

**Russian Academy of Sciences**  
**The Institute for Problems in Mechanics**

N.G. Bourago and V.N. Kukudzhanov

**A Survey on Contact Algorithms**

Paper is submitted to Izvestia RAS, J. Mechanics of Solids. Date: May 20, 2002.

©N. G. Bourago, Mailing address: The Institute for Problems in Mechanics, prospect Vernadskogo 101, Moscow, 117126, Russian Federation; e-mail: burago@ipmnet.ru, Web: [www.ipmnet.ru/~burago](http://www.ipmnet.ru/~burago).

Moscow - 2002

**Российская Академия Наук  
Институт проблем механики**

Н.Г. Бураго и В.Н. Кукуджанов

**Обзор контактных алгоритмов**

Рукопись направлена в журнал Известия РАН, МТТ. Дата: 20 мая 2002 г.

©Н. Г. Бураго, Почтовый адрес: Институт проблем механики, проспект Вернадского  
101, Москва, 117126, Россия; e-mail: burago@ipmnet.ru, Web: www.ipmnet.ru/~burago.

Москва - 2002

# Обзор контактных алгоритмов

Н.Г. Бураго, В.Н. Кукуджанов

В технологических и природных процессах важную роль играют подвижные границы раздела сред. Разработка методов решения задач с подвижными границами раздела является одной из важнейших целей механики сплошных сред. В центре внимания настоящего обзора находятся работы по развитию контактных алгоритмов, являющихся частью численных методов решения задач механики сплошной среды, которая отвечает за определение, прослеживание и расчет контактных, межфазных и подвижных свободных границ.

**Введение. Рассматриваемые типы контактных алгоритмов.** Во-первых, контактные алгоритмы могут быть классифицированы по применяемому способу описания движения сплошной среды. В лагранжевых алгоритмах узлы движутся со скоростью материальной среды. В нелагранжевых алгоритмах узлы неподвижны (эйлеровы алгоритмы) или движутся независимо от материальной среды (произвольные эйлерово-лагранжевы алгоритмы). Характерной особенностью нелагранжевых алгоритмов является наличие в эволюционных уравнениях конвективных членов, обусловленных разностью в скоростях движения координат и среды.

Во-вторых, в обоих случаях (эйлеровом и лагранжевом) подвижные границы раздела могут явно выделяться отслеживающими алгоритмами как совокупность поверхностных узлов (маркеров) и ячеек или неявно определяться улавливающими алгоритмами, основанными на использовании непрерывных маркер-функций.

Эта известная классификация и положена в основу систематизации рассматриваемых работ. В настоящем обзоре рассматриваются все типы контактных алгоритмов, что находится в согласии с современными тенденциями к синтезу методов механики деформируемых сред и гидродинамики, обусловленными требованиями построения интегрированных математических моделей технологических и природных процессов.

**Рассматриваемые типы границ.** В дополнение к классическим постановкам начально-краевых задач механики сплошной среды контактные задачи содержат специальные граничные условия (ограничения), которые управляют движением границ раздела и возможными граничными сингулярностями.

Для классических контактных задач эти ограничения выражают условие непроникания, третий закон Ньютона о равенстве действия и противодействия и закон поверхностного трения. Проекция условий на нормаль предотвращают взаимное проникание несмещающихся сред, а касательные проекции представляют трение контактирующих поверхностей. Расширенная физико-химическая формулировка включает контактные граничные условия для теплопередачи, электро-магнитного взаимодействия, диффузии, химических реакций и так далее.

Дополнительные родственные случаи граничных условий, описывающие поведение свободных и межфазных границ также рассматриваются. Подвижные свободные границы являются лагранжевыми поверхностями между конденсированной (жидкой или твердой) и разреженной средами. Граничные условия на свободных границах описывают влияние разреженной среды, представленное силами внешнего давления и трения, а также действие сил поверхностного натяжения, зависящих от ориентации и кривизны границы.

В отличие от классических контактных и свободных границ межфазные границы не являются лагранжевыми и их движение по сплошной среде определяется условиями межфазного равновесия (например, законом Стефана, условием детонации Чепмена-Жуге, условием пластичности, условием разрушения и так далее). Межфазные границы являются поверхностями слабого разрыва и движутся по сплошной среде, отслеживая скачкообразный процесс фазового перехода, заключающийся в резком изменении свойств сплошной среды. На межфазных границах температура, векторы скоростей, перемещений и напряжений непрерывны, а теплоемкость, сжимаемость и другие свойства могут меняться скачком.

Упомянем также еще один важный предельный частный случай контакта, который отвечает взаимодействию деформируемых сред с абсолютно жесткими.

### **1. Обзоры по формулировкам контактных задач.**

Начально-краевые контактные задачи можно сформулировать в дифференциальной, интегральной или вариационной формах. Вариационные формулировки, в частности, формулировки контактных задач в виде вариационных неравенств играют важную роль в изучении вопросов корректности начально-краевых задач, существования и единственности решений.

Формулировки контактных задач исследовались в работах (Signorini, 1933, 1959; Stampacchia, Lions, 1965, 1967; Фикера, 1974; Lions, 1978; Дюво, Лионс, 1980; Сосу, 1984; Rabier, Martins, Oden, 1986; Martins, Oden, 1987; Rabier, Oden, 1988; Кравчук, 1988, 1997, 2001), где можно найти ссылки на дополнительные источники. Теоретические исследования постановок контактных задач и задач с фазовыми переходами отражены в обзорах следующих работ (Мейдер, 1985; Гринфельд, 1985; Кондауров, Никитин, 1990; Wenson, 1992; Садовский, 1997; Фомин и др., 1999; Манжиров, 2001; Кондауров, 2002). Ссылки на библиографические коллекции работ по вопросам существования и единственности решений контактных задач можно найти в сборнике обзоров под редакцией Александрова и Воровича (2001).

