем евклидовом пространстве (напомним, что в классической формализации  $\mathbf{t}_{\mathfrak{B}}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{N}$  представляются векторами из одного и того же евклидова пространства). Классические способы определения этих плотностей предполагают евклидовость пространства, вмещающего отсчетную и актуальную формы тела. Результирующая контактная сила  $\mathcal{E}(\mathfrak{B}_0)$ , действующая на часть тела  $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ , в отсчетном и актуальном описаниях имеет представление:

$$\mathcal{E}(\mathfrak{B}_0) = \int_{\partial\mathfrak{B}_0} \rho \cdot \mathbf{N} dA_0 = \int_{\partial\gamma(\mathfrak{B}_0)} \sigma \cdot \mathbf{n} dA,$$

где  $dA_0$  — элемент площади [34]  $\partial\mathfrak{B}_0$ ,  $dA$  — элемент площади<sup>5</sup>  $\partial\gamma(\mathfrak{B}_0)$ ; интегралы понимаются в евклидовом смысле. При этом, между элементами площади  $dA_0$  и  $dA$ , соответствующими одной и той же точке тела, существует связь, выражаемая формулой Нансона [36]:

$$ndA = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA_0.$$

9°. Дальнейшие рассуждения относятся к случаю, когда как тело, так и физическое пространство, представлены гладкими многообразиями. Основным элементом построений будет служить мощность. В этой связи, сначала необходимо уточнить понятие скорости. Пусть  $\varkappa_t \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$  —  $C^r$ -регулярное движение. Используя отображение  $\chi_{\mathfrak{X}} : \mathbb{T} \rightarrow \varkappa_t(\mathfrak{X})$  (см. работу [1], Глава 1, п. 31°), в котором фиксирована точка  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ , определим поля материальной и пространственной скоростей [37].

(i) Скорость  $V(\mathfrak{X}, t_0)$  материальной точки  $\mathfrak{X}$  в момент времени  $t_0 \in \mathbb{T}$  определим как касательный вектор к кривой  $\chi_{\mathfrak{X}}$  в точке  $\varkappa_{t_0}(\mathfrak{X})$ :

$$V(\mathfrak{X}, t_0) = (\varkappa_{t_0}(\mathfrak{X}), [\chi_{\mathfrak{X}}]_{\varkappa_{t_0}(\mathfrak{X})}).$$

Этот вектор принадлежит  $T_{\varkappa_{t_0}(\mathfrak{X})}\mathfrak{P}$  и имеет следующее координатное представление:

$$V^i(\mathfrak{X}, t_0) = \left. \frac{d[\pi_m^i \circ \psi^{-1} \circ \chi_{\mathfrak{X}}(\tau)]}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $\psi$  — картирующее отображение в физическом пространстве.

Поле скоростей материальных точек в момент  $t_0 \in \mathbb{T}$  есть отображение

$$V(\cdot, t_0) : \mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} \ni \mathfrak{X} \mapsto V(\mathfrak{X}, t_0) \in T_{\varkappa_{t_0}(\mathfrak{X})}\mathfrak{P},$$

то есть сечение векторного расслоения над  $\mathfrak{B}$ . Таким образом,

$$V : \mathfrak{B} \times \mathbb{T} \rightarrow T\mathfrak{P}, \quad (\mathfrak{X}, t) \mapsto V(\mathfrak{X}, t).$$

Отметим, что  $V(\mathfrak{X}, \cdot)$  определяет скорость движения фиксированной материальной точки  $\mathfrak{X}$  вдоль траектории — образа кривой  $\chi_{\mathfrak{X}}$ .

---

<sup>5</sup>Предполагается, что в процессе деформирования тело не испытывает самоприкосновения. Поэтому справедливо равенство  $\gamma(\partial\mathfrak{B}_0) = \partial\gamma(\mathfrak{B}_0)$ . Проблеме инъективности при самоприкосновениях посвящена, например, работа [35].

(ii) В силу определения отображений  $\varkappa_t$ , они обратимы (здесь требуется регулярность) при любых значениях параметра  $t \in \mathbb{T}$ . Определим обратное движение, как семейство обратных конфигураций  $\widehat{\varkappa}_t^{-1} : \varkappa_t(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}$ . Тогда пространственное поле скоростей

$$v(\cdot, t) = V(\cdot, t) \circ \widehat{\varkappa}_t^{-1} : \varkappa_t(\mathfrak{B}) \rightarrow T\mathfrak{P}$$

есть локальное сечение касательного расслоения  $T\mathfrak{P}$ ,  $t \in \mathbb{T}$ . Имеем отображение

$$v : \varkappa_t(\mathfrak{B}) \times \mathbb{T} \rightarrow T\mathfrak{P}, \quad (X, t) \mapsto v(X, t).$$

**Замечание 8.** Вернемся к п. 7° и рассмотрим отображение  $\tau$ . Применением к нему рассуждений, аналогичных п. (i), определяется отображение  $V_{\text{tot}} : \mathfrak{B} \times \mathbb{T} \rightarrow T\mathfrak{P}$ , которое будем называть абсолютной материальной скоростью (total material velocity). В координатном представлении, согласно правилу произведения сложной функции,

$$V_{\text{tot}}^i = V^i + F_{:j}^i \tilde{V}^j \mathfrak{Z}'(t),$$

или,  $V_{\text{tot}} = V + \mathfrak{Z}'(t) \mathcal{F} \tilde{V}$ . Здесь  $V$  — материальная скорость, определенная в п. (i), а  $\mathcal{F} = T\varkappa_t$  — градиент деформации.

В классической механике континуума все  $\mathfrak{w}_\alpha$  — тождественные отображения,  $V_{\text{tot}} = V$ . ♠

**10°.** Перейдем теперь к основным рассуждениям настоящего раздела. Рассмотрим случай, когда тело  $\mathfrak{B}$  и физическое пространство  $\mathfrak{P}$  представлены гладкими ориентируемыми многообразиями с римановыми метриками  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{g}$ . При этом в качестве частей тела будем рассматривать более узкий класс  $\text{OrPart}(\mathfrak{B}) \subset \text{Part}(\mathfrak{B})$ , определяемый требованием, что все его элементы ориентируемы. Это позволяет использовать соображения, высказанные в Главе 3, п. 91° и 99°. Пусть  $\mathfrak{B}_0 \in \text{OrPart}(\mathfrak{B})$  — произвольная часть тела.

В рассматриваемом случае связности на теле и физическом пространстве неевклидовы. В этой связи, определение результирующей силы, действующей на часть тела, требует деликатного подхода. Мы используем подход, указанный во Введении (формула (1.1.5)). Этот подход основан на том, что сила определяется как ковектор, действие которого на вектор скорости дает физическую величину — мощность.

**Замечание 9.** Сосредоточенную силу, действующую на частицу  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$  в конфигурации  $\varkappa$ , можно определить как элемент  $T_{\varkappa(\mathfrak{X})}\mathfrak{P}$ . Действие силы  $f \in T_{\varkappa(\mathfrak{X})}\mathfrak{P}$  на вектор скорости  $V(\mathfrak{X})$ , определенный в 9°, дает мощность:

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}(V) = \langle f, V(\mathfrak{X}) \rangle.$$





Наличие ориентации на теле, его частях и физическом пространстве позволяет говорить о мощности, развиваемой объемной силой. Если  $\theta$  — форма объема на  $\mathfrak{P}$ ,  $\theta_0$  — форма объема на  $\mathfrak{B}$ , то то для конфигурации  $\varkappa$  и произвольной части тела  $\mathfrak{B}_0 \in \text{OrPart}(\mathfrak{B})$  полагаем, в физическом пространстве,

$$\mathcal{R}_b(\varkappa) = \int_{\varkappa(\mathfrak{B}_0)} \langle v, b \rangle \theta, \quad (1.3.1)$$

а на теле,

$$\mathcal{R}_b(\varkappa) = \int_{\mathfrak{B}_0} \langle V, b_0 \rangle \theta_0. \quad (1.3.2)$$

Здесь  $b \in \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{P})$  представляет собой плотность объемной силы, действующей на наблюдаемые объекты в физическом пространстве а  $b_0 = b \circ \varkappa$ . Формулы (1.3.1) и (1.3.2) представляют одну и ту же физическую величину — мощность, развиваемую объемной силой, в актуальном и отсчетном описаниях.

**11°.** В рамках настоящей работы удобно воспользоваться обобщением понятия тензорной плотности, которое приводит к представлению напряжений как ковекторнозначных форм [37, 38]. Введем аналоги тензора напряжений Коши  $\sigma : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{P} \otimes T^*\mathfrak{P}$ , Пиолы–Кирхгофа первого рода  $\rho : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{P} \otimes T^*\mathfrak{B}$  и Пиолы–Кирхгофа второго рода  $\mathcal{J} : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{B} \otimes T^*\mathfrak{B}$ . В классическом случае это соответствует тому, что тело  $\mathfrak{B}$  содержится в некотором евклидовом пространстве. Если же оно отождествляется со своей отсчетной формой, то различие между указанными полями напряжений пропадает: соответствующие поля получают одно из другого с помощью замены координат.

Согласно методологии, изложенной в работе [38], полю напряжений Коши соответствует ковекторнозначная форма (символ  $*_2$  определен в Главе 3, п. 103°)

$$\mathcal{T} \in \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{P}) \otimes \mathcal{F}_{m-1}^s(\mathfrak{P}), \quad \mathcal{T} = *_2\sigma,$$

а полям напряжений Пиолы–Кирхгофа<sup>6</sup> — ковекторнозначные формы

$$\mathcal{P} \in \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{P}) \otimes \mathcal{F}_{n-1}^s(\mathfrak{B}), \quad \mathcal{S} \in \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{B}) \otimes \mathcal{F}_{n-1}^s(\mathfrak{B}), \quad \mathcal{P} = *_2\rho, \quad \mathcal{S} = *_2\mathcal{J}.$$

<sup>6</sup>По определению,  $\mathcal{P}$  — двухточечный тензор.

Физическая интерпретация ковекторзначных форм напряжений состоит в следующем. Канонические спаривания слева ковекторнозначных форм  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{S}$  с полем скорости  $v$  дают классические скалярнозначные  $(k - 1)$ -формы, где  $k$  — размерность соответствующего пространства ( $k = n$  для  $\mathfrak{B}$  и  $k = m$  для  $\mathfrak{P}$ ); интегралы от этих форм по поверхностям  $S$ ,  $\varkappa(S)$ , вложенным в  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{P}$  соответственно, дают мощность  $\mathcal{R}$ , развиваемую на этих поверхностях [38]:

$$\mathcal{R}_t(\varkappa) = \int_{\varkappa(S)} \langle v, \mathcal{T} \rangle, \quad (1.3.3)$$

$$\mathcal{R}_t(\varkappa) = \int_S \langle V, \mathcal{P} \rangle. \quad (1.3.4)$$

Формулы (1.3.3) и (1.3.4) представляют одну и ту же физическую величину — мощность, развиваемую контактной силой, в актуальном и отсчетном описаниях. Аналоги этих формул в терминах  $\sigma$ , на ориентируемой поверхности  $\varkappa(S)$ , погруженной в евклидово пространство и снабженной полем единичных нормалей  $n$ , имеют вид

$$\mathcal{R} = \int_{\varkappa(S)} \mathcal{G}(v, t) dA = \int_{\varkappa(S)} \mathcal{G}(v, \langle \sigma, n \rangle) dA.$$

**12°.** Соотношение, аналогичное соотношению Пиолы, для  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{P}$  определяется частичным «pullback»-отображением (используется понятие «pullback» формы, определенное в Главе 3, п. 89°) «геометрической» части этих объектов:

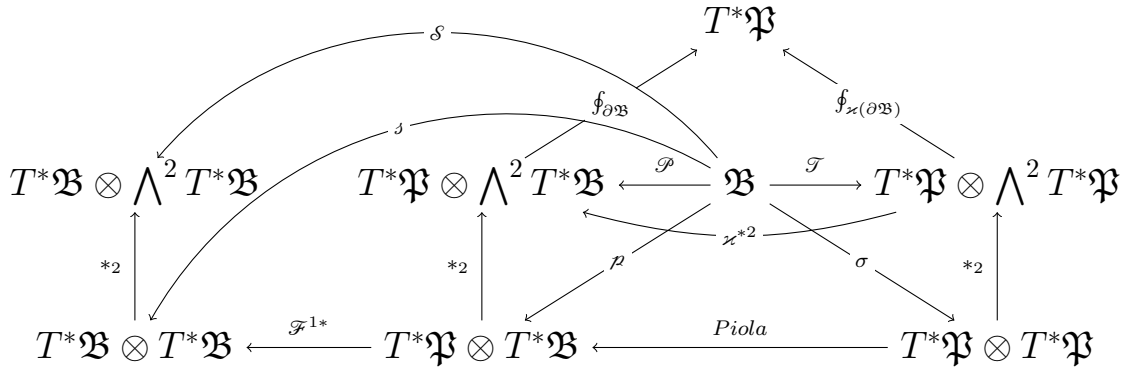
$$\mathcal{P} = \varkappa^{*2} \mathcal{T},$$

где отображение  $\varkappa^{*2} : T^* \varkappa(\mathfrak{B}) \otimes \wedge^{m-1} T^* \varkappa(\mathfrak{B}) \rightarrow T^* \varkappa(\mathfrak{B}) \otimes \wedge^{n-1} T^* \mathfrak{B}$  определено равенством:

$$\varkappa^{*2}(\vartheta \otimes \omega) = \vartheta \otimes \varkappa^* \omega.$$

Взаимосвязь всех полей напряжений для случая, когда тело и физическое пространство имеют евклидову структуру и  $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathfrak{P} = 3$ ,

иллюстрирует диаграмма



На диаграмме схематично изображены соотношения  $\mathcal{S} = *_2 \mathcal{J}$ ,  $\mathcal{P} = *_2 \rho$  и  $\mathcal{T} = *_2 \sigma$ . Отметим, что все поля действуют из  $\mathcal{B}$ . Показан геометрический смысл оператора  $*_2$ , согласно которому  $T^*\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{Y}$  переводится в  $T^*\mathcal{X} \otimes \Lambda^2 T^*\mathcal{Y}$ . Здесь для краткости используется один и тот же символ  $*_2$ , хотя на самом деле, для  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{P}$  эти отображения различны. Отображение  $\kappa^{*2}$ , как видно из диаграммы, осуществляет «pullback» той части объекта, которая соответствует 2-форме в физическом пространстве. Оно соответствует классическому преобразованию Пиолы тензора напряжений Коши в тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа. Если тело и физическое пространство имеют евклидову структуру, то интеграл от ковекторзначной формы из  $T^*\mathcal{X} \otimes \Lambda^2 T^*\mathcal{Y}$  есть ни что иное, как поверхностный интеграл от ковекторной плотности. Результатом интегрирования будет ковектор результирующей контактной силы, принадлежащий  $T^*\mathcal{X}$ , что и показано на диаграмме. На диаграмме схематично изображено действие отображения  $\mathcal{F}^{1*}$ . Оно действует на левую часть произведения  $T^*\mathcal{P} \otimes T^*\mathcal{B}$  как отображение  $\mathcal{F}^*$ , определенное в Главе 2 работы [1], п. 56°, оставляя правую часть такой же. С его помощью устанавливается связь между классическими напряжениями Пиолы–Кирхгофа первого и второго родов:  $\mathcal{J} = \mathcal{F}^{1*} \rho$ .

13°. Рассмотрим следующий пример. Пусть тензор  $\sigma$  определяется равенством:

$$\sigma = -\mathbf{p}\mathcal{F}^{b_p} + \mu\mathcal{B}^{b_p},$$

где  $\mu$  — константа,  $\mathcal{F}$  — единичный тензор в физическом пространстве,  $\mathcal{B}$  — левый тензор Коши–Грина, определенный в [37] (см. также работу [1], Глава 2, п. 59°), а  $\mathbf{p}$  — скалярнозначная функция (гидростатическая компонента). Это соотношение является аналогом определяющего

соотношения для несжимаемого Нео-Гуковского материала (нео-Нookean material). Так как единичный тензор  $\mathcal{I}$  и левый тензор Коши – Грина  $\mathcal{B}$  могут быть представлены разложениями:

$$\mathcal{I} = \partial_{X^j} \otimes dX^j, \quad \mathcal{B} = G^{im} g_{lj} F_{.m}^{l \cdot} F_{.i}^{k \cdot} \partial_{X^k} \otimes dX^j,$$

где  $(\partial_{X^k})$  и  $(dX^k)$  – поля реперов и кореперов в физическом пространстве  $\mathfrak{P}$ , то (см. 82°)

$$\mathcal{I}^{b_p} = g_{sj} dX^s \otimes dX^j, \quad \mathcal{B}^{b_p} = G^{im} g_{ks} g_{lj} F_{.m}^{l \cdot} F_{.i}^{k \cdot} dX^s \otimes dX^j.$$

Таким образом, координатное представление для  $\sigma$  имеет вид:

$$\sigma = \sigma_{sj} dX^s \otimes dX^j = \{-\mathfrak{p}g_{sj} + \mu G^{im} g_{ks} g_{lj} F_{.m}^{l \cdot} F_{.i}^{k \cdot}\} dX^s \otimes dX^j.$$

Согласно изложенному выше,  $\mathcal{T} = *_2\sigma = \sigma_{sj} dX^s \otimes (*dX^j)$ . Согласно формуле (3.4.2),

$$*dX^j = \sqrt{g} \sum_{a=1}^m (-1)^{a-1} g^{ja} dX^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX^a} \wedge \dots \wedge dX^m,$$

поэтому в рассматриваемом случае имеем равенство:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \sqrt{g} \sum_{a=1}^m (-1)^{a-1} g^{ja} \{-\mathfrak{p}g_{sj} + \mu G^{im} g_{ks} g_{lj} F_{.m}^{l \cdot} F_{.i}^{k \cdot}\} \times \\ \times dX^s \otimes (dX^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX^a} \wedge \dots \wedge dX^m). \end{aligned}$$

Это равенство показывает, что ковекторзначная форма  $\mathcal{T}$  является, помимо всего прочего, функцией двух метрик  $\mathcal{g}$  и  $\mathcal{E}$ .

**Замечание 10.** В случае  $m = 3$  выражение для  $*dX^j$  имеет вид:

$$*dX^j = g^{j1} \sqrt{g} dX^2 \wedge dX^3 - g^{j2} \sqrt{g} dX^1 \wedge dX^3 + g^{j3} \sqrt{g} dX^1 \wedge dX^2.$$



Так как  $\mathcal{P} = \varkappa^* \mathcal{T}$ , то

$$\mathcal{P} = \varkappa^* \mathcal{T} = \varkappa^* \{\sigma_{sj} dX^s \otimes (*dX^j)\} = \sigma_{sj} dX^s \otimes \varkappa^* (*dX^j).$$

Поэтому, имеем следующее представление для  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \sqrt{g} \sum_{a=1}^m (-1)^{a-1} g^{ja} \{ -\mathfrak{p}g_{sj} + \mu G^{im} g_{ks} g_{lj} F_{\cdot m}^l F_{\cdot i}^k \} \times \\ \times dX^s \otimes \varkappa^*(dX^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX^a} \wedge \dots \wedge dX^m), \end{aligned}$$

где  $(n-1)$ -форма  $\varkappa^*(dX^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX^a} \wedge \dots \wedge dX^m)$  определена на  $\mathfrak{B}$ , а к скалярным функциям, входившим в  $*(dX^j)$ , применяется справа композиция с  $\varkappa$ .

**14°.** Если  $\theta$  — форма объема на  $\mathfrak{P}$ ,  $\theta_0$  — форма объема на  $\mathfrak{B}$ , то для движения  $t \mapsto \varkappa_t$  и произвольной части тела  $\mathfrak{B}_0 \in \text{OrPart}(\mathfrak{B})$  полагаем, с учетом формул (1.3.2), (1.3.1), (1.3.4) и (1.3.3), что мощность в отсчетном и актуальном описаниях, развиваемая на скорости  $V$ , имеют вид:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_b + \mathcal{R}_t = \int_{\mathfrak{B}_0} \langle V, b_0 \rangle \theta_0 + \int_{\partial \mathfrak{B}_0} \langle V, \mathcal{P} \rangle, \quad (1.3.5)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_b + \mathcal{R}_t = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \langle v, b \rangle \theta + \int_{\varkappa_t(\partial \mathfrak{B}_0)} \langle v, \mathcal{T} \rangle, \quad (1.3.6)$$

где  $b_0 = b \circ \varkappa_t$ . Эти выражения определяют результирующую силу через развиваемую ею мощность.

**15°.** Выберем в материальном многообразии  $\mathfrak{B}$  и физическом пространстве  $\mathfrak{P}$  поля реперов  $(E_i)$  и  $(e_j)$  соответственно (вместо определения полей на  $\mathfrak{P}$  их можно определить на  $\varkappa(\mathfrak{B})$ ). Тогда  $\sigma = \sigma_{ab} \dot{\cdot} e^a \otimes e^b$ ,  $\mathcal{P} = p_{a\beta} \dot{\cdot} e^a \otimes E^\beta$ , и поэтому координатные выражения для  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{P}$  имеют вид:

$$\mathcal{T} = \sigma_{ab} \dot{\cdot} e^a \otimes (*e^b), \quad \mathcal{P} = p_{a\beta} \dot{\cdot} e^a \otimes (*E^\beta).$$

Если положить, что  $\mathfrak{P}$  имеет евклидову связность, то можно говорить о главном векторе всех контактных сил, действующих на поверхность  $S$

(результатирующий вектор):

$$\begin{aligned} f &= \int_{\varkappa(S)} \mathcal{T} = \int_{\varkappa(S)} \sigma_{ab} \dot{e}^a \otimes (*e^b) = e^a \otimes \int_{\varkappa(S)} \sigma_{ab} \dot{e}^b = \\ &= \int_S \mathcal{P} = \int_S p_{a\beta} \dot{e}^a \otimes (*E^\beta) = e^a \otimes \int_S p_{a\beta} \dot{E}^\beta. \end{aligned}$$

При этом, в качестве соответствующих реперов взяты постоянные поля, поэтому можно говорить об их вынесении из под знака интеграла.

**16°.** Использование определений п. **9°**, формул (1.3.5) и (1.3.6) позволяет сформулировать баланс мощности в терминах интегралов по образу тела в физическом пространстве и по самому телу, то есть записать аналоги выражений для баланса мощности в отчетном и актуальном описании.

Пусть  $t \mapsto \varkappa_t$  — движение. Баланс мощности произвольной части тела  $\mathfrak{B}_0 \in \text{OrPart}(\mathfrak{B})$ , с выбранными формой объема  $\mu_0$  на  $\mathfrak{B}_0$  и соответствующей ей формой объема  $\mu$  на  $\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)$ , записывается следующим образом (в физическом пространстве)

$$\int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \langle v, b \rangle \rho \mu + \int_{\varkappa_t(\partial\mathfrak{B}_0)} \langle v, \mathcal{T} \rangle = \frac{d}{dt} \left( \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left( \frac{1}{2} \langle v^b, v \rangle + e \right) \rho \mu \right), \quad (1.3.7)$$

или, эквивалентно (на теле),

$$\int_{\mathfrak{B}_0} \langle V, b_0 \rangle \rho_0 \mu_0 + \int_{\partial\mathfrak{B}_0} \langle V, \mathcal{P} \rangle = \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathfrak{B}_0} \left( \frac{1}{2} \langle V^b, V \rangle + e_0 \right) \rho_0 \mu_0 \right). \quad (1.3.8)$$

Здесь  $\langle v^b, v \rangle = \mathcal{g}(v, v)$ ,  $\langle V^b, V \rangle = (\mathcal{g} \circ \varkappa_t)(V, V)$ ,  $e$  — массовая плотность свободной энергии в физическом пространстве, а  $b$  — плотность массовых сил, наблюдаемая в физическом пространстве,  $b_0 = b \circ \varkappa_t$ ,  $e_0 = e \circ \varkappa_t$ . Предполагается, что тело и любая его часть обладают массой. В свою очередь, по теореме Радона–Никодима [28], масса представляется в виде интеграла по мере с коэффициентом  $\rho$  — плотностью тела в физическом пространстве. Этой плотности соответствует материальная

плотность  $\rho_0 = \rho \circ \varkappa_t$ . Векторные поля  $v$  и  $V$  — поля скорости, определенные в  $\mathfrak{D}^\circ$ , п. (i), (ii). Отметим, что интегралы

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \rho \langle v^b, v \rangle \mu = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{B}_0} \rho_0 \langle V^b, V \rangle \mu_0$$

представляют собой кинетическую энергию, соответствующую движению  $t \mapsto \varkappa_t$  тела.

*Замечание 11.* В классическом случае формулы (1.3.7) и (1.3.8) имеют вид:

$$\int_{\partial \mathfrak{B}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \frac{d}{dt} \left( \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + e \right) dV \right),$$

$$\int_{\partial \mathfrak{B}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} dA_0 + \int_{\mathfrak{B}} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{V} dV_0 = \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathfrak{B}_0} \rho_0 \left( \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 + e_0 \right) dV_0 \right).$$



**17°.** Получим представление тензора Эшелби в рамках развиваемой теории. Для этого рассмотрим на материальном многообразии уравнение равновесия:

$$\text{Div } \mathcal{P}^{1\sharp 2\sharp} + \rho_0 b_0^\sharp = 0. \quad (1.3.9)$$

Здесь  $\mathcal{P} : \mathfrak{B} \rightarrow T^*\mathfrak{P} \otimes T^*\mathfrak{B}$  — тензор Пиолы – Кирхгофа I рода,  $\mathcal{P}^{1\sharp 2\sharp} = p^{a\kappa} \partial_{X^a} \otimes \partial_{x^\kappa}$  a<sup>7</sup>

$$\text{Div } \mathcal{P}^{1\sharp 2\sharp} = \left[ \partial_\kappa p^{a\kappa} + p^{a\kappa} \Gamma_{\cdot\kappa\beta}^{\beta\cdot\cdot} + p^{b\kappa} F_{\cdot\kappa}^{c\cdot} \gamma_{\cdot bc}^{a\cdot\cdot} \right] \partial_{X^a},$$

где  $\Gamma_{\cdot kl}^{q\cdot\cdot}$  и  $\gamma_{\cdot kl}^{q\cdot\cdot}$  — коэффициенты связности Леви-Чивиты на  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{P}$  соответственно<sup>8</sup>.

Применим к обеим частям уравнения (1.3.9) свертку с транспонированным градиентом деформации  $\mathcal{F}^T = (\mathcal{F}^T)^i_{\cdot j} \partial_{x^i} \otimes dX^j$ :

$$\mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div } \mathcal{P} + \rho_0 \mathcal{F}^T \lrcorner b_0^\sharp = 0.$$

<sup>7</sup>Согласно [37], ковариантная производная двухточечного тензора  $\mathcal{Q} = Q^{a\kappa} \partial_{X^a} \otimes \partial_{x^\kappa}$  имеет вид  $\nabla \mathcal{Q} = Q^{a\kappa} \lrcorner_{|\beta} \partial_{X^a} \otimes \partial_{x^\kappa} \otimes dX^\beta$ , где  $Q^{a\kappa} \lrcorner_{|\beta} = \partial_\beta Q^{a\kappa} + Q^{a\lambda} \Gamma_{\cdot\lambda\beta}^{\kappa\cdot\cdot} + Q^{b\kappa} F_{\cdot\beta}^{c\cdot} \gamma_{\cdot bc}^{a\cdot\cdot}$ . Отсюда  $\text{Div } \mathcal{Q} = Q^{a\kappa} \lrcorner_{|\kappa}$ .

<sup>8</sup>Для удобства в настоящем пункте придерживаемся следующего соглашения. В координатных представлениях полей греческие индексы соответствуют материальному многообразию, а латинские — физическому пространству.

Для дальнейшего определим билинейную операцию  $\lrcorner$ , обладающую следующим свойством:

$$\partial_{x^\alpha} \otimes dX^a \otimes d\mathfrak{X}^\beta \lrcorner \partial_{X^b} \otimes \partial_{x^\kappa} = \langle dX^a, \partial_{X^b} \rangle \langle d\mathfrak{X}^\beta, \partial_{x^\kappa} \rangle \partial_{x^\alpha}.$$

Справедлива формула:

$$\text{Div}(\mathcal{F}^T \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#}) = \mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div} \mathcal{P}^{1\#2\#} + (\nabla \mathcal{F}^T) \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#}. \quad (1.3.10)$$

Действительно,  $\mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div} \mathcal{P}^{1\#2\#}$  в координатном представлении имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div} \mathcal{P}^{1\#2\#} &= \\ &= \left( (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} \partial_{x^\beta} p^{a\beta} + (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} p^{a\lambda} \Gamma_{\cdot \lambda \beta}^{\beta \cdot} + (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} p^{b\beta} F_{\cdot \beta}^{c \cdot} \gamma_{\cdot bc}^{a \cdot} \right) \partial_{x^A}. \end{aligned}$$

Далее, так как  $\mathcal{F}^T \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#} = (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} p^{a\beta} \partial_{x^\kappa} \otimes \partial_{x^\beta}$ , то используя формулу для дивергенции тензора второго ранга [37], приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} \text{Div}(\mathcal{F}^T \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#}) &= \\ &= \left( \partial_{x^\beta} \{ (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} p^{a\beta} \} + (\mathcal{F}^T)^{\lambda \cdot} p^{a\beta} \Gamma_{\cdot \lambda \beta}^{\kappa \cdot} + (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} p^{a\lambda} \Gamma_{\cdot \lambda \beta}^{\beta \cdot} \right) \partial_{x^\kappa}. \end{aligned}$$

Таким образом, разность  $\text{Div}(\mathcal{F}^T \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#}) - \mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div} \mathcal{P}^{1\#2\#}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{Div}(\mathcal{F}^T \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#}) - \mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div} \mathcal{P}^{1\#2\#} &= \\ &= \left( p^{a\beta} \partial_{x^\beta} (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} + (\mathcal{F}^T)^{\lambda \cdot} p^{a\beta} \Gamma_{\cdot \lambda \beta}^{\kappa \cdot} - (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} p^{b\beta} F_{\cdot \beta}^{c \cdot} \gamma_{\cdot bc}^{a \cdot} \right) \partial_{x^\kappa}. \end{aligned}$$

Осталось показать, что правая часть полученного равенства равна

$$(\nabla \mathcal{F}^T) \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#}.$$

Ковариантная производная двухточечного тензора  $\mathcal{F}^T$  имеет следующее координатное представление [37]:

$$\nabla \mathcal{F}^T = \left( \partial_{x^\beta} (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} + (\mathcal{F}^T)^{\lambda \cdot} \Gamma_{\cdot \lambda \beta}^{\kappa \cdot} - (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} \gamma_{\cdot s \cdot}^{s \cdot} F_{\cdot \beta}^{l \cdot} \right) \partial_{x^\kappa} \otimes dX^a \otimes d\mathfrak{X}^\beta.$$

Приходим к координатному представлению  $(\nabla \mathcal{F}^T) \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#}$ :

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{F}^T) \lrcorner \mathcal{P}^{1\#2\#} &= \\ &= \left( p^{a\beta} \partial_{x^\beta} (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} + p^{a\beta} (\mathcal{F}^T)^{\lambda \cdot} \Gamma_{\cdot \lambda \beta}^{\kappa \cdot} - p^{a\beta} (\mathcal{F}^T)^{\kappa \cdot} \gamma_{\cdot s \cdot}^{s \cdot} F_{\cdot \beta}^{l \cdot} \right) \partial_{x^\kappa}, \end{aligned}$$



которое в точности совпадает с координатным представлением

$$\text{Div}(\mathcal{F}^T \lrcorner \rho^{1\sharp 2\sharp}) - \mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div} \rho^{1\sharp 2\sharp}.$$

Тем самым, формула (1.3.10) доказана. Используя ее для уравнения

$$\mathcal{F}^T \lrcorner \text{Div} \rho^{1\sharp 2\sharp} + \rho_0 \mathcal{F}^T \lrcorner b_0^\sharp = \rho_0 \mathcal{F}^T \lrcorner \dot{V},$$

приходим к равенству

$$\text{Div}(\mathcal{F}^T \lrcorner \rho^{1\sharp 2\sharp}) - (\nabla \mathcal{F}^T) \lrcorner \rho^{1\sharp 2\sharp} + \rho_0 \mathcal{F}^T \lrcorner b_0^\sharp = 0.$$

Вычтя из обеих частей полученного уравнения слагаемое<sup>9</sup>  $(\nabla_{\mathfrak{B}} W)^\sharp$ , где  $W : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$  — плотность упругой энергии в точках  $\mathfrak{B}$ , получаем

$$\text{Div}(\mathcal{F}^T \lrcorner \rho^{1\sharp 2\sharp}) - (\nabla_{\mathfrak{B}} W)^\sharp - (\nabla \mathcal{F}^T) \lrcorner \rho^{1\sharp 2\sharp} + \rho_0 \mathcal{F}^T \lrcorner b_0^\sharp = -(\nabla_{\mathfrak{B}} W)^\sharp. \quad (1.3.11)$$

Обозначим через  $\mathcal{F}$  единичный тензор на  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathcal{F} = \partial_{x^\kappa} \otimes dX^\kappa$ . Тогда  $\mathcal{F}^\sharp = G^{\kappa\beta} \partial_{x^\kappa} \otimes \partial_{x^\beta}$ . Так как координатное представление ковариантной производной  $\nabla_{\mathfrak{B}}(W \mathcal{F}^\sharp)$  имеет вид

$$(W \mathcal{F}^\sharp)_{\cdot\cdot|\beta}^{\alpha\kappa\cdot} = \partial_{x^\beta} \{W G^{\alpha\kappa}\} + W G^{\tau\kappa} \Gamma_{\cdot\tau\beta}^{\alpha\cdot\cdot} + W G^{\alpha\tau} \Gamma_{\cdot\tau\beta}^{\kappa\cdot\cdot},$$

откуда, в силу равенства  $\nabla_{\mathfrak{B}} \mathcal{G} = 0$ , получаем, что

$$\text{Div}(W \mathcal{F}^\sharp) = \{G^{\alpha\beta} \partial_{x^\beta} W\} \partial_{x^\alpha} = (\nabla_{\mathfrak{B}} W)^\sharp.$$

Это позволяет переписать уравнение (1.3.11) в виде:

$$\text{Div} e + (\nabla \mathcal{F}^T) \lrcorner \rho^{1\sharp 2\sharp} - \rho_0 \mathcal{F}^T \lrcorner b_0^\sharp = (\nabla_{\mathfrak{B}} W)^\sharp, \quad (1.3.12)$$

где поле

$$e = W \mathcal{F}^\sharp - \mathcal{F}^T \lrcorner \rho^{1\sharp 2\sharp}$$

представляет тензор Эшелби. Как отмечалось во Введении, в классическом случае ему соответствует выражение  $e = W \mathcal{F} - \mathcal{F}^T \rho$ .