В многих современных работах по контактам сред, свойства которых зависят от истории нагружения, начально-краевые задачи формулируются как вариационные задачи в форме Бубнова-Галеркина. Контактные граничные условия рассматриваются как ограничения и включаются в вариационное уравнение с помощью метода множителей Лагранжа или метода штрафных функций. Обзор методов учета ограничений для вариационных задач общего вида имеется, например, в монографии (Пшеничный, Данилин, 1979).

Обзор эйлерово-лагранжевых формулировок задач механики сплошных сред приведен в работе (Бураго, 1984).

**2. Обзоры по методам расчета контакта.** Большая коллекция свежих обзоров по численно-аналитическим методам расчета контакта, начало которым было положено в работе Герца (Hertz, 1882), представлена в сборнике под редакцией Александрова и Воровича (2001).

В настоящем обзоре рассматриваются численно-дискретные методы расчета контактных границ. К этой категории относятся конечно-разностные, конечно-объемные и конечно-элементные алгоритмы, "бессеточные" методы Галеркина, контактные алго-

ритмы метода граничных элементов.

Крупные подборки литературы по контактными алгоритмам в механике деформируемого твердого тела делали ранее Кукуджанов (1985), Johnson (1985), Kikuchi, Oden (1986), Hughes (1987), Kardestuncer, Norrie (1987), Bension (1992), Aliabadi, Brebbia (1993), Фомин и др. (1999), Горшков и Тарлаковский (2001), Laursen (2002) и ряд других авторов, цитируемых далее в связи с конкретными типами алгоритмов.

Обзоры по алгоритмам расчета границ раздела несмешивающихся сред в рамках гидродинамики имеются в работах (Анучина, 1973; Поттер, 1980; Анучина, Бабенко, Годунов и др., 1980; О. Белоцерковский, 1973, 1984; О. Белоцерковский, Ю. Давыдов, 1982; Bension, 1992; Rider, Kothe, 1995; Johnson, 1996; Kothe et al. 1998; Sethian, 1999; Гильманов, 2000).

Далее даются ссылки и на другие, более специализированные, библиографические коллекции.

**3. Лагранжевы алгоритмы расчета контакта с абсолютно жесткими телами.** Подавляющее число работ по контактными задачам относятся именно к случаю контакта деформируемых тел (сред) с абсолютно жесткими телами (штампами, ударниками или преградами). Подвижная граница жестких тел при этом рассматривается как заданная поверхность скольжения. Она может быть гладкой или шероховатой. Движение жестких тел либо полагается predetermined, либо рассчитывается в процессе решения общей задачи методами теоретической механики с учетом их массы и сил реакции.

Примеры расчетов контакта с жесткими телами и дополнительные ссылки можно найти в работах Баничука (1967), Баничука, Картвелишвили, Черноусько (1972), Баничука и Черноусько (1973), Меньшикова, Одинцова, Чудова (1976), Кондаурова и др. (1978, 1980, 1984a, 1984b), Фомина, Яненко (1978), Гулидова (1980), Заппарова, Кукуджанова (1984, 1986), И. Петрова, Холодова (1984), Кукуджанова (1985), Григорьева (1986), Поздеева, Трусова, Няшина (1986), Няшина, Трусова, Чернопазова (1987) и многих других. Обзоры исследований этого направления можно найти в работах Фомина и др. (1999), В. Давыдова, Чумаченко (2000), Симонова (2001).

В сеточных лагранжевых контактными алгоритмах скорости на границах между жесткими и деформируемыми телами либо задаются, либо определяются по прониканию узлов подвижной сетки в недопозволенные области пространства, представляющие жесткие тела. Нормальные к поверхности жесткого тела компоненты скорости и перемещения корректируются с тем, чтобы устранить счетное проникание. Во многих алгоритмах такая корректировка сводится к приравниванию нормальных скоростей движения деформируемой и жесткой границ. Если же корректировка проводится путем приложения внешних нормальных нагрузок, то тем самым определяется контактное давление. Учет трения особенностей по сравнению с более общими контактными алгоритмами не имеет.

**4. Лагранжевы алгоритмы сквозного счета.** Лагранжевы алгоритмы сквозного счета используют единую лагранжеву сетку в контактирующих средах (телах) с общими узлами на границе раздела. В алгоритмах сквозного счета решение при переходе через контактную границу полагается непрерывным, а контактные разрывы моделируются узкими зонами больших градиентов решения.

Идеальный контакт, согласованные сетки. Простейший прием сквозного счета контакта, используемый в случае малых деформаций в условиях заранее известной и неизменной зоны контакта, заключается в реализации приближенных контактных условий "полного слипания (склейки)" контактирующих тел, реализующих идеальный контакт.

Лагранжевы сетки в зоне контакта при этом согласованы и "сращены" по принципу "узел в узел", скольжение и отскок (отлипание) не допускаются. Решение на контактной границе непрерывно по скорости и перемещению (идеальный контакт). Работ, в которых такая схема расчета контакта используется, опубликовано великое множество. Практически любой алгоритм, решающий задачу механики сплошной среды сеточным методом при задании разных свойств материалов в подобластях автоматически реализует сращивание решений на контактных границах между такими подобластями.

Приведем ниже произвольную выборку российских работ по МКЭ 20-30-летней давности, в которых были даны типичные примеры расчетов идеального контакта: (Розин, 1971, 1977; Угодчиков, Коротких, 1971; Вайнберг и др., 1972; Постнов, Хархурим, 1974; Шевченко и др., 1975; Подгорный и др., 1976; Квитка, Ворошко, Бобрицкая, 1977; Бураго, 1978, 1979; Сеницын, 1978; Е. Морозов, Никишков, 1980). Ссылки на зарубежные работы по идеальному контакту можно найти в книге Зенкевича (1975).

В общем случае переменной зоны контакта, когда имеют место скольжение и отлипание контактирующих тел, модель идеального контакта дает физически неверное описание и не используется.

Идеальный контакт, несогласованные сетки. Контактный алгоритм сопряжения решений с обеспечением идеального контакта при несогласованных в зоне контакта сетках для двумерного случая предложен в работе Баженова, Зефинова, М. Петрова (1984) и развит для трехмерного случая в работах (Баженов с соавторами, 1994, 1995a, 1995b; Park, Felippa, Rebel, 2000a, 2000b; Felippa, Park, Farhat, 2001). Применение такого контактного алгоритма на искусственных границах между подобластями позволяет не заботиться о согласовании сеток на границах подобластей. Это может значительно упростить построение сеток в трехмерных областях сложной формы.

Алгоритмы буферного слоя позволяют имитировать контактный разрыв как зону больших градиентов решения и основаны на введении между контактирующими телами фиктивного буферного контактного слоя ("контактной псевдосреды"). Буферный слой состоит из контактных ячеек, узлы которых принадлежат контактирующим границам. Введение буферного слоя ячеек сводит контактную задачу для многих тел к задаче для одного составного неоднородного тела. По толщине буферного слоя используется как правило одна ячейка, которая в зависимости от приписываемых свойств может играть роль упругой пружины, вязкого элемента, склейки и т.д. Действующие в буферном слое напряжения имитируют контактные нагрузки. Успешность такой имитации зависит от свойств, приписываемых материалу буферного слоя. Эти свойства должны обеспечивать возникновение сжимающих контактных нагрузок, не допускать растягивающих контактных нагрузок (чтобы имитировать отлипание) и моделировать силы трения. Результирующая математическая модель должна быть корректной. Кроме того, из косметических соображений и требований точности желательно, чтобы толщина такого слоя была бы намного меньше, чем характерный размер шага пространственной сетки в контактиру-

ющих телах.

Примеры реализации и теоретического обоснования алгоритмов буферного слоя даны в работах Ghaboussi et al. (1973), Michalowski, Mroz (1976), Мелещенко (1978), Поздняков (1979), А. Кузьменко (1980), Desai et al. (1984), Никишков, Пашнин (1985), Никишков (1988), Рвачев (1982,1989), Вовкушевский (1991), Пашнин, Сапунов (1993), Kowalczyk (1994), Rvachev, Sheiko, 1995; Зернин (1997a, 1997b), Е. Морозов, Зернин (1998), Розин, Смирнов (2000). Обзор этого направления можно найти в (Зернин и др., 2002).

При больших деформациях и сильных изменениях зоны контакта в процессе деформации требуется пошаговое автоматизированное переопределение буферного слоя. Поэтому при последовательном доведении алгоритмов буферного слоя до работоспособного состояния в указанных условиях они превращаются в рассматриваемые ниже алгоритмы, в которых "буферные элементы" или "контактные пары" переопределяются в процессе численного решения автоматически, а контактные реакции определяются путем непосредственного удовлетворения контактных условий.

Алгоритмы "единого уравнения состояния" для сквозного счета межфазных границ используют уравнения, описывающие различные состояния среды с учетом явлений, сопутствующих переходам материала из одного состояния в другое. Примерами являются алгоритмы моделирование контактных разрывов, вызванных континуальным разрушением и локализацией деформаций (Maenchen, Sack, 1964; Кукуджанов, 1985; Lemaitre, 1992, 1996; Гулидов, Шабалин, 1994, 1995; Tomita, 1994; Садырин (1995), Kukudzhanov et al., 1995; Kondaurov, Lomov, 1998; Фомин и др., 1999; Бураго, Глушко, Ковшов, 2000; Кондауров, 2001; Бураго, Кондауров, Кукуджанов, 2002; Бураго, Кукуджанов, 2002), моделирование фазовых переходов жидкость-пар, твердое тело-жидкость при плавлении и кристаллизация (Самарский, Моисеенко, 1965; Sethian, 1999).

Моделирование зон разрушения дискретными частицами предлагалось в работах (Stecher, Johnson, 1984; Belytschko, Lin, 1987b, 1987c; Johnson, Stryk, 1987; Гулидов, (1988) Гулидов, Фомин, 1994). Если в лагранжевой ячейке выполняется условие разрушения (по предельному значению деформации, пластической деформации, максимальному главному напряжению, и т.д.), то связи между узлами в таких ячейках освобождаются, напряжения релаксируют к нулю и сопротивление сохраняется только по отношению к сжатию. Подробный обзор и описание такого типа алгоритмов сквозного счета имеется в книге Фомина и др. (1999).