**Замечание 12.** В зависимости от удобства, тензором Эшелби называют как  $e$ , так и  $e^{1b2b}$ . Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении тензоров напряжений

<sup>9</sup>Отметим, что  $\nabla_{\mathfrak{B}} W$  — это ковектор, а  $(\nabla_{\mathfrak{B}} W)^\sharp$  — вектор. Именно его в классическом анализе называют градиентом.

Коши и Пиолы – Кирхгофа. Такие представления эквивалентны. При этом аналогом внешней нормали выступает поле аннуляторов пространства  $T\mathfrak{M}$ , т.е. сечение  $\nu$  расслоения ковекторов  $T^*\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ , обращающееся в нуль на сечениях  $T\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ . ♠

Пусть  $\widetilde{W}$  — представление упругой энергии как функции точки и полей, заданных на многообразии  $\mathfrak{B}$ . При этом,  $W(\mathfrak{X}) = \widetilde{W}(\mathfrak{X}; \mathcal{F}(\mathfrak{X}), \dots)$ . Следуя [36], определим  $\nabla_{\mathfrak{B}}W|_{\text{impl}}$  равенством<sup>10</sup>:

$$\nabla_{\mathfrak{B}}W|_{\text{impl}} = \nabla_{\mathfrak{B}}W - \nabla_{\mathfrak{B}}W|_{\text{expl}},$$

где  $\nabla_{\mathfrak{B}}W|_{\text{expl}} = \nabla_{\mathfrak{B}}\widetilde{W}(\mathfrak{X}; \mathcal{F}(\mathfrak{X}_0), \dots)\Big|_{\mathfrak{X}_0=\mathfrak{X}}$ . В этом случае, уравнение (1.3.12) можно переписать в виде [36]:

$$-\text{Div } e = f_{\text{int}}^{\#} + f_{\text{ext}}^{\#} + f_{\text{inh}}^{\#},$$

где  $f_{\text{int}}^{\#} = (\nabla \mathcal{F}^{\text{T}}) \lrcorner \rho^{1\#2\#} - \nabla_{\mathfrak{B}}W|_{\text{impl}}^{\#}$  — внутренняя сила,  $f_{\text{ext}}^{\#} = -\rho_0 \mathcal{F}^{\text{T}} \lrcorner b_0^{\#}$  — массовая сила,  $f_{\text{inh}}^{\#} = -\nabla_{\mathfrak{B}}W|_{\text{expl}}^{\#}$  — сила Эшелби.

**18°.** Формулы (1.3.7) и (1.3.8) выражают баланс мощности в материальном и пространственном описаниях. Вместе с тем, при наличии эволюционного процесса, определяемого семейством  $\{(\mathfrak{B}_{\alpha}, \mathfrak{w}_{\alpha})\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  и отображением  $\mathfrak{Z}$  (см. 7°), можно записать баланс мощности, развиваемой при изменении материальной структуры тела (эволюции дефектов и фазовых границ). Такое соотношение будет энергетически характеризовать быстроту протекания эволюционного процесса и предлагается в следующем виде:

$$\int_{\mathfrak{B}_0} \langle \tilde{V}, b_0 \rangle \rho_0 \mu_0 + \int_{\partial \mathfrak{B}_0} \langle \tilde{V}, \mathcal{E} \rangle = \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathfrak{B}_0} \left( \frac{1}{2} \langle \tilde{V}^b(\cdot, \circ \mathfrak{Z}), \tilde{V}(\cdot, \circ \mathfrak{Z}) \rangle + e_0 \right) \rho_0 \mu_0 \right).$$

Здесь  $\mathcal{E}$  — ковекторзначная форма, соответствующая тензору Эшелби,  $\tilde{V}$  — темп эволюционного процесса, а остальные поля определяются так

<sup>10</sup>Выражение  $\nabla_{\mathfrak{B}}\widetilde{W}(\mathfrak{X}; \mathcal{F}(\mathfrak{X}_0), \dots)\Big|_{\mathfrak{X}_0=\mathfrak{X}}$  понимается так, что ковариантная производная берется от отображения  $\mathfrak{X} \mapsto \widetilde{W}(\mathfrak{X}; \mathcal{F}(\mathfrak{X}_0), \dots)$ , где  $\mathcal{F}(\mathfrak{X}_0), \dots$  — значения полей в фиксированной точке  $\mathfrak{X}_0$ . После вычисления ковариантной производной все вхождения  $\mathfrak{X}_0$  заменяются на  $\mathfrak{X}$ . Это построение позволяет выделить градиент, соответствующий явной (explicit) зависимости от  $\mathfrak{X}$ .

же, как в (1.3.8).

**19°.** Преобразуем равенства (1.3.7) и (1.3.8) к другому виду. Преобразование интегралов по границе  $\mathfrak{B}_0$  и  $\varkappa(\mathfrak{B}_0)$  осуществляется в силу теоремы Стокса:

$$\int_{\varkappa_t(\partial\mathfrak{B}_0)} \langle v, \mathcal{T} \rangle = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} d\langle v, \mathcal{T} \rangle, \quad \int_{\partial\mathfrak{B}_0} \langle V, \mathcal{P} \rangle = \int_{\mathfrak{B}_0} d\langle V, \mathcal{P} \rangle.$$

Здесь  $d$  — внешний дифференциал (см. Глава 3, п. **95°**). В результате приходим к соотношениям

$$\int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} (\langle v, b \rangle \rho \mu + d\langle v, \mathcal{T} \rangle) = \frac{d}{dt} \left( \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left( \frac{1}{2} \mathcal{G}(v, v) + e \right) \rho \mu \right), \quad (1.3.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}_0} (\langle V, b_0 \rangle \rho_0 \mu_0 + d\langle V, \mathcal{P} \rangle) &= \\ &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathfrak{B}_0} \left( \frac{1}{2} (\mathcal{G} \circ \varkappa_t)(V, V) + e_0 \right) \rho_0 \mu_0 \right). \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Если уравнение баланса (1.3.13) или (1.3.14) дополнить законом состояния

$$\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{T}}(\mathcal{G}, \mathcal{g}) \quad \text{или} \quad \mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}(\mathcal{G}, \mathcal{g}),$$

где метрика тела  $\mathcal{G}$  и метрика физического пространства  $\mathcal{g}$  считаются заданными тензорными полями, а отображение  $\varkappa$ , осуществляющее вложение тела в физическое пространство — искомой функцией, то получим замкнутую систему уравнений в терминах выбранных карт, подобную классическим системам нелинейной динамической теории упругости, но отличающуюся от нее тем, что  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{P}$  считаются неевклидовыми пространствами. Можно поступить иначе — считать  $\varkappa$  тождественным (с точностью до координатного представления) отображением, а  $\mathcal{g}$  — неизвестной и изменяющейся во времени (динамической) метрикой, удовлетворяющей дополнительным условиям совместности. Такой подход

---

использован, например, в [33]. Наконец, можно полагать метрику  $\mathcal{G}$  неизвестной и определять ее из дополнительного уравнения, описывающего эволюцию материала. Для формулировки этого уравнения необходим более детальный анализ геометрических аспектов, связанных с материальной метрикой и ассоциированной с ней материальной связности. Этим вопросам посвящена вторая глава работы.

---

## Материальные связности

---

**20°.** Материальные связности — аффинные связности специального вида, задающие правило параллельного перенесения на материальном многообразии — представляют собой способ описания единообразной конфигурации в целом, не рассматривая ее как семейство форм. Такой подход к описанию единообразной отсчетной конфигурации представляется нам наиболее удобным, так как он позволяет лаконично описать ее в целом и по форме подобен классическому способу, принятому в механике континуума. Мера материальной неоднородности количественно характеризуется геометрическими инвариантами, определяющими отличие материальной связности от евклидовой: инвариантами тензорных полей кручения, кривизны и неметричности связности.

Геометрическая идея параллельного переноса векторных полей тесно связана с интерпретацией физических феноменов, описываемых в терминах потоков, интегралов от них и законов сохранения, отвечающих симметриям при преобразованиях материального и пространственного многообразий [39].

### 1. Потоки и производные Ли

**21°.** Эволюция некоторых физических систем может быть описана с помощью оператора эволюции. Если через  $\mathfrak{M}$  обозначить множество,

точки которого представляют состояние системы (например, это могут быть упорядоченные пары  $(x, p)$ , в которых первый элемент — позиция точки, а второй элемент — ее импульс), то можно рассмотреть двухпараметрическое семейство  $\{F_{t,h}\}_{t,h \in \mathbb{I}}$ ,  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ , отображений  $F_{t,h} : \mathfrak{U}_h \rightarrow \mathfrak{U}_t$ , где  $\mathfrak{U}_h, \mathfrak{U}_t \subset \mathfrak{M}$ , удовлетворяющее условиям

$$F_{t,h} \circ F_{h,\tau} = F_{t,\tau}, \quad F_{t,t} = \text{Id}.$$

В таком случае отображение  $F_{t,h}$  называется оператором эволюции [40]. Оно отображает состояние системы в момент времени  $h$  в состояние, которое будет иметь система в момент  $t$ . Мы также будем называть  $F_{t,h}$  потоком, зависящим от времени.

**22°.** В настоящей работе используется следующая интерпретация оператора эволюции. Пусть  $\mathfrak{B}$  — тело,  $\mathfrak{P}$  — физическое пространство, представленные гладкими многообразиями, а  $\varkappa \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$  — конфигурация, т.е. гладкое вложение тела в физическое пространство. По предположению,  $\varkappa$  является гомеоморфизмом на себя. Если через  $\widehat{\varkappa}$  обозначить отображение  $\mathfrak{B}$  в  $\varkappa(\mathfrak{B})$ , действующее по правилу:  $\mathfrak{X} \mapsto \varkappa(\mathfrak{X})$ , то согласно [41] получим другое отображение, которое, как минимум, будет гомеоморфизмом.

Пусть  $\{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  — движение. Оператор эволюции представляется двухпараметрическим семейством  $\{\psi_{t,s}\}_{t,s \in \mathbb{T}}$  гомеоморфизмов

$$\psi_{t,s} = \widehat{\varkappa}_t \circ \widehat{\varkappa}_s^{-1} : \varkappa_s(\mathfrak{B}) \rightarrow \varkappa_t(\mathfrak{B}).$$

Отметим следующее свойство, которое будет использовано неоднократно в настоящей работе. Если  $\omega$  — интегрируемая внешняя форма на  $\varkappa_t(\mathfrak{B})$ , то для всех  $s \in \mathbb{T}$  справедливо равенство:

$$\int_{\varkappa_t(\mathfrak{B})} \omega = \int_{\psi_{t,s}(\varkappa_s(\mathfrak{B}))} \omega. \quad (2.1.1)$$

Если выбрана некоторая отсчетная конфигурация  $\varkappa_R$ , соответствующая значению<sup>1</sup>  $s_0 \in \mathbb{T}$ , то последнее равенство можно переписать в терминах деформации  $\lambda_t$ :

$$\int_{\varkappa_t(\mathfrak{B})} \omega = \int_{\lambda_t(\varkappa_R(\mathfrak{B}))} \omega.$$

<sup>1</sup>Предполагается, что такое  $s_0$  существует. В общем случае отсчетная конфигурация может не быть в составе семейства конфигураций.

**23°.** Частным случаем эволюционного оператора является оператор  $F_{t,h}$ , зависящий (при надлежащих условиях на  $\mathbb{I}$ ) только от разности  $t - h$ , т.е.,  $F_{t,h} = F_{t-h}$ . Если положить  $F_t := F_{t,0}$ , то получаем групповое свойство [40]:

$$F_t \circ F_h = F_{t+h}, \quad F_0 = \text{Id}.$$

Отображение  $F_t$  далее будем называть потоком. Далее предполагается, что как  $F_{t,h}$ , так и  $F_t$  являются достаточно гладкими отображениями подмногообразий гладкого многообразия  $\mathfrak{M}^n$ .

Если на гладком многообразии  $\mathfrak{M}^n$  определено семейство гладких кривых, то оно порождает векторное поле, представленное сечением касательного расслоения. Верно и обратное утверждение, но только локально: любому гладкому векторному полю можно локально поставить в соответствие семейство кривых на  $\mathfrak{M}^n$  [42].

**Замечание 13.** Рассмотрим два случая:

(i) Векторное поле представлено  $C^r$ -отображением  $v : \mathfrak{M}^n \rightarrow T\mathfrak{M}^n$ . Если в карте  $(V, \psi)$ , содержащей точку  $p$ , имеется разложение  $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , то координатное представление отображения  $t \mapsto F_t(p)$  (потока), порождаемого полем  $v$ , то есть отображение  $\psi^{-1} \circ F_t(p) : t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , можно определить из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющего начальному условию  $(x^1(0), \dots, x^n(0)) = \psi^{-1}(p)$  и определенному на открытом интервале  $] - \varepsilon, \varepsilon[$ , для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

(ii) Векторное поле представлено  $C^r$ -отображением  $v : \mathfrak{M}^n \times \mathbb{I} \rightarrow T\mathfrak{M}^n$ , где  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  — открытый интервал. Фиксируем  $s \in \mathbb{I}$ . Аналогично случаю (i), в карте  $(V, \psi)$ , содержащей точку  $p$ , рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (с зависящей явно от  $t$  правой частью):

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1, \dots, x^n, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

с начальными условиями  $(x^1(s), \dots, x^n(s)) = \psi^{-1}(p)$ . Решение этой системы определяет локальный (определенный на некотором подмножестве  $\mathbb{I}$ ) поток, зависящий от времени:  $\psi^{-1} \circ F_{t,s}(p) : t \mapsto (x^1(t, s), \dots, x^n(t, s))$ , причем,  $F_{s,s}(p) = p$ . ♠

**Замечание 14.** Пусть  $\{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  — движение, а  $\{\psi_{t,s}\}_{t,s \in \mathbb{T}}$  — соответствующее ему семейство потоков, зависящих от времени. Пространственная скорость — это отображение

$$v : \bigcup_{t \in \mathbb{T}} (\varkappa_t(\mathfrak{B}) \times \{t\}) \rightarrow T\mathfrak{B}.$$

Фиксируем  $s \in \mathbb{T}$  и предположим, что можно найти такой (достаточно малый) интервал  $\mathbb{J} \subset \mathbb{T}$ , содержащий  $s$ , что при всех  $t \in \mathbb{J}$  справедливо включение:  $\varkappa_s(\mathfrak{B}) \subset \varkappa_t(\mathfrak{B})$ . Тогда можно рассмотреть сужение  $v$ , обозначаемое тем же символом<sup>2</sup>:

$$v : \varkappa_s(\mathfrak{B}) \times \mathbb{J} \rightarrow T\mathfrak{F}.$$

Фиксируем некоторую точку  $X \in \varkappa_s(\mathfrak{B})$ . Ей соответствуют точка  $\mathfrak{X} \in \tilde{\varkappa}_s^{-1}(X)$  и кривая  $\chi_{\mathfrak{X}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathfrak{F}$ ,  $t \mapsto \varkappa_t(\mathfrak{X})$ . С другой стороны, рассмотрим кривую  $\mathbb{J} \ni t \mapsto \psi_{t,s}(X)$ . По определению, для всех  $t \in \mathbb{J}$  справедливо равенство:  $\chi_{\mathfrak{X}}(t) = \psi_{t,s}(X)$ . Это означает, что указанные кривые совпадают. Следовательно, они имеют одно и то же поле касательных векторов, т.е.  $v$  — поле касательных векторов кривой  $\mathbb{J} \ni t \mapsto \psi_{t,s}(X)$ .

Проведенные выше рассуждения справедливы для любого  $s \in \mathbb{T}$  и любой точки  $X \in \varkappa_s(\mathfrak{B})$ : кривая  $t \mapsto \psi_{t,s}(X)$  имеет  $v$  своим касательным вектором. ♠

**24°.** Рассмотрим пару векторных полей  $u, v$  на многообразии  $\mathfrak{M}^n$  и  $\varphi_t$  — локальный поток, порождаемый полем  $u$  в окрестности точки  $q \in \mathfrak{M}^n$ . Отображение  $t \mapsto \varphi_t(q)$  дает «орбиту» точки  $q$ , начало которой, в точке  $q$ , соответствует  $t = 0$ . При фиксированном  $t$  имеем отображение  $q \mapsto \varphi_t(q)$  многообразия  $\mathfrak{M}^n$  на себя. Производная Ли является обобщением производной по направлению и имеет два эквивалентных определения [42, 43]:

$$[\mathcal{L}_u v]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(v \circ \varphi_t)_q - (T\varphi_t)v_q}{t}; \quad (2.1.2)$$

$$[\mathcal{L}_u v]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T\varphi_t^{-1})v_{\varphi_t(q)} - v_q}{t}. \quad (2.1.3)$$

Здесь  $T\varphi_t, T\varphi_t^{-1}$  — касательные отображения (см. Глава 3, п. **83°**) Соотношение (2.1.2) определяет производную Ли через «pushforward», а (2.1.3) — через «pullback» (см. Глава 3, п. **84°**); последнее выражение также записывается в виде

$$[\mathcal{L}_u v]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{(\varphi_t^*)v\}_q - v_q}{t}, \quad (2.1.4)$$

который непосредственно обобщается на внешние формы (см. [40]). Через  $\{(\varphi_t^*)v\}_q$  обозначено значение поля  $(\varphi_t^*)v$  в точке  $q$ .

<sup>2</sup>Используется следующая цепочка рассуждений:

$$\varkappa_s(\mathfrak{B}) \times \mathbb{J} = \varkappa_s(\mathfrak{B}) \times \bigcup_{t \in \mathbb{J}} \{t\} = \bigcup_{t \in \mathbb{J}} (\varkappa_s(\mathfrak{B}) \times \{t\}) \subset \bigcup_{t \in \mathbb{J}} (\varkappa_t(\mathfrak{B}) \times \{t\}).$$



Определения (2.1.2) и (2.1.3) требуют вычисления потоков, порождаемых полем  $u$ . Эта операция может быть довольно громоздкой в вычислительном плане, однако, поскольку при нахождении производной Ли требуется вычислить предел при  $t \rightarrow 0$ , то эти вычисления можно выполнить значительно проще, учитывая лишь главные члены разложений полей  $u, v$  по  $t$  (см. [43, с. 126], или [44, с. 283]):

$$\mathcal{L}_u v = [u, v],$$

где векторное поле  $[u, v]$  представляет собой скобки Ли, определенные следующим образом:

$$[u, v]_q(f) = u_q\{v(f)\} - v_q\{u(f)\},$$

для любого отображения  $f \in \mathcal{O}^2(q)$ . При этом,  $u, v \in \mathcal{V}^1(\mathcal{M}^n)$ .

**Замечание 15.** Скобки Ли обладают следующими свойствами:

- (i) билинейность;
- (ii)  $[u, v] = -[v, u]$  (антисимметричность);
- (iii)  $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$  (тождество Якоби);
- (iv) для гладких функций  $f, g$  справедливо тождество

$$[fu, gv] = fg[u, v] + (fug)v - (gvf)u.$$



**Замечание 16.** С помощью формулы (2.1.4), производная Ли обобщается на тензорные поля произвольного ранга [44, с. 280]. В частности, она может действовать и на скалярнозначные функции; результат этого действия совпадает с результатом действия производной по направлению, что отражено в использовании одного и того же символа  $\mathcal{L}$ . ♠

**Замечание 17.** Для координатного репера  $(\partial_i)_{i=1}^n$  справедливо свойство:

$$[\partial_i, \partial_j] = 0.$$



**25°.** Рассмотрим пример вычисления производных Ли непосредственно, по формулам (2.1.2), (2.1.3), и с помощью скобок Ли. На множестве  $\mathcal{O} = \mathcal{E}^2 \setminus \{P \in \mathcal{E}^2 \mid \mathcal{X}(P) = x^1 \mathbf{i}, x^1 \geq 0\}$  рассмотрим атлас, состоящий из двух карт. Первая карта есть стандартная,  $(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{-1})$ . Вторая карта имеет вид  $(\mathcal{O}, H)$ , где  $H = \mathcal{D}^{-1} \circ h$ , а отображение перехода между картами<sup>3</sup>

$$h : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (x^1, x^2)$$

<sup>3</sup>Отображение  $h$  соответствует отображению  $f_{c;\beta}^{-1}$  из [1], п. 36°.

задается правилом:  $x^1 = r \cos \varphi$ ,  $x^2 = r \sin \varphi$ .

Введенные карты имеют областью действия все множество  $\mathcal{O}$ , и, таким образом, на  $\mathcal{O}$  задана замена переменных. Через  $\partial_1, \partial_2$  обозначим операторы, соответствующие базисным векторам в карте  $(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{-1})$ , а через  $\partial_r, \partial_\varphi$  — операторы, соответствующие базисным векторам в карте  $(\mathcal{O}, H)$ . Используя формулу  $\partial_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \partial_j$ , связывающую старый базис  $(\partial_j)$  касательного пространства с новым  $(\partial_{i'})$  при замене  $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$ , приходим к выражениям

$$\partial_r = \cos \varphi \partial_1 + \sin \varphi \partial_2, \quad \partial_\varphi = -r \sin \varphi \partial_1 + r \cos \varphi \partial_2.$$

Для геометрической интерпретации, можно считать, что  $\mathbf{i} = \partial_1$ ,  $\mathbf{j} = \partial_2$ . Рассмотрим следующие случаи. В них определяются отображения  $\Phi_t : (r, \varphi) \mapsto (R, \Psi)$  — координатные представления потоков в карте  $(\mathcal{O}, H)$  и производные Ли в точке  $q = H(r, \varphi)$  с использованием формул (2.1.2), (2.1.3) и скобок Ли. Через  $f_t = H \circ \Phi_t \circ H^{-1}$  обозначаются соответствующие  $\Phi_t$  потоки.

(i) Определим поток вдоль  $\partial_r$ . Его координатное представление определяется из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = 1, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

с начальными условиями  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , решение которой имеет вид

$$\Phi_t(r_0, \varphi_0) = (r_0 + t, \varphi_0).$$

Таким образом, получено отображение  $(r, \varphi) \mapsto \Phi_t(r, \varphi)$ , которое в координатах  $(x^1, x^2)$  имеет вид:  $(r, \varphi) \mapsto F_t(r, \varphi) = ((r+t) \cos \varphi, (r+t) \sin \varphi)$ . Это — координатные представления потока вдоль  $\partial_r$ .

По формуле (2.1.2) вычислим  $\mathcal{L}_{\partial_r} \partial_r$ ,  $\mathcal{L}_{\partial_r} \partial_\varphi$ , и  $\mathcal{L}_{\partial_r} e_{\langle \varphi \rangle}$ , где  $e_{\langle \varphi \rangle} = \frac{1}{r} \partial_\varphi$ , в точке  $q$ . Касательное отображение  $Tf_t : T\mathcal{O} \rightarrow T\mathcal{O}$  имеет вид

$$Tf_t = \partial_R \otimes dr + \partial_\Psi \otimes d\varphi,$$

где  $(R, \Psi) = (r + t, \varphi)$ . Поэтому,

$$Tf_t \partial_r = \partial_R, \quad Tf_t \partial_\varphi = \partial_\Psi, \quad Tf_t e_{\langle \varphi \rangle} = \frac{1}{r} \partial_\Psi.$$

Поскольку  $\partial_r \circ f_t = \partial_R$ ,  $\partial_\varphi \circ f_t = \partial_\Psi$ ,  $e_{\langle\varphi\rangle} \circ f_t = \frac{1}{R}\partial_\Psi$ . Тогда

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{\partial_r}\partial_r]_q &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_R - T f_t \partial_r}{t} = 0; \\ [\mathcal{L}_{\partial_r}\partial_\varphi]_q &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_\psi - T f_t \partial_\varphi}{t} = 0; \\ [\mathcal{L}_{\partial_r}e_{\langle\varphi\rangle}]_q &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{R}\partial_\psi - T f_t e_{\langle\varphi\rangle}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{r+t}\partial_\psi - \frac{1}{r}\partial_\psi}{t} = -\frac{1}{r}e_{\langle\varphi\rangle}. \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить, вычисляя скобки Ли:

$$\begin{aligned} [\partial_r, \partial_r] &= \partial_r \partial_r - \partial_r \partial_r = 0, \\ [\partial_r, \partial_\varphi] &= \partial_r \partial_\varphi - \partial_\varphi \partial_r = 0, \\ [\partial_r, e_{\langle\varphi\rangle}] &= -\frac{1}{r}e_{\langle\varphi\rangle}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим производные Ли в соответствии с формулой (2.1.3). Обратное отображение к координатному представлению потока  $\Phi_t$  в точке с полярными координатами  $(R, \Psi)$  имеет вид:

$$\Phi_t^{-1}(R, \Psi) = (R - t, \Psi), \quad R = r + t, \quad \Psi = \varphi.$$

Касательное отображение к  $f_t^{-1}$  имеет вид:

$$T f_t^{-1} = \partial_r \otimes dR + \partial_\varphi \otimes d\Psi.$$

Для векторного поля  $\partial_\varphi$  имеем  $\{\partial_\varphi \circ f_t\}_q = \partial_\Psi$ , и следовательно,

$$\{(f_t)^*\partial_\varphi\}_q = \{\partial_r \otimes dR + \partial_\varphi \otimes d\Psi\}\partial_\Psi = \partial_\varphi.$$

Таким образом, производная Ли определяется выражениями

$$[\mathcal{L}_{\partial_r}\partial_\varphi]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{(f_t)^*\partial_\varphi\}_q - \partial_\varphi}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_\varphi - \partial_\varphi}{t} = 0.$$

Для векторного поля  $e_{\langle\varphi\rangle}$  имеем  $\{e_{\langle\varphi\rangle} \circ f_t\}_q = \frac{1}{R}\partial_\Psi$ , его «pullback» равен

$$\{(f_t)^*e_{\langle\varphi\rangle}\}_q = \{\partial_r \otimes dR + \partial_\varphi \otimes d\Psi\}\frac{1}{R}\partial_\Psi = \frac{r}{r+t}e_{\langle\varphi\rangle},$$

и, соответственно, производная Ли равна

$$[\mathcal{L}_{\partial_r}e_{\langle\varphi\rangle}]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{(f_t)^*e_{\langle\varphi\rangle}\}_q - e_{\langle\varphi\rangle}}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{r+t}e_{\langle\varphi\rangle} = -\frac{1}{r}e_{\langle\varphi\rangle}.$$

(ii) Для потока вдоль  $\partial_\varphi$  имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

с начальными условиями  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , решение которой дает координатное представление рассматриваемого потока:

$$\Phi_t(r_0, \varphi_0) = (r_0, t + \varphi_0).$$

В координатах  $(x^1, x^2)$  имеем другое представление:  $(r, \varphi) \mapsto F_t(r, \varphi) = (r \cos(t + \varphi), r \sin(t + \varphi))$ .

По формуле (2.1.2) вычислим  $\mathcal{L}_{e_\varphi} \partial_r$  в точке  $q$ . Касательное отображение  $Tf_t: T\mathcal{O} \rightarrow T\mathcal{O}$  имеет вид

$$Tf_t = \partial_R \otimes dr + \partial_\Psi \otimes d\varphi,$$

где  $(R, \Psi) = (r, t + \varphi)$ . Поэтому,

$$Tf_t \partial_r = \partial_R.$$

Далее, поскольку  $\{\partial_r \circ f_t\}_q = \partial_R$ , то справедливо равенство:

$$[\mathcal{L}_{\partial_\varphi} \partial_r]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_R - Tf_t \partial_r}{t} = 0.$$

С другой стороны, вычисляя непосредственно скобки Ли от  $\partial_\varphi$ ,  $\partial_r$ , получаем тот же результат:

$$[\partial_\varphi, \partial_r] = \partial_\varphi \partial_r - \partial_r \partial_\varphi = 0.$$

Теперь вычислим производные Ли в соответствии с формулой (2.1.3). Отображение, обратное к координатному представлению потока  $\Phi_t$ , в точке с полярными координатами  $(R, \Psi)$  имеет вид:

$$\Phi_\varphi^{-1}(t) = (R, \Psi - t), \quad r = R, \quad \Psi = \varphi + t.$$

Соответствующее ему касательное отображение может быть представлено соотношением

$$Tf_t^{-1} = \partial_r \otimes dR + \partial_\varphi \otimes d\Psi,$$

из которого получаем выражение для значения «pullback» поля  $\partial_r$  в точке  $q$ :

$$\{f_t^* \partial_r\}_q = \{\partial_r \otimes dR + \partial_\varphi \otimes d\Psi\} \partial_R = \partial_r,$$

и выражение для производной Ли вдоль поля  $\partial_\varphi$  от  $\partial_r$ :

$$[\mathcal{L}_{\partial_\varphi} \partial_r]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{f_t^* \partial_r\}_q - \partial_r}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_r - \partial_r}{t} = 0.$$

(iii) Наконец, для координатного представления потока вдоль  $e_{\langle\varphi\rangle}$  имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r},$$

с начальными условиями  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ . Ее решение имеет вид

$$\Phi_t(r_0, \varphi_0) = (r_0, \frac{t}{r_0} + \varphi_0).$$

Соответственно, поток вдоль  $e_{\langle\varphi\rangle}$  может быть представлен отображением  $(r, \varphi) \mapsto \Psi_t(r, \varphi)$ .

По формуле (2.1.2) вычислим значение производной Ли вдоль  $e_{\langle\varphi\rangle}$  от поля  $\partial_r$ , т.е.  $\mathcal{L}_{e_{\langle\varphi\rangle}} \partial_r$ , в точке  $q$ . Касательное отображение  $Tf_t : T\mathcal{O} \rightarrow T\mathcal{O}$  имеет вид

$$Tf_t = \partial_R \otimes dr - \frac{t}{r^2} \partial_\Psi \otimes dr + \partial_\Psi \otimes d\varphi,$$

где  $(R, \Psi) = (r, \frac{t}{r} + \varphi)$ . Поэтому,

$$Tf_t \partial_r = \partial_R - \frac{t}{r^2} \partial_\Psi.$$

Далее, поскольку  $\{\partial_r \circ f_t\}_q = \partial_R$ , то, в силу непрерывности векторного поля  $\partial_\varphi$ , имеем

$$[\mathcal{L}_{\partial_r} \partial_r]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_R - Tf_t \partial_r}{t} = \frac{1}{r^2} \lim_{t \rightarrow 0} \partial_{\frac{t}{r} + \varphi} = \frac{1}{r} e_{\langle\varphi\rangle}.$$

Как и следовало ожидать, вычисление скобок Ли от векторных полей  $e_{\langle\varphi\rangle}$  и  $\partial_r$  приводит к тому же результату:

$$[e_{\langle\varphi\rangle}, \partial_r] = \frac{1}{r} \partial_\varphi \partial_r - \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_\varphi \right) = \frac{1}{r} e_{\langle\varphi\rangle}.$$

Теперь вычислим производные Ли в соответствии с формулой (2.1.3). Обратное отображение к координатному представлению потока  $\Phi_t$  в точке с полярными координатами  $(R, \Psi)$  имеет вид:

$$\Phi_t^{-1}(R, \Psi) = \left(R, -\frac{t}{R} + \Psi\right), \quad R = r, \quad \Psi = \varphi + t.$$

Принимая это во внимание, получаем выражение для касательного отображения:

$$Tf_t^{-1} = \partial_r \otimes dR + \frac{t}{R^2} \partial_\varphi \otimes dR + \partial_\varphi \otimes d\Psi.$$

Полученные выражения позволяют записать «pullback» поля  $\partial_r$  в виде

$$\{f_t^* \partial_r\}_q = \partial_r + \frac{t}{(r+t)^2} \partial_\varphi,$$

следовательно,

$$[\mathcal{L}_{\partial_{\langle\varphi\rangle}} \partial_r]_q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{f_t^* \partial_r\}_q - \partial_r}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{(r+t)^2} e_{\langle\varphi\rangle} = \frac{1}{r} e_{\langle\varphi\rangle}.$$

Геометрическая интерпретация полученных соотношений представлена на рис. 2.1. В нем рассмотрено пространство  $\mathcal{E}^2$ , на части которого введены две системы координат: декартова  $(x, y)$ , с базисом  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ , и полярная  $(r, \varphi)$ , с базисом  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ , являющимся вложением в  $\mathcal{E}^2$  базиса  $(\partial_r, \partial_\varphi)$ . Показаны координатные сетки обеих систем: прямоугольная и система из концентрических окружностей и лучей. Пара  $(\mathbf{e}_{\langle r \rangle}, \mathbf{e}_{\langle \varphi \rangle})$  есть базис, полученный нормировкой соответствующих векторов базиса сферической системы.

Нижняя половина рисунка посвящена построению потоков вдоль соответствующих векторов. В случае, когда потоки рассматривались вдоль базисных векторов сферической системы, построен замкнутый параллелограмм. Аналогичный случай для нормированного базиса приводит к незамкнутому параллелограмму. Во втором случае производная Ли отлична от нуля. Это иллюстрирует соображение о том, что производная Ли есть мера незамкнутости параллелограмма, построенного на кривых, порожденных потоками.