Работы по множественному контакту. Задачи множественного контакта упругопластических тел возникают во многих приложениях, в частности, при численном изучении свойств композитных материалов, состоящих из множества разнородных компонентов, при расчете поражения мишеней картечью, при взаимодействии шероховатых поверхностей и т.д. Обзоры этого направления даны в работах (Goryacheva, Dobychin, 1991; Wriggers, 1995; Glocker, Pfeiffer, 1996; Фомин, Гулидов и др., 1999; Xing, 2000; Горячева, Чекина, 2001).

Описание явлений контакта в наращиваемых телах и обзоры сделаны Арутюняном, Манжировым, Наумовым (1991), Манжировым (2001). К этому типу задач относятся задачи о намотке и послыном изготовлении композиционных материалов, о нагружении грунта в процессе строительства сооружений, о выращивании кристаллов в процессах

отвердения металлических расплавов и полимерных растворов, о напылении, осаждении и намерзании.

При решении задач множественного контакта полезными являются модели и алгоритмы сквозного счета контактных границ, которые применяются при изучении сопротивления композитных материалов на примерах деформаций идеализированного малого объема, содержащего довольно большое количество разнородных контактирующих под областей (матрица и включения).

С ростом числа контактирующих элементов прямое численное моделирование становится затруднительным и приходится привлекать модели континуального описания множественного контакта. Например, для сред слоистой и блочной структуры эффективный путь решения задач множественного контакта указывается методом асимптотического усреднения структурно-периодических сред. Обзор работ этого направления с примерами моделей усреднения и их численной реализации сделан И. Никитиным (1989).

**5. Алгоритмы поиска зоны контакта.** При численной реализации лагранжевых сеточных методов границы тел представляются множеством граничных поверхностных ячеек. Зона контакта в большинстве случаев заранее неизвестна и ее приходится искать в ходе расчета. Она ищется либо по прониканию граничных узлов через граничные ячейки, либо по их сближению путем попарных проверок всех граничных узлов и ячеек. Результатом поиска зоны контакта является список контактных пар типа, например, "узел - граничная ячейка" и, тем самым, реализуется автоматизированное построение контактных или буферных элементов. Иногда это могут быть пары узел-фиктивный узел или ячейка-ячейка (поверхностные), то есть пары дискретных элементов контактирующих границ.

Число операций по поиску контактных пар растет пропорционально квадрату числа граничных ячеек или узлов. Для задач с большим числом узлов это приводит к неприемлемым затратам вычислительной работы. Рассмотрим имеющиеся алгоритмы ускоренного поиска зоны контакта

Алгоритм "господин-слуга" (master-slave algorithm) является одним из первых алгоритмов поиска, он был предложен в работах (Hallquist, Goudreau, 1982, 1985). В соответствии с этим алгоритмом экономия вычислений достигается за счет того, что зоны возможного контакта (части поверхностей тел) задаются заранее. и одна из поверхностей считается основной (господствующей), а вторая - подчиненной. Первая представлена граничными ячейками, а вторая граничными узлами. Алгоритм использует априорную информацию о зоне возможного контакта и находит контактные пары по прониканию подчиненных узлов через "господские" граничные ячейки. Для обнаружения такого проникания проверяется знак нормальной проекции подчиненного узла на ячейку-господина и то обстоятельство, что нормаль, опущенная из этого узла на ячейку пересекает ее.

Отметим, что во многих задачах нельзя заранее предсказать основные и подчиненные контактные поверхности. Кроме того, необходимость описания зоны контакта в исходных данных в случае сложной геометрии обременительна. Дополнительный довод против использования априорной информации о зоне контакта предоставляется явлением самоконтакта. Самоконтактом называется контактное взаимодействие различных частей поверхности одного и того же тела, которое может иметь место при больших деформациях.



В рассматриваемых далее алгоритмах поиска для ускорения процесса отбора контактных пар процесс поиска разбивается на два и более уровней, называемых обычно глобальными и локальным. На глобальных уровнях зоны возможного контакта ищутся среди групп близлежащих узлов. Далеко отстоящие группы, заведомо не участвующие в контакте, быстро отсеиваются по некоторому групповому признаку, связанному с расстоянием. На последнем (локальном) уровне уже непосредственно разыскиваются контактные пары "узел - граничная ячейка" по нарушению условия непроникания или по признаку достаточной близости. Отличия алгоритмов поиска друг от друга состоят в принципах образования групп, групповых характеристиках, иерархии и методах быстрой сортировки.

Отметим известные глобальные алгоритмы поиска зон контакта: алгоритм регулярных ячеек (Santos, 1993), алгоритм иерархических территорий (НІТА) (Zhong, 1993), линейно-позиционный алгоритм Ольденбурга (Oldenburg, 1993), алгоритмы сортировки окрестностей (Belytschko et al., 1987a; Benson, Hallquist, 1990; Papadopoulos, 1993; и др.).

Наиболее употребительными и эффективными алгоритмами глобального поиска зон контакта являются алгоритмы НІТА и линейно-позиционный.

Глобальный алгоритм иерархии территорий предложен в работе (Zhong, 1993), сокращенно называется НІТА - Hierarchical Territory Algorithm, основан на группировании расположенных вблизи друг друга граничных элементов и поиске зон возможного контакта путем анализа расстояний между такими группами элементов. Если найдены группы возможного контакта, далее проводится локальный поиск. При очень большом числе граничных элементов строится иерархия групп и поиск возможного контакта идет последовательно от групп верхнего уровня к нижнему.

Глобальный линейный позиционный алгоритм предложен в работе (Oldenburg, 1994), сокращенно называется LPOCA - Linear POsition Code Algorithm, искусственно упорядочивает все граничные узлы конечно-элементной сетки. Для этой цели окаймляющий область решения параллелепипед делится на большое число маленьких "кирпичиков" со структурированной  $ijk$  нумерацией (вводится дополнительная равномерная регулярная  $ijk$  сетка). Каждому узлу конечно-элементной неструктурированной сетки присваивается  $ijk$  номер в зависимости от того в какой из этих вспомогательных "кирпичиков" он попал. Такая дополнительная нумерация уже содержит информацию о расположении узлов, что позволяет использовать ее для введения кластеров (групп соседних узлов) и сокращения числа проверок и, тем самым, значительного ускорения процесса поиска зон контакта.

Глобальный алгоритм заполнения пространства кривыми предложен в работе (Diekman et al., 2000), сокращенно называется SFC - Space Filling Curve, иерархически разбивает область поиска на квадраты подобно тому как это делается в известной задаче о ловле льва в пустыне Сахара путем деления ее частей пополам с выбором той части, где находится лев, до тех пор пока этому льву некуда будет деваться. Такое деление только уже на четыре прямоугольных части (двумерный случай) проводится пока на каком-то уровне измельчения в ячейке не окажется только один узел, которому и присваивается позиционный код, образованный цепочкой бинарных кодов (00-левый-нижний, 01-правый-нижний, 10-левый-верхний, 11-правый-верхний), указывающих путь к данному узлу. Для определения ближайших узлов к данному используются алгоритмы

быстрого сравнения позиционных кодов основанные на XOR-операциях и комбинации бинарного и экспоненциального поиска.

Алгоритмы определения зоны контакта. Локальный поиск. К алгоритмам локального поиска относится уже рассмотренный алгоритм "узел-ячейка" (Goudreau, Hallquist, 1982, 1985; Venson, Hallquist, 1990) и алгоритм "внутри/наружу" (Wang, Nakamachi, 1997). Последний метод эффективно разрешает проблему "мертвых зон", которая состоит в том, что в местах изломов границы появляются прилегающие к ее острым изломам внутренние "мертвые" зоны, из которых непонятно, куда "выпихивать" проникший "чужой" граничный узел. Алгоритм предлагает одно из самых простых возможных решений, которое заключается в "выпихивании" этого узла обратно с помощью сил реакции, направленных вдоль его лагранжевой траектории ("как пришел, так и ушел").

Локальный алгоритм функции зазора (GFA - Gap Function Algorithm) предложен в работе (Hirota et al., 2001) и, по замыслу авторов, должен позволить единообразно рассматривать все случаи контакта для задач очень сложной геометрии и очень высокой размерности. Алгоритм основан на введении в области решения скалярной функции зазора, которая для каждого узла вычисляется один раз для начального положения подвижной области решения и равна начальному расстоянию от этого узла до ближайшей границы. Вне пространственной области решения эта функция доопределяется нулем. Определение контактных узлов состоит в подсчете значения этой функции зазора для сдвинутых граничных узлов. При отсутствии налезания эти значения для граничных узлов равны нулю. Если же где-либо возникло налезание, то это значит, что какой-либо из граничных узлов находится внутри ячейки пространственной сетки и, следовательно, имеет два значения функции зазора: одно - свое собственное, равное нулю, другое отвечает его положению внутри упомянутой ячейки и отлично от нуля. Направление "выталкивания" или действия нормальных контактных усилий указывается антиградиентом функции зазора, а величины налезания и силы реакции пропорциональны значению функции зазора. Эффективность алгоритма локального поиска с использованием функции зазора определяется быстротой интерполяции функции зазора и требует достаточно гладких границ. В работе (Pandolfi et al., 2000) этот подход функции зазора критикуется и предпочтение отдается алгоритмам контактных пар, которые лучше подходят к общему случаю негладких границ с углами и к ситуациям множественного контакта.

Локальный пинболл-алгоритм Для улавливания сложных случаев контакта разнородных элементов (стержневых, оболочечных и пространственных) между собой в работе (Belytschko, Neal, 1989, 1991) предложен пинболл-метод (pinball - заколка, иголка с шариком). Этот метод рассматривает сферическую окрестность каждого элемента, независимо от его природы (трехмерный, оболочечный двумерный или стержневой/балочный одномерный) и проникание проверяется по пересечению этих окрестностей. Это простая проверка, поскольку требуется сравнить только текущие расстояния между пинболлами с суммой радиусов их окрестностей. В штрафной форме алгоритма, если перекрытие пинболлов обнаружено, равные и противоположно направленные, пропорциональные величине наложения, силы прилагаются к центрам пинболлов. Эти силы затем пересчитываются с этих фиктивных узлов (центров пинболлов) на узлы элементов, к которым эти пинболлы относятся. Поскольку пинболл-алгоритм основан на простейших проверках, он является

очень быстрым контактнм алгоритмом и потребляет порядка 15% времени, требуемого на расчет временного шага, в то время как другие алгоритмы потребляют иногда более 60-75 % (Venson, 1992).