**26°.** Производная Ли обобщается на произвольные тензорные поля следующим образом. Пусть  $u : \mathcal{M}^n \rightarrow T\mathcal{M}^n$  — гладкое векторное поле, а

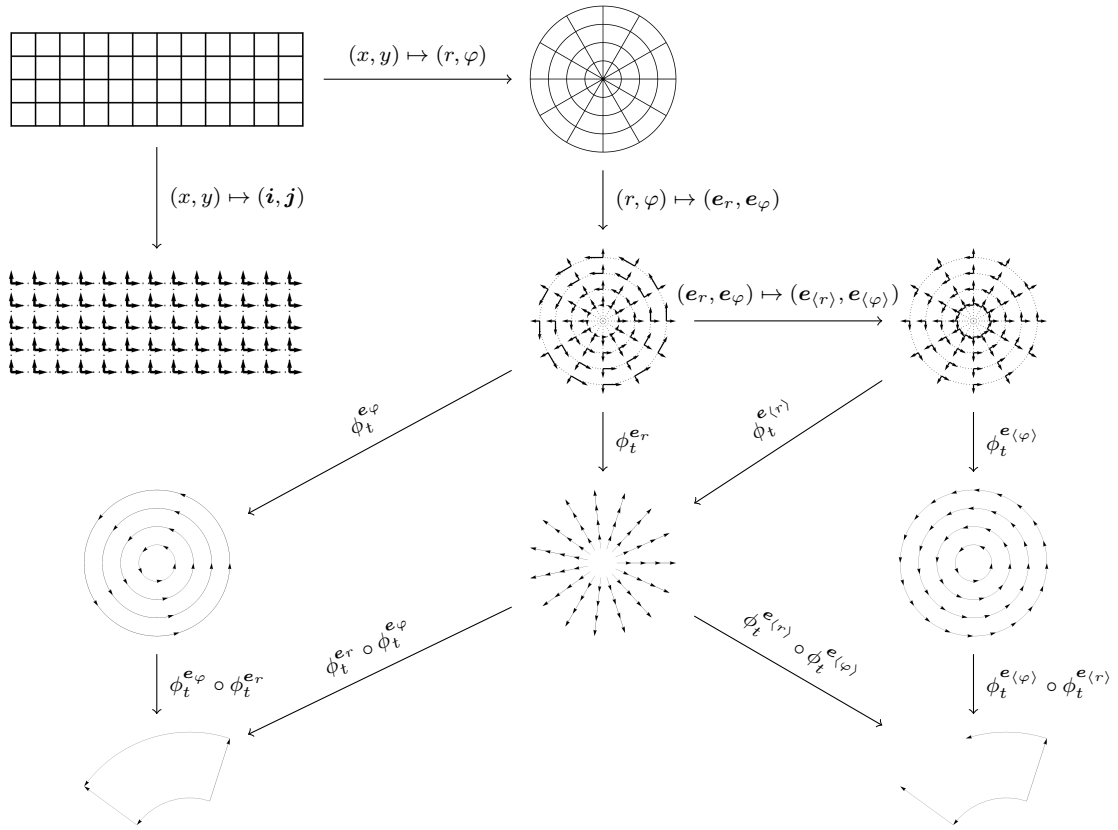


Рис. 2.1. Потоки и производные Ли

$F_{p;t}$  — соответствующий ему поток<sup>4</sup>, проходящий через точку  $p \in \mathcal{M}$ , т.е.  $F_{p;0} = p$ . Пусть  $\mathcal{T} : \mathcal{M}^n \rightarrow \otimes^s T\mathcal{M}^n \otimes \otimes^k T^*\mathcal{M}^n$  — гладкое тензорное поле. Тогда [40]

$$\mathcal{L}_u \mathcal{T} : p \mapsto \{\mathcal{L}_u \mathcal{T}\}_p = \left. \frac{d}{ds} \{F_{p;s}^* \mathcal{T}\}_p \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\{F_{p;s}^* \mathcal{T}\}_p - \mathcal{T}_p}{s}.$$

Для скалярнозначной функции  $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}^n; \mathbb{R})$  и гладкого векторного поля  $u : \mathcal{M}^n \rightarrow T\mathcal{M}^n$  имеем:

$$\mathcal{L}_u f = u(f) = u^i \partial_i f, \quad u = u^i \partial_i.$$

Если  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  — риманова метрика на  $\mathcal{M}^n$ , то для нее произ-

<sup>4</sup>Не путать с эволюционным оператором!

водная Ли имеет вид:

$$\mathcal{L}_u \mathcal{g} = \{u^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i u^k + g_{ik} \partial_j u^k\} dx^i \otimes dx^j. \quad (2.1.5)$$

27°. Пусть  $F_{t,s}$  — эволюционный оператор, порожденный гладким векторным полем  $u : \mathcal{M}^n \times \mathbb{T} \rightarrow T\mathcal{M}^n$ , а  $\mathcal{T}_t$  — гладкое тензорное поле, зависящее не только от точек  $\mathcal{M}^n$ , но и от параметра  $t \in \mathbb{T}$ . Автономная производная Ли [37] определяется равенством:

$$\mathcal{L}_u \mathcal{T}_t = \left. \frac{d}{dt} \{F_{t;s}^* \mathcal{T}_s\} \right|_{t=s}, \quad (2.1.6)$$

а следствием из этого определения является равенство [40]:

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}^* \mathcal{T}_t = F_{t,s}^* \mathcal{L}_u \mathcal{T}_t + F_{t,s}^* \frac{\partial \mathcal{T}_t}{\partial t}, \quad (2.1.7)$$

которое будет использовано в настоящей работе. В равенстве (2.1.7) символ  $\frac{\partial \mathcal{T}_t}{\partial t}$  требует пояснений. Мы дадим это пояснение на случай символа  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , где  $u : \mathcal{M}^n \times \mathbb{T} \rightarrow T\mathcal{M}^n$ , а общий случай поясняется аналогично. При вычислении частной производной некоторой функции, подразумевается, что другие переменные этой функции фиксируются. В рассматриваемом случае фиксируется переменная  $X$ . Это значит, что отображение  $u(X, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow T\mathcal{M}^n$  принимает значения в одном и том же векторном пространстве,  $T_X \mathcal{M}^n$ , и выражение  $\frac{u(X, t+h) - u(X, t)}{h}$ . Теперь выберем на  $\mathcal{M}^n$  некоторую риманову метрику  $\mathcal{g}$ . В точке  $X$  она представляет скалярное произведение. В смысле этого скалярного произведения можно говорить о сходимости  $\frac{u(X, t+h) - u(X, t)}{h}$  к некоторому вектору при  $h \rightarrow 0$ . Этот вектор и есть  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , причем, его координатное представление имеет вид:  $\left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{i=1}^n$ .

Поток  $F_{t,s}$ , порожденный векторным полем  $u : (X, t) \mapsto u(X, t)$ , определяется тем требованием, что при любом фиксированном  $s$  и для любой точки  $p \in \mathcal{M}^n$  отображение  $t \mapsto F_{t,s}(p)$  является интегральной кривой  $u$ , проходящей через точку  $p$  при значении параметра  $t = s$ . Иначе говоря, координатное представление этого отображения в окрестности точки  $p$  должно удовлетворять следующим условиям (здесь  $(V, \psi)$  — карта, содержащая точку  $p$ ):

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i(x^1, \dots, x^n, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (x^1(s), \dots, x^n(s)) = \psi^{-1}(p).$$



**28°.** Производной Ли от тензорного поля  $\mathcal{T}$ , определенного в предыдущем пункте, называется дифференциальный оператор  $\mathbb{L}$  определенный следующим образом [37]:

$$\mathbb{L}_u \mathcal{T}_t = \frac{d}{dt} \{F_{t;s}^* \mathcal{T}_t\} \Big|_{t=s}. \quad (2.1.8)$$

В отличие от (2.1.6), внутри оператора дифференцирования стоит  $\mathcal{T}_t$ . Справедливо равенство, связывающее автономную производную Ли с операцией  $\mathbb{L}$  [37]:

$$\mathbb{L}_u \mathcal{T}_t = \frac{\partial \mathcal{T}_t}{\partial t} + \mathcal{L}_u \mathcal{T}_t. \quad (2.1.9)$$

## 2. Дивергенция и теорема Гаусса

**29°.** В классических курсах анализа в декартовой координатной системе  $(x^i)$  пространства  $\mathcal{E}^m$  дивергенция векторного поля  $u = u^s i_s$  определяется соотношением

$$\operatorname{div} u = \partial_{x^i} u^i.$$

Более сложное выражение дивергенция имеет в криволинейных координатах  $(y^i)$ , где в ее записи присутствуют символы Кристоффеля — коэффициенты разложения производных полей координатных реперов, порождаемых криволинейными координатами. Если использовать формулу Фосса–Вейля  $\partial_k \sqrt{g} = \sqrt{g} \Gamma_{sk}^{\cdot\cdot}$ , связывающую символы Кристоффеля и метрику, то приходим к выражению

$$\operatorname{div} u = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{y^s} (u^s \sqrt{g}),$$

где  $g = \det g$ . Заметим, что символы Кристоффеля здесь появляются в силу процедуры перехода к криволинейным координатам и соответствующим формулам дифференцирования сложной функции.

**30°.** Пусть теперь  $(\mathcal{M}^n, [\mu])$  — некоторое ориентированное многообразие с фиксированной формой объема  $\mu$  (см. Глава 3 п. **91°**), а  $u \in \mathcal{V}^r(\mathcal{M}^n)$  — гладкое векторное поле. Отображение  $\operatorname{div}_\mu u : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемое равенством

$$\mathcal{L}_u \mu = (\operatorname{div}_\mu u) \mu,$$

называется *дивергенцией векторного поля  $u$* . Здесь  $\mathcal{L}_u\mu$  — производная Ли формы  $\mu$  вдоль локального потока  $\varphi_t$ , порождаемого векторным полем  $u$ , определяемая в точке  $q \in \mathfrak{M}^n$  равенством [44]

$$[\mathcal{L}_u\mu]_q := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{(\varphi_t^*)\mu\}_q - \mu_q}{t}.$$

Из определения дивергенции видно, что она является мерой скорости изменения элемента объема при его движении вдоль кривой, порожденной потоком.

Для заданной формы объема  $\mu$  отображение  $\operatorname{div}_\mu u$  определено единственным образом и обладает следующими свойствами [40]:

(i) Если  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$  и  $f(p) \neq 0$  для всех  $p \in \mathfrak{M}^n$ , то

$$\operatorname{div}_{f\mu} u = \operatorname{div}_\mu u + \frac{\mathcal{L}_u f}{f};$$

(ii) Если  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$ , то

$$\operatorname{div}_\mu(fu) = f \operatorname{div}_\mu u + \mathcal{L}_u f.$$

То, что дивергенция векторного поля определяется формой объема, подчеркивается нижним индексом в  $\operatorname{div}_\mu$ .

**31°.** Определение дивергенции в евклидовом пространстве может быть записано двумя способами: через производную Ли и форму объема, либо через ковариантную производную. Хотя в случае евклидова пространства, так же как и в случае риманова многообразия с формой объема  $\sqrt{g}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  и связностью Леви–Чивиты, оба определения дают одно и то же отображение, в общем случае, это не так: необходимо выполнения условия совместности Саа [45].

**32°.** Определим операцию свертки [40]. Пусть  $\mathfrak{M}^n$  — гладкое многообразие,  $u \in \mathcal{V}^0(\mathfrak{M}^n)$  — векторное поле и  $\omega \in \mathcal{F}_{k+1}^0(\mathfrak{M}^n)$ . Зададим  $i_u\omega \in \mathcal{F}_k^0(\mathfrak{M}^n)$  равенством

$$i_u\omega(v_1, \dots, v_k) := \omega(u, v_1, \dots, v_k).$$

Если  $\omega \in \mathcal{F}_0^0(\mathfrak{M}^n)$ , то полагаем  $i_u\omega = 0$ . Объект  $i_u\omega$  называется сверткой вектора  $u$  и формы  $\omega$ .

Свойства свертки устанавливает следующая теорема [40].

Пусть  $i_u : \mathcal{F}_k^0(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{F}_{k-1}^0(\mathfrak{M}^n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Для форм  $\alpha \in \mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n)$ ,  $\beta \in \mathcal{F}_l^s(\mathfrak{M}^n)$  и  $f \in \mathcal{F}_0^s(\mathfrak{M}^n)$ , справедливы следующие свойства:

(i) Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} i_u(\alpha + \beta) &= i_u(\alpha) + i_u(\beta), \\ i_u(f\alpha) &= f i_u(\alpha), \\ i_u(\alpha \wedge \beta) &= (i_u\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_u\beta); \end{aligned}$$

- (ii)  $i_{fu}\alpha = f i_u\alpha$ ;
- (iii)  $i_u df = \mathcal{L}_u f$ ;
- (iv)  $\mathcal{L}_u\alpha = i_u d\alpha + di_u\alpha$ ;
- (v)  $\mathcal{L}_{fu}\alpha = f \mathcal{L}_u\alpha + df \wedge i_u\alpha$ .

**33°.** Приведем обобщение классической теоремы Гаусса, являющееся простым следствием из формулы Стокса [40].

Пусть  $\mathfrak{M}^n$  есть ориентированное гладкое многообразие с краем и пусть  $u \in \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n)$  есть гладкое векторное поле на  $\mathfrak{M}^n$  с компактным носителем. Пусть  $\mu$  — гладкая форма объема на  $\mathfrak{M}^n$ . Тогда справедливо равенство (формула Гаусса–Остроградского)

$$\int_{\mathfrak{M}^n} (\operatorname{div}_\mu u)\mu = \int_{\partial\mathfrak{M}^n} i_u\mu. \quad (2.2.1)$$

Формула Гаусса следует из формулы Стокса и из (iv) свойства свертки  $i_u$ . Действительно,

$$(\operatorname{div}_\mu u)\mu = \mathcal{L}_u\mu = di_u\mu + i_u d\mu = di_u\mu.$$

**34°.** Допустим, что выбрана некоторая риманова метрика  $\mathcal{g}$ . Тогда существует единственная внешняя единичная нормаль  $n_{\partial\mathfrak{M}^n}$  вдоль  $\partial\mathfrak{M}^n$  (подмногообразие материального многообразия);  $\mathfrak{M}^n$  и  $\partial\mathfrak{M}^n$  снабжены однозначно определенными формами объема  $\mu_{\mathfrak{M}^n}$  и  $\mu_{\partial\mathfrak{M}^n}$  и соответствующим им мерами  $m_{\mathfrak{M}^n}$  и  $m_{\partial\mathfrak{M}^n}$  (см. теорему Рисса [40, с.467]). Тогда формула Гаусса примет вид:

$$\int_{\mathfrak{M}^n} (\operatorname{div}_\mu u) dm_{\mathfrak{M}^n} = \int_{\partial\mathfrak{M}^n} \mathcal{g}(u, n_{\partial\mathfrak{M}^n}) dm_{\partial\mathfrak{M}^n}. \quad (2.2.2)$$

### 3. Теорема Рейнольдса

**35°.** В механике континуума при выводе законов сохранения в дифференциальной форме из соответствующих им интегральных соотношений используется теорема Рейнольдса (о дифференцировании интеграла по подвижному объему). Эту теорему, по видимому, впервые установил Рейнольдс, а доказал ее Spielrein (см. сноску в [46, с.347]). В рамках классической механики эта теорема используется в следующем виде. Пусть  $\mathfrak{B}_0$  — подмножество отсчетной формы тела,  $\lambda_t$  — семейство деформаций тела, т.е. отображений из отсчетной формы в актуальную, а  $f$  — гладкая скалярнозначная функция, зависящая от точек  $\mathfrak{B}_0$  и времени. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{d}{dt} \int_{\lambda_t(\mathfrak{B}_0)} f(X, t) dV(X) = \int_{\lambda_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \frac{\partial f(X, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(fv) \right\} dV(X).$$

В классических курсах механики континуума это равенство выводится двумя способами. В первом способе, с использованием замены переменных, интеграл сводится к интегралу по неподвижному объему. Во втором способе рассматривается движущаяся область и вычисляется приращение ее объема.

**36°.** Пусть  $\mathfrak{B}$  — тело,  $\mathfrak{P}$  — физическое пространство, представленные ориентируемыми многообразиями, с формами объема  $\mu_0$  и  $\mu$ , соответствующими выбранной ориентации. Как и в Главе 1, под частью тела понимается любое  $n$ -мерное подмногообразие  $\mathfrak{B}$  с краем. Пусть  $\{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  — движение, а  $\{\psi_{t,s}\}_{t,s \in \mathbb{T}}$  — соответствующее ему семейство потоков, зависящих от времени. Дополнительно, предположим, что каждое  $\psi_{t,s}$  сохраняет ориентацию. Это значит, что  $T\psi_{t,s}$  переводит репер, согласованный с выбранной ориентацией на  $\varkappa_s(\mathfrak{B})$ , в репер, согласованный с выбранной ориентацией на  $\varkappa_t(\mathfrak{B})$ . В этом случае можно использовать следующую теорему о замене переменных [40]. Фиксируем  $s \in \mathbb{T}$ . Пусть  $\omega$  —  $n$ -форма на  $\varkappa_s(\mathfrak{B})$  с компактным носителем. Тогда  $\psi_{t,s}^* \omega$  имеет компактный носитель, и справедливо равенство

$$\int_{\psi_{t,s}(\varkappa_s(\mathfrak{B}))} \omega = \int_{\varkappa_s(\mathfrak{B})} \psi_{t,s}^* \omega. \quad (2.3.1)$$

С использованием равенств (2.3.1), (2.1.7), линейности<sup>5</sup>  $\psi_{t,s}^*$ , свойства производной Ли быть дифференцированием<sup>6</sup> и определения дивергенции, приведенного в **30**<sup>o</sup>, можно доказать теорему о дифференцировании интеграла по подвижному объему. Пусть  $f : \mathfrak{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкое отображение. Тогда справедливо равенство [40]

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_{t,s}(\mathfrak{z}_s(\mathfrak{B}_0))} f(X, t) \mu = \int_{\psi_{t,s}(\mathfrak{z}_s(\mathfrak{B}_0))} \left\{ \frac{\partial f(X, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_\mu(fv) \right\} \mu,$$

где  $v$  — пространственная скорость. В силу равенства (2.1.1), сформулированное равенство может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{z}_t(\mathfrak{B}_0)} f(X, t) \mu = \int_{\mathfrak{z}_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \frac{\partial f(X, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_\mu(fv) \right\} \mu.$$

Последнее равенство может быть записано в компактном виде с использованием операции  $\mathbb{L}$ , определенной равенством (2.1.8), в предположении, что  $\mu$  не зависит от  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{z}_t(\mathfrak{B}_0)} f(X, t) \mu = \int_{\mathfrak{z}_t(\mathfrak{B}_0)} \mathbb{L}(f\mu).$$

В случае, когда  $f$  равно плотности  $\rho$ , получаем интегральную формулировку закона сохранения массы:

$$\int_{\mathfrak{z}_t(\mathfrak{B}_0)} \mathbb{L}(\rho\mu) = 0.$$

## 4. Связность на многообразии

### 4.1. Определение связности

**37**<sup>o</sup>. «Башни» тензорных пространств в различных точках  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{M}^n$  гладкого многообразия  $\mathfrak{M}^n$  построены независимо друг от друга. В част-

<sup>5</sup>«Pullback» гладкого отображения многообразий является линейной операцией на множестве внешних форм данного порядка, переводящей форму в форму того же порядка, что и исходная [40, с. 354].

<sup>6</sup>В частности, для скалярнозначной функции  $f : \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}$  и формы объема  $\mu$  справедливо следующее равенство:  $\mathcal{L}_u(f\mu) = (\mathcal{L}_u f)\mu + f\mathcal{L}_u\mu$ .

ности, это означает, что операция сложения, или сравнение касательных векторов к многообразию  $\mathcal{M}^n$ , приложенных в точках  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ , не определены. Необходимо внешнее правило, которое дает способ установить соответствие элементов «башен» тензорных пространств в различных точках многообразия, связывает их. Это правило называется связностью на многообразии  $\mathcal{M}^n$ .

Связность на расслоении  $\pi : \mathfrak{E} \rightarrow \mathcal{M}^n$  может вводиться различным образом. Мы опишем подход, которому следуют [42, 47–49]. Предположим, что с каждой гладкой кривой  $\chi$  на многообразии  $\mathcal{M}^n$  связано семейство отображений (в совокупности они формируют правило параллельного переноса вдоль кривой)

$$S_{s,t}(\chi) : \mathfrak{E}_{\chi(s)} \rightarrow \mathfrak{E}_{\chi(t)},$$

которое удовлетворяет трем условиям:

- (i)  $S_{s,s}(\chi) = \text{Id} : \mathfrak{E}_{\chi(s)} \rightarrow \mathfrak{E}_{\chi(s)}$ ;
- (ii)  $S_{t,k}(\chi) \circ S_{s,t}(\chi) = S_{s,k}(\chi)$ ;
- (iii)  $S_{s,t}(\chi)$  гладко зависит от  $s$ ,  $t$ .

**38°.** По поводу произвольности параллельного переноса (произвольности  $S_{s,t}$ ) сделаем три замечания:

(i) Рассмотрим двумерную сферу, вложенную в трехмерное евклидово пространство. Пусть имеются два наблюдателя, один из которых — трехмерное существо, а другой — житель Сферландии (см. [1], Глава 1, Введение, и [50]). Пусть имеется вектор, касающийся Северного полюса сферы. Этот вектор необходимо перенести параллельно на Южный полюс. Два наблюдателя понимают этот процесс по-разному. Трехмерный наблюдатель перенесет вектор таким образом, чтобы его координаты в глобальном координатном репере оставались постоянными; Сферландец будет переносить этот вектор по касательной к меридиану. Относительно базиса сферической системы координат компоненты вектора останутся постоянными. В результате получим, что оба этих способа дают противоположно направленные векторы на Южном полюсе. Таким образом, правил параллельного переноса на одном и том же многообразии может быть несколько и с геометрической точки зрения эти правила равноправны.

(ii) Рассмотрим неевклидово пространство–время  $\mathfrak{S} = \mathbb{T} \times \mathfrak{P}$ , где  $\mathfrak{P}$  — пространство событий. Предположим, что на  $\mathfrak{S}$  задана локально–лоренцева система координат и в этом пространстве присутствует наблю-

датель. Он может сравнивать векторы и тензоры в соседних событиях, параллельно перенося их в в одно общее событие. С его точки зрения, параллельный перенос осуществляется следующим образом: все компоненты в лоренцевой системе сохраняют свои значения точно так же, как если бы он находился в плоском пространстве–времени.

(iii) Выбор правила параллельного переноса диктуется физическими соображениями, что будет показано в дальнейшем.

**39°.** Правило параллельного переноса позволяет определить дифференцирование сечения вдоль кривой (инфинитезимальную связность) [42, с. 375]. Рассмотрим гладкую кривую  $\chi$  на многообразии  $\mathfrak{M}^n$ , проходящую через точку  $p \in \mathfrak{M}^n$ , причем,  $\chi(0) = p$ . Пусть  $u$  — касательный вектор к этой кривой в точке  $p$ . Если  $\mathcal{T}$  — сечение расслоения  $\pi : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{M}^n$  над  $\chi$ , то

$$\nabla_u \mathcal{T} := \left. \frac{d}{dt} S_{t,0}(\chi) \mathcal{T}_{\chi(t)} \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_{h,0}(\chi) \mathcal{T}_{\chi(h)} - \mathcal{T}_{\chi(0)}}{h}.$$

**40°.** Предыдущий пункт, вместе с рассуждениями из [42, с. 375], приводит к результатам, которые мы сформулируем в виде определения. Линейная (аффинная) связность  $\nabla$  вводится как отображение ( $r \geq 1$ )

$$\nabla : \mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n) \times \mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{V}^{r-1}(\mathfrak{M}^n), \quad (u, v) \rightarrow \nabla_u v,$$

для которого выполнены условия:

- (i)  $\forall u, v, w \in \mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n) : \nabla_{u+v} w = \nabla_u w + \nabla_v w;$
- (ii)  $\forall u, v \in \mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n) \quad \forall f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R}) : \nabla_{fu} v = f \nabla_u v;$
- (iii)  $\forall u, v, w \in \mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n) : \nabla_u (v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w;$
- (iv)  $\forall u, v \in \mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n) \quad \forall f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R}) : \nabla_u (fv) = f \nabla_u v + (uf)v$

— правило Лейбница.

**41°.** В фиксированном поле (неголономных) реперов  $\mathfrak{M}^n \ni p \mapsto (e_i|_p)_{i=1}^n$  и соответствующем ему поле кореперов  $\mathfrak{M}^n \ni p \mapsto (\vartheta^i|_p)_{i=1}^n$  отображение  $\nabla$  определяется  $n^3$  действительными функциями  $\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \langle \vartheta^i, \nabla_{e_j} e_k \rangle \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$ . Далее мы используем соглашение о суммировании по одному верхнему и одному нижнему индексу. Суммирование ведется от 1 до  $n = \dim \mathfrak{M}^n$ .

**Замечание 18.** В силу того, что  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} \partial_k$ , для  $u = u^i \partial_i$ ,  $v = v^j \partial_j$ , имеем следующее координатное представление ковариантной производной  $\nabla_u v$ :

$$\nabla_u v = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n u^i \left( \partial_i v^k + \sum_{j=1}^n v^j \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} \right) \partial_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n u^i \nabla_i v^k \partial_k,$$

где  $\nabla_i v^k = \langle dx^k, \nabla_{\partial_i} v \rangle$ .

Можно построить два вида смешанных тензоров, соответствующих двум разным нотациям<sup>7</sup>:

(i) **Нотация Гиббса.** Вводится тензор  $\nabla v = \nabla_i v^k dx^i \otimes \partial_k$ . Тогда  $\nabla_u v = u \lrcorner \nabla v$ .

(ii) **Нотация Трусделла.** Вводится тензор  $\nabla v = \nabla_i v^k \partial_k \otimes dx^i$ . Тогда  $\nabla_u v = \nabla v \lrcorner u$ .

Именно в последнем смысле мы понимаем символ  $\nabla v$ , т.е. в настоящей работе  $\nabla v = \nabla_i v^k \partial_k \otimes dx^i$ . ♠

В том же поле реперов и кореперов определяются 1-формы связности  $\omega^i_{\cdot j} = \Gamma^i_{\cdot kj} \vartheta^k$ . Отсюда следует соотношение  $\nabla_{e_i} e_j = \langle \omega^k_{\cdot j}, e_i \rangle e_k$ . Заметим, что ковариантную производную можно записать, как

$$\nabla = \Gamma^i_{\cdot jk} e_i \otimes \vartheta^j \otimes \vartheta^k.$$

**42°.** Получим закон изменения функций  $\Gamma^i_{\cdot jk}$  при переходе к новому полю реперов. Пусть отображения  $\Omega^i_{\cdot j} \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}^n; \mathbb{R})$  определяют гладкое поле невырожденных  $n \times n$  матриц. Этому полю соответствует поле реперов

$$\mathcal{M}^n \ni p \mapsto (e'_i|_p)_{i=1}^n, \quad e'_i = \Omega^j_{\cdot i} e_j.$$

Соответствующее поле кореперов  $\mathcal{M}^n \ni p \mapsto (\vartheta'^i|_p)_{i=1}^n$  выражается через поле старых кореперов соотношением  $\vartheta'^i = \mathcal{U}^i_{\cdot j} \vartheta^j$ , где  $[\mathcal{U}^i_{\cdot j}] = [\Omega^i_{\cdot j}]^{-1}$ .

<sup>7</sup>Названия этих нотаций не являются общепринятыми. Они мотивированы тем, что существуют два представления оператора  $\nabla$  в евклидовом пространстве. Первое представление восходит к Дж.У. Гиббс [51]. Оно заключается в определении  $\nabla$  как символического вектора,  $\nabla = e^i \partial_i$ , и использовании стандартных операций тензорного произведения и свертки, например,  $\nabla \otimes u$ ,  $\nabla \cdot u$ , для векторного поля  $u$ . Такой подход используется во многих монографиях по механике, например, [33]. При втором представлении  $\nabla$  входит в состав знаковочетания, обозначающего производное отображение. Так, производное отображение векторного поля  $u : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ , в точке  $P \in \Omega$ , где  $\Omega \subset \mathcal{E}$  — открыто, есть линейный оператор  $\nabla u(P)$ , такой, что при всех  $h \in \mathcal{V}$ , для которых  $P + h \in \Omega$ , справедливо равенство

$$u(P + h) = u(P) + \nabla u(P)[h] + o(\|h\|), \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Определения такого вида использовались в работах школы рациональной механики Трусделла, см., например, [52, 53]. Отметим, что в нотации Гиббса эта же запись выглядит следующим образом:

$$u(P + h) = u(P) + h \cdot \nabla \otimes u(P) + o(\|h\|), \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$



Наконец, пусть  $e_i = A^j_{\cdot i} \partial_{x^j}$ , где  $(x^i)$  — локальные координаты на  $\mathfrak{M}^n$ . Тогда

$$\nabla_{e'_j} e'_k = \nabla_{(\Omega^s_{\cdot j} e_s)} (\Omega^q_{\cdot k} e_q) = \Omega^s_{\cdot j} \nabla_{e_s} (\Omega^q_{\cdot k} e_q) = \Omega^s_{\cdot j} \{ \Omega^q_{\cdot k} \nabla_{e_s} e_q + e_s (\Omega^q_{\cdot k}) e_q \},$$

откуда, так как

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \langle \vartheta'^i, \nabla_{e'_j} e'_k \rangle = \mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot m} \langle \vartheta^m, \nabla_{e'_j} e'_k \rangle, \quad \text{и} \quad e_s (\Omega^q_{\cdot j}) = A^l_{\cdot s} \partial_{x^l} \Omega^q_{\cdot j},$$

следует

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \{ \Omega^q_{\cdot k} \langle \vartheta^m, \nabla_{e_s} e_q \rangle + \langle \vartheta^m, e_q \rangle A^l_{\cdot s} \partial_{x^l} \Omega^q_{\cdot k} \},$$

что с учетом равенств  $\Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} = \langle \vartheta^m, \nabla_{e_s} e_q \rangle$  и  $\langle \vartheta^m, e_q \rangle = \delta_q^m$ , приводит к окончательному выражению:

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \Omega^q_{\cdot k} + A^l_{\cdot s} \mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \partial_{x^l} \Omega^m_{\cdot k}. \quad (2.4.1)$$

Формула (2.4.1) определяет преобразование связности в общем случае: при переходе от поля неголономных реперов к полю новых неголономных реперов. Если исходное поле реперов — натуральное, то  $A^l_{\cdot s} = \delta^l_s$ , и соотношение (2.4.1) преобразуется к виду

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \Omega^q_{\cdot k} + \mathcal{U}^{i\cdot}_{\cdot m} \Omega^s_{\cdot j} \partial_{x^s} \Omega^m_{\cdot k}. \quad (2.4.2)$$

Если оба поля реперов порождаются некоторыми координатными системами, т.е. преобразование связности вызвано заменой координат, то  $\Omega^i_{\cdot j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$ , где  $(x^i)$  — старые координаты,  $(x'^j)$  — новые, то соотношение (2.4.2) примет вид

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^k}. \quad (2.4.3)$$

Формула (2.4.1) определяет преобразование связности, не являющееся линейным. Таким образом, функции  $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$  не являются компонентами никакого тензорного поля, несмотря на то, что их значения определяют линейное преобразование в фиксированном касательном пространстве.

## 4.2. Метод подвижного репера

**43°.** Приведем обобщение метода подвижного репера, предложенного Эли Картаном [54, 55]. Идея этого метода заключается в следующем. Рассмотрим аффинное евклидово пространство  $\mathcal{E}^m$ , в котором заданы глобальный декартов репер  $(i_s)_{s=1}^m$  и поле гладких невырожденных линейных преобразований  $P \mapsto \Omega_P$ . По ним определим поле реперов  $P \mapsto (z_s|_P)_{s=1}^m$ , где  $z_s = \Omega(i_s)$ . С использованием построенного поля реперов, вводится новая связность, отличная от евклидовой. В настоящей работе такой подход используется при построении пространства Вайценбока.

Пусть на многообразии  $\mathfrak{M}^n$  заданы некоторые координаты (локальные). Они определяют поле координатных реперов  $\mathfrak{M}^n \ni p \mapsto (\partial_i|_p)_{i=1}^n$ . Пусть отображения  $\Omega^i_j \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$  определяют гладкое поле невырожденных  $n \times n$  матриц. Наряду с полем координатных реперов определим новое поле реперов соотношением

$$\mathfrak{M}^n \ni p \mapsto (z_i|_p)_{i=1}^n, \quad z_i = \Omega^j_i \partial_j.$$

Для поля координатных реперов скобки Ли равны нулю:  $[\partial_i, \partial_j] = 0$ , однако для поля реперов  $(z_i)_{i=1}^n$  скобки Ли отличны от нуля, то есть,

$$[z_i, z_j] = -c_{ij}^k z_k, \quad (2.4.4)$$

где  $c_{ij}^k$  — структурные коэффициенты (коэффициенты анголономии). Используя соотношение

$$[fu, gv]_p = f(p)g(p)[u, v]_p + f(p)u_p(g)v_p - g(p)v_p(f)u_p,$$

получаем систему уравнений относительно  $c_{ij}^m$  при фиксированных  $i, j$ :

$$-c_{ij}^m \Omega^k_m = \Omega^q_i (\partial_q \Omega^k_j) - \Omega^q_j (\partial_q \Omega^k_i),$$

откуда  $c_{ij}^k = -\mathcal{U}^k_m \{ \Omega^q_i (\partial_q \Omega^m_j) - \Omega^q_j (\partial_q \Omega^m_i) \}$ , где  $[\mathcal{U}^i_j] = [\Omega^i_j]^{-1}$ . Принимая во внимание соотношение  $\partial_i \mathcal{U}^k_j = -\mathcal{U}^m_j (\partial_i \Omega^q_m) \mathcal{U}^k_q$ , получаем более компактное выражение для  $c_{ij}^k$ :

$$c_{ij}^k = \Omega^m_i \Omega^q_j (\partial_m \mathcal{U}^k_q - \partial_q \mathcal{U}^k_m).$$

Для заданного поля реперов определяется соответствующее поле ко-реперов  $(\vartheta^i)_{i=1}^n$  на  $\mathfrak{M}^n$ , удовлетворяющее соотношениям  $\langle \vartheta^i, z_j \rangle = \delta_j^i$ . При этом,  $\vartheta^i = \mathcal{U}^i_j dx^j$ .

Получим дуальное соотношение (в терминах кореперов) для (2.4.4). Запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} c^k_{\cdot} = d\vartheta^k &= d(\mathcal{U}^k_{\cdot j} dx^j) = \sum_{i < j} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) dx^i \wedge dx^j = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) dx^i \wedge dx^j, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве суммирование ведется по всем  $i, j$ , вследствие чего поставлен компенсирующий множитель  $1/2$ . Далее,

$$\begin{aligned} c^k_{\cdot} = d\vartheta^k &= \frac{1}{2} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) \delta_p^i \delta_q^j dx^p \wedge dx^q = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \mathcal{U}^k_{\cdot j} - \partial_j \mathcal{U}^k_{\cdot i}) \Omega_{\cdot l}^i \mathcal{U}^l_{\cdot p} \Omega_{\cdot s}^j \mathcal{U}^s_{\cdot q} dx^p \wedge dx^q = \\ &= \frac{1}{2} c_{pq}^{\cdot \cdot k} \vartheta^p \wedge \vartheta^q = \sum_{p < q} c_{pq}^{\cdot \cdot k} \vartheta^p \wedge \vartheta^q. \end{aligned}$$

Таким образом, получили искомое соотношение

$$d\vartheta^k = \sum_{p < q} c_{pq}^{\cdot \cdot k} \vartheta^p \wedge \vartheta^q. \quad (2.4.5)$$

**44°.** Коэффициенты связности оказываются отличными от нуля при переходе к криволинейным координатам в евклидовом пространстве и при описании пространств совершенно иной геометрии — Риманова пространства и пространств Картана.