Локальный иерархический пинболл-алгоритм В уже упомянутой работе (Belytschko, Neal, 1991) пинболл-метод был приложен к тонким оболочкам и в процессе использования метода оказалось, что метод перестает работать, когда взаимодействующие элементы очень тонкие. Были найдены (Belytschko, Yeh, 1993) два пути преодоления этой трудности: "скоростной" пинболл алгоритм и "расщепленный" пинболл алгоритм. Как и в обычных пинболл-алгоритмах в расщепленном пинболл-методе пинболл ассоциирован с каждым элементом, хотя в этом новом методе радиус пинболла всегда выбран достаточно большим, чтобы окружить элемент. Этот большой пинболл назван родительским. Перекрытие родительских пинболлов теперь лишь показывает возможность проникания. Когда перекрытие родительских пинболлов обнаружено меньшие пинболлы другого уровня выстраиваются, они имеют радиусы порядка толщины оболочки и покрывают, располагаясь на расстоянии этого радиуса друг от друга, поверхность оболочечного или длину балочного элемента. Если эти малые пинболлы перекрываются с чужими, то это означает проникание и тогда искомые контактные силы вычисляются по перекрытию малых пинболлов и, затем, перераспределяются на узлы соответствующих элементов.

**6. Лагранжевы алгоритмы выделения контактной границы. Определение контактных усилий и скоростей.** Пусть зона контакта обнаружена и контактные пары "узел-ячейка" построены. Рассмотрим алгоритмы определения нормальных контактных скоростей и усилий.

Алгоритмы скольжения были сформулированы в пионерских работах по контакту между деформируемыми телами в условиях переменной зоны контакта, выполненных Уилкинсом (1967, 1973), (Wilkins, 1964, 1969, 1979, 1980), Работы Уилкинса оказали большое влияние на развитие контактных алгоритмов в задачах о больших деформациях.

В алгоритмах скольжения на каждом шаге по времени попеременно (Киселев, 1984, 1988, 1989) одна из контактирующих поверхностей считается поверхностью скольжения (поверхностью абсолютно жесткого тела), а другая граница следует движению первой. Хотя контактные условия при этом выполняются приближенно, интегрально метод дает правдоподобные результаты. Контактные скорости и усилия в численном решении осциллируют, что снижает точность расчета.

Обобщением метода Уилкинса на трехмерный случай занимались также Johnson (1977a, 1977b, 1990), Гулидов (1980), Корнеев с соавторами (1980, 1982), Баженов, Кибец, Садырин (1986) и многие другие.

Алгоритмы фиктивных узлов в различных формах вводились в ряде работ. В уже упоминавшейся в связи с алгоритмами идеального контакта работе Баженова, Зефирова, М. Петрова (1984) предложен двумерный алгоритм, использующий условия непроникания по нормали и свободного скольжения по касательной к поверхности. При рассогласовании сеток в зоне контакта алгоритм использует вспомогательную совмещенную сетку, состоящую из граничных узлов исходной сетки в одном теле и из парных фиктивных контактных узлов в другом теле. Значения решения в фиктивных узлах на старом временном слое определяются интерполяцией. На новом временном слое (итерации) на каждую пару

смежных узлов ("граничный-фиктивный") накладывается кинематическое ограничение (равенство соответствующих компонент скоростей) и статические условия (равенство с точностью до знака компонент нормальных усилий). Используя эти равенства в каждом граничном узле основной сетки определяются величины контактных давлений и корректируются граничные узловые скорости. В последующих работах Баженова, Кибца и Цветковой (1995) алгоритм был обобщен на трехмерные контактные задачи.

Фиктивные узлы вводятся также во многих других контактных алгоритмах, в частности, в рассматриваемых далее алгоритмах метода характеристик (Заппаров и Кукуджанов, 1986) и в рассмотренном выше иерархическом пинболл-алгоритме (Hallquist, 1991).

Логическим завершением линии алгоритмов фиктивных узлов являются так называемые адаптивные контактные алгоритмы, которые на каждом шаге по времени локально перестраивают сетки в контактирующих телах в окрестности зоны контакта так, чтобы согласовать их по принципу "узел в узел" (Mikalajczak et al., 2000).

Характеристические алгоритмы расчета контакта Соотношения на характеристиках для гиперболических систем уравнений механики упругопластических сред были применены в двумерных задачах динамики для расчета контактных границ в (Кондауров, И. Петров, Холодов 1984; И. Петров, Холодов, 1984; Заппаров, Кукуджанов, 1986). Системы характеристических соотношений выписывались для каждого граничного узла в одном теле и соответствующего фиктивного узла в другом теле. Из решения этих систем уравнений определялись контактные скорости и усилия. Область возможного применения характеристических алгоритмов ограничена нестационарными задачами. Наиболее свежий обзор характеристических алгоритмов можно найти в книге (Куликовский, Погорелов, Семенов, 2001).

Контактные алгоритмы, основанные на задаче Римана и схеме Годунова Схема Годунова (1959) использующая на предикторе решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, применена к расчету контактных взаимодействий в процессах сварки взрывом в работе Годунова с соавторами (1976), где можно найти описание контактного алгоритма и ссылки на другие работы этих авторов. Эта линия алгоритмов получила дальнейшее развитие в работах (Addressio et al., 1988; Садовский, 1991, 1997, 1998; Бычек (Садовская), 1998, 1999a, 1999b; Annin et al., 1999; Аннин и др., 2000). Обзор семейства алгоритмов Годунова дан в обзоре (Venson, 1992) и в монографии Куликовского, Погорелова, Семенова (2001).