По внешнему виду зависимости  $\Gamma_{\cdot jk}^i$  невозможно выяснить, какой из перечисленных случаев имеет место. Для того, чтобы выделить пространства неевклидовой геометрии, удобно использовать тензорные поля кручения

$$\mathfrak{T} : \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \times \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{V}^{s-1}(\mathfrak{M}^n),$$

кривизны

$$\mathfrak{K} : \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \times \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \times \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{V}^{s-2}(\mathfrak{M}^n),$$

и неметричности

$$\Omega : \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \times \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \times \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \rightarrow \mathcal{E}^{s-1}(\mathcal{M}^n; \mathbb{R}),$$

которые при заданной метрике  $g$  полностью характеризуют связность многообразия  $\mathcal{M}^n$ . Эти поля определяются следующими соотношениями:

$$\mathfrak{T}(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]; \quad (2.4.6)$$

$$\mathfrak{K}(u, v, w) = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w; \quad (2.4.7)$$

$$\Omega(u, v, w) = g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) - u[g(v, w)]. \quad (2.4.8)$$

**Замечание 19.** Неметричность измеряет деформацию длин и углов при параллельном переносе. Если неметричность равна нулю, то говорят, что связность совместна с данной метрикой. ♠

**Замечание 20.** Кручение является мерой отсутствия симметричности связности. Пусть  $(\partial_i)_{i=1}^n$  — поле координатных реперов на  $\mathcal{M}^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(u, v) &= \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] = \\ &= u^i (\partial_i v^k + v^j \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}) \partial_k - v^j (\partial_j u^k + u^i \Gamma_{ji}^{k\cdot\cdot}) \partial_k - (u^i \partial_i v^k - v^j \partial_j u^k) \partial_k = \\ &= u^i v^j (\Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} - \Gamma_{ji}^{k\cdot\cdot}) \partial_k, \end{aligned}$$

откуда следует, что<sup>8</sup>  $\mathfrak{T} = (\Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} - \Gamma_{ji}^{k\cdot\cdot}) \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$ . Это значит, что  $\mathfrak{T} = 0$  в том и только в том случае, когда  $\Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} = \Gamma_{ji}^{k\cdot\cdot}$ , при всех  $i, j, k$ .

Приведем механическую интерпретацию кручения. Пусть  $\mathfrak{B}$  — тело. Любая связность  $\nabla$  на нем называется *материальной*. Пусть физическое пространство евклидово. Справедлива теорема, сформулированная и доказанная в [53]: *простое связанное материально-единообразное тело является однородным<sup>9</sup> в том и только в том случае, когда оно имеет симметричную материальную связность*. Иначе говоря, кручение материальной связности тождественно равно нулю. Поэтому оно является мерой неоднородности; в работе [53] кручение называется *неоднородностью* материальной связности.

Другая интерпретация тензора кручения материальной связности заключается в том, что им полностью определяется тензор плотности дислокаций  $\alpha$  [56]. В компонентах (относительно координатного базиса) он имеет вид [53]:

$$\alpha = \alpha^{\kappa\tau} \partial_\kappa \otimes \partial_\tau, \quad \alpha^{\kappa\tau} = \frac{1}{2} T_{\cdot\gamma\delta}^{\kappa\cdot\cdot} \epsilon^{\tau\gamma\delta},$$

<sup>8</sup>Таким образом, компоненты тензора кручения равны  $T_{ij}^{k\cdot\cdot} = \Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} - \Gamma_{ji}^{k\cdot\cdot}$ . В литературе (см., например, [53]) встречается и другое определение тензора кручения,  $T_{ij}^{k\cdot\cdot} = \Gamma_{\cdot[ij]}^k = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} - \Gamma_{ji}^{k\cdot\cdot})$ .

<sup>9</sup>Простое тело называется однородным, если его функционал отклика зависит только от локальной отсчетной конфигурации.

где  $T^k_{\cdot\gamma\delta}$  — компоненты тензора кручения,  $\epsilon^{\gamma\delta} = \sqrt{G}\epsilon^{\gamma\delta}$ , а  $\epsilon^{\gamma\delta}$  — альтернатор. Связь тензоров кручения и плотности дислокаций была установлена в пионерских работах по теории дислокаций, см., например, [57]. ♠

Заданные поля (2.4.6)–(2.4.8) определяют связность по формуле [58]:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ijk} = 2\Gamma^m_{\cdot jk}g_{mk} = & \partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} + \\ & + T_{ijk} - T_{jki} + T_{kij} + \\ & + Q_{ijk} + Q_{jki} - Q_{kij}. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

**45°.** Соотношение, представляющее связность, кривизну, кручение и неметричность может быть представлено в виде форм:

$$\begin{aligned} T^i &= d\vartheta^i + \omega^i_{\cdot j} \wedge \vartheta^j, \\ R^i_{\cdot j} &= d\omega^i_{\cdot j} + \omega^i_{\cdot k} \wedge \omega^k_{\cdot j}, \end{aligned}$$

где  $T^i$  — форма кручения,  $R^i_{\cdot j}$  — форма кривизны:

$$\mathfrak{T} = e_i \otimes T^i, \quad \mathfrak{R} = e_i \otimes \vartheta^j \otimes R^i_{\cdot j}.$$

Заметим, что в общем случае  $d\vartheta^i \neq 0$ , так как  $\vartheta^i$  может быть элементом неголономного поля кореперов.

**Замечание 21.** В двумерном случае кривизна полностью определяется скалярной кривизной (скаляром Риччи) — следом тензора Риччи:

$$Ric = R_{ij}dx^i \otimes dx^j,$$

где  $R_{ij} = R^k_{\cdot ikj}$ .

Для заданного поля реперов  $\{\vartheta^1, \vartheta^2\}$  определена одна ненулевая 1–форма связности  $\omega^1_{\cdot 2}$ , одна ненулевая 2–форма кривизны  $R^1_{\cdot 2}$  и две 2–формы кручения:

$$\begin{aligned} T^1 &= d\vartheta^1 + \omega^1_{\cdot 2} \wedge \vartheta^2, \\ T^2 &= d\vartheta^2 - \omega^1_{\cdot 2} \wedge \vartheta^1. \end{aligned}$$

♠

Введенные формы удовлетворяют тождествам Бианки:

$$\begin{aligned} dT^i + \omega^i_{\cdot k} \wedge T^k &= R^i_{\cdot k} \wedge \vartheta^k, \\ dR^i_{\cdot j} + \omega^i_{\cdot k} \wedge R^k_{\cdot j} &= R^i_{\cdot k} \wedge \omega^k_{\cdot j}. \end{aligned}$$

**46°.** Многообразии  $\mathfrak{M}^n$  вместе с заданными на нем метрикой  $g$  и связностью  $\nabla$  представляет собой упорядоченную тройку  $(\mathfrak{M}^n, g, \nabla)$  —

аффинно–метрическое пространство. Подобные обобщения евклидовых пространств впервые возникли в работах Гаусса, Римана, Лобачевского, Больяи, а в XX веке развиты в работах Леви–Чивиты [59], Картана [60], Вайценбока [61]. Удобна следующая классификация:

$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{Q}$	Пространство	Где используется
●	●	●	аффинно–метрическое	общий случай несовместных деформаций ОТО (Эйнштейн – Картан)
●	●	○	Римана – Картана	нелинейная термоупругость
●	○	●	Римана – Вейля	
●	○	○	Римана	ОТО (Эйнштейн)
○	●	●	Вейля – Картана	калибровочные теории гравитации
○	●	○	Вайценбока	континуальная теория дислокаций
○	○	●	Вейля	континуальная теория пористых сред
○	○	○	Евклида	механика Ньютона

В таблице символ ● означает поле, отличное от нуля, а ○ — поле, тождественно равное нулю.

*Замечание 22.* Имеются альтернативные классификации аффинно-метрических пространств, см., например, [62]. ♠

Заметим, что условие  $\mathfrak{Q} = 0$ , то есть, когда связность и метрика согласованы, влечет за собой выполнение равенства  $\mathfrak{Q}(u, v, w) = 0$ , для произвольных векторных полей  $u, v, w$  из  $\mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n)$ :

$$\mathfrak{g}(\nabla_u v, w) + \mathfrak{g}(v, \nabla_u w) - u[\mathfrak{g}(v, w)] = 0. \quad (2.4.10)$$

### 4.3. Пространства Римана и Вайценбока

47°. Дадим новый способ определения связности, который опирается на идею материального единообразия (материальная связность, В. Нолл). Предположим, что задано гладкое поле невырожденных  $n \times n$  матриц, определяемое отображениями  $\Omega^i_j \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}^n; \mathbb{R})$ . Этому полю соответствует поле реперов

$$\mathcal{M}^n \ni p \mapsto (z_i|_p)_{i=1}^n, \quad z_i = \Omega^i_j \partial_j.$$

Будем искать такую связность  $\nabla$ , чтобы для векторов этого репера выполнялись соотношения

$$\nabla_{z_i} z_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

О такой связности говорят, что она устанавливает абсолютный параллелизм. Коэффициенты связности относительно данного репера равны нулю:  $\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = 0$ . Ранее мы получили формулу (2.4.2), определяющую преобразование связности при переходе от поля голономных реперов к полю новых неголономных реперов. Поэтому, искомые коэффициенты связности в голономном репере определяются из уравнения

$$\Gamma_{\cdot sq}^{m\cdot\cdot} \mathcal{U}_{\cdot m}^i \Omega_{\cdot j}^s \Omega_{\cdot k}^q + \mathcal{U}_{\cdot m}^i \Omega_{\cdot j}^s \partial_s \Omega_{\cdot k}^m = 0.$$

Домножим обе части уравнения на  $\Omega_{\cdot i}^o \mathcal{U}_{\cdot l}^j \mathcal{U}_{\cdot r}^k$  и просуммируем по  $i, j, k$ . Это даст нам уравнение  $\Gamma_{\cdot sq}^{m\cdot\cdot} \delta_m^o \delta_l^s \delta_r^q + \delta_m^o \delta_l^s \mathcal{U}_{\cdot r}^k \partial_s \Omega_{\cdot k}^m = 0$ , откуда получаем соотношение

$$\Gamma_{\cdot sq}^{m\cdot\cdot} = -\mathcal{U}_{\cdot q}^k \partial_s \Omega_{\cdot k}^m.$$

Полученное соотношение можно преобразовать:

$$\Gamma_{\cdot sq}^{m\cdot\cdot} = -\mathcal{U}_{\cdot q}^k \partial_s \Omega_{\cdot k}^m = -\mathcal{U}_{\cdot q}^k \partial_s \Omega_{\cdot k}^r \delta_r^m = -\mathcal{U}_{\cdot q}^k \partial_s \Omega_{\cdot k}^r \mathcal{U}_{\cdot r}^i \Omega_{\cdot i}^m,$$

откуда, используя соотношение  $\partial_i \mathcal{U}_{\cdot j}^k = -\mathcal{U}_{\cdot j}^m (\partial_i \Omega_{\cdot m}^q) \mathcal{U}_{\cdot q}^k$ , получаем

$$\Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} = \Omega_{\cdot m}^k \partial_i \mathcal{U}_{\cdot j}^m. \quad (2.4.11)$$

Отметим, что полученное равенство использовалось Крёнером в работе [57]. При этом  $\Omega_{\cdot m}^k$  соответствует дисторсии при переходе от одного состояния в другое.

**48°.** Пространство Римана характеризуется тем, что в нем  $\mathfrak{T} = 0$ ,  $\mathfrak{Q} = 0$ . Из уравнения (2.4.10), путем циклической перестановки векторов  $u, v, w$  получаем еще два уравнения. При сложении двух и вычитании из них третьего, получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \{g(\nabla_u v, w) + g(\nabla_v u, w)\} + \\ & + \{g(\nabla_u w, v) - g(\nabla_w u, v)\} + \{g(\nabla_v w, u) - g(\nabla_w v, u)\} = \\ & = u[g(v, w)] + v[g(u, w)] - w[g(u, v)]. \quad (2.4.12) \end{aligned}$$

Из равенства  $\mathfrak{T} = 0$  следует соотношение<sup>10</sup>  $\nabla_u v = \nabla_v u + [u, v]$ . Используя его, из (2.4.12) получаем

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{g}(\nabla_u v, w) - \mathfrak{g}([u, v], w) + \mathfrak{g}([u, w], v) + \mathfrak{g}([v, w], u) = \\ = u[\mathfrak{g}(v, w)] + v[\mathfrak{g}(u, w)] - w[\mathfrak{g}(u, v)]. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Как в пункте выше, рассмотрим поле реперов

$$\mathfrak{M}^n \ni p \mapsto (z_i|_p)_{i=1}^n, \quad z_i = \Omega_{\cdot i}^j \partial_j, \quad \det[\Omega_{\cdot i}^j] \neq 0,$$

для которых  $[z_i, z_j] = -c_{ij}^{\cdot m} z_m$ . Полагая  $u = z_i, v = z_j, w = z_k$ , из (2.4.13) получаем соотношение для векторов неголономного репера:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{g}(\nabla_{z_i} z_j, z_k) + c_{ij}^{\cdot m} \mathfrak{g}(z_m, z_k) - c_{ik}^{\cdot l} \mathfrak{g}(z_l, z_j) - c_{jk}^{\cdot q} \mathfrak{g}(z_q, z_i) = \\ = z_i[\mathfrak{g}(z_j, z_k)] + z_j[\mathfrak{g}(z_i, z_k)] - z_k[\mathfrak{g}(z_i, z_j)]. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Получим выражение для коэффициентов связности. Пусть  $\Omega_{\cdot i}^j = \delta_i^j$ ,  $[z_i, z_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0$ . Обозначая  $g_{ij} = \mathfrak{g}(\partial_i, \partial_j)$  и учитывая равенство  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{\cdot ij}^{m \cdot} \partial_m$ , из (2.4.14) получаем

$$2g_{km} \Gamma_{\cdot ij}^{m \cdot} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}.$$

Так как  $\Gamma_{\cdot ij}^{k \cdot} = \delta_m^k \Gamma_{\cdot ij}^{m \cdot} = g^{kl} g_{lm} \Gamma_{\cdot ij}^{m \cdot}$ , то приходим к связности Леви-Чивиты:

$$\Gamma_{\cdot ij}^{k \cdot} = \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j, \quad \Gamma_{\cdot ij}^{k \cdot} = \frac{g^{kl}}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (2.4.15)$$

**Замечание 23.** В Главе 2 работы [1] была установлена формула для  $\mathcal{E}^b$ :

$$\mathcal{E}^b = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial x^\beta} d\mathfrak{X}^\alpha \otimes d\mathfrak{X}^\beta,$$

где  $\mathcal{E} = \mathcal{F}^T \mathcal{F}$  — правый тензор Коши–Грина, соответствующий конфигурации  $\mathfrak{x}$ ,  $(\mathfrak{X}^\alpha)$  — локальные координаты на теле,  $\mathfrak{g}$  — риманова метрика физического пространства. При этом, как было показано (см. также [37]), справедливо равенство:

$$\mathcal{E}^b = \mathfrak{x}^* \mathfrak{g}.$$

<sup>10</sup>В частном случае, для поля координатных реперов  $(\partial_i)$  имеем  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$ .



Как отмечалось в работе [53] на преобразование  $(\mathfrak{X}^\alpha) \mapsto (X^k)$ , порождаемое конфигурацией  $\varkappa$ , можно смотреть как на переход от материальным координатам на теле к новым координатам<sup>11</sup>. При этом, тело снабжается римановой метрикой, равной  $\mathcal{E}^b$ .

Пусть  $\tilde{\nabla}$  — связность Леви–Чивиты на теле  $\mathfrak{B}$ , порожденная метрикой  $\mathcal{E}^b$ . Ее кручение и неметричность равны нулю, а кривизна есть  $\varkappa^*\mathfrak{K}$ . Если физическое пространство было евклидово, то кривизна связности равна нулю [37] и мы получаем, что аффинно–метрическое пространство  $(\mathfrak{B}, \mathcal{E}^b, \tilde{\nabla})$  — евклидово. Это необходимое условие, которому должна удовлетворять конфигурация тела в евклидово физическое пространство. Вместе с тем, справедливо обратное условие, но только локально [37]. Если на  $\mathfrak{B}$  задано симметричное положительно определенное тензорное поле  $\mathcal{E} = C_{\alpha\beta}d\mathfrak{X}^\alpha \otimes d\mathfrak{X}^\beta$ , такое, что по отношению к нему тензор кривизны равен нулю, то для каждой точки  $\mathfrak{X}_0 \in \mathfrak{B}$  найдутся такая ее окрестность  $\mathcal{U}$  и такое вложение  $\varkappa: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$ , что по отношению к  $\varkappa$  тензор  $\mathcal{E}^{1\sharp}$  — правый тензор Коши–Грина. ♠

49°. Любая связность, совместимая с данной метрикой  $\mathcal{g}$  (то есть,  $\mathfrak{Q} \equiv 0$ ), связана со связностью Леви–Чивиты формулой:

$$\nabla = \nabla^c - \mathfrak{K}, \quad (2.4.16)$$

которая следует из (2.4.9). В ней  $\mathfrak{K}$  — тензор конторсии, который имеет следующее представление в координатном репере:

$$K_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \frac{1}{2}(-T_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} - T_{k\cdot j}^{\cdot i\cdot} + T_{jk\cdot}^{\cdot\cdot i}). \quad (2.4.17)$$

Здесь  $T_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot}$  — компоненты тензора кручения, которые в координатном репере равны

$$T_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} - \Gamma_{\cdot kj}^{\cdot i\cdot}.$$

Кроме того,  $T_{k\cdot j}^{\cdot i\cdot} = g_{kl}g^{is}T_{\cdot sj}^{l\cdot\cdot}$ ,  $T_{jk\cdot}^{\cdot\cdot i} = g_{jl}g^{is}T_{\cdot ks}^{l\cdot\cdot}$ .

50°. Пространству с абсолютным параллелизмом может быть единственным образом поставлено в соответствие пространство Римана со связностью Леви–Чивиты таким образом, что метрика в обоих пространствах совпадает, а связности в фиксированных точках многообразия задают операторы, совпадающие с точностью до поворота. Это делается за счет введения особой метрики.

<sup>11</sup>В работе [53] также отмечалось, что при рассмотрении таких преобразований нужно соблюдать осторожность, называя их преобразованиями координат. Строго говоря, это не преобразование координат, соответствующее различным математическим описаниям одного и того же объекта. В данном случае объекты разные, ибо тело рассматривается как отдельная сущность, «воплощаемая» в физическом пространстве посредством конфигураций.

Пусть задано гладкое поле невырожденных  $n \times n$  матриц  $(\Omega_{.j}^i)$ ,  $\Omega_{.j}^i \in \mathcal{E}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$ , которому соответствует поле реперов на  $\mathfrak{M}^n$ :

$$(z_i)_{i=1}^n, \quad z_i = \Omega_{.i}^j \partial_j.$$

Этому реперу соответствует связность Вайценбока  $\nabla$ :

$$\nabla_{z_i} z_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

коэффициенты которой в репере  $(\partial_i)$  определяются формулой (2.4.11). Определим новую метрику  $\mathcal{g}^*$  пространства Вайценбока  $(\mathfrak{M}^n, \nabla)$  формулой

$$\mathcal{g}^*(u, v) = \mathcal{g}(\mathcal{K}u, \mathcal{K}v), \quad (2.4.18)$$

где<sup>12</sup>  $\mathcal{K} = \partial_s \otimes z^s = \mathcal{U}_{.k}^s \partial_s \otimes dx^k$  — имплант (по Можену, [36]). Этой метрике соответствует связность Леви–Чивиты  $\nabla^*$ . Согласно Ноллу, разность  $\nabla - \nabla^*$  определяется лишь поворотом векторов репера и значения функционала отклика для простого материала не различаются на этих связностях. В. Нолл называет разность  $\nabla - \nabla^*$  конторсией  $\mathcal{K}$  [63]. Чтобы отличить ее от тензора  $\mathfrak{K}$ , введенного ранее, будем говорить о *конторсии по Ноллу*.

**51°.** Рассмотрим пример. Пусть  $(\mathcal{E}^3, \mathcal{V}^3)$  — трехмерное аффинно-евклидово пространство;  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  — декартовы координаты;  $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{i}_3 = \mathbf{k}$  — орты декартовой координатной системы. Они определяют поле реперов, получаемых сдвигом (трансляцией). Кореперы отождествляются по (неканоническому) изоморфизму  $(\mathcal{V}^3)^* \cong \mathcal{V}^3$ , то есть,  $\mathbf{i}^1 \leftrightarrow \mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}^2 \leftrightarrow \mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{i}^3 \leftrightarrow \mathbf{i}_3$ . Положение точки в  $(\mathcal{E}^3, \mathcal{V}^3)$  определяется вектором места  $\mathcal{X}(p) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ .

(i) Зададим в  $(\mathcal{E}^3, \mathcal{V}^3)$  сферические координаты преобразованиями

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

где  $r = q^1$ ,  $\theta = q^2$ ,  $\varphi = q^3$  — новые (сферические) координаты. Положение точки определяется выражением  $\mathbf{x} = \mathbf{i}_k x^k(q^1, q^2, q^3)$ . В точках физического пространства определено поле локальных базисов  $(\mathbf{e}_s)_{s=1}^3$ :  $\mathbf{e}_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^s}$ , векторы которого определены выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi \sin \theta + \mathbf{j} \sin \varphi \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\theta = \mathbf{i} r \cos \varphi \cos \theta + \mathbf{j} r \sin \varphi \cos \theta - \mathbf{k} r \sin \theta, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} r \sin \varphi \sin \theta + \mathbf{j} r \cos \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Отметим, что  $\mathcal{g}^*(z_i, z_j) = \mathcal{g}(\partial_i, \partial_j)$ .

Преобразование  $\mathbf{i}_k \mapsto \mathbf{e}_s$  задается оператором  $\Omega$ , а обратное к нему — оператором  $\mathcal{U}$ , которые в паре базисов  $(\mathbf{i})_{i=1}^3, (\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$  имеют разложения

$$\Omega = \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{i}^s = \Omega_{\cdot j}^{i \cdot} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}^j, \quad \mathcal{U} = \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}^s = \mathcal{U}_{\cdot j}^{i \cdot} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j.$$

В рассматриваемом случае,

$$[\Omega_{\cdot j}^{i \cdot}] = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\mathcal{U}_{\cdot j}^{i \cdot}] = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ r^{-1} \cos \varphi \cos \theta & r^{-1} \sin \varphi \cos \theta & -r^{-1} \sin \theta \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Примем в качестве исходных базис сферической системы координат и матрицу  $[\mathcal{U}_{\cdot j}^{i \cdot}]$ , которую рассматриваем как матрицу преобразования от репера сферической системы к новому, являющемуся ортонормированным репером  $(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$ . Найдем связность, устанавливающую абсолютный параллелизм для репера  $(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$ . Вычисление коэффициентов связности Вайценбока в сферической системе координат по формуле (2.4.11), в которой надо поменять местами символы  $\Omega$  и  $\mathcal{U}$ , а производная вычисляется по  $r, \theta, \varphi$ , дает (приведены ненулевые выражения)

$$\Gamma_{\cdot 22}^{1 \cdot \cdot} = -r, \quad \Gamma_{\cdot 33}^{1 \cdot \cdot} = -r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{\cdot 12}^{2 \cdot \cdot} = \Gamma_{\cdot 21}^{2 \cdot \cdot} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\cdot 33}^{2 \cdot \cdot} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\cdot 23}^{3 \cdot \cdot} = \Gamma_{\cdot 32}^{3 \cdot \cdot} = \cot \theta, \quad \Gamma_{\cdot 13}^{3 \cdot \cdot} = \Gamma_{\cdot 31}^{3 \cdot \cdot} = \frac{1}{r}.$$

Это — известные выражения коэффициентов евклидовой связности в сферических координатах. Таким образом, полученная связность Вайценбока, устанавливающая абсолютный параллелизм для поля  $(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$ , совпадает с евклидовой. Кручение  $\mathfrak{T}$ , кривизна  $\mathfrak{R}$  и неметричность  $\mathfrak{Q}$ , естественно, равны нулю.

Нормированный сферический базис определяется соотношениями:

$$\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle} = \mathbf{e}_{\langle r \rangle} = \mathbf{i} \cos \varphi \sin \theta + \mathbf{j} \sin \varphi \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta = \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} = \mathbf{e}_{\langle \theta \rangle} = \mathbf{i} \cos \varphi \cos \theta + \mathbf{j} \sin \varphi \cos \theta - \mathbf{k} \sin \theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle} = \mathbf{e}_{\langle \varphi \rangle} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi.$$

Преобразование  $e_k \mapsto e_{\langle s \rangle}$  задается оператором  $\Omega$ , а обратное к нему — оператором  $\mathcal{U}$ , которые имеют следующее представление:

$$\Omega = e_{\langle s \rangle} \otimes e^s = \Omega_{\cdot j}^i e_i \otimes e^j, \quad \mathcal{U} = e_s \otimes e^{\langle s \rangle} = \mathcal{U}_{\cdot j}^i e_{\langle i \rangle} \otimes e^{\langle j \rangle}.$$

Здесь

$$[\Omega_{\cdot j}^i] = \text{diag} \{1, r^{-1}, (r \sin \theta)^{-1}\}, \quad [\mathcal{U}_{\cdot j}^i] = \text{diag} \{1, r, r \sin \theta\}.$$

Примем в качестве исходных поле реперов сферической системы координат и матрицу  $[\Omega_{\cdot j}^i]$ , которую рассматриваем как матрицу преобразования от поля реперов сферической системы к новому, являющемуся полем реперов  $(e_{\langle s \rangle})_{s=1}^3$ . Найдем связность, устанавливающую абсолютный параллелизм для поля реперов  $(e_{\langle s \rangle})_{s=1}^3$ . Вычисление коэффициентов связности Вайценбока в сферической системе координат по формуле (2.4.11), дает (приведены ненулевые выражения)

$$\Gamma_{\cdot 12}^{2\cdot\cdot} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\cdot 13}^{3\cdot\cdot} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\cdot 23}^{3\cdot\cdot} = \cot \theta.$$

Отличные от нуля компоненты кручения имеют вид:

$$T_{\cdot 12}^{2\cdot\cdot} = -T_{\cdot 21}^{2\cdot\cdot} = \frac{1}{r}, \quad T_{\cdot 13}^{3\cdot\cdot} = -T_{\cdot 31}^{3\cdot\cdot} = \frac{1}{r}, \quad T_{\cdot 23}^{3\cdot\cdot} = -T_{\cdot 32}^{3\cdot\cdot} = \cot \theta.$$

Компоненты тензоров кривизны  $\mathfrak{K}$  и неметричности  $\mathfrak{Q}$  равны нулю. Таким образом,  $\mathcal{E}^3$  вместе с построенной связностью  $\nabla$  образует пространство Вайценбока с нетривиальным кручением. Связность Вайценбока совместна с данной метрикой  $g$ , поэтому мы можем вычислить ее конторсию, характеризующую отклонение новой связности от связности Леви-Чивиты в данной метрике. Согласно (2.4.17), имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} = & -r e_r \otimes e^\theta \otimes e^\theta - r \sin^2 \theta e_r \otimes e^\varphi \otimes e^\varphi + \\ & + \frac{1}{r} e_\theta \otimes e^\theta \otimes e^r - \sin \theta \cos \theta e_\theta \otimes e^\varphi \otimes e^\varphi + \frac{1}{r} e_\varphi \otimes e^\varphi \otimes e^r + \cot \theta e_\varphi \otimes e^\varphi \otimes e^\theta. \end{aligned}$$

(ii) Зададим в  $(\mathcal{E}^3, \mathcal{V}^3)$  цилиндрические координаты преобразованиями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \xi,$$

где  $r = q^1$ ,  $\varphi = q^2$ ,  $\xi = q^3$  — новые (цилиндрические) координаты. Векторы локального базиса определены выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}r \sin \varphi + \mathbf{j}r \cos \varphi, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_\xi = \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Преобразование  $\Omega : \mathbf{i}_k \mapsto \mathbf{e}_s$  и обратное к нему,  $\mathcal{U}$ , определяются выражениями

$$\Omega = \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{i}^s = \Omega_{\cdot j}^i \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}^j, \quad \mathcal{U} = \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}^s = \mathcal{U}_{\cdot j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j.$$

Здесь

$$[\Omega_{\cdot j}^i] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{U}_{\cdot j}^i] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r^{-1} \sin \varphi & r^{-1} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Примем в качестве исходных поле реперов цилиндрической системы координат и матрицу  $[\mathcal{U}_{\cdot j}^i]$ , которую рассматриваем как матрицу преобразования от исходного поля реперов к новому, ортонормированному полю реперов  $(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$ . Найдем связность, которая устанавливает абсолютный параллелизм для поля  $(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$ . Вычисление коэффициентов связности Вайценбока в цилиндрической системе координат по формуле (2.4.11), в которой надо поменять местами символы  $\Omega$  и  $\mathcal{U}$ , а производная вычисляется по  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\xi$ , приводит к трем ненулевым выражениям

$$\Gamma_{\cdot 22}^{1\cdot\cdot} = -r, \quad \Gamma_{\cdot 12}^{2\cdot\cdot} = \Gamma_{\cdot 21}^{2\cdot\cdot} = \frac{1}{r}.$$

Полученная связность Вайценбока совпадает с евклидовой, а ее компоненты — с соответствующими компонентами евклидовой связности в цилиндрических координатах.

Нормированный цилиндрический базис определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{e}_{\langle r \rangle} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi = \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{e}_{\langle \varphi \rangle} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{e}_{\langle \xi \rangle} = \mathbf{k} = \mathbf{e}_\xi. \end{aligned}$$

Преобразование  $\Omega : \mathbf{e}_k \mapsto \mathbf{e}_{\langle s \rangle}$  и обратное к нему,  $\mathcal{U}$ , представлены соотношениями

$$\Omega = \mathbf{e}_{\langle s \rangle} \otimes \mathbf{e}^s = \Omega_{\cdot j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \quad \mathcal{U} = \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}^{\langle s \rangle} = \mathcal{U}_{\cdot j}^i \mathbf{e}_{\langle i \rangle} \otimes \mathbf{e}^{\langle j \rangle}.$$

Здесь

$$[\Omega_{\cdot j}^i] = \text{diag} \{1, r^{-1}, 1\}, \quad [\mathcal{U}_{\cdot j}^i] = \text{diag} \{1, r, 1\}.$$

Пусть исходными являются поле реперов цилиндрической системы координат и матрица  $[\Omega_{\cdot j}^i]$ , рассматриваемая как матрица преобразования от исходного поля реперов к новому,  $(\mathbf{e}_{\langle s \rangle})_{s=1}^3$ . Найдем связность, устанавливающую абсолютный параллелизм для поля  $(\mathbf{e}_{\langle s \rangle})_{s=1}^3$ . Вычисление коэффициентов связности Вайценбока в цилиндрической системе координат по формуле (2.4.11) приводит к одному ненулевому значению

$$\Gamma_{\cdot 12}^{2\cdot\cdot} = \frac{1}{r}.$$

Отличные от нуля компоненты кручения имеют вид:

$$T_{\cdot 12}^{2\cdot\cdot} = -T_{\cdot 21}^{2\cdot\cdot} = \frac{1}{r}.$$

Компоненты тензоров кривизны  $\mathfrak{K}$  и неметричности  $\mathfrak{Q}$  равны нулю. Таким образом,  $\mathcal{E}^3$  вместе с построенной связностью образует пространство Вайценбока с нетривиальным кручением. Конторсия построенной связности имеет вид:

$$\mathfrak{K} = -r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^\varphi \otimes \mathbf{e}^\varphi + \frac{1}{r} \mathbf{e}^\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r.$$

Полученные результаты сведены в таблицы, содержащие матрицы форм связностей, то есть матрицы с элементами  $a_{ij} = \omega_{\cdot j}^i = \Gamma_{\cdot kj}^i \vartheta^k$ . С физической точки зрения имеем, следующую интерпретацию. Пространство  $\mathcal{E}^3$  есть физическое пространство, с наложенным условием калибровки: коэффициенты связности в базисе  $(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$  равны нулю. Исходя из этого условия, определяются коэффициенты связности в сферической и цилиндрической координатных системах. Также, зная коэффициенты связности в сферической и цилиндрической системах координат, можем вычислить их значения относительно пронормированных реперов соответствующих систем координат. Во всех трех случаях — это одна и та

же связность. С другой стороны, на  $\mathcal{E}^3$  можно смотреть, как на тело, с наложенным на него условием калибровки: коэффициенты связности в базисах  $(\mathbf{e}_{(s)})_{s=1}^n$  равны нулю. В данном случае, для сферической и цилиндрической координатных систем мы получим разные связности! Таким образом, имеем одно многообразие  $\mathcal{E}^3$ , но три аффинно-метрических пространства  $(\mathcal{E}^3, \mathcal{g}, \nabla)$ .

(i) Сферическая система координат.

	$(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$	$(\mathbf{e}_s)_{s=1}^3$	$(\mathbf{e}_{(s)})_{s=1}^3$
Физ. пр-во	0	$\begin{pmatrix} 0 & -r\mathbf{e}^\theta & -r\sin^2\theta\mathbf{e}^\theta \\ \frac{1}{r}\mathbf{e}^\theta & \frac{1}{r}\mathbf{e}^r & -\sin\theta\cos\theta\mathbf{e}^\varphi \\ \frac{1}{r}\mathbf{e}^\varphi & \cot\theta\mathbf{e}^\varphi & \frac{1}{r}\mathbf{e}^r + \cot\theta\mathbf{e}^\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r}\mathbf{e}^\theta & -\frac{1}{r}\mathbf{e}^\varphi \\ \frac{1}{r}\mathbf{e}^\theta & 0 & -r^{-1}\cot\theta\mathbf{e}^\varphi \\ \frac{1}{r}\mathbf{e}^\varphi & r^{-1}\cot\theta\mathbf{e}^\varphi & 0 \end{pmatrix}$
Мат. пр-во	$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{1:2}^1 & \omega_{1:3}^1 \\ -\omega_{1:2}^1 & 0 & \omega_{2:3}^2 \\ -\omega_{1:3}^1 & -\omega_{2:3}^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\mathbf{e}^r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r}\mathbf{e}^r + \cot\theta\mathbf{e}^\theta \end{pmatrix}$	0

Здесь  $\omega_{1:2}^1 = -\frac{y}{r_0^2}\mathbf{i}^1 + \frac{x}{r_0^2}\mathbf{i}^2$ ,  $\omega_{1:3}^1 = -\frac{x^2z}{r^2r_0^2}\mathbf{i}^1 - \frac{xyz}{r^2r_0^2}\mathbf{i}^2 + \frac{x}{r^2}\mathbf{i}^3$ ,

$\omega_{2:3}^2 = -\frac{xyz}{r^2r_0^2}\mathbf{i}^1 - \frac{y^2z}{r_0^2r^2}\mathbf{i}^2 + \frac{y}{r^2}\mathbf{i}^3$ , а  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $r_0^2 = x^2 + y^2$ .

Рассмотрим следующую физическую интерпретацию. Имеется шар, каждый элементарный объем которого трансформируется в единообразное состояние известным преобразованием. По этому преобразованию мы определили связность. С другой стороны, этому преобразованию соответствуют деформации элементарных объемов, или, иначе, реперов. Если фиксировать радиус, т.е. выделить сферический слой, то в результате преобразования параллелепипеды не совместятся друг с другом. Совмещение может быть достигнуто преобразованием конторсии по Ноллу.

(ii) Цилиндрическая система координат.

	$(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$	$(\mathbf{e}_s)_{s=1}^3$	$(\mathbf{e}_{(s)})_{s=1}^3$
Физическое пр-во	0	$\begin{pmatrix} 0 & -r\mathbf{e}^\varphi & 0 \\ \frac{1}{r}\mathbf{e}^\varphi & \frac{1}{r}\mathbf{e}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r}\mathbf{e}^\varphi & 0 \\ \frac{1}{r}\mathbf{e}^\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Материальное пр-во	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{y}{r^2}\mathbf{i}^1 + \frac{x}{r^2}\mathbf{i}^2 & 0 \\ \frac{y}{r^2}\mathbf{i}^1 - \frac{x}{r^2}\mathbf{i}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\mathbf{e}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0

Здесь  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Преобразование к единообразному состоянию трансформирует все цилиндрические поверхности к цилиндру с единичным радиусом. При этом, элементарные объемы можно выстроить без пересечений, расположив их по радиальным лучам, выходящих из единичного цилиндра. Но

соседние лучи не связаны — между ними клиновидные пустоты. В результате преобразования конторсии по Ноллу эти пустоты заполняются. Это соответствует разрезу цилиндра и развертке его в параллелепипед.

#### 4.4. Связность в физическом пространстве

**52°.** Рассмотрим абстрактный подход к определению связности в физическом пространстве, основанный на идеях Эли Картана [60]. Пусть  $\mathfrak{S}$  — гладкое четырехмерное многообразие,  $\mathfrak{P}$  — гладкое трехмерное многообразие,  $\mathbb{T}$  — гладкое линейно упорядоченное одномерное многообразие, диффеоморфное  $\mathbb{R}$ . Под нарезкой (slicing)  $\mathfrak{S}$  на  $\mathfrak{P}$  понимается диффеоморфизм

$$i : \mathbb{T} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{S},$$

а обратный к нему  $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathfrak{P}$  — слоением (framing). Назовем  $\mathfrak{S}$  классическим пространством–временем, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) Существует гладкое сюръективное отображение (мировое время)  $\tau : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{T}$ , матрица Якоби координатного представления которой во всех точках  $\mathfrak{S}$  отлична от нуля. При этом,

$$\forall t \in \mathbb{T} : (\mathfrak{P}_t = \tau^{-1}(t) \text{ диффеоморфно } \mathfrak{P}).$$

(ii) Существует нарезка  $i : \mathbb{T} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{S}$ , называемая Ньютоновой, такая, что

$$\forall t \in \mathbb{T} \quad \forall X \in \mathfrak{P} : \tau(i(t, X)) = t.$$

(iii) Существует симметричная связность  $\nabla$  на  $\mathfrak{S}$ , такая, что 1–форма  $dt$  ковариантно постоянна, то есть

$$\forall u \in \mathcal{V}^s(\mathfrak{S}) : \nabla_u(dt) = 0.$$

(iv) Для каждого  $t \in \mathbb{T}$  связность  $\nabla$  сужается на связность  $\nabla_t$ , заданную на  $\mathfrak{P}_t$ , так, что если  $v_1, v_2$  касаются  $\mathfrak{P}_t$ , то то же верно и для  $\nabla_{v_1}v_2$ . Более того, каждое  $\mathfrak{P}_t$  снабжено метрикой  $g_t$ , с соответствующей связностью Леви–Чивиты  $\nabla_t$ .

*Замечание 24. 1)* Конструкция классического пространства–времени, представленная упорядоченным набором  $(\mathfrak{S}, \mathfrak{P}, \tau, \nabla, g_t)$ , аналогична конструкции тривиального расслоения с базой  $\mathbb{T}$ , тотальным пространством  $\mathfrak{S}$ , типовым слоем  $\mathfrak{P}$ , про-



екцией  $\tau$  и координатной функцией  $i$ . Однако, если в общем определении локально-тривиального расслоения от координатной функции требуется лишь быть гомеоморфизмом, то в данном случае,  $i$  есть диффеоморфизм. Также, в определении локально-тривиального расслоения не указаны условия на метрику и связность. **2)** Из (iii) следует, что  $\nabla$  ограничимо на  $\mathfrak{P}_t$ . **3)** Типичным примером классического пространства-времени является  $\mathfrak{S} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , где  $\tau$  есть проекция на первый сомножитель, а связность определяется равенством  $\nabla_u w = u \cdot \nabla w$ ,  $\nabla = e^k \partial_k$ . Евклидова метрика  $g_t$  определена в  $\mathfrak{P}_t = \{t\} \times \mathbb{R}^3$ , которое отождествляется с  $\mathbb{R}$ . ♠

Необходимо отметить, что нарезка  $i : \mathbb{T} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{S}$  есть математическая формализация присутствия наблюдателя. Разные наблюдатели могут наблюдать пространственно-временные характеристики, такие, например, как метрика и связность, по-разному. При этом считается, что метрика и связность заданы независимо от наблюдателя. В [37], в связи с этим, приведено такое определение. Определим отображение  $i_t : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{S}$ , действующее по правилу:  $i_t(X) = i(t, X)$ . Метрика, наблюдаемая  $i$  в  $\mathfrak{P}$  в момент времени  $t$ , есть  $g_{t;i} = i_t^* g_t$ . То есть, это та метрика, которую «видит»  $i$ ; воплощение  $g_t$  перед  $i$  в момент времени  $t$ . Аналогично определяется связность, наблюдаемая  $i$  в  $\mathfrak{P}$  в момент времени  $t$ :  $\nabla_{t;i} = i_t^* \nabla_t := (\nabla_t)_{\{i_{t*}\}}(i_{t*}\cdot)$ .

**53°.** Несмотря на то, что классическое физическое пространство  $(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$  имеет евклидову структуру, часто бывает удобно ввести криволинейные координаты, упрощающие формулировку и решение краевых задач. Вместе с тем, евклидова структура остается неизменной, хотя формулы становятся аналогичны их неевклидовым аналогам, в частности, числовая матрица  $g_{ij}$  заменяется функциональной матрицей, появляются объекты, подобные символам Кристоффеля. Важно подчеркнуть, что это искусственное различие.

В пространстве  $(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$  в классических курсах принято отождествлять вектор  $\mathbf{u}$  с ковектором  $\mathbf{u}^b = g(\mathbf{u}, \cdot)$ , и наоборот. Поэтому, если  $P \mapsto (\mathbf{e}_k|_P)_{k=1}^m$  — поле базисов, то полем дуальных базисов служит векторное поле  $P \mapsto (\mathbf{e}^k|_P)_{k=1}^m$ , удовлетворяющее соотношениям  $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^s = \delta_k^s$ . Это означает, что  $\langle (\mathbf{e}^s)^b, \mathbf{e}_k \rangle = g(\mathbf{e}^s, \mathbf{e}_k) = \delta_k^s$ .

Криволинейные координаты определяются  $C^2$ -отображениями  $q^k = q^k(x^1, \dots, x^m)$ , являющимися обратимыми:  $x^k = x^k(q^1, \dots, q^m)$ . В криволинейных координатах поля базисов (называемых локальными) и соответствующие им поля дуальных базисов определяются следующим обра-

ЗОМ:

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{i}_s \frac{\partial x^s}{\partial q^k}, \quad \mathbf{e}^k = \mathbf{i}_s \frac{\partial q^k}{\partial x^s}.$$

Компоненты метрического тензора  $\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$  и ассоциированного с ним  $\mathbf{g}^{1\#2\#} = g^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , который принято отождествлять с  $\mathbf{g}$ , определяются по формулам

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^s}{\partial q^j} \delta_{ks}, \quad g^{ij} = \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{\partial q^j}{\partial x^s} \delta^{ks}.$$

Ковариантная производная определяется выражением

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad \text{где} \quad \nabla := \mathbf{e}^k \partial_k.$$

Здесь  $\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial q^k}$ .

Символы Кристоффеля вычисляются по формуле

$$\gamma^i_{\cdot jk} = \mathbf{e}^i \cdot \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial q^j \partial q^k}.$$

Покажем, что введение такой связности не изменило геометрию исходного пространства. Иными словами, нужно показать, что  $\mathfrak{R} = \mathbf{0}$ ,  $\mathfrak{T} = \mathbf{0}$ ,  $\mathfrak{Q} = 0$ . Вычислим кривизну. Для этого используем координатные представления

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = & \underbrace{u^k (\partial_k v^i) (\partial_i w^j)}_{\dots\dots\dots} (\partial_j \mathbf{x}) + \underbrace{u^k v^i (\partial_k \partial_i w^j)}_{\dots\dots\dots} (\partial_j \mathbf{x}) + \underbrace{u^k v^i (\partial_i w^j) (\partial_k \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} + \\ & + \underbrace{u^k (\partial_k v^i) w^j (\partial_i \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{u^k v^i (\partial_k w^j) (\partial_i \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{u^k v^i (\partial_k \partial_i \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} = & \underbrace{v^k (\partial_k u^i) (\partial_i w^j)}_{\dots\dots\dots} (\partial_j \mathbf{x}) + \underbrace{v^k u^i (\partial_k \partial_i w^j)}_{\dots\dots\dots} (\partial_j \mathbf{x}) + \underbrace{v^k u^i (\partial_i w^j) (\partial_k \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} + \\ & + \underbrace{v^k (\partial_k u^i) w^j (\partial_i \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{v^k u^i (\partial_k w^j) (\partial_i \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{v^k u^i (\partial_k \partial_i \partial_j \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathbf{w} = & \underbrace{u^i (\partial_i v^j) (\partial_j w^k)}_{\dots\dots\dots} (\partial_k \mathbf{x}) + \underbrace{u^i (\partial_i) w^k (\partial_j \partial_k \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} - \underbrace{v^i (\partial_i w^j) (\partial_j w^k) (\partial_k \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots} - \\ & - \underbrace{v^i (\partial_i u^j) w^k (\partial_j \partial_k \mathbf{x})}_{\dots\dots\dots}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание симметрию вторых производных ( $\partial_i \partial_j \mathbf{x} = \partial_j \partial_i \mathbf{x}$  и т.д.) и подобие подчеркнутых членов, получаем

$$\mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathbf{w} = \mathbf{0},$$

для всех гладких векторных полей  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ .

Из выражений

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \underline{u^i (\partial_i v^j) (\partial_j \mathbf{x})} + \underline{u^i v^j (\partial_i \partial_j \mathbf{x})},$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \underline{v^i (\partial_i u^j) (\partial_j \mathbf{x})} + \underline{v^i u^j (\partial_i \partial_j \mathbf{x})},$$

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \underline{u^i (\partial_i v^j) (\partial_j \mathbf{x})} - \underline{v^i (\partial_i u^j) (\partial_j \mathbf{x})},$$

а также симметрии вторых производных, следует равенство

$$\mathfrak{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{0},$$

справедливое для любых гладких векторных полей  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ .

Наконец, вычислим неметричность. Для этого используем равенства

$$\mathfrak{g}(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \underline{w_j u^i (\partial_i v^j)} + \underline{w^k u^i v^j (\partial_k \mathbf{x}) \cdot (\partial_i \partial_j \mathbf{x})},$$

$$\mathfrak{g}(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}) = \underline{v_j u^i (\partial_i w^j)} + \underline{v^k u^i w^j (\partial_k \mathbf{x}) \cdot (\partial_i \partial_j \mathbf{x})},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}[\mathfrak{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})] &= \underline{u^i w_j (\partial_i v^j)} + \underline{u^i v_k (\partial_i w^k)} + \underline{u^i v^j w^k (\partial_i \partial_j \mathbf{x}) \cdot (\partial_k \mathbf{x})} + \\ &\quad + \underline{u^i v^j w^k (\partial_j \mathbf{x}) \cdot (\partial_i \partial_k \mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Учитывая перестановочность вторых производных, получаем

$$\mathfrak{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathfrak{g}(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathfrak{g}(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}) - \mathbf{u}[\mathfrak{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})] = 0.$$

54°. Допустим, что физическое пространство  $\mathfrak{P}$  является римановым многообразием с метрикой  $\mathfrak{g}$ . Тем самым, на нем определена связность Леви-Чивиты:

$$\gamma^{\cdot k \cdot \cdot}_{\cdot s q} = \frac{g^{kl}}{2} (\partial_q g_{ls} + \partial_s g_{lq} - \partial_l g_{sq}).$$

Форма объема имеет вид:

$$\mu = f\sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad g = \det(g_{ks}),$$

где  $f$  — гладкое отображение на  $\mathfrak{P}$ , всюду положительное.

Кривизна отлична от нуля, а кручение и неметричность равны нулю, что подтверждают следующие вычисления. Используя координатные представления

$$\nabla_u v = \underline{u^i(\partial_i v^j)e_j} + \underline{u^i v^j \gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} e_k},$$

$$\nabla_v u = \underline{v^i(\partial_i u^j)e_j} + \underline{v^i u^j \gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} e_k},$$

$$[u, v] = \underline{u^i(\partial_i v^j)e_j} - \underline{v^i(\partial_i u^j)e_j},$$

а также принимая во внимание равенства  $\gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} = \gamma_{ji}^{k\cdot\cdot}$  (т.е. симметрию коэффициентов связности), устанавливаем, что

$$\mathfrak{I}(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] = 0,$$

для любых гладких сечений  $u, v$  касательного расслоения  $T\mathfrak{P}$ .

Вычислим неметричность. Используя равенства

$$\mathfrak{g}(\nabla_u v, w) = \underline{w_k u^i(\partial_i v^k)} + \underline{w_k u^i v^j \gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}},$$

$$\mathfrak{g}(v, \nabla_u w) = \underline{v_k u^i(\partial_i w^k)} + \underline{v_k u^i w^j \gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}},$$

$$u[g(v, w)] = \underline{u^i w_j(\partial_i v^j)} + \underline{u^i v_k(\partial_i w^k)} + \underline{u^i v^j w^k(\partial_i g_{jk})},$$

и соотношение  $\gamma_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot} + \gamma_{kji}^{\cdot\cdot\cdot} - \partial_j g_{ij} = 0$ , устанавливаем, что неметричность равна нулю, т.е.,

$$\mathfrak{Q}(u, v, w) = \mathfrak{g}(\nabla_u v, w) + \mathfrak{g}(v, \nabla_u w) - u[g(v, w)] = 0,$$

для любых гладких сечений  $u, v, w$  касательного расслоения  $T\mathfrak{P}$ .

**55°.** Продолжим обсуждение, начатое в **52°**. Напомним, что в классическом четырехмерном пространстве–времени пространственные переменные отделены от временных. В слое  $\mathfrak{P}$  была задана метрика  $\mathfrak{g}$ .

В релятивистском подходе пространственные координаты и время являются равноправными. Равноправие достигается за счет введения на четырехмерном пространстве  $\mathfrak{S}$  псевдоримановой метрики  $g$  с сигнатурой Лоренца  $(-, +, +, +)$ . Под нарезкой  $\mathfrak{S}$  понимается диффеоморфизм  $\mathbb{T} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{S}$ . Здесь  $\mathfrak{P}$  есть трехмерное физическое пространство, обладающее свойством:

$$\forall t \in \mathbb{T} : (\mathfrak{P}_t := i(\mathfrak{P} \times \{t\}) = i_t(\mathfrak{P}) \text{ диффеоморфно } \mathfrak{P}).$$

Пусть  $\mathfrak{B}$  — трехмерное тело. Мировой трубкой назовем биективное отображение  $\Phi : \mathbb{T} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{S}$ . Пусть  $\mathfrak{B}_R$  — единообразная отсчетная форма этого тела. Как было указано во Введении к Главе 1 работы [1], возможны два случая:

(i) Существует такой момент времени  $t \in \mathbb{T}$ , что  $\mathfrak{B}_R \subset \mathfrak{P}_t$ . В этом случае, наблюдатель, находящийся в пространстве  $\mathfrak{P}$ , сможет идентифицировать  $\mathfrak{B}_R$ .

(ii) Существует такой момент времени  $t \in \mathbb{T}$ , что

$$\mathfrak{B}_R \subset \bigcup_{t \in \mathbb{J}} \{t\} \times \mathfrak{P}_t,$$

где  $\mathbb{J} \subset \mathbb{T}$  — множество, состоящее из более чем одного элемента. В этом случае, наблюдатель, находящийся в пространстве  $\mathfrak{P}$ , не сможет идентифицировать  $\mathfrak{B}_R$ . Это сможет сделать наблюдатель, находящийся в  $\mathfrak{S}$ .

## 5. Уравнения поля и законы сохранения

### 5.1. Принцип ковариантности

**56°.** Допустим, что имеется теория, которая описывается тензорными полями  $u_1, \dots, u_n$ , определенными в пространстве (или пространстве–времени)  $\mathfrak{S}$  и уравнения теории имеют вид

$$F_k(u_1, \dots, u_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.5.1)$$

Это могут быть уравнения в частных производных, интегральные уравнения и т.д. Уравнения (2.5.1) и, соответственно, описываемая ими теория, называются ковариантными [37, с. 156], если для любого диффеоморфизма  $\Phi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  выполняются соотношения:

$$(\Phi^* F_k)(u_1, \dots, u_n) = F_k(\Phi^* u_1, \dots, \Phi^* u_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Иначе говоря, при гладкой замене координат вид функций  $F_k$  не меняется.

## 5.2. Аналоги операторов дивергенции в отсчетной и актуальной конфигурации

57°. Внутренне–внешнее произведение (inner–exterior product)  $\dot{\wedge}$  определяется как операция

$$\dot{\wedge} : (\mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \otimes \mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n)) \times (\mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n) \otimes \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathcal{M}^n)) \rightarrow \mathcal{F}_k^s(\mathcal{M}^n),$$

являющаяся билинейной и удовлетворяющая свойству

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \quad \forall \vartheta, \beta \in \mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n) \quad \forall \omega \in \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathcal{M}^n) : \\ (u \otimes \beta) \dot{\wedge} (\vartheta \otimes \omega) = \langle u, \vartheta \rangle \beta \wedge \omega. \end{aligned}$$

Аналогичным образом вводится операция

$$\dot{\wedge} : (\mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n) \otimes \mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n)) \times (\mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \otimes \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathcal{M}^n)) \rightarrow \mathcal{F}_k^s(\mathcal{M}^n),$$

также являющаяся билинейной и удовлетворяющая свойству

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \quad \forall \vartheta, \beta \in \mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n) \quad \forall \omega \in \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathcal{M}^n) : \\ (\vartheta \otimes \beta) \dot{\wedge} (u \otimes \omega) = \langle u, \vartheta \rangle \beta \wedge \omega. \end{aligned}$$

Если на  $\mathcal{M}^n$  задана метрика  $\mathfrak{g}$ , то можно говорить и о таком варианте билинейной операции  $\dot{\wedge}$ :

$$\dot{\wedge} : (\mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \otimes \mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n)) \times (\mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \otimes \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathcal{M}^n)) \rightarrow \mathcal{F}_k^s(\mathcal{M}^n),$$

удовлетворяющей свойству

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \quad \forall \beta \in \mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n) \quad \forall \omega \in \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathcal{M}^n) : \\ (u \otimes \beta) \dot{\wedge} (v \otimes \omega) = \mathfrak{g}(u, v) \beta \wedge \omega. \end{aligned}$$

В зависимости от типа аргументов, выбирается то или иное определение  $\dot{\wedge}$ .

58°. Пусть  $\mathcal{M}^n$  обозначает гладкое многообразие, представляющее тело  $\mathfrak{B}$  или физическое пространство  $\mathfrak{P}$ , а  $\Gamma^s$  обозначает  $\mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n)$  или  $\mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n)$ . Определим дифференциальный оператор Картана

$$\mathfrak{d} : \Gamma^s \otimes \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathcal{M}^n) \rightarrow \Gamma^s \otimes \mathcal{F}_k^{s-1}(\mathcal{M}^n); \quad \mathcal{T} \mapsto \mathfrak{d}\mathcal{T}, \quad (2.5.2)$$

где  $1 \leq k$ , соотношением

$$d \langle u, \mathcal{T} \rangle = \langle u, \mathfrak{d}\mathcal{T} \rangle + \nabla u \wedge \mathcal{T}. \quad (2.5.3)$$

Заметим, что при  $k = 1$  оператор (2.5.2) совпадает с классическим оператором ковариантной производной<sup>13</sup>.

**59°.** Поскольку связности на многообразиях, представляющих тело,  $\mathfrak{B}$ , и пространство  $\mathfrak{P}$ , различны, то и соответствующие им операторы (2.5.2) тоже различаются. Будем использовать символ  $\mathfrak{D}$  для оператора внешнего ковариантного дифференцирования на  $\mathfrak{B}$  и сохраним символ  $\mathfrak{d}$  для оператора на  $\mathfrak{P}$ . Эти операторы связывает равенство

$$\begin{aligned} \forall u \in (\Gamma^s)^* \quad \forall v_1, \dots, v_k \in T\mathfrak{B} : \\ \mathfrak{d}(\vartheta \otimes \omega)(u, \mathcal{I}_* v_1, \dots, \mathcal{I}_* v_k) = \mathfrak{D}(\vartheta \otimes \mathcal{I}^* \omega)(u, v_1, \dots, v_k), \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

для любых фиксированных  $\vartheta \in \Gamma^s$  и  $\omega \in \mathcal{F}_{k-1}^s(\mathfrak{B})$ . Соответствующая диаграмма (приведена для случая, когда  $\dim \mathfrak{P} = 3$ )

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathfrak{P} \otimes \wedge^2 T^*\mathfrak{B} & \xleftarrow{\mathcal{I}^{*2}} & T^*\mathfrak{P} \otimes \wedge^2 T^*\mathfrak{P} \\ \downarrow \mathfrak{d} & & \downarrow \mathfrak{d} \\ T^*\mathfrak{P} \otimes \wedge^3 T^*\mathfrak{B} & \xleftarrow{\mathcal{I}^{*2}} & T^*\mathfrak{P} \otimes \wedge^3 T^*\mathfrak{P} \end{array}$$

коммутативна. В рассуждениях  $\mathcal{I}^{*2}$  означает частичное «pullback»-отображение (см. Глава 1, п. 12°), которое действует только на правую часть тензорного объекта, определяющего внешнюю форму, и не действует на левую, «векторную» часть.

**Замечание 25.** Определению (2.5.2, 2.5.3) для ковекторзначной формы напряжений Коши в локальной карте отвечает координатная форма записи, вид которой может быть получен в результате следующих вычислений. При этом предполагается, что как тело, так и физическое пространство, трехмерны.

Пусть  $(e_a)_{a=1}^3$  — поле координатных реперов в трехмерном физическом пространстве  $\mathfrak{P}$ , а  $(e^a)_{a=1}^3$  — соответствующее поле дуальных реперов. Напряжения Коши определяются ковекторзначной 2-формой  $\mathcal{T} = e^a \otimes (*t_a)$ , где  $t_a = t_{ab} e^b$ . Тогда для векторного поля  $v = v^q e_q$ , соответствующего пространственному полю скорости, каноническое спаривание с  $\mathcal{T}$  дает 2-форму

$$\langle v, \mathcal{T} \rangle = \langle v^q e_q, e^a \otimes (*t_{ab} e^b) \rangle = t_{ab} \delta_q^a v^q (*e^b) = t_{ab} v^a (*e^b).$$

<sup>13</sup>Более подробное описание свойств оператора (2.5.2) и доказательство корректности его определения содержится в [38].

Вычислим внешний дифференциал от  $\langle v, \mathcal{T} \rangle$ . Согласно свойству (iii) Главы 3, п. 95°,

$$d\langle v, \mathcal{T} \rangle = [d(t_{ab}v^a)] \wedge (*e^b) + t_{ab}v^a d(*e^b).$$

Для первого слагаемого получаем выражение:

$$d(t_{ab}v^a) = \partial_k(t_{ab}v^a)e^k.$$

Поскольку действие оператора Ходжа на ковектор  $e^b$  может быть представлено формулой (3.4.2), то

$$*e^b = \sqrt{g}(g^{b1}e^2 \wedge e^3 - g^{b2}e^1 \wedge e^3 + g^{b3}e^1 \wedge e^2),$$

и сомножитель во втором слагаемом может быть записан в виде

$$d(*e^b) = \partial_k(g^{bk}\sqrt{g})\omega,$$

где  $\omega = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ . Следовательно,

$$[d(t_{ab}v^a)] \wedge (*e^b) = g^{bk}\sqrt{g}\partial_k(t_{ab}v^a)\omega, \quad t_{ab}v^a d(*e^b) = t_{ab}v^a\partial_k(g^{bk}\sqrt{g})\omega.$$

Учитывая полученные выражения, приходим к следующей формуле для  $d\langle v, \mathcal{T} \rangle$ :

$$d\langle v, \mathcal{T} \rangle = [g^{bk}\sqrt{g}\partial_k(t_{ab}v^a) + t_{ab}v^a\partial_k(g^{bk}\sqrt{g})]\omega = [\partial_k(t_{ab}v^a g^{bk}\sqrt{g})]\omega.$$

Но  $t_{ab}g^{bk} = t_a^k$ , поэтому приходим к окончательному соотношению

$$d\langle v, \mathcal{T} \rangle = [\partial_k(t_a^k v^a \sqrt{g})]\omega.$$

Вычислим  $\nabla v \wedge \mathcal{T}$ . Так как  $\nabla v = \nabla_k v^a e_a \otimes e^k = (\partial_k v^a + \gamma_{\cdot bk}^a v^b) e_a \otimes e^k$ , то

$$\nabla v \wedge \mathcal{T} = (\nabla_k v^a e_a \otimes e^k) \wedge [t_{sl}e^s (*e^l)] = t_{sl} \nabla_k v^a \langle e_a, e^s \rangle [e^k \wedge (*e^l)].$$

Поскольку  $\langle e_a, e^s \rangle = \delta_a^s$ , а  $e^k \wedge (*e^l) = g^{kl}\sqrt{g}\omega$ , то

$$\nabla v \wedge \mathcal{T} = t_{al} \nabla_k v^a g^{kl} \sqrt{g} \omega = (\partial_k v^b + \gamma_{\cdot ak}^b v^a) t_b^k \sqrt{g} \omega.$$

Используя полученные выражения для  $d\langle v, \mathcal{T} \rangle$  и  $\nabla v \wedge \mathcal{T}$ , по формуле (2.5.3) получаем

$$\langle v, \mathfrak{d}\mathcal{T} \rangle = d\langle v, \mathcal{T} \rangle - \nabla v \wedge \mathcal{T} = [\partial_k(t_a^k \sqrt{g}) - \gamma_{\cdot ak}^b t_b^k \sqrt{g}] v^a \omega.$$

Используя формулу Фосса–Вейля

$$\partial_k \sqrt{g} = \sqrt{g} \gamma_{\cdot qk}^q,$$



и то, что  $\mu = \sqrt{g}\omega$ , окончательно получаем

$$\langle v, \mathfrak{D}\mathcal{T} \rangle = [\partial_k t_a^{\cdot k} + t_a^{\cdot k} \gamma_{\cdot qk}^{\cdot} - \gamma_{\cdot ak}^{\cdot} t_b^{\cdot k}] v^a \mu.$$

Выражение в скобках соответствует дивергенции поля напряжений в криволинейных координатах евклидова пространства. ♠

Аналогичным образом получается координатное представление для ковекторзначной формы  $\mathcal{S}$  Пиолы – Кирхгофа II рода.

Для получения координатного представления ковекторзначной формы  $\mathcal{P}$  Пиолы – Кирхгофа I рода необходимы пояснения к символу  $\nabla$  в формуле (2.5.3). Этот символ, применяемый к материальной скорости  $V$ , уже не имеет того смысла, который он имел в предыдущих рассуждениях. Действительно, материальная скорость есть отображение

$$V : \mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{x} \mapsto V(\mathfrak{x}) \in T_{z(\mathfrak{x})}\mathfrak{P},$$

а не сечение касательного расслоения  $T\mathfrak{P}$ . Поэтому к ней нельзя применять ранее определенный оператор  $\nabla$ . Согласно [37], можно определить оператор  $\nabla$ , действующий на двухточечные тензоры. В случае  $V$  выражение  $\nabla V$  имеет следующий вид:

$$\nabla V = (\partial_\alpha V^k + \gamma_{\cdot ij}^{\cdot k} V^i F_{\cdot \alpha}^{j \cdot}) e_k \otimes E^\alpha.$$

Здесь  $(E_\alpha)$  и  $(e_a)$  – координатные базисы в  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{P}$  соответственно,  $\gamma_{\cdot ij}^{\cdot k}$  – коэффициенты исходной связности физического пространства  $\mathfrak{P}$ .

**Замечание 26.** Получим координатное представление  $\langle V, \mathfrak{D}\mathcal{P} \rangle$ , где  $\mathcal{P}$  – форма напряжений Пиолы – Кирхгофа I рода, а  $V$  – material velocity. Пусть  $(e_a)_{a=1}^3$  – поле координатных реперов в трехмерном физическом пространстве  $\mathfrak{P}$ , а  $(e^a)_{a=1}^3$  – соответствующее поле дуальных реперов. Кроме того, пусть  $(E_a)_{a=1}^3$  – поле координатных реперов на материальном многообразии  $\mathfrak{B}$ , а  $(E^a)_{a=1}^3$  – соответствующее поле дуальных реперов. Напряжения Пиолы – Кирхгофа определяются ковекторзначной 2-формой  $\mathcal{P} = e^a \otimes (*p_a)$ , где  $p_a = p_{a\beta} \dot{E}^\beta$ . Тогда для векторного поля  $V = V^q e_q$ , соответствующего полю скорости, каноническое спаривание с  $\mathcal{P}$  дает 2-форму

$$\langle V, \mathcal{P} \rangle = \langle V^q e_q, e^a \otimes (*p_{a\beta} \dot{E}^\beta) \rangle = p_{a\beta} \dot{V}^a (*E^\beta).$$

Внешний дифференциал от  $\langle V, \mathcal{P} \rangle$  вычисляется аналогично случаю (i). В силу п. 95°, свойства (iii), имеем

$$d \langle V, \mathcal{P} \rangle = [d(p_{a\beta} \dot{V}^a)] \wedge (*E^\beta) + p_{a\beta} \dot{V}^a d(*E^\beta).$$

Для первого слагаемого получаем выражение:

$$d(p_{a\beta} \dot{V}^a) = \partial_\kappa (p_{a\beta} \dot{V}^a) E^\kappa.$$

Поскольку действие оператора Ходжа на ковектор  $E^\beta$  может быть представлено формулой (3.4.2), то

$$*E^\beta = \sqrt{G}(G^{\beta 1}E^2 \wedge E^3 - G^{\beta 2}E^1 \wedge E^3 + G^{\beta 3}E^1 \wedge E^2),$$

и сомножитель во втором слагаемом может быть записан в виде

$$d(*E^\beta) = \partial_\kappa(G^{\beta\kappa}\sqrt{G})\omega,$$

где  $\omega = E^1 \wedge E^2 \wedge E^3$ . Следовательно,

$$[d(p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}V^a)] \wedge (*E^\beta) = G^{\beta\kappa}\sqrt{G}\partial_\kappa(p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}V^a)\omega, \quad p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}V^a d(*E^\beta) = p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}V^a\partial_\kappa(G^{\beta\kappa}\sqrt{G})\omega.$$

Учитывая полученные выражения, приходим к следующей формуле для  $d\langle V, \mathcal{P} \rangle$ :

$$d\langle V, \mathcal{P} \rangle = \left[ G^{\beta\kappa}\sqrt{G}\partial_\kappa(p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}V^a) + p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}V^a\partial_\kappa(G^{\beta\kappa}\sqrt{G}) \right] \omega = \left[ \partial_\kappa(p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}V^a G^{\beta\kappa}\sqrt{G}) \right] \omega.$$

Но  $p_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot}G^{\beta\kappa} = p_a^{\cdot\kappa}$ , поэтому приходим к окончательному соотношению

$$d\langle V, \mathcal{P} \rangle = \left[ \partial_\kappa(p_a^{\cdot\kappa}V^a\sqrt{G}) \right] \omega.$$

Отметим, что в отличие от предыдущего случая, в полученной формуле фигурирует метрика *материального многообразия*.