Алгоритмы неупругого удара в различных вариантах применялись в работах (Садырин, 1976, 1979; Гриднева, Корнеев, Трушков, 1977; Корнеев, Шугалев, 1986; Сажин, Симонов 1987; Астанин, Галиев, Иващенко, 1988; Иващенко, 1988, 1989). В этих алгоритмах скорости лагранжевых узлов в зоне удара корректируются исходя из решения задачи неупругого удара для узловых масс составляющих контактные пары узел - поверхностная ячейка или узел - фиктивный узел.

Контактные алгоритмы метода множителей Лагранжа основаны на учете искомым контактных нормальных нагрузок в выражениях для контактных скоростей и их последующем определении из условий непроникания. Нормальные контактные нагрузки являются множителями Лагранжа для условий непроникания. Отличия различных модификаций состоят в способах учета условия непроникания (на дискретном или на непрерывном

уровне), в способах решения системы алгебраических уравнений для контактного давления (прямые или итерационные методы), в трактовках алгоритмов (физико-механическая или математическая), в способах аппроксимации решения в зоне контакта и так далее. Однако при всех внешних различиях это варианты реализации одной и той же идеи. Отметим, что подавляющее большинство контактных алгоритмов, применяемых в явных схемах расчета, могут трактоваться как варианты метода множителей Лагранжа.

Алгоритмы метода множителей Лагранжа для случая малых деформаций строили Фукс (1976), Hughes et al. (1976), Hallquist (1976, ..., 1998), Asano (1982, ..., 1986c), Asada (1985), Asano et al. (1985), Guerra, Browning (1983), Bathe, Chindary (1985, 1986, 1988). Для случая больших деформаций такие алгоритмы разрабатывали Simo, Wriggers, Schweizerhof, Taylor (1985, 1986), Simons, Bergan (1986), Бураго (1986a, 1986b, 1987a), Taylor, Flanagan (1987), Горельский и др. (1987, 1992), Гулидов, Шабалин (1987, 1988), Zhong (1988), Бураго, Кукуджанов (1988, 1991), Oldenburg (1988, 1989), Parish (1989), Carpenter (1991), Кошур и др. (1992), Saleeb (1994), Zhong, Nilsson (1994b), Korobeinikov et al. (1994) Баженов, Кибец, Цветкова (1995), Быковских и др. (1995), Baillet et al. (1999) и многие другие.

Алгоритмы метода штрафных функций являются другим вариантом динамических контактных алгоритмов, применяемым чаще всего в неявных схемах решения контактных задач квазистатики и динамики. В этом методе величина нормальных контактных нагрузок принимается пропорциональной невязке условий непроникания с большим коэффициентом пропорциональности (коэффициентом штрафа).

Контактные алгоритмы метода штрафа для неявных схем разрабатывали и описывали Pifco, Winter (1981), Kikuchi (1982), Campos, Oden, Kikuchi (1982), Guerra, Browning (1983), Simo, Wriggers, Taylor (1985), Asano (1986b, 1986c), Kikuchi, Oden (1986), Nour-Omid, Wriggers (1986), Бураго, Кукуджанов (1988, 1991), Kulak (1989), Kanto, Yagawa (1990), De La Fuente, Felippa (1991), Huneck (1993). Zhong, 1993; Bathe, Bouzinov (1997), Ling, 1997; Parish, 1997; Коробейников, 2000; Xing et al. 1998; Xing, 2000).

Предложены также гибридные алгоритмы, которые сочетают оба метода (и метод множителей Лагранжа, и метод штрафных функций), см. работы (Wriggers, Wagner, Stein, 1987; Simo, Laursen, 1992; Lee, 1993; Heegaard, Curnier, 1993; Laursen, Covindjeen, 1994; Bathe, 1996; Xing et al., 1998, 2000; Farahani, Mofid, Vafai, 2000, 2001).

Лагранжевы алгоритмы явного выделения внутренних контактных границ. Рассмотрим направление работ по моделированию разрушения, в которых контактные разрывы, отвечающие магистральным трещинам, выделяются явно.

Такое выделение производится по заранее введенной линии (поверхности), определенной сдвоенными узлами (Bertolf et al., 1975; Chen, Wilkins, 1976; Е. Морозов, Никишков, 1980; Ingraffea, Heuze, 1980; Рузанов А.И. и др., 1984), если положение поверхности разрушения предопределено.

В общем случае дополнительные узлы вводятся в процессе решения (Гриднева, Немирович-Данченко, 1983; Мержиевский, Ресиянский, 1984). Обзор и описание алгоритмов перестройки сеток в окрестности контактных разрывов дано в работах (Ladevese, 1998; Гильманов, 2000).

Способ явного выделения вновь образующихся контактных разрывов, не требующий

введения новых узлов и основанный на локальной перестройке сетки путем "схлопывания" разрушенной ячейки (путем сдвига ее узлов на поверхность разрушения), предложен в работе (Гулидов, Фомин, Шабалин, 1983). Описание этого способа можно найти также в работах (Киселев, Кабак, 1990; Фомин и др., 1999).

Отметим ряд алгоритмов в которых нарушения сплошности типа трещин также моделируются на уровне элементов без перестройки сетки (Sumi, 1985; Simo, Oliver, Armero, 1993), с использованием техники подвижных сеток (Rashid, 1998), дополнительных степеней свободы в элементах, содержащих контактный разрыв, которые отвечают разрывным функциям формы (Fish, 1989; Fleming et al., 1997; Moes et al., 1999; Daux et al., 2000; Dolbow et al., 2000, 2001; Duarte et al., 2001).