Вычислим  $\nabla V \wedge \mathcal{P}$ . Так как  $\nabla V = (\partial_\alpha V^k + \gamma_{\cdot ij}^{k\cdot} V^i F_{\cdot\alpha}^{j\cdot}) e_k \otimes E^\alpha$ , то

$$\begin{aligned} \nabla V \wedge \mathcal{P} &= ((\partial_\alpha V^k + \gamma_{\cdot ij}^{k\cdot} V^i F_{\cdot\alpha}^{j\cdot}) e_k \otimes E^\alpha) \wedge [p_{s\lambda}^{\cdot\cdot} e^s (*E^\lambda)] = \\ &= p_{s\lambda}^{\cdot\cdot} (\partial_\alpha V^k + \gamma_{\cdot ij}^{k\cdot} V^i F_{\cdot\alpha}^{j\cdot}) \langle e_k, e^s \rangle [E^\alpha \wedge (*E^\lambda)]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\langle e_k, e^s \rangle = \delta_k^s$ , а  $E^\alpha \wedge (*E^\lambda) = G^{\alpha\lambda}\sqrt{G}\omega$ , то

$$\nabla V \wedge \mathcal{P} = p_{k\lambda}^{\cdot\cdot} (\partial_\alpha V^k + \gamma_{\cdot ij}^{k\cdot} V^i F_{\cdot\alpha}^{j\cdot}) G^{\alpha\lambda}\sqrt{G}\omega = (\partial_\kappa V^a + \gamma_{\cdot ij}^{a\cdot} V^i F_{\cdot\kappa}^{j\cdot}) p_a^{\cdot\kappa}\sqrt{G}\omega.$$

Используя полученные выражения для  $d\langle V, \mathcal{P} \rangle$  и  $\nabla V \wedge \mathcal{P}$ , по формуле (2.5.3) получаем

$$\langle V, \mathcal{D}\mathcal{P} \rangle = d\langle V, \mathcal{T} \rangle - \nabla V \wedge \mathcal{P} = \left[ \partial_\kappa(p_a^{\cdot\kappa}\sqrt{G}) - \gamma_{\cdot aj}^{b\cdot} F_{\cdot\kappa}^{j\cdot} p_b^{\cdot\kappa}\sqrt{G} \right] V^a \omega.$$

Используя формулу Фосса–Вейля

$$\partial_\kappa\sqrt{G} = \sqrt{G}\Gamma_{\cdot\tau\kappa}^{\tau\cdot},$$

и то, что  $\mu_0 = \sqrt{G}\omega$ , окончательно получаем

$$\langle V, \mathcal{D}\mathcal{P} \rangle = \left[ \partial_\kappa p_a^{\cdot\kappa} + p_a^{\cdot\kappa}\Gamma_{\cdot\tau\kappa}^{\tau\cdot} - \gamma_{\cdot aj}^{b\cdot} F_{\cdot\kappa}^{j\cdot} p_b^{\cdot\kappa} \right] V^a \mu_0.$$

Отметим, что в скобках присутствуют коэффициенты связности как физического пространства, так и материального многообразия. ♠

Определенные таким образом операторы  $\mathfrak{d}$  и  $\mathfrak{D}$  играют роль пространственных и отсчетных операторов дивергенции  $\text{div}$ ,  $\text{Div}$  в уравнениях баланса импульса классической механики деформируемого твердого тела, но, в отличие от последних, они не предполагают наличия евклидовой связности на многообразиях  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{P}$ .

### 5.3. Преобразование баланса мощности

**60°.** В Главе 1 сформулирован баланс мощности в пространственном описании для части тела  $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$  и движения  $\{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  (см. формулу (1.3.13)):

$$\int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} (\langle v, b \rangle \rho \mu + d \langle v, \mathcal{T} \rangle) = \frac{d}{dt} \left( \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left( \frac{1}{2} \mathcal{G}(v, v) + e \right) \rho \mu \right).$$

Поставим целью внести оператор  $d/dt$  под знак интеграла. Это даст нам возможность ввести понятия пространственного  $a$  и материального  $A$  ускорений. При этом предполагается, что форма объема и метрика не зависят от времени.

**61°.** Обозначим  $f = (\frac{1}{2} \mathcal{G}(v, v) + e) \rho \mu$ . Справедлива (см. **36°**) следующая цепочка равенств (здесь  $s \in \mathbb{T}$  — фиксировано):

$$\frac{d}{dt} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} f(X, t) = \frac{d}{dt} \int_{\psi_{t,s}(\varkappa_s(\mathfrak{B}_0))} f(X, t) = \frac{d}{dt} \int_{\varkappa_s(\mathfrak{B}_0)} \psi_{t,s}^* f(X, t),$$

где в последнем равенстве мы использовали теорему о замене переменной (2.3.1). Теперь можно записать:

$$\frac{d}{dt} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} f(X, t) = \int_{\varkappa_s(\mathfrak{B}_0)} \frac{d}{dt} \{ \psi_{t,s}^* f(X, t) \}.$$

Согласно определению (2.1.8) операции  $\mathbb{L}_v$ , равенствам (2.1.7) и (2.1.9), имеем следующее представление для  $\frac{d}{dt} \psi_{t,s}^* f$ :

$$\frac{d}{dt} \psi_{t,s}^* f = \psi_{t,s}^* \left( \mathcal{L}_v f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \psi_{t,s}^* (\mathbb{L}_v f),$$

где  $v$  — пространственная скорость. Пользуясь тем, что  $\mathbb{L}_v$  — дифференцирование, преобразуем выражение  $\mathbb{L}_v f$ :

$$\mathbb{L}_v f = (\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v) + e)\mathbb{L}_v(\rho\mu) + (\mathbb{L}_v e)\rho\mu + (\mathbb{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)])\rho\mu.$$

Далее нас будет интересовать выражение  $\mathbb{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)]$ . По определению  $\mathbb{L}$ , оно имеет вид:

$$\mathbb{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)] = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{g}(v, v)}{\partial t} + \mathcal{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)].$$

Здесь  $\frac{\partial \mathcal{g}(v, v)}{\partial t} = 2g_{ij}v^i \frac{\partial v^j}{\partial t} = 2\langle v^b, \frac{\partial v}{\partial t} \rangle$ . По поводу символа  $\frac{\partial v}{\partial t}$  см. пояснение в п. 27° к формуле (2.1.7). Далее, так как  $\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)$  — скаляр, то

$$\mathcal{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)] = \frac{1}{2}v[\mathcal{g}(v, v)].$$

До этого момента мы ничего не говорили о связности. Однако теперь связность начинает играть роль. Последнее равенство можно переписать с использованием неметричности физического пространства (2.4.8):

$$\mathcal{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)] = \mathcal{g}(v, \nabla_v v) - \frac{1}{2}\mathcal{Q}(v, v, v).$$

Таким образом,  $\mathbb{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)]$  имеет вид:

$$\mathbb{L}_v[\frac{1}{2}\mathcal{g}(v, v)] = \langle v^b, \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v \rangle - \frac{1}{2}\mathcal{Q}(v, v, v).$$

Так как физическое пространство риманово, то  $\mathcal{Q}(v, v, v) = 0$ . Векторное поле

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v \tag{2.5.5}$$

в евклидовом пространстве является выражением пространственного ускорения (т.е.  $\dot{v}$ ) в терминах оператора набла, соответствующего некоторой замене координат [37]. Поле (2.5.5) мы также будем называть пространственным ускорением. Это связано с тем, что как будет видно в дальнейшем, оно будет присутствовать в уравнении движения подобно ускорению  $\dot{v}$  в классическом случае.

На основе поля  $a$  определим поле материального ускорения  $A$  равенством:  $A = a \circ \varkappa_t$ .

**Замечание 27.** Пусть в физическом пространстве имеется связность с отличной от нуля неметричностью. В этом случае выражение для пространственного ускорения  $a$  будет отличаться от (2.5.5). Именно, так как

$$\mathfrak{Q}(v, v, v) = v^b \lrcorner Q_{ij}^{k\cdot\cdot} v^i v^j \partial_k = v^b \lrcorner \eta(v),$$

то в качестве ускорения следует принять поле  $a = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v - \frac{1}{2}\eta(v)$ . ♠

Окончательно, в силу того, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} f(X, t) = \int_{\varkappa_s(\mathfrak{B}_0)} \psi_{t,s}^* (\mathbb{L}_v f) = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \mathbb{L}_v f,$$

приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left( \frac{1}{2} \mathfrak{Q}(v, v) + e \right) \rho \mu \right) &= \\ &= \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \{ (\frac{1}{2} \mathfrak{Q}(v, v) + e) \mathbb{L}_v (\rho \mu) + (\mathbb{L}_v e) \rho \mu + \langle v^b, a \rangle \rho \mu \}. \end{aligned}$$

Используя это соотношение и определение оператора  $\mathfrak{d}$ , формулу (1.3.13) можно переписать в виде (использовано равенство  $\langle v^b, a \rangle = \langle v, a^b \rangle$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \langle v, \mathfrak{d}\mathcal{T} + (b - a^b) \otimes \rho \mu \rangle &= \\ &= \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \{ (\frac{1}{2} \mathfrak{Q}(v, v) + e) \mathbb{L}_v (\rho \mu) + (\mathbb{L}_v e) \rho \mu \} - \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \nabla v \wedge \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Полученное уравнение (2.5.6) представляет другую форму баланса мощности.

**62°.** В настоящей работе законы сохранения устанавливаются с использованием принципа ковариантности, сформулированного в **56°**.

Пусть ковариантное преобразование определяется зависимым от  $\tau$  отображением

$$\xi_\tau : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}, \quad \xi_\tau \Big|_{\tau=t} = \text{Id}, \quad (2.5.7)$$

где  $\text{Id}$  – тождественное преобразование. Отображение (2.5.7) определяет новое картирование физического пространства  $\mathfrak{P}$ . Все величины в новых картах обозначим штрихованными символами. Баланс мощности, определяемый формулой (1.3.7) из Главы 1 принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_{\xi_\tau \circ \varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \langle v', b' \rangle \rho' \mu' + \int_{\xi_\tau \circ \varkappa_t(\partial \mathfrak{B}_0)} \langle v', \mathcal{T} \rangle = \\ = \frac{d}{dt} \left( \int_{\xi_\tau \circ \varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{g}(v', v') + e' \right\} \rho' \mu' \right). \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Штрихованные величины связаны с нештрихованными следующими соотношениями

$$\mathcal{T}' = \xi_{\tau*} \mathcal{T}, \quad v' = \xi_{\tau*} v + w, \quad e'(\mathcal{F}', \mathcal{G}, \mathfrak{g}' \circ \varkappa') = e(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \xi_\tau^* \mathfrak{g} \circ \varkappa), \quad (2.5.9)$$

где  $w = \frac{\partial}{\partial \tau} \xi_\tau$ . Кроме того, при  $\tau = t$

$$\frac{d}{dt} e' = \left( *_2 \frac{\partial e}{\partial \mathfrak{g}} \right) \wedge \mathcal{L}_w \mathfrak{g}, \quad b' - (\dot{v}')^b = \xi_{t*}(b - \dot{v}^b) \quad (2.5.10)$$

Здесь  $\mathcal{L}_w$  – производная Ли вдоль векторного поля  $w$ . Следуя [64], подставим (2.5.9), (2.5.10) в равенство (2.5.8), полагая  $\tau = t$ , и из результата вычтем (1.3.7). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \mathcal{L}_v(\rho\mu) \left[ \mathfrak{g}(v, v+w) + \frac{1}{2} \mathfrak{g}(w, w) + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho\mu \left( \left( *_2 \frac{\partial e}{\partial \mathfrak{g}} \right) \wedge \mathcal{L}_w \mathfrak{g} + \mathfrak{g}(w, \dot{v}) \right) \right] \right\} = \\ = \int_{\varkappa_t(\partial \mathfrak{B}_0)} \langle w, \mathcal{T} \rangle + \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \rho\mu \langle b, w \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $(w, w)_\mathfrak{g} = \langle w^b, w \rangle$  и т.п., а также теорему Стокса и соот-

ношение (2.5.3), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \left\{ \mathcal{L}_v(\rho\mu) \left[ \langle v^b, v+w \rangle + \frac{1}{2} \langle w^b, w \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho\mu \left( \left( *_2 \frac{\partial e}{\partial \mathcal{G}} \right) \wedge \mathcal{L}_w \mathcal{G} + \langle w^b, \dot{v} \rangle \right) \right] \right\} = \\ = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \{ \langle w, \mathfrak{d}\mathcal{T} \rangle + \nabla w \wedge \mathcal{T} + \rho\mu \langle b, w \rangle \}. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Градиент  $(\nabla w)^b$  может быть разложен на симметрическую и антисимметрическую части следующим образом

$$(\nabla w)^b = \frac{1}{2} \mathcal{L}_w \mathcal{G} + d(w^b). \quad (2.5.12)$$

**Замечание 28.** В евклидовом пространстве равенству (2.5.12) соответствует разложение градиента перемещений на тензор деформаций и тензор вихря. Для его доказательства достаточно расписать покомпонентно левую и правую части. При этом отметим, что это равенство рассматривается для случая связности Леви-Чивиты. Поэтому  $\nabla w = (\partial_i w^k + w^j \gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}) \partial_k \otimes dX^i$ , где  $\gamma_{ij}^{k\cdot\cdot} = \frac{g^{kl}}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$ . Так как

$$(\nabla w)^b = (g_{sk} \partial_i w^k + g_{sk} w^j \gamma_{ij}^{k\cdot\cdot}) dX^s \otimes dX^i,$$

то для левой части (2.5.12) получаем выражение:

$$(\nabla w)^b = (g_{sk} \partial_i w^k + \frac{1}{2} w^k (\partial_i g_{ks} + \partial_k g_{is} - \partial_s g_{ik})) dX^s \otimes dX^i.$$

Теперь рассмотрим правую часть (2.5.12). Для  $w = w^k \partial_k$  имеем  $w^b = g_{ik} w^k dX^i$ . Отсюда

$$d(w^b) = d(g_{ik} w^k) \wedge dX^i + g_{ik} w^k d^2 X^i = d(g_{ik} w^k) \wedge dX^i = \partial_s (g_{ik} w^k) dX^s \wedge dX^i.$$

В силу равенства  $dX^s \wedge dX^i = dX^s \otimes dX^i - dX^i \otimes dX^s$ , можем записать

$$d(w^b) = (\partial_s (g_{ik} w^k) - \partial_i (g_{sk} w^k)) dX^s \otimes dX^i.$$

Согласно формуле (2.1.5), имеем

$$\mathcal{L}_w \mathcal{G} = \{ w^k \partial_k g_{si} + g_{ki} \partial_s w^k + g_{sk} \partial_i w^k \} dX^s \otimes dX^i.$$

Сравнивая полученные выражения, приходим к требуемому результату. ♠

В силу того, что часть тела  $\mathfrak{B}_0$  выбирается произвольным образом, интегральное равенство (2.5.11) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется локальное соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(\rho\mu) \left( \langle v^b, v + w \rangle + \frac{1}{2} \langle w^b, w \rangle \right) + \frac{1}{2} \left( *_2 \left( 2\rho \frac{\partial e}{\partial \mathbf{q}} \right) - \mathcal{T} \right) \dot{\wedge} \mathcal{L}_w \mathbf{q} = \\ = \langle w, \mathfrak{d}\mathcal{T} + (b - \dot{v}^b) \rho\mu \rangle + dw^b \dot{\wedge} \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

В виду того, что величины  $w$ ,  $\langle w^b, w \rangle$ ,  $dw^b$ ,  $\mathcal{L}_w \mathbf{q}$  могут принимать произвольные значения (с физической точки зрения первая из них отвечает значению произвольного векторного поля, вторая — его магнитуде, третья — его ротации, четвертая — градиенту), равенство (2.5.13) эквивалентно системе четырех независимых уравнений

$$\mathbb{L}_v(\rho\mu) = 0, \quad (2.5.14)$$

$$\mathfrak{d}\mathcal{T} + b \otimes \rho\mu = \dot{v}^b \otimes \rho\mu, \quad (2.5.15)$$

$$(u \otimes v) \dot{\wedge} \mathcal{T} = (v \otimes u) \dot{\wedge} \mathcal{T}, \quad (2.5.16)$$

$$*_2 \left( 2\rho \frac{\partial e}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathcal{T}. \quad (2.5.17)$$

Уравнение (2.5.14) представляет собой закон сохранения массы, уравнение (2.5.15) — баланс импульса, (2.5.16) — баланс момента импульса (здесь  $u, v \in T\mathfrak{B}$  — произвольны), (2.5.17) — аналог соотношения Дойля–Эриксона, известного в нелинейной теории упругости [53].

Если выполняется уравнение баланса импульса (2.5.15), то из равенства (2.5.6) вытекает соотношение для мощности напряжений

$$\frac{d}{dt} \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} e \rho \mu = \int_{\varkappa_t(\mathfrak{B}_0)} \nabla v \dot{\wedge} \mathcal{T}.$$



## 1. «Башня» тензорных пространств

### 1.1. Касательное пространство к многообразию

**63°.** Для того, чтобы определить векторные и тензорные поля на гладких многообразиях общего вида, необходимо иметь представление о касательных пространствах в точке  $\mathcal{X} \in \mathfrak{B}$  и в точке  $\mathfrak{z}(\mathcal{X}) \in \mathfrak{P}$ . Конечно, согласно теореме Уитни [65], как для  $\mathfrak{B}$ , так и для  $\mathfrak{P}$ , существует вложение в некоторое объемлющее евклидово пространство; рассматривая каждое из  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{P}$  как гиперповерхности соответствующих евклидовых пространств, можно определить касательные векторы к ним, опираясь на «наглядные представления», присущие обычной, «школьной», геометрии. Однако при этом теоретические построения (в виду большой размерности объемлющего пространства) становятся громоздкими. Вместе с тем, описание геометрических объектов методами внутренней геометрии всегда определяло изящество геометрической теории. В этой связи, представляется более удобным определение касательных векторов, как объектов внутренней геометрии  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{P}$ .

**64°.** Пусть  $\mathfrak{M}^n$  —  $C^r$ -многообразие<sup>1</sup>. Кривой на многообразии  $\mathfrak{M}^n$ ,

---

<sup>1</sup>В настоящей главе фраза « $\mathfrak{M}^n$  —  $C^r$ -многообразие» означает, что  $\mathfrak{M}$  является  $C^r$ -многообразием размерности  $\dim \mathfrak{M} = n$ .

проходящей через точку  $p \in \mathfrak{M}^n$ , будем называть любое отображение  $\chi : \mathbb{J} \rightarrow \mathfrak{M}^n$ , где  $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$  — интервал, содержащий точку 0 и  $\chi(0) = p$ . Для удобства полагаем, что интервал  $\mathbb{J}$  симметричен, то есть,  $\mathbb{J} = ] - a, a[$  (этого всегда можно добиться подходящей заменой переменных). Точечное множество  $\ell_\chi^p = \{\chi(q) \mid q \in ] - a, a[\}$  будем называть линией, проходящей через точку  $p$  и соответствующей кривой  $\chi$ .

Далее рассматриваются гладкие кривые. Кривая  $\chi : ] - a, a[ \rightarrow \mathfrak{M}^n$  принадлежит классу  $C^r$ , если  $\chi \in \mathcal{C}^r(] - a, a[; \mathfrak{M}^n)$ . Всюду полагаем, что точка  $p$  не является точкой самопересечения линии  $\ell_\chi^p$ . Это соображение можно формализовать следующим образом:  $\chi$  является  $C^r$ -вложением. Кроме того, считаем интервал  $] - a, a[$  достаточно малым, чтобы весь образ отображения  $\chi$  находился в пределах одной карты  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$ , выбранного атласа в  $\mathfrak{M}^n$ .

Рассмотрим множество  $\mathbf{Eu}_p(\mathfrak{M}^n)$  всех  $C^r$ -кривых на  $\mathfrak{M}^n$ , проходящих через точку  $p$  и удовлетворяющих принятым условиям. Это множество может быть разбито на классы отношением эквивалентности  $\sim_p$  следующего вида [29, 40]:

$$\forall \chi_1, \chi_2 \in \mathbf{Eu}_p(\mathfrak{M}^n) \quad (\chi_1 \sim_p \chi_2) \Leftrightarrow \left( \frac{d(\varphi^{-1} \circ \chi_1)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi^{-1} \circ \chi_2)}{dt} \Big|_{t=0} \right).$$

Здесь  $\varphi^{-1} \circ \chi_1 : ] - a_1, a_1[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi^{-1} \circ \chi_2 : ] - a_2, a_2[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  — функции из открытых интервалов  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}^n$ . Введенное отношение эквивалентности не зависит от выбора карты, что следует из правил цепного дифференцирования.

**65°.** Касательный вектор рассматривается как объект, для которого указаны точка  $p$ , с которой он ассоциируется, и класс кривых, проходящих через эту точку и к которым этот объект «касается» в смысле отношения эквивалентности  $\sim_p$ . Итак, всякая пара  $(p, [\chi]_p)$ , где  $[\chi]_p$  — класс эквивалентности кривой  $\chi$  по отношению  $\sim_p$ , называется касательным вектором к многообразию  $\mathfrak{M}^n$  в точке  $p$ . В настоящей работе касательные векторы обозначаются строчными латинскими символами  $u, v, \dots$ . Упорядоченный набор  $n$  чисел  $\frac{d(\varphi^{-1} \circ \chi)}{dt} \Big|_{t=0}$  называют координатным представлением вектора  $u = (p, [\chi]_p)$ . Множество всех векторов, касательных

к  $\mathfrak{M}^n$  в точке  $p$ , обозначают<sup>2</sup> как  $T_p\mathfrak{M}^n$ :

$$T_p\mathfrak{M}^n = \{p\} \times \mathfrak{C}u_p(\mathfrak{M}^n) / \sim_p := \{(p, [\chi]_p) \mid \chi \in \mathfrak{C}u_p(\mathfrak{M}^n)\}.$$

**66°.** Для  $p \in \mathfrak{M}^n$  и карты  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$ , рассмотрим биективное отображение

$$\mathfrak{c}_p^\varphi : T_p\mathfrak{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{c}_p^\varphi : (p, [\chi]_p) \mapsto \left. \frac{d(\varphi^{-1} \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Оно наделяет  $T_p\mathfrak{M}^n$  структурой линейного пространства, определяя на нем операции сложения и умножения на скаляр следующим образом:

$$u + v := (\mathfrak{c}_p^\varphi)^{-1}\{\mathfrak{c}_p^\varphi(u) + \mathfrak{c}_p^\varphi(v)\}, \quad \lambda u := (\mathfrak{c}_p^\varphi)^{-1}\{\lambda \mathfrak{c}_p^\varphi(u)\},$$

где  $u, v \in T_p\mathfrak{M}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Эти определения не зависят от карты;  $\mathfrak{c}_p^\varphi$  есть изоморфизм  $T_p\mathfrak{M}^n$  и  $\mathbb{R}^n$ , таким образом,  $\dim T_p\mathfrak{M}^n = \dim \mathfrak{M}^n$ . Нулевым вектором в  $T_p\mathfrak{M}^n$  является вектор  $0 := h_p^{-1}(0, \dots, 0)$ .

**67°.** Для точки  $p \in \mathfrak{M}^n$  на  $C^r$ -многообразии  $\mathfrak{M}^n$  рассмотрим множество  $\mathcal{O}^k(p)$  функций  $f : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $1 \leq k \leq r$ , для каждой из которых существует окрестность  $U(p)$  точки  $p$ , такая, что  $f \in \mathcal{C}^k(U(p); \mathbb{R})$ . Для любой окрестности  $V(p) \subset U(p)$  мы также имеем  $f \in \mathcal{C}^k(V(p); \mathbb{R})$ . На этом множестве введем операции поточечного сложения и умножения на скаляр.

Для вектора  $u = (p, [\chi]_p) \in T_p\mathfrak{M}^n$  определим производную функции  $f$  по направлению  $u$  в точке  $p$ :

$$\mathcal{L}_u(f) := \left. \frac{d(f \circ \chi)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n u^j \left. \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^j} \right|_{\varphi^{-1}(p)},$$

где  $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u^j$  — элемент  $n$ -ки координатного представления вектора  $u$ . Имеем функционал  $f \mapsto \mathcal{L}_u(f)$ , определение которого не зависит от карты. Его свойства:

(i)  $\mathcal{L}_{\alpha u + \beta v}(f) = \alpha \mathcal{L}_u(f) + \beta \mathcal{L}_v(f)$ , для  $u, v \in T_p\mathfrak{M}^n$ ,  $f \in \mathcal{O}^1(p)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;

(ii)  $\mathcal{L}_u(f + g) = \mathcal{L}_u(f) + \mathcal{L}_u(g)$ , для  $u \in T_p\mathfrak{M}^n$ ,  $f, g \in \mathcal{O}^1(p)$ ;

<sup>2</sup>Символ  $\mathfrak{C}u_p(\mathfrak{M}^n) / \sim_p$  обозначает фактормножество по отношению эквивалентности  $\sim_p$ .

(iii)  $\mathcal{L}_u(fg) = f(p)\mathcal{L}_u(g) + g(p)\mathcal{L}_u(f)$ , для  $u \in T_p\mathcal{M}^n$ ,  $f, g \in \mathcal{O}^1(p)$ .

Отображение  $l_p : u \mapsto \mathcal{L}_u = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(p)}$  является линейным и биективным [66]. Следовательно,  $l_p$  есть изоморфизм между пространством  $\mathfrak{D}_p(\mathcal{M}^n) = \{\mathcal{L}_u \mid u \in T_p\mathcal{M}^n\}$  производных по направлению в точке  $p$  и касательным пространством  $T_p\mathcal{M}^n$ , то есть,  $T_p\mathcal{M}^n \cong \mathfrak{D}_p(\mathcal{M}^n)$ . В силу этого, рассмотренные пространства могут быть отождествлены.

**68°.** Для точки  $p \in \mathcal{M}^n$  рассмотрим семейство  $n$  кривых  $\{\chi_i\}$ , таких, что  $\chi_i \in \mathbf{Cu}_p(\mathcal{M}^n)$ ; каждая кривая из этого семейства определена соотношениями

$$\pi_n^j \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \chi_i(t) = \pi_n^j \circ \varphi_\alpha^{-1}(p) + \delta_i^j t,$$

где  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  — карта, содержащая  $p$ ,  $\pi_n^j : (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^j$ . Упорядоченная совокупность векторов  $e_i = (p, [\chi_i]_p)$ , касательных к этим кривым, образует репер касательного пространства  $T_p\mathcal{M}^n$ . Соответствующие линии  $\ell_{\chi_i}^p$  есть координатные линии в окрестности точки  $p$ . Отметим, что

в разложении  $u = (p, [\chi]_p) = \sum_{i=1}^n u^i e_i$ , числа  $u^i$  равны:

$$u^i = \pi_n^i(\mathbf{c}_p^{\varphi_\alpha}(u)) = \pi_n^i \left( \frac{d(\varphi_\alpha^{-1} \circ \chi)}{dt} \Big|_{t=0} \right).$$

Иными словами, отображение  $\mathbf{c}_p^{\varphi_\alpha}$  каждому вектору из  $T_p\mathcal{M}^n$  ставит в соответствие  $n$ -ку его координат в базисе  $(e_i)_{i=1}^n$ .

Мы будем называть упорядоченную совокупность операторов  $\mathcal{L}_{e_i}$ , образующую базис в пространстве  $\mathfrak{D}_p(\mathcal{M}^n)$ , натуральным (координатным) репером и обозначать, как  $\partial_i|_p$ , или  $\partial_{x^i}|_p$ , если есть необходимость в явном указании координатной системы. Согласно свойствам  $\mathcal{L}$ , для  $u \in T_p\mathcal{M}^n$

и функции  $f \in \mathcal{O}^1(p)$ , имеем равенство  $\mathcal{L}_u(f) = \sum_{i=1}^n u^i \partial_i|_p f$ . В силу изо-

морфизма  $l_p$ , объекты  $\mathcal{L}_u$  и  $u$  можно отождествить:  $u = \sum_{i=1}^n u^i \partial_i|_p$ . Операторы  $\partial_i|_p$  действуют на отображение  $f$  следующим образом:

$$\partial_i|_p f = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(p)},$$

что и определяет их символьное обозначение, подобное обозначениям частных производных. Вместо  $\mathcal{L}_u(f)$  часто будем употреблять запись  $u_p(f)$ .

## 1.2. Сопряженное (кокасательное) пространство над касательным пространством

**69°.** Векторное сопряженное пространство линейных функционалов (ковекторов) над  $T_p\mathcal{M}^n$  обозначим через  $T_p^*\mathcal{M}^n$ . Значением ковектора  $\nu \in T_p^*\mathcal{M}^n$  на векторе  $u \in T_p\mathcal{M}^n$  является действительное число  $\langle \nu, u \rangle_p = \nu(u) \in \mathbb{R}$ . Угловые скобки обозначают операцию канонического спаривания [67]. Стандартная аргументация (канонический изоморфизм между конечномерным линейным пространством и его вторым сопряженным [68], т.е. что  $T_p\mathcal{M}^n \cong T_p^{**}\mathcal{M}^n$ ) обосновывает следующую симметрию:

$$\forall \nu \in T_p^*\mathcal{M}^n \quad \forall u \in T_p\mathcal{M}^n : \quad \langle \nu, u \rangle_p = \langle u, \nu \rangle_p.$$

Если в пространстве  $T_p\mathcal{M}^n$  выбрать координатный репер  $(\partial_i|_p)_{i=1}^n$ , то через  $(dx^i|_p)_{i=1}^n$  обозначается соответствующий ему корепер в  $T_p^*\mathcal{M}^n$ . При этом, выполнены соотношения  $\langle dx^i|_p, \partial_j|_p \rangle_p = \delta_j^i$ , где  $i, j = 1, \dots, n$ . Разложение ковектора  $\nu \in T_p^*\mathcal{M}^n$  по кореперу  $(dx^i|_p)_{i=1}^n$  имеет вид:  $\nu = \nu_i dx^i|_p$ .

**Замечание 29.** Примером ковектора является дифференциал  $df_p$  функции  $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}^n; \mathbb{R})$  в точке  $p$ , определяемый правилом:  $df_p(u) := \mathcal{L}_u(f)$ . Его координатное представление имеет вид:  $df_p = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^j} \right|_{\varphi^{-1}(p)} dx^j|_p$ , где  $(U, \varphi)$  — карта, содержащая  $p$ . ♠

Отметим, что кокасательные пространства  $T_p^*\mathcal{M}^n$  и  $T_q^*\mathcal{M}^n$  в разных точках  $p$  и  $q$  многообразия не пересекаются, ибо их элементы есть функционалы с разной областью определения.

Касательное пространство  $T_p\mathcal{M}^n$  может рассматриваться как множество упорядоченных пар, соответствующих классам эквивалентных кривых, либо как множество линейных функционалов над кокасательным пространством (в силу канонического изоморфизма  $T_p\mathcal{M}^n \cong T_p^{**}\mathcal{M}^n$ ). Аналогично, кокасательное пространство  $T_p^*\mathcal{M}^n$  можно рассматривать как пространство линейных функционалов, либо как множество упоря-

доченных пар, соответствующих классам эквивалентных функций. Последнее представление будет рассмотрено далее (мы следуем [29]).

Пусть  $p \in \mathfrak{M}^n$ . Рассмотрим подпространство  $J_p \subset \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$  векторного пространства<sup>3</sup>  $\mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$ , состоящее из всех тех  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$ , для которых  $f(p) = 0$ . Обозначим через  $J_p^2$  множество, состоящее из всех тех функций из  $J_p$ , для которых  $df_p = 0$ , т.е.  $J_p^2 = \{f \in J_p \mid df_p = 0\}$ . В силу свойства аддитивности и однородности дифференциала, это также векторное пространство — подпространство  $J_p$ . Определим отношение эквивалентности на  $J_p$ :

$$\forall f, g \in J_p : (f \sim_p g) \Leftrightarrow ((f - g) \in J_p^2).$$

Введенное отношение эквивалентности разбивает  $J_p$  на непересекающиеся классы эквивалентности, в совокупности образующие факторпространство  $J_p/J_p^2$ .

**Замечание 30.** На фактормножестве  $J_p/J_p^2$  вводятся операции сложения классов эквивалентности и умножения их на скаляр:

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \lambda[f] := [\lambda f],$$

где  $f, g \in J_p, \lambda \in \mathbb{R}$ . ♠

Отображение  $\Phi : J_p \rightarrow T_p^*\mathfrak{M}^n$ , действующее по правилу  $\Phi[f] := df_p$ , линейно по построению, причем  $\Phi[J_p^2] = \{0\}$ . Если  $f \sim_p g$ , то  $\Phi[f] = \Phi[g]$ , что позволяет определить отображение

$$\widehat{\Phi} : J_p/J_p^2 \rightarrow T_p^*\mathfrak{M}^n, \quad \widehat{\Phi}[\nu] := \Phi[f], \quad \text{для некоторого } f \in \nu.$$

Отображение  $\widehat{\Phi}$  является линейным и инъективным. Для доказательства его сюръективности зафиксируем некоторую карту  $(U, \varphi)$ , содержащую точку  $p$ . Пусть  $\nu \in T_p^*\mathfrak{M}^n$ . Тогда  $\nu = \nu_i dx^i|_p$ . Определим отображение  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  равенством  $f = h \circ \varphi^{-1}$ , где

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x^1, \dots, x^n) := \nu_i(x^i - \pi_n^i \circ \varphi^{-1}(p)).$$

---

<sup>3</sup>Бинарные операции сложения и умножения на скаляр в  $\mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$  определяются поточечно:

$$(f + g), (\lambda f) \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R}), \quad (f + g)(p) := f(p) + g(p), \quad (\lambda f)(p) := \lambda f(p),$$

для  $f, g \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ .

Тогда  $f(p) = 0$  и  $df_p = \nu$ . Распространив  $f$  на все многообразие  $\mathfrak{M}^n$ , получим искомую функцию  $\tilde{f}$ , такую, что  $\widehat{\Phi}[\tilde{f}] = \nu$ . Таким образом,  $\widehat{\Phi}$  — изоморфизм и поэтому  $J_p/J_p^2 \cong T_p^*\mathfrak{M}^n$ .

На множестве  $\mathfrak{L}_p := \{p\} \times J_p/J_p^2$  естественным образом вводится структура векторного пространства:

$$(p, \mu) + (p, \nu) := (p, \mu + \nu), \quad \lambda(p, \mu) = (p, \lambda\mu),$$

для  $\mu, \nu \in J_p/J_p^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Кроме того, существует изоморфизм  $s_p : \mathfrak{L}_p \rightarrow J_p/J_p^2$ , определяемый равенством  $s_p(p, \mu) := \mu$ . Поэтому,  $\mathfrak{L}_p \cong J_p/J_p^2$ . Следовательно,  $\mathfrak{L}_p \cong T_p^*\mathfrak{M}^n$ .

### 1.3. «Башня» тензорных пространств

**70°.** Тензоры и тензорные поля являются основными математическими объектами, позволяющими описать процесс деформирования и соответствующие физические поля, сопутствующие этому процессу. В большинстве руководств по тензорному исчислению используется формализм, основанный на аксиоматике евклидова пространства [69, 70]. Вместе с тем, о необходимости использования неевклидовой геометрии во многих задачах механики континуума говорилось в Главе 1 настоящей работы. Не претендуя на полноту, изложим основные идеи, связанные с аксиоматической теорией тензорного произведения векторных пространств [42, 67, 71, 72]. По-видимому, впервые такая конструкция появилась в трактате Н. Бурбаки [72].

**71°.** Пусть  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$  — конечномерные вещественные векторные пространства. Обозначим через  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)$  множество всевозможных формальных конечных линейных комбинаций элементов из  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ . Элементы такого множества имеют вид:

$$\sum_{(u_1, \dots, u_k) \in K} \alpha_{u_1, \dots, u_k}(u_1, \dots, u_k), \quad \text{где } K \subset \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k \text{ — конечно.} \quad (3.1.1)$$

**Замечание 31.** Дадим необходимые пояснения, связанные с понятием формальной линейной комбинации [67]. Множество  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)$  — это множество всех финитных функций из  $\mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k$  в  $\mathbb{R}$ , т.е. отображений  $f : \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых множества  $K_f := \{a \in \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k \mid f(a) \neq 0\}$  конечны. Введением операций поточечного сложения и умножения на число,  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)$  превращается в вещественное векторное пространство. Его базисом служит семейство

$\{\delta(u_1, \dots, u_k)\}_{(u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k}$  функций, определенных равенством:

$$\delta(u_1, \dots, u_k)[a] = \begin{cases} 1, & \text{если } a = (u_1, \dots, u_k), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Элементы  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)$  представляются в виде конечных сумм:  $f = \sum_{a \in K_f} f(a)\delta(a)$ .

Опуская знак  $\delta$ , приходим к выражениям вида (3.1.1). ♠

Пусть  $\mathcal{N}$  — векторное подпространство  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)$ , порожденное всеми элементами вида

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_k) - (u_1, \dots, u_i, \dots, u_k) - (u_1, \dots, u'_i, \dots, u_k), \\ (u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_k) - \alpha(u_1, \dots, u_i, \dots, u_k), \end{aligned}$$

где  $u_i, u'_i \in \mathcal{V}_i, i = 1, \dots, k, \alpha \in \mathbb{R}$ . Определим отношение  $\sim_{\mathcal{N}}$  эквивалентности на  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)$  следующим образом:

$$\forall u, v \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k): (u \sim_{\mathcal{N}} v) \Leftrightarrow (u - v \in \mathcal{N}).$$

Факторпространство  $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)/\mathcal{N}$  по отношению  $\sim_{\mathcal{N}}$  представляет тензорное произведение пространств [67]  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ :

$$\mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_k := \mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k)/\mathcal{N}.$$

**72°.** Обозначим через  $\Pi$  натуральную проекцию, т.е.

$$\Pi: \mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k) \rightarrow \mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_k.$$

Тогда класс эквивалентности, порождаемый элементом  $(u_1, \dots, u_k)$  обозначается как  $(u_1 \otimes \dots \otimes u_k) := \Pi(u_1, \dots, u_k)$ . Это тензорное произведение векторов  $u_1, \dots, u_k$ .

**Замечание 32.** По построению, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} (u_1 \otimes \dots \otimes (u_i + u'_i) \otimes \dots \otimes u_k) &= (u_1 \otimes \dots \otimes u_i \otimes \dots \otimes u_k) + (u_1 \otimes \dots \otimes u'_i \otimes \dots \otimes u_k), \\ (u_1 \otimes \dots \otimes \alpha u_i \otimes \dots \otimes u_k) &= \alpha(u_1 \otimes \dots \otimes u_i \otimes \dots \otimes u_k), \end{aligned}$$

где  $u_i, u'_i \in \mathcal{V}_i, i = 1, \dots, k, \alpha \in \mathbb{R}$ . ♠

Рассмотрим случай, когда рассматриваемые пространства  $\mathcal{V}_i$  конечномерны, т.е.  $\dim \mathcal{V}_i = n_i, i = 1, \dots, k$ . Тогда в каждом из  $\mathcal{V}_i$  можно выбрать базис  $(e_j^{(i)})_{j=1}^{n_i}$ . Согласно [67], совокупность

$$(e_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{i_k}^{(k)})_{1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k},$$



будет базисом  $\mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_k$ ;  $\dim \mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_k = n_1 \dots n_k$ .

В работе используется отождествление тензорного произведения конечномерных векторных пространств с полилинейными отображениями в силу изоморфизма [67]

$$\mathcal{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_k \cong \text{Lin}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k; \mathbb{R}).$$

**73°.** Пусть  $p \in \mathcal{M}^n$ . Из экземпляров  $T_p \mathcal{M}^n$  и  $T_p^* \mathcal{M}^n$  можно образовать всевозможные тензорные произведения, или, что тоже самое, рассмотреть соответствующие пространства полилинейных отображений. Тензорные пространства фиксированного ранга образуют векторное пространство более высоких размерностей, чем  $n = \dim \mathcal{M}^n$ . Их элементы — тензоры. Все эти пространства образуют «башню» тензорных пространств, порождаемых  $T_p \mathcal{M}^n$  и  $T_p^* \mathcal{M}^n$ , и ассоциированных с точкой  $p$ :

$$\begin{array}{ccccccc} & & T_p \mathcal{M}^n & & T_p^* \mathcal{M}^n & & \\ & & & & & & \\ T_p \mathcal{M}^n \otimes T_p \mathcal{M}^n & & T_p \mathcal{M}^n \otimes T_p^* \mathcal{M}^n & \xrightarrow{\cong} & T_p^* \mathcal{M}^n \otimes T_p \mathcal{M}^n & & T_p^* \mathcal{M}^n \otimes T_p^* \mathcal{M}^n \\ & \dots & & & & \dots & \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Элементами «башни» являются тензорные пространства  $\bigotimes^k T_p \mathcal{M}^n$  контравариантных тензоров ранга  $k$ ,  $\bigotimes^k T_p^* \mathcal{M}^n$  ковариантных тензоров ранга  $k$ , и пространства  $(\bigotimes^k T_p^* \mathcal{M}^n) \otimes (\bigotimes^s T_p \mathcal{M}^n)$   $s$  раз контравариантных и  $k$  раз ковариантных тензоров ранга  $k + s$ .

Выберем некоторый базис  $(e_i)_{i=1}^n$  в  $T_p \mathcal{M}^n$  и соответствующий ему дуальный базис  $(\vartheta^i)_{i=1}^n$  в  $T_p^* \mathcal{M}^n$ . Тогда  $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}$  есть базис  $\bigotimes^k T_p \mathcal{M}^n$ . Каждый контравариантный тензор  $\mathcal{F} \in \bigotimes^k T_p \mathcal{M}^n$  имеет единственное разложение

$$\mathcal{F} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} T_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}.$$

Совокупность  $(\vartheta^{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}$  представляет базис пространства  $\bigotimes^k T_p^* \mathcal{M}^n$ . Каждый ковариантный тензор  $\mathcal{Q} \in \bigotimes^k T_p^* \mathcal{M}^n$  имеет единственное разложение

$$\mathcal{Q} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} Q_{i_1 \dots i_k} \vartheta^{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{i_k}.$$

Наконец, базисом пространства  $(\otimes^k T_p^* \mathcal{M}^n) \otimes (\otimes^s T_p \mathcal{M}^n)$  является совокупность  $(\vartheta^{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s})_{1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_s \leq n}$ . Каждый смешанный тензор  $\mathcal{S} \in (\otimes^k T_p^* \mathcal{M}^n) \otimes (\otimes^s T_p \mathcal{M}^n)$  имеет единственное разложение

$$\mathcal{S} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n} S_{i_1 \dots i_k \dots j_1 \dots j_s} \vartheta^{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}.$$

## 2. Векторные расслоения и их сечения

### 2.1. Векторные расслоения

**74°.** Для формализации физических полей используются векторные расслоения, которые представляются наиболее удобными для этих целей геометрическими объектами. По-видимому, впервые обширное изложение теории расслоений дал Н. Стинрод в [73]. В настоящей работе мы следуем [29, 40, 66].

**75°.** Базовым понятием является локально-тривиальное расслоение [29]. Это упорядоченная совокупность

$$(\mathcal{M}^n, \mathcal{E}, \pi, \mathfrak{F}, \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}, \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}),$$

в которой:

- (i) многообразие  $\mathcal{M}^n$  называется базой;
- (ii) многообразие  $\mathcal{E}$  называется тотальным пространством;
- (iii) непрерывное отображение  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^n$  называется проекцией и является сюръективным;
- (iv) многообразие  $\mathfrak{F}$  называется типовым слоем;
- (v)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  — открытое покрытие  $\mathcal{M}^n$ , каждый элемент покрытия называется координатной окрестностью;
- (vi)  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$  — семейство гомеоморфизмов (называемых локальными тривиализациями  $\mathcal{E}$  над  $U_\alpha$ )  $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathfrak{F} \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ , удовлетворяющих следующему условию:

$$\forall \alpha \in J \quad \forall x \in U_\alpha \quad \forall y \in \mathfrak{F} : \quad (\pi \circ \varphi_\alpha(x, y) = x).$$

Дадим необходимые пояснения. **1)** Из сюръективности проекции  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^n$  следует равенство  $\mathcal{E} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}^n} \pi^{-1}(\{p\})$ . **2)** Условие (vi) говорит о

том, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xleftarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathfrak{F} \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

является коммутативной. Здесь  $\text{pr}_1 : (x, y) \mapsto x$ . **3)** Из условия (vi) следует, что

$$\forall x \in \mathfrak{M}^n : (\pi^{-1}(\{x\}) \text{ гомеоморфен } \mathfrak{F}).$$

Множества  $\mathfrak{E}_x = \pi^{-1}(\{x\})$  называются слоями над  $x$ . **4)** Введенное определение имеет смысл для случаев, когда  $\mathfrak{M}^n$ ,  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{E}$  — всего лишь топологические пространства. **5)** Если существует локальная тривиализация  $\mathfrak{E}$  над всем  $\mathfrak{M}^n$ , то это — глобальная тривиализация, а соответствующее расслоение — тривиальное.

**76°.** В настоящей работе используется локально–тривиальное расслоение с дополнительными условиями. Это расслоение называют векторным. Именно, (вещественным) векторным расслоением ранга  $k$  называется такое локально–тривиальное расслоение  $\pi : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{M}^n$ , в котором:

- (i) для каждого  $p \in \mathfrak{M}^n$  слой  $\mathfrak{E}_p = \pi^{-1}(\{p\})$  над  $p$  наделен структурой  $k$ -мерного вещественного векторного пространства;
- (ii) типовой слой есть  $\mathbb{R}^k$ :  $\mathfrak{F} = \mathbb{R}^k$ ;
- (iii) для любых  $\alpha \in J$  и  $p \in U_\alpha$  отображение

$$\varphi_\alpha^{-1}|_{\mathfrak{E}_p} : \mathfrak{E}_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$$

является изоморфизмом.

Всюду будет идти речь о гладких векторных расслоениях. В этом случае,  $\mathfrak{M}^n$  и  $\mathfrak{E}$  — гладкие многообразия,  $\pi$  — гладкая проекция, а локальные тривиализации — диффеоморфизмы. Согласно общей методологии теории векторных расслоений [29, 40], определяются касательное и кокасательное расслоения, соответственно,

$$T\mathfrak{M}^n = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}^n} T_p\mathfrak{M}^n \quad \text{и} \quad T^*\mathfrak{M}^n = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}^n} T_p^*\mathfrak{M}^n.$$

Соответствующие проекции обозначаются символами

$$\mathfrak{s} : T\mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n \quad \text{и} \quad \mathfrak{q} : T^*\mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n.$$

**Замечание 33.** Векторные расслоения определяются единственным образом для любых тензорных пространств, например, с помощью тензорной конструкции (tensorial construction), описанной в [40, с. 182]. Тотальное пространство, при этом, представляется в виде дизъюнктного объединения тензорных пространств одного и того же типа по всем точкам многообразия. Сами тензорные пространства являются слоями над ассоциированными с ними точками. Типовой слой есть  $\mathbb{R}^k$ , где  $k$  — размерность тензорного пространства (одна и та же для всех). Проекция сопоставляет каждому слою ассоциированную с ним точку.

Например, из  $T_p\mathcal{M}^n$  и  $T_p^*\mathcal{M}^n$  можно образовать произведение

$$\left(\bigotimes^s T_p^*\mathcal{M}^n\right) \otimes \left(\bigotimes^k T_p\mathcal{M}^n\right).$$

Проделав такую операцию над всеми точками многообразия, можем определить

$$\left(\bigotimes^s T^*\mathcal{M}^n\right) \otimes \left(\bigotimes^k T\mathcal{M}^n\right) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}^n} \left(\bigotimes^s T_p^*\mathcal{M}^n\right) \otimes \left(\bigotimes^k T_p\mathcal{M}^n\right).$$

♠

## 2.2. Сечения

**77°.** Понятие векторных и тензорных полей формулируется в терминах сечений векторных расслоений [29, 40, 73, 74] следующим образом. Если  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^n$  — векторное расслоение, то непрерывное отображение  $\sigma : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{E}$ , такое, что  $\pi \circ \sigma(p) = p$ , для всех  $p \in \mathcal{M}^n$ , называется сечением векторного расслоения. Согласно определению отображения  $\sigma$ , для  $p \in \mathcal{M}^n$  имеем  $\sigma(p) \in \pi^{-1}(\{p\})$ , то есть сечение отображает каждую точку  $p$  многообразия  $\mathcal{M}^n$  в слой  $\pi^{-1}(\{p\})$ . Функция  $\sigma$  может быть определена только на открытом подмножестве  $\mathcal{M}^n$ , тогда говорят о локальном сечении. Мы во всех случаях говорим просто о сечениях. Если  $\sigma \in \mathcal{C}^s(\mathcal{M}^n; \mathcal{E})$ , то говорят о гладком сечении класса  $C^s$ .

**Замечание 34.** Поскольку сечение является отображением одного гладкого многообразия в другое, его гладкость определяется стандартным образом, через координатное представление. ♠

Далее, если не указано иное, символ  $\Gamma^s(\mathcal{E})$  означает множество всех сечений  $\sigma \in \mathcal{C}^s(\mathcal{M}^n; \mathcal{E})$  векторного расслоения  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^n$ .

Под (гладким) векторным полем мы понимаем (гладкое) сечение векторного расслоения с тотальным пространством  $T\mathcal{M}^n$ . Аналогично определяются ковекторные и тензорные поля. Далее векторные поля обозначаются строчными латинскими символами  $u, v, \dots$ .

На множестве  $\Gamma^s(\mathfrak{E})$  всех  $C^s$ -сечений векторного расслоения  $\pi : \mathfrak{E} \rightarrow \mathcal{M}^n$  вводятся поточечные операции сложения элементов и умножения их на скалярнозначную функцию. Именно, для  $\sigma, \tau \in \Gamma^s(\mathfrak{E})$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  и  $f \in \mathcal{C}^s(\mathcal{M}^n; \mathbb{R})$ , определим сечения  $(c_1\sigma + c_2\tau) \in \Gamma^s(\mathfrak{E})$  и  $(f\sigma) \in \Gamma^s(\mathfrak{E})$  соотношениями:

$$\forall p \in \mathcal{M}^n : (c_1\sigma + c_2\tau)(p) := c_1\sigma(p) + c_2\tau(p), \quad (f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p).$$

Условимся, что если  $\sigma$  — сечение, то его значение на  $p \in \mathcal{M}^n$  записывается, как  $\sigma(p) = \sigma_p$ .

Введем следующие обозначения:

(i)  $\mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n)$  — множество всех  $C^s$ -сечений касательного расслоения  $\mathfrak{s} : T\mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$ ;

(ii)  $\mathcal{F}^s(\mathcal{M}^n)$  — множество всех  $C^s$ -сечений кокасательного расслоения  $\mathfrak{q} : T^*\mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$ .

Операция канонического спаривания переносится на поля следующим образом:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{F}^s(\mathcal{M}^n) \times \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \rightarrow \mathcal{C}^s(\mathcal{M}^n; \mathbb{R}), \quad \langle \vartheta, u \rangle(p) = \langle \vartheta_p, u_p \rangle_p$$

Пусть  $(\mathcal{M}^n, \mathfrak{E}_1, \pi_1), (\mathcal{M}^n, \mathfrak{E}_2, \pi_2)$  — некоторые векторные расслоения с одной общей базой. Через  $\Gamma^s(\mathfrak{E}_1) \otimes \Gamma^s(\mathfrak{E}_2)$  часто будем обозначать совокупность всех  $C^s$ -сечений  $\sigma$  расслоения  $\mathfrak{E}_1 \otimes \mathfrak{E}_2$  на  $\mathcal{M}^n$ .

В локальной системе координат  $(x^i)$  гладкие сечения  $p \mapsto (\partial_i|_p)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , касательного расслоения  $T\mathcal{M}^n$  ассоциируют с каждой точкой  $p \in \mathcal{M}^n$  координатный репер  $(\partial_i|_p)_{i=1}^n$ . В таком случае будем говорить о поле координатных реперов и обозначать его как  $(\partial_i)_{i=1}^n$ . Если есть необходимость подчеркнуть, что частные производные относятся к координатной системе  $(U, x^1, \dots, x^n)$ , то они обозначаются как  $\partial_{x^i}$ . Координатному реперу  $(\partial_i|_p)_{i=1}^n$  соответствует корепер  $(dx^i|_p)_{i=1}^n$  в кокасательном пространстве  $T_p^*\mathcal{M}^n$ , связанный с координатным соотношениями:  $\langle dx^i|_p, \partial_j|_p \rangle_p = \delta_j^i$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Гладкие сечения  $p \mapsto (dx^i|_p)_{i=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ассоциируют с каждой точкой  $p \in \mathcal{M}^n$  корепер  $(dx^i|_p)_{i=1}^n$ . В таком случае будем говорить о поле кореперов и обозначать его как  $(dx^i)_{i=1}^n$ .

В локальной системе координат  $(x^i)$  сечения векторного расслоения с тотальным пространством  $\left(\otimes^k T^*\mathfrak{M}^n\right) \otimes \left(\otimes^l T\mathfrak{M}^n\right)$  записываются в виде

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x) dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k} \otimes \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_l}.$$

В частности, для сечений касательного  $u : \mathfrak{M}^n \rightarrow T\mathfrak{M}^n$  и кокасательного  $\nu : \mathfrak{M}^n \rightarrow T^*\mathfrak{M}^n$  расслоений имеют место разложения:

$$u = u^i \partial_i, \quad \nu = \nu_i dx^i.$$

### 2.3. Риманова метрика и музыкальные изоморфизмы

**78°.** На любом  $C^r$ -многообразии ( $r \geq 1$ )  $\mathfrak{M}^n$  может быть задана риманова метрика класса  $C^{r-1}$  [66]. То есть, на  $\mathfrak{M}^n$  определено поле  $\mathfrak{g} : p \mapsto \mathfrak{g}_p$  класса  $C^{r-1}$  билинейных форм  $\mathfrak{g}_p : T_p\mathfrak{M}^n \times T_p\mathfrak{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что в каждой точке  $p \in \mathfrak{M}^n$  выполняются известные аксиомы: для любых  $u, v \in T_p\mathfrak{M}^n$ ,

- (i)  $\mathfrak{g}_p(u, v) = \mathfrak{g}_p(v, u)$  (симметричность);
- (ii)  $\mathfrak{g}_p(u, u) \geq 0$  (неотрицательность);
- (iii)  $\mathfrak{g}_p(u, u) = 0$ , тогда и только тогда, когда  $u = 0$  (дефинитность).

**79°.** Из свойств метрики  $\mathfrak{g}$  следует, что отображение  $u \mapsto \mathfrak{g}_p(u, \cdot)$  является изоморфизмом между  $T_p\mathfrak{M}^n$  и  $T_p^*\mathfrak{M}^n$ , т.е.  $T_p\mathfrak{M}^n \cong T_p^*\mathfrak{M}^n$  (теорема Рисса). Это позволяет определить музыкальные изоморфизмы, а именно, бемоль  $(\cdot)^b : T\mathfrak{M}^n \rightarrow T^*\mathfrak{M}^n$  и диэз  $(\cdot)^\sharp : T^*\mathfrak{M}^n \rightarrow T\mathfrak{M}^n$ :

$$\forall u \in T\mathfrak{M}^n : u \mapsto u^b \in T_{s(u)}^*\mathfrak{M}^n, \quad \langle u^b, \cdot \rangle_{s(u)} = \mathfrak{g}_{s(u)}(u, \cdot);$$

$$\forall \nu \in T^*\mathfrak{M}^n : \nu \mapsto \nu^\sharp \in T_{q(\nu)}\mathfrak{M}^n, \quad \mathfrak{g}_{q(\nu)}(\nu^\sharp, \cdot) = \langle \nu, \cdot \rangle_{q(\nu)}.$$

Ограничение отображения  $(\cdot)^b$  на  $T_p\mathfrak{M}^n$  есть изоморфизм  $u \mapsto \mathfrak{g}_p(u, \cdot)$ , а отображение  $(\cdot)^\sharp$  имеет смысл обратного к нему. Следующие диаграммы иллюстрируют отношения между обсуждаемыми отображениями:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^n & & \mathfrak{M}^n \\ \uparrow s & \searrow \mathfrak{g} & \uparrow s \\ T\mathfrak{M}^n & \xrightarrow{b} & T^*\mathfrak{M}^n & \xleftarrow{\sharp} & T^*\mathfrak{M}^n \end{array}$$

**80°.** В терминах натурального  $(\partial_i)_{i=1}^n$  и взаимного  $(dx^i)_{i=1}^n$  реперов имеем следующие координатные представления введенных операций:

$$u^b = g_{ij}u^j dx^i, \quad \nu^\sharp = g^{ij}\nu_j \partial_i,$$

где  $g_{ij} = \mathcal{G}(\partial_i, \partial_j)$ ,  $g^{ij}$  — элемент матрицы, обратной к  $(g_{ij})$ .

Если  $\nu = \mathcal{G}(u, \cdot)$ , то  $u^b = \nu$ ,  $\nu^\sharp = u$  и  $\nu_i = g_{ij}u^j$ ,  $u^i = g^{ij}\nu_j$ . Далее используется обозначение  $\nu_i = v_i$ .

В евклидовом пространстве музыкальным изоморфизмам соответствуют операции «подъема» и «опускания» индексов ковариантных и контравариантных компонент тензорных полей. Представление вектора и соответствующего ему по изоморфизму ковектора, как единого геометрического объекта часто используется в монографиях по механике континуума. Мы, однако, даже в евклидовом пространстве различаем эти объекты, поскольку они несут различный физический смысл (см. **69°**).

**81°.** Операции диез и бемоль обобщаются на произвольные тензорные пространства следующим образом. Операция  $(\cdot)^{kb}$  (бемоль  $k$ -го элемента полиады),  $k \in \mathbb{N}$ , определяется соотношением

$$(\cdot)^{kb} : S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes T\mathfrak{M}^n \otimes S_{k+1} \otimes S_r \rightarrow S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes T^*\mathfrak{M}^n \otimes S_{k+1} \otimes S_r,$$

так, что

$$\mathcal{T}^{kb}(f_1, \dots, f_{k-1}, u, f_{k+1}, \dots, f_r) = \mathcal{T}(f_1, \dots, f_{k-1}, u^b, f_{k+1}, \dots, f_r),$$

а операция  $(\cdot)^{k\sharp}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , определяется соотношением

$$(\cdot)^{k\sharp} : S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes T^*\mathfrak{M}^n \otimes S_{k+1} \otimes S_r \rightarrow S_1 \otimes \dots \otimes S_{k-1} \otimes T\mathfrak{M}^n \otimes S_{k+1} \otimes S_r,$$

так, что

$$\mathcal{T}^{k\sharp}(f_1, \dots, f_{k-1}, \nu, f_{k+1}, \dots, f_r) = \mathcal{T}(f_1, \dots, f_{k-1}, \nu^\sharp, f_{k+1}, \dots, f_r).$$

Здесь  $S_j$  обозначает либо  $T\mathfrak{M}^n$ , либо  $T^*\mathfrak{M}^n$ .

**82°.** Поясним общие формулы для музыкальных изоморфизмов на примерах полей тензоров второго ранга. Для тензорного поля

$$\mathcal{T} = T^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$$

справедлива цепочка равенств:

$$\mathcal{T}^{1b}(u, \nu) = \mathcal{T}(u^b, \nu) = g_{ik}\mathcal{T}(dx^i, dx^j)u^k\nu_j = g_{ik}T^{ij}dx^k \otimes \partial_j(u, \nu),$$

следовательно  $\mathcal{T}^{1\sharp} = g_{ki}T^{ij}dx^k \otimes \partial_j$ ,  $T_{\cdot j}^{\cdot j} = g_{ki}T^{ij}$ . Далее, для поля

$$\mathcal{T} = T_{ij}dx^i \otimes dx^j$$

выполнены равенства:

$$\mathcal{T}^{1\sharp}(\nu, u) = \mathcal{T}(\nu^\sharp, u) = g^{ik}\mathcal{T}(\partial_i, \partial_j)\nu_k u^j = g^{ik}T_{ij}\partial_k \otimes dx^j(\nu, u),$$

то есть  $\mathcal{T}^{1\sharp} = g^{ki}T_{ij}\partial_k \otimes dx^j$ ,  $T_{\cdot j}^{k\cdot} = g^{ki}T_{ij}$ . Наконец, для того же поля,

$$\mathcal{T}^{2\sharp}(u, \nu) = \mathcal{T}(u, \nu^\sharp) = g^{jk}\mathcal{T}(\partial_i, \partial_j)u^i \nu_k = g^{jk}T_{ij}dx^i \otimes \partial_k(u, \nu).$$

Таким образом,  $\mathcal{T}^{2\sharp} = g^{kj}T_{ij}dx^i \otimes \partial_k$ ,  $T_i^{\cdot k} = g^{kj}T_{ij}$ .

В частности, метрическому тензору  $\mathcal{g}$  соответствует «ассоциированный» тензор  $\mathcal{g}^{1\sharp 2\sharp}$ :

$$\mathcal{g}^{1\sharp 2\sharp}(\mu, \nu) = \mathcal{g}(\mu^\sharp, \nu^\sharp) = g^{ik}g^{jl}\mathcal{g}(\partial_i, \partial_j)\mu_k \nu_l = g^{ik}g^{jl}g_{ij}\partial_k \otimes \partial_l(\mu, \nu),$$

откуда  $\mathcal{g}^{1\sharp 2\sharp} = g^{kl}\partial_k \otimes \partial_l$ .

### 3. Касательное отображение. «Pullback» и «pushforward»

#### 3.1. Касательное отображение

**83°.** Рассмотрим отображение  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$ , где  $\mathfrak{M}^n, \mathfrak{N}^m - C^r$ -многообразия. По определению, в соответствующих картах  $(U, \varphi), (V, \psi)$  многообразий  $\mathfrak{M}^n$  и  $\mathfrak{N}^m$  отображение  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  будет гладким класса  $C^r$ . Относительно координатных систем  $(U; x^1, \dots, x^n), (V; y^1, \dots, y^m)$ , отображение  $f$  обозначим в виде  $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), i = 1, \dots, m$ . Пусть  $p \in \mathfrak{M}^n$ . Касательное отображение [29, 66] к  $f$  в точке  $p$  есть соответствие

$$T_p f : T_p \mathfrak{M}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathfrak{N}^m, \quad T_p f : u = (p, [\chi]_p) \mapsto v = (f(p), [f \circ \chi]_{f(p)}).$$

Запишем последнее равенство в компонентах. Если

$$\mathbf{c}_p^\varphi(u) = (u^j)_{j=1}^n, \quad \mathbf{c}_{f(p)}^\psi(v) = (v^i)_{i=1}^m,$$



то согласно правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$v^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(p)} u^j.$$

Поэтому  $T_p f$  — линейное отображение.

Используя отождествление (по изоморфизму) билинейных отображений из  $T_{f(p)}\mathfrak{N}^m \otimes T_p^*\mathfrak{M}^n$  с линейными операторами из  $\text{Lin}(T_p\mathfrak{M}^n; T_{f(p)}\mathfrak{N}^m)$ , можно записать  $T_p f$  как

$$T_p f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(p)} \partial_{y^i}|_{f(p)} \otimes dx^j|_p.$$

Семейство  $\{T_p f\}_{p \in \mathfrak{M}^n}$  касательных отображений в каждой точке многообразия определяет глобальное касательное отображение  $Tf : T\mathfrak{M}^n \rightarrow T\mathfrak{N}^m$ , которое каждому вектору  $u \in T\mathfrak{M}^n$  сопоставляет вектор из  $T\mathfrak{N}^m$  по следующему правилу:  $Tf(u) := T_{\mathfrak{s}(u)}f(u)$ , где  $\mathfrak{s} : T\mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{M}^n$  — проекция. Таким образом, отображение  $f$  переводит точки  $\mathfrak{M}^n$  в точки  $\mathfrak{N}^m$ , а глобальное касательное отображение  $Tf$  переводит касательные векторы к кривым на  $\mathfrak{M}^n$  в касательные векторы к образам этих кривых при отображении  $f$ . В дальнейшем слово «глобальное» будем опускать.

Определим свертку  $\lrcorner$  как билинейное отображение

$$\lrcorner : (\Gamma^s(\mathfrak{E}) \otimes \mathcal{F}^s(\mathfrak{M}^n)) \times \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \Gamma^s(\mathfrak{E}),$$

действующее на диадах, следующим образом:  $u \otimes \vartheta \lrcorner v = \langle \vartheta, v \rangle u$ . Здесь  $\Gamma^s(\mathfrak{E})$  есть множество всех сечений класса  $C^s$  векторного расслоения  $(\mathfrak{N}^m, \mathfrak{E}, \pi, \mathfrak{F})$ . В частности, для  $u \in T_p\mathfrak{M}^n$ ,

$$\begin{aligned} T_p f(u) &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(p)} \partial_{y^i}|_{f(p)} \otimes dx^j|_p \right) \lrcorner u = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(p)} u^j \partial_{y^i}|_{f(p)}. \end{aligned}$$

### 3.2. «Pullback» и «pushforward» сечений

84°. Для диффеоморфизма  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^n)$  «pullback» векторного поля  $u$ , заданного на  $\mathfrak{N}^n$ , есть отображение  $f^* : \mathcal{V}^s(\mathfrak{N}^n) \rightarrow \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n)$ ,

$$\forall u \in \mathcal{V}^s(\mathfrak{N}^n) : f^* u = (Tf^{-1}) \circ u \circ f,$$

«pushforward» векторного поля  $u$ , заданного на  $\mathfrak{M}^n$ , есть отображение  $f_* : \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{V}^s(\mathfrak{N}^n)$ ,

$$\forall u \in \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) : f_* u = (Tf) \circ u \circ f^{-1}.$$

Построения иллюстрируют следующие диаграммы<sup>4</sup>:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^n & \xrightarrow{f} & \mathfrak{N}^n \\ \uparrow \mathfrak{s}_1 & & \uparrow \mathfrak{s}_2 \\ T\mathfrak{M}^n & \xrightarrow{Tf} & T\mathfrak{N}^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^n & \xrightarrow{f} & \mathfrak{N}^n \\ \downarrow f^* u & & \downarrow u \\ T\mathfrak{M}^n & \xleftarrow{Tf^{-1}} & T\mathfrak{N}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^n & \xleftarrow{f^{-1}} & \mathfrak{N}^n \\ \downarrow u & & \downarrow f_* u \\ T\mathfrak{M}^n & \xrightarrow{Tf} & T\mathfrak{N}^n \end{array}$$

**85°.** Для отображения  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$  «pullback» сечений ковекторного расслоения  $T^*\mathfrak{N}^m$  есть отображение  $f^* : \mathcal{F}^s(\mathfrak{N}^m) \rightarrow \mathcal{F}^s(\mathfrak{M}^n)$ ,

$$\forall \nu \in \mathcal{F}^s(\mathfrak{N}^m) : \mathfrak{M}^n \ni p \mapsto (f^* \nu)_p, \quad (f^* \nu)_p(u) = \nu_{f(p)}(T_p f(u)),$$

для любого  $u \in T_p \mathfrak{M}^n$ . Если  $f$  — диффеоморфизм (в этом случае  $m = n$ ), то «pushforward» сечений ковекторного расслоения  $T^*\mathfrak{M}^n$ , определяется как отображение  $f_* : \mathcal{F}^s(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{F}^s(\mathfrak{N}^n)$ ,

$$\forall \nu \in \mathcal{F}^s(\mathfrak{M}^n) : \mathfrak{N}^n \ni p \mapsto (f_* \nu)_p, \quad (f_* \nu)_p(u) = ((f^{-1})^* \nu)_p(u),$$

для любого  $u \in T_p \mathfrak{N}^n$ .

**86°.** В работе используются операции «pullback» и «push-forward», действующие на риманову метрику, представленную как сечение  $g \in \Gamma^r(\otimes^2 T_p^* \mathfrak{M}^n)$ , либо как сечение  $g^{1\#2\#} \in \Gamma^r(\otimes^2 T_p \mathfrak{M}^n)$ . Согласно [29, 40], эти операции определяются следующим образом.

<sup>4</sup>Здесь  $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$  — соответствующие проекции из тотальных пространств на базы.

Для отображения  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$  «pullback» сечений тензорного расслоения  $\bigotimes^k T^*\mathfrak{N}^m$  есть отображение

$$f^* : \Gamma^s(\bigotimes^k T^*\mathfrak{N}^m) \rightarrow \Gamma^s(\bigotimes^k T^*\mathfrak{M}^n),$$

действующее по правилу:

$$\mathcal{T} \mapsto f^*\mathcal{T}, \quad p \mapsto (f^*\mathcal{T})_p(u_1, \dots, u_k) = \mathcal{T}_{f(p)}(T_p f(u_1), \dots, T_p f(u_k)),$$

для любых  $u_1, \dots, u_k \in T_p\mathfrak{M}^n$ . Поэтому, «pullback» метрики  $\mathcal{g}$ , заданной на  $\mathfrak{N}^m$ , имеет вид:

$$f^*\mathcal{g}(u, v) = \mathcal{g}(Tfu, Tfv) = \sum_{i,j=1}^m \sum_{k,s=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^s} u^k v^s g_{ij},$$

откуда получается окончательное выражение:

$$f^*\mathcal{g} = \sum_{i,j=1}^m \sum_{k,s=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^s} g_{ij} dx^k \otimes dx^s. \quad (3.3.1)$$

Если  $f \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^n)$  — диффеоморфизм, то «pushforward» сечений тензорного расслоения  $\bigotimes^k T\mathfrak{M}^n$  определяется как отображение

$$f_* : \Gamma^s(\bigotimes^k T\mathfrak{M}^n) \rightarrow \Gamma^s(\bigotimes^k T\mathfrak{N}^n),$$

действующее по правилу:

$$\mathcal{T} \mapsto f_*\mathcal{T}, \quad \mathfrak{N}^n \ni p \mapsto (f_*\mathcal{T})_p(\nu_1, \dots, \nu_k) = \mathcal{T}_{f^{-1}(p)}((f^*\nu_1)_p, \dots, (f^*\nu_k)_p),$$

для любых  $\nu_1, \dots, \nu_k \in T_p\mathfrak{N}^n$ . Поэтому, «pushforward» сечения

$$\mathcal{g}^{1\#2\#} = g^{kl} \partial_{x^k} \otimes \partial_{x^l},$$

заданного на  $\mathfrak{M}^n$ , имеет вид:

$$f_*\mathcal{g}^{1\#2\#} = \sum_{i,s,j,k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial y^s}{\partial x^k} g^{jk} \partial_{y^i} \otimes \partial_{y^s}. \quad (3.3.2)$$

## 4. Расслоение внешних форм

### 4.1. Внешние формы

87°. Пусть  $\mathfrak{M}^n$  — абстрактное  $n$ -мерное  $C^r$ -многообразие,  $p \in \mathfrak{M}^n$ . Обозначим через

$$\Lambda(T_p^*\mathfrak{M}^n) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n)$$

прямую сумму всех пространств  $\Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n)$  внешних форм с операцией внешнего произведения<sup>5</sup>  $\wedge : \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n) \times \Lambda^s(T_p^*\mathfrak{M}^n) \rightarrow \Lambda^{k+s}(T_p^*\mathfrak{M}^n)$ ,

$$\forall \alpha \in \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n) \quad \forall \beta \in \Lambda^s(T_p^*\mathfrak{M}^n) : \quad \alpha \wedge \beta := \frac{(k+s)!}{k!s!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta),$$

где Alt — операция альтернирования тензора [2, 40].

*Замечание 35.* Элемент  $\alpha \in \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n)$  — внешняя форма — кососимметричное  $k$ -линейное отображение  $\alpha : T_p^*\mathfrak{M}^n \times \dots \times T_p^*\mathfrak{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . ♠

По построению, пространство  $\Lambda(T_p^*\mathfrak{M}^n)$  — векторное пространство всех  $k$ -форм ранга не выше  $n$  (формы ранга выше  $n$  являются нулевыми), имеющее размерность  $2^n$ .

Определим  $k$ -кратное внешнее произведение

$$\Lambda^k(T^*\mathfrak{M}^n) = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}^n} \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n),$$

представляющее тотальное пространство расслоения  $k$ -форм.

88°. Через  $\mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n)$  обозначается множество всех сечений класса  $C^s$  расслоения  $k$ -форм на многообразии  $\mathfrak{M}^n$ . Для элементов  $\mathcal{F}_k^r(\mathfrak{M}^n)$  также будет использоваться термин «формы». В локальных координатах  $(x^i)$  элемент пространства  $\mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n)$  имеет представление:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

<sup>5</sup>Существуют варианты определения внешнего произведения без множителя  $\frac{(r+s)!}{r!s!}$ . См., например, [43, 44, 71].

Поскольку 1-форма есть ковектор, то  $\mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n) := \mathcal{F}^s(\mathcal{M}^n)$  есть множество всех ковекторных полей класса  $C^s$  на многообразии  $\mathcal{M}^n$ . Принимается стандартное соглашение о том, что  $\mathcal{F}_0^s(\mathcal{M}^n) = \mathcal{C}^s(\mathcal{M}^n; \mathbb{R})$ ; мы будем использовать обе записи.

Операция канонического спаривания переносится на поля следующим образом:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{F}_1^s(\mathcal{M}^n) \times \mathcal{V}^s(\mathcal{M}^n) \rightarrow \mathcal{C}^s(\mathcal{M}^n; \mathbb{R}), \quad \langle \vartheta, u \rangle_p := \vartheta_p(u_p).$$

На сечениях расслоений форм поточечно вводится операция  $\wedge$  [40]. Именно, для  $\omega \in \mathcal{F}_k^s(\mathcal{M}^n)$ ,  $\theta \in \mathcal{F}_l^s(\mathcal{M}^n)$ , определим сечение  $(\omega \wedge \theta) : \mathcal{M}^n \rightarrow \Lambda^{k+l}(T^*\mathcal{M}^n)$ , так, что

$$\forall p \in \mathcal{M}^n : (\omega \wedge \theta)_p := \omega_p \wedge \theta_p.$$

**89°.** Для гладкого отображения  $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^m)$  «pullback»  $k$ -форм  $\omega$ , заданных на  $\mathcal{N}^m$ , есть отображение  $f^* : \mathcal{F}_k^s(\mathcal{N}^m) \rightarrow \mathcal{F}_k^s(\mathcal{M}^n)$ ,

$$\forall \omega \in \mathcal{F}_k^s(\mathcal{N}^m) : \mathcal{M}^n \ni p \mapsto (f^*\omega)_p, \\ (f^*\omega)_p(u_1, \dots, u_k) = \omega_{f(p)}(Tf(u_1), \dots, Tf(u_k)),$$

для любых  $u_1, \dots, u_k \in T_p\mathcal{M}^n$ .

Для диффеоморфизма  $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^n)$  «pushforward»  $k$ -форм  $\omega$ , заданных на  $\mathcal{M}^n$ , есть отображение  $f_* : \mathcal{F}_k^s(\mathcal{M}^n) \rightarrow \mathcal{F}_k^s(\mathcal{N}^n)$ ,

$$\forall \omega \in \mathcal{F}_k^s(\mathcal{M}^n) : \mathcal{N}^n \ni p \mapsto (f_*\omega)_p, \\ (f_*\omega)_p(u_1, \dots, u_k) = ((f^{-1})^*\omega)_p(u_1, \dots, u_k),$$

для любых  $u_1, \dots, u_k \in T_p\mathcal{N}^n$ .

## 4.2. Форма объема и ориентация многообразия

**90°.** Многие физические величины зависят от выбора ориентации многообразия. В механике сплошных сред примером могут служить механические напряжения.

*Замечание 36.* В классических курсах линейной алгебры ориентация вводится посредством отношения одноименности: два базиса конечномерного пространства называются одноименными, если определитель матрицы перехода от первому базису

ко второму положителен. Это отношение разбивает множество всех базисов данного пространства на два класса эквивалентности, называемых ориентациями. ♠

Согласно Замечанию 36, принадлежность к тому или иному классу определяется знаком определителя, построенного на линейно-независимых векторах (матрица перехода). Например, в трехмерном случае, векторы  $u, v, w$  образуют правую тройку, если определитель, составленный из их координат в правом ортонормированном базисе, положителен. Геометрический смысл этого определителя заключается в том, что он выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах  $u, v, w$ . Такой подход можно обобщить на случай гладких многообразий [40].

**91°.** Формой объема на  $C^r$ -многообразии  $\mathfrak{M}^n$  называется  $n$ -форма  $\mu \in \mathcal{F}_n^k(\mathfrak{M}^n)$ ,  $0 \leq k \leq r$ , такая, что  $\mu(p) \neq 0$ , для любого  $p \in \mathfrak{M}^n$ . Если на многообразии есть хотя бы одна форма объема, то такое многообразие называют ориентируемым. Формы объема будут обозначаться греческими символами  $\mu, \sigma, \dots$

*Замечание 37.* В работе [40] формы объема предполагаются гладкими, класса  $C^\infty$ . В настоящей работе мы придерживаемся менее строгих ограничений, полагая, что они имеют класс  $C^k$ , где  $0 \leq k \leq r$ , а  $r$ -порядок дифференциальной структуры.

♠

Рассмотрим ориентируемое  $C^r$ -многообразие  $\mathfrak{M}^n$ . Две формы объема  $\mu_1, \mu_2$  на  $\mathfrak{M}^n$ , называются эквивалентными, если найдется такая гладкая функция  $f : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(p) > 0$  для любого  $p \in \mathfrak{M}^n$ , что  $\mu_1 = f\mu_2$ . Такое отношение является отношением эквивалентности; ориентацией  $\mathfrak{M}^n$  называется класс  $[\mu]$  эквивалентности по данному отношению. Ориентированное многообразие — это пара  $(\mathfrak{M}^n, [\mu])$ .

*Замечание 38.* Пример неориентируемой поверхности — лента Мебиуса. ♠

**92°.** Для ориентированного многообразия  $(\mathfrak{M}^n, [\mu])$  можно говорить об ориентации реперов [75]. Именно, репер  $(b_i)_{i=1}^n$  в  $T_p\mathfrak{M}^n$  положительно (отрицательно) ориентирован по отношению к  $\mu$ , если  $\mu_p(b_1, \dots, b_n) > 0$  ( $< 0$ ). Отметим, что значение формы объема равным нулю быть не может, согласно определению.

**93°.** Допустим, что на  $C^r$ -многообразии  $\mathfrak{M}^n$  выбрана риманова метрика  $\mathcal{g}$ . В каждом касательном пространстве  $T_p\mathfrak{M}^n$  можно выбрать ортонормированный базис; процедура этого выбора есть процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Пусть  $\mathfrak{M}^n$  ориентировано. Тогда [75] в данной ориентации существует единственная форма объема  $\mu$ , такая, что  $\mu_p(b_1, \dots, b_n) = 1$ , для любого положительно ориентированного ортонор-

мированного базиса  $T_p\mathfrak{M}^n$ . В локальных координатах для такой формы имеем

$$\mu = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad g = \det(g_{ij}).$$

Из этого соотношения видно, что  $\mu$  есть  $C^{r-1}$ -форма, ибо метрика, а значит и ее определитель, имеют класс  $C^{r-1}$ .

**94°.** Под формой объема на  $C^r$ -многообразии  $\mathfrak{M}^n$  с краем мы, как и прежде, понимаем  $n$ -форму  $\mu \in \mathcal{F}_n^s(\mathfrak{M}^n)$ , такую, что  $\mu(p) \neq 0$ , для любого  $p \in \mathfrak{M}^n$ . Скажем, что многообразие  $\mathfrak{M}^n$  с краем ориентируемо, если существует хотя бы одна форма объема. Зафиксируем в  $\mathfrak{M}^n$  ориентацию, то есть, выберем форму объема  $\mu$ . Можно показать, что край  $\partial\mathfrak{M}^n$  также ориентируем и его ориентация согласована с ориентацией  $\mathfrak{M}^n$ . Для этого можно использовать подход, указанный в [40, 43]. Для каждой точки  $p \in \partial\mathfrak{M}^n$  выберем вектор  $e_1 \in T_p\mathfrak{M}^n \setminus T_p\partial\mathfrak{M}^n$ , ориентированный наружу. Под этим понимается, что для любой гладкой функции  $f : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющей условиям  $f(p) \leq 0$  для  $p \in \text{Int } \mathfrak{M}^n$  и  $f(p) = 0$  на  $\partial\mathfrak{M}^n$ , выполнено  $\mathcal{L}_{e_1} f \geq 0$ . Эти векторы в каждой точке края дополним реперами  $e_2, \dots, e_n$  касательного пространства края таким образом, чтобы репер  $(e_i)_{i=1}^n$  имел положительную ориентацию в  $\mathfrak{M}^n$ , то есть, чтобы  $\mu_p(e_1, \dots, e_n) > 0$ .

### 4.3. Внешнее дифференцирование

**95°.** Операция  $d$  дифференцирования функции обобщается на случай произвольных форм следующим образом. Справедлива теорема [43, 44]: для любого гладкого многообразия  $\mathfrak{M}^n$  класса  $C^s$ ,  $s \geq 2$ , и любых  $k \geq 0$ ,  $r \geq 1$  существует единственная операция внешнего дифференцирования

$$d : \mathcal{F}_k^r(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{F}_{k+1}^{r-1}(\mathfrak{M}^n), \quad d\omega : p \mapsto (d\omega)_p,$$

удовлетворяющая условиям:

- (i)  $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_k^r(\mathfrak{M}^n)$ ;
- (ii) для  $\alpha \in \mathcal{F}_0^r(\mathfrak{M}^n)$  поле  $d\alpha$  — есть «обычный» дифференциал функции;
- (iii)  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ , для  $\alpha \in \mathcal{F}_k^r(\mathfrak{M}^n)$  и  $\beta \in \mathcal{F}_s^r(\mathfrak{M}^n)$ ;
- (iv)  $d^2\alpha = d(d\alpha) = 0$ , для всех форм  $\alpha \in \mathcal{F}_k^r(\mathfrak{M}^n)$ , при  $r \geq 2$ .

*Замечание 39.* Внешний дифференциал формы

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

согласно условиям (i)–(iv), имеет вид:

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} d\alpha_{i_1 i_2 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

где  $d\alpha_{i_1 i_2 \dots i_r} = \sum_{i=1}^n \partial_i \alpha_{i_1 i_2 \dots i_r} dx^i$ . Справедливо эквивалентное представление  $d\alpha$  [44]:

$$d\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{r+1} \leq n} \left( \sum_{a=1}^{r+1} (-1)^{a+1} \frac{\partial \alpha_{j_1 \dots \widehat{j}_a \dots j_{r+1}}}{\partial x^{j_a}} \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r+1}},$$

где знак  $\widehat{\phantom{x}}$  указывает, что соответствующий индекс должен быть опущен. ♠

#### 4.4. Интегрирование внешних форм и теорема Стокса

**96°.** Теории интегрирования полей на гладких многообразиях в рамках формализма исчисления внешних форм посвящены работы [40, 43, 44, 75]. Приведем этапы, необходимые для введения интеграла по многообразию от формы. В изложении мы следуем [40].

Пусть множество  $U \subset \mathbb{R}^n$  открыто и форма  $\omega \in \mathcal{F}_n^0(U)$  имеет компактный носитель<sup>6</sup>. Если, по отношению к естественному базису в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega = \omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , то

$$\int_U \omega := \int_U \omega_{1\dots n}(x) dx^1 \dots dx^n.$$

**97°.** Рассмотрим гладкое многообразие  $\mathcal{M}^n$ ; выберем карту  $(U, \varphi)$  на нем. Если  $\omega \in \mathcal{F}_n^0(\mathcal{M}^n)$  и  $\text{supp } \omega \subset U$ , то  $\omega|_U$  имеет такой же носитель. Поэтому,  $\varphi^*(\omega|_U)$  имеет компактный носитель и мы можем определить интеграл от формы  $\omega$  по этой карте.

Именно, пусть  $\mathcal{M}^n$  — гладкое ориентированное многообразие, форма  $\omega \in \mathcal{F}_n^0(U)$  имеет компактный носитель  $\text{supp } \omega \subset U$ , где  $(U, \varphi)$  — положительно ориентированная карта. Тогда определим

$$\int_U \omega := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\omega|_U).$$

<sup>6</sup>Носителем  $\text{supp } f$  функции  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называют замыкание множества  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ :  $\text{supp } f = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$ . Аналогично определяется носитель для форм. Компактный носитель в  $\mathbb{R}^n$  — ограниченное множество [40, с. 464].



Если  $\text{supp } \omega \subset U \cap V$ , где  $(U, \varphi), (V, \psi)$  — положительно ориентированные карты, то доказывається [40], что

$$\int_U \omega = \int_V \omega.$$

**98°.** Интеграл был определен по одной карте многообразия. Для расширения этого определения на все многообразие, необходимо использовать конструкцию, связанную с разбиением единицы.

**Замечание 40.** Разбиение единицы [40, 66] на  $C^r$ -многообразии  $\mathfrak{M}^n$  есть такая система  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ , для которой выполнены условия:

- (i)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — локально-конечное открытое покрытие  $\mathfrak{M}^n$  (любая точка  $\mathfrak{M}^n$  имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом  $U_\alpha$ );
- (ii)  $f_\alpha \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$ ,  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$ , для всех  $\alpha \in I$ ;
- (iii)  $f_\alpha(x) \geq 0$  для всех  $\alpha \in I$  и  $x \in \mathfrak{M}^n$ ;
- (iv)  $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1$ , для всех  $x \in \mathfrak{M}^n$ .

Доказывается (см. [66]), что разбиение единицы существует для любого гладкого  $n$ -мерного многообразия. ♠

Если  $A = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  есть атлас на  $\mathfrak{M}^n$ , то разбиением единицы, подчиненным  $A$ , называется такое разбиение единицы  $\{(U_\beta, f_\beta)\}_{\beta \in J}$ , в котором для каждого  $\beta \in J$  найдется такое  $\alpha \in I$ , такое, что  $U_\beta \subset V_\alpha$ .

Пусть  $\mathfrak{M}^n$  — ориентированное многообразие и  $A$  — атлас из положительно ориентированных карт, а  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  — разбиение единицы, подчиненное  $A$ . Для  $\omega \in \mathcal{F}_k^0(\mathfrak{M}^n)$  определим  $\omega_\alpha := f_\alpha \omega$  (таким образом,  $\omega_\alpha$  имеет компактный носитель в  $U_\alpha$ ). Определим интеграл

$$\int_{\mathfrak{M}^n} \alpha := \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \omega_\alpha.$$

Сумма в правой части последнего равенства содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, и значение интеграла не зависит от выбора атласа с положительно ориентированными картами и соответствующему разбиению единицы [40].

**99°.** При выводе уравнений поля в процессе вариации интеграла действия применяется теорема Стокса, либо ее следствие — теорема о дивергенции (Гаусс). Общая суть этих теорем выражается в сведении интеграла по  $n$ -мерному многообразию к его границе,  $(n - 1)$ -мерному многообразию.

Приведем формулировку теоремы Стокса, согласно [40]. Пусть  $\mathfrak{M}^n$  — ориентированное гладкое многообразие с краем и  $\omega \in \mathcal{F}_{n-1}^s(\mathfrak{M}^n)$  —  $(n-1)$ -форма с компактным носителем. Обозначим через  $i : \partial\mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{M}^n$  отображение вложения, такое, что  $i^*\omega \in \mathcal{F}_{n-1}^s(\partial\mathfrak{M}^n)$ . Тогда справедливо равенство (формула Стокса)

$$\int_{\mathfrak{M}^n} d\omega = \int_{\partial\mathfrak{M}^n} i^*\omega, \quad (3.4.1)$$

где  $d$  — операция внешнего дифференцирования.

## 4.5. Оператор Ходжа

**100°.** Оператор Ходжа ассоциирует с  $p$ -формой на многообразии  $\mathfrak{M}^n$   $(n-p)$ -форму на том же многообразии. Для поливекторов эта форма также называется дополнительной [76, с. 20]. В трехмерном евклидовом пространстве 1-форма  $a$ , дополнительная к 2-форме  $b \wedge c$ , определяет векторное произведение  $a = b \times c$ .

Метрика  $\mathcal{g}$  на многообразии  $\mathfrak{M}^n$  индуцирует метрику  $\mathcal{g}^{(k)}$  на расслоении  $k$ -форм следующим образом [40]. Пусть  $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ ,

$\beta = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \beta_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}$  —  $k$ -формы. Тогда

$$\mathcal{g}^{(k)}(\alpha, \beta) := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_k},$$

удовлетворяет всем аксиомам метрики. Здесь  $g^{ij}$  — компоненты метрического тензора, определенного на кокасательном расслоении (см. **82°**).

Пусть на ориентируемом многообразии  $\mathfrak{M}^n$  задан метрический тензор  $\mathcal{g}$ ;  $\mu$  — соответствующая этому тензору форма объема. Для произвольной точки  $p \in \mathfrak{M}^n$ , пространства  $\Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n)$  и  $\Lambda^{n-k}(T_p^*\mathfrak{M}^n)$  имеют одинаковую размерность, и потому, изоморфны. В соответствии с  $\mu$  зафиксируем некоторую ориентацию  $T_p\mathfrak{M}^n$ , то есть выберем положительно ориентированный репер. Среди возможных изоморфизмов выделяется

единственный,  $*$  :  $\Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n) \rightarrow \Lambda^{n-k}(T_p^*\mathfrak{M}^n)$ , удовлетворяющий условию согласования [40]

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n) : \quad \alpha \wedge * \beta = \mathfrak{g}_{(k)}(\alpha, \beta) \mu.$$

При этом, если  $(e_1, \dots, e_n)$  — положительно ориентированный  $\mathfrak{g}$ -орто-нормированный базис  $T_p\mathfrak{M}^n$ , а  $(e^1, \dots, e^n)$  — дуальный к нему, то

$$*(e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}) = \varepsilon_\sigma e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)},$$

где  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ , и  $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(n)$ . Оператор  $*$  называется оператором (звездой) Ходжа [40].

**Замечание 41.** В случае  $n = 2$  имеем

$$*e^1 = e^2, \quad *e^2 = -e^1,$$

а при  $n = 3$ ,

$$*e^1 = e^2 \wedge e^3, \quad *(e^1 \wedge e^3) = -e^2.$$



Справедливы свойства [40]:

- (i)  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n) : \quad \alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha;$
- (ii)  $*1 = \mu, * \mu = 1;$
- (iii)  $\forall \alpha \in \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n) : \quad * * \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha;$
- (iv)  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(T_p^*\mathfrak{M}^n) : \quad \mathfrak{g}_{(k)}(\alpha, \beta) = \mathfrak{g}_{(n-k)}(*\alpha, *\beta).$

Запишем явную формулу для дуального репера  $(e^{i_1}, \dots, e^{i_n})$ , соответствующего произвольно ориентированному базису [40]:

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \sqrt{g} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_{k+1} < \dots < j_n}} \varepsilon_{(j_1, \dots, j_n)} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} e^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n},$$

где  $g = \det(g_{ij})$ . В частном случае, для  $k = 1$ , имеем формулу

$$*e^i = \sqrt{g} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g^{ij} e^1 \wedge \dots \wedge \hat{e}^j \wedge \dots \wedge e^n, \quad (3.4.2)$$

в которой символ  $\hat{e}^j$  означает, что сомножитель  $e^j$  должен быть пропущен.

Для  $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ , имеем

$$*\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_{k+1} < \dots < j_n}} \varepsilon_{(j_1, \dots, j_n)} \alpha_{i_1 \dots i_k} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} e^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{j_n}.$$

На расслоении форм оператор Ходжа задается поточечно:  $(*\alpha)_p = *(\alpha_p)$ .

#### 4.6. $\mathfrak{E}$ -значные внешние формы

**101°.** Пусть  $(\mathfrak{M}^n, \mathfrak{E}, \pi)$  — векторное расслоение с базой  $\mathfrak{M}^n$ . Внешняя  $k$ -форма со значениями в векторном расслоении — это форма, значение которой является элементом  $\mathfrak{E}$ , то есть, это сечение из

$$\Gamma^s(\mathfrak{E}) \otimes \mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n).$$

В частности, тангенциально-значная  $k$ -форма — это сечение из

$$\mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n).$$

В поле реперов  $p \mapsto (\partial_i|_p)_{i=1}^n$  тангенциально-значная форма имеет вид:

$$u = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} u^j_{i_1 i_2 \dots i_k} \partial_j \otimes (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}).$$

Далее, ковекторнозначная  $k$ -форма — это сечение из

$$\mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n).$$

В поле взаимных к  $(\partial_i)_{i=1}^n$  реперов ковекторнозначная форма имеет вид

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{j i_1 i_2 \dots i_k} dx^j \otimes (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}).$$

**102°.** Операция канонического спаривания вектора и ковектора переносится на вектор и ковекторнозначную форму. Именно, это операция

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \times (\mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n)) \rightarrow \mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n),$$

действующая по правилу

$$\langle u, \alpha \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} u^j \alpha_{j i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Иначе говоря, это билинейная операция со свойством:

$$\forall u \in \mathcal{V}^s(\mathfrak{M}^n) \quad \forall \vartheta \in \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) \quad \forall \omega \in \mathcal{F}_k^s(\mathfrak{M}^n) : \quad \langle u, \vartheta \otimes \omega \rangle = \langle u, \vartheta \rangle \omega,$$

где в правой части равенства стоит спаривание вектора и ковектора.

**103°.** Пусть  $g$  — метрика на  $\mathfrak{M}^n$ . Определим звезду Ходжа по второму аргументу

$$*_2 : \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) \rightarrow \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathcal{F}_{n-1}^s(\mathfrak{M}^n), \quad \mathcal{T} \mapsto *_2 \mathcal{T},$$

как линейную операцию со свойством:

$$\forall \mu, \vartheta \in \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) : \quad *_2(\mu \otimes \vartheta) = \mu \otimes (*\vartheta),$$

где  $*$  есть оператор Ходжа, определенный в **100°**. Таким образом, для ковариантного 2-тензора  $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n) \otimes \mathcal{F}_1^s(\mathfrak{M}^n)$ ,  $\mathcal{T} = T_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , имеем

$$*_2 \mathcal{T} = T_{ij} dx^i \otimes (*dx^j).$$



---

## Литература

---

1. Лычев С.А., Койфман К.Г. Геометрические аспекты теории несовместных деформаций. Единообразные конфигурации: Препринт — 1146. Институт проблем механики РАН, 2017. — 125 с.
2. Spivak M. Calculus on manifolds. — WA Benjamin New York, 1965. — Vol. 1.
3. Maugin G.A. Continuum Mechanics Through the Eighteenth and Nineteenth Centuries. — Springer International Publishing, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-05374-5
4. Truesdell C. Essays in the History of Mechanics. — Springer Science & Business Media, 1968. DOI: 10.1007/978-3-642-86647-0
5. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. — Springer Science & Business Media, 1960. — P. 226–858. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2
6. Euler L. Continuation des recherches sur la theorie du mouvement des fluides // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. — 1757. — P. 316–361.
7. Euler L. Sectio tertia de motu fluidorum lineari potissimum aquae // Novi Commentarii academiae scientiarum Petrop. — 1771. — P. 219–360.

8. Cauchy A.-L. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques // Bulletin de la Société philomatique. — 1823. — P. 9–13.
9. Cauchy A.-L. De la pression ou tension dans un corps solide // Ex. de Math. — 1827. — P. 42–56.
10. Poisson S.-D. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques // Mem. Acad. Sci. Inst. France. — 1829. — Vol. 8. — P. 356.
11. Capecchi D., Ruta G.C. Piola's contribution to continuum mechanics // Archive for History of Exact Sciences. — 2007. — Mar. — Vol. 61, no. 4. — P. 303–342. DOI: 10.1007/s00407-007-0002-x
12. Klarbring A., Olsson T., Stalhand J. Theory of residual stresses with application to an arterial geometry // Archives of Mechanics. — 2007. — Vol. 59. — P. 341–364.
13. Devreese J.T., Berghe G.V. 'Magic is no magic': the wonderful world of Simon Stevin. — WIT Press, 2008.
14. Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides // Ex. de Math. — 1827. — P. 60–69.
15. Cauchy A.-L. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique // Oeuvres (2) Gauthier-Villars. — 1890. — Vol. 8. — P. 195–226.
16. Noll W. The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics // The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. — Springer Science & Business Media, 1974. — P. 31–47. DOI: 10.1007/978-3-642-65817-4\_2
17. Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. — Springer Nature, 1967. — DOI: 10.1007/978-3-642-86748-4
18. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity // Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity. — Springer, 1973. — P. 1–295.



19. Halmos P.R. Measure Theory. — Springer New York, 1950. DOI: 10.1007/978-1-4684-9440-2
20. Gurtin M., Martins L. Cauchy's theorem in classical physics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1976. — Vol. 60, no. 4. DOI: 10.1007/bf00248882
21. Luiz C.M. On Cauchy's theorem in classical physics: Some counterexamples // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1976. — Vol. 60, no. 4. DOI: 10.1007/bf00248883
22. Šilhavy M. The existence of the flux vector and the divergence theorem for general cauchy fluxes // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1985. — Vol. 90, no. 3. — P. 195–212. DOI: 10.1007/bf00251730
23. Šilhavý M. Cauchy's stress theorem and tensor fields with divergences in  $L^p$  // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1991. — Vol. 116, no. 3. — P. 223–255. DOI: 10.1007/bf00375122
24. Degiovanni M., Marzocchi A., Musesti A. Cauchy fluxes associated with tensor fields having divergence measure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1999. — Vol. 147, no. 3. — P. 197–223. DOI: 10.1007/s002050050149
25. Epstein M., Segev R. On the geometry and kinematics of smoothly distributed and singular defects // Differential Geometry and Continuum Mechanics. — Springer Science & Business Media, 2015. — P. 203–234. DOI: 10.1007/978-3-319-18573-6\_7
26. Segev R., Rodnay G. Cauchy's theorem on manifolds // Journal of Elasticity. — 1999. — Vol. 56, no. 2. — P. 129–144. DOI: 10.1023/a:1007651917362
27. Rodnay G., Segev R. Cauchy's flux theorem in light of geometric integration theory // Journal of Elasticity. — 2003. — Vol. 71, no. 1-3. — P. 183–203. DOI: 10.1023/b:elas.0000005545.46932.08
28. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

29. Lee J.M. Introduction to smooth manifolds. — Springer New York, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5
30. Eshelby J.D. The force on an elastic singularity // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1951. — Vol. 244, no. 877. — P. 87–112. DOI: 10.1098/rsta.1951.0016
31. Eshelby J.D. The elastic energy-momentum tensor // Journal of Elasticity. — 1975. — Vol. 5, no. 3-4. — P. 321–335. DOI: 10.1007/bf00126994
32. Schouten J.A. Tensor analysis for physicists. — Courier Corporation, 1954.
33. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
34. Съярле Ф. Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992. — 472 с.
35. Ciarlet P.G., Nečas J. Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1987. — Vol. 97, no. 3. — P. 171–188. DOI: 10.1007/bf00250807
36. Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. — CRC Press, 1993. — Vol. 3. — 276 p.
37. Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. — Dover Publications, 1994. — 556 p.
38. Eva Kanso, Marino Arroyo, Yiyong Tong et al. On the geometric character of stress in continuum mechanics // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2007. — Vol. 58, no. 5. — P. 843–856.
39. Шмутцер Э. Симметрии и законы сохранения в физике. — М.: Мир, 1974. — 159 с.

40. Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis, and applications. — Springer Science & Business Media, 1988. — Vol. 75. DOI: 10.1007/978-1-4612-1029-0
41. Бурбаки Н. Теория множеств. — М. : Мир, 1965.
42. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М. : Мир, 1970. — 412 с.
43. Frankel T. The geometry of physics: an introduction. — Cambridge University Press, 2003. — 694 p.
44. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987. — 487 с.
45. Saa A. Volume-forms and minimal action principles in affine manifolds // Journal of Geometry and Physics. — 1995. — Vol. 15. — P. 102–108.
46. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. — Springer, 1960.
47. Knebelman M.S. Spaces of relative parallelism // The Annals of Mathematics. — 1951. — Vol. 53, no. 3. — P. 387. DOI: 10.2307/1969562
48. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
49. Норден А.П. Пространства аффинной связности. — М. : Наука, 1976. — 432 с.
50. Эбботт Э., Бюргер Д. Флатландия и Сферландия. — М.: Мир, 1976. — 360 с.
51. Gibbs J. Vector analysis. — Yale Bicentennial Publications, 1901.
52. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. — 1975. — Vol. 57, no. 4. — P. 291–323. doi: 10.1007/BF00261375

53. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics / Ed. by Stuart S. Antman. — Springer Berlin Heidelberg, 2004. — DOI: 10.1007/978-3-662-10388-3
54. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. — М. : Наука, 1960. — 207 с.
55. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. — Изд-во Казанского университета, 1962. — 210 с.
56. Де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций. Новое в зарубежной науке № 9. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
57. Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. — М.: Мир, 1965. — 104 с.
58. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. — 760 с.
59. Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1916. — Vol. 42, no. 1. — P. 173–204.
60. Cartan E.J. Sur les variétés á connexion affine et la théorie de la relativité généralisée // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. — 1923. — Vol. 40. — P. 325—412.
61. Weitzenböck R. Invariantentheorie // P. Noordhoff, Groningen. — 1923.
62. Gordeeva I.A., Pan'zhenskii V.I., Stepanov S.E. Riemann–Cartan manifolds // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 169, no. 3. — P. 342–361.
63. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. — 1967. — Vol. 27, no. 1. — P. 1–32. doi: 10.1007/BF00276433

64. Yavari A., Marsden J.E., Ortiz M. On spatial and material covariant balance laws in elasticity // Journal of Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 47, no. 4. — P. 042903.
65. Хирш М. Дифференциальная топология. — М.: ИО НФМИ, 1999. — 280 с.
66. Введение в топологию. 2-е изд., доп. / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 416 с.
67. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1980. — 303 с.
68. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963. — 264 с.
69. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. — СПб.: Нестор, 2001. — 274 с.
70. Зубов Л.М., Карякин М.И. Элементы тензорного исчисления. — Ростов: РГУ, 2003. — 108 с.
71. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. — New York, 1963. — Vol. 1, 2.
72. Бурбаки Н. Алгебра. Часть 1. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 516 с.
73. Steenrod N.E. The topology of fibre bundles. — Princeton University Press, 1951. — Vol. 14.
74. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.1. Геометрия и классические поля. — М.: УРСС, 1996. — 224 с.
75. Madsen I.H., Tornehave J. From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes. — Cambridge University Press, 1997.
76. Картан Э. Геометрия римановых пространств. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 250 с.

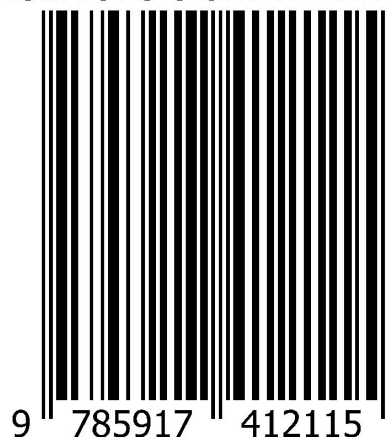
Лычев Сергей Александрович

Койфман Константин Георгиевич

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ  
ТЕОРИИ НЕСОВМЕСТИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

**Напряжения. Материальные связности**

ISBN 978-5-91741-211-5



Подписано к печати 24.01.2018. Заказ № 1 — 2018. Тираж 50 экз.

---

Отпечатано на ризографе Института проблем механики РАН

119526, Москва, пр-т Вернадского, 101-1