**7. Эйлеровы алгоритмы расчета контактных границ.** Представим себе случай когда две или более областей, занятых одной фазой материала, объединяются. Описать такой процесс лагранжевыми методами с явным выделением межфазных границ будет крайне трудно, особенно в трехмерном случае, поскольку объединение узлов в лагранжевые граничные ячейки определяется списками и в данном случае такие списки нужно было бы постоянно обновлять. Кроме того, возникли бы трудности, связанные с неприемлемыми ограничениями на шаг по времени из-за возможного чрезмерного сближения лагранжевых узлов. Аналогичные трудности лагранжевый подход встречает и при описании процессов фрагментации.

Один из способов преодоления указанных трудностей отслеживания межфазных границ предоставляется эйлеровыми и эйлерово-лагранжевыми алгоритмами, которые в расширенной трактовке данного обзора также относятся к классу контактных алгоритмов.

Обзоры по эйлеровым алгоритмам отслеживания контактных границ. Эйлеровы методы, реализующие сквозной счет контактных разрывов, образуют свой богатый мир алгоритмов, который заслуживает специального обзора и здесь описывается предельно кратко. Другие, подборки литературы по эйлеровым контактным алгоритмам можно найти в работах (Ю. Давыдов, 1978; 1981; Поттер, 1980; О. Белоцерковский, Ю. Давыдов, 1982, Numan, 1984; Oran, Boris, 1987; Benson, 1992; Unverdi, Tryggvason, 1992; Sczymczak et al., 1993; LaFaurie et al., 1994; Kothe, Rider, 1994; Sethian, 1996, 1998, Гильманов, 2000; Osher, Tryggvason, 2001).

Общими чертами рассматриваемой группы контактных алгоритмов является расчет на эйлеровой (неподвижной) часто равномерной и прямоугольной сетке, окаймляющей с запасом контактирующие материальные тела и среды, и отслеживание контактных границ (границы тел и сред между собой, свободные границы, межфазные границы) с помощью лагранжевых дискретных или непрерывных маркеров. Иногда вместо эйлеровой сетки используется эйлерово-лагранжева произвольно подвижная (динамически адаптивная) сетка.

Рассчитанное на эйлеровой сетке поле скоростей используется для расчета движения лагранжевых дискретных или непрерывных маркеров с использованием лагранжевой (дискретные маркеры) или эйлеровой (непрерывные маркеры) форм уравнения переноса.

Алгоритмы дискретных лагранжевых маркеров образуют обширное семейство, которое представляют базисные алгоритмы метода частиц (Харлоу, 1967), метода граничных маркеров (Нох, 1967) и метода маркеров и ячеек (Welch et al., 1965; Николс, 1973). В

таких алгоритмах частицы осуществляют перенос массы, импульса и энергии, а маркеры служат для идентификации межфазных границ и движения фаз.

Для контакта упругопластических тел варианты метода маркеров и ячеек реализованы в работах (Калмыков, Кукуджанов, 1993; Фомин и др., 1999).

Для учета сложных граничных условий (трение, поверхностное натяжение, кинетика фазового перехода и т.д.) контактные (межфазные, свободные) границы в этих методах определяются граничными лагранжевыми ячейками, позволяющими вычислить нормаль, касательные и кривизны границы раздела, участвующие в задании граничных условий.

При объединении/разделении материальных подобластей лагранжево описание границ создает большие математические трудности при расчете исчезающих или рождающихся границ. Кроме того в методах частиц и маркеров имеются проблемы корректного описания движения маркеров на границах раздела и соблюдения законов сохранения (маркеры), а также проблемы с нехваткой маркеров или частиц в зонах разрежения и проблемы, связанные с генерацией и удалением маркеров, пересекающих открытые границы, через которые сплошная среда втекает или вытекает из области решения. Эти проблемы решаемы, но при этом число операций может достигать неприемлемых значений.

Методы непрерывных лагранжевых маркеров позволяют упростить учет сложных граничных условий и физических явлений на контактных границах и их определение, особенно в случаях переменной топологии подобластей, занятых разными средами (фазами), при их слиянии или разделении. Идентификация типа среды проводится по значениям функций, сохраняющихся вдоль лагранжевых траекторий, играющих роль непрерывных лагранжевых маркеров и подчиняющихся эйлеровому уравнению переноса. Граница раздела служит изоповерхностью, отвечающей среднему от значений функции маркера в контактирующих средах. Такой способ определения границ принят, например, в картографии при описании береговых линий.

Варианты алгоритмов непрерывных лагранжевых маркеров описаны в следующих работах, реализующих идею непрерывных маркеров:

\* *метод крупных частиц* применен к расчету границ раздела в работах (Давыдов, 1978; Давыдов, Пантелеев, 1981; О. Белоцерковский, Давыдов, 1982), в которых границы между тяжелой и легкой средами определялись по изоповерхности плотности;

\* *метод жидкости в ячейках* (Hirt, Nikols, 1981; Brackbill, Kothe, Ruppel, 1988), *метод псевдо-концентрации* (Thompson, 1986) и *метод скалярного уравнения* (Jun, Spalding, 1988), в которых за признак границы раздела принимаются объемные концентрации или функции "цвета" различных сред;

\* *методы функций уровня* (level set methods) (Sussman et al., 1988, 1994, 1999; Sethian, 1996, 1998, 1999, 2001; Osher, Fedkiw, 2001, 2002; Kunugi, 2002; Enright et al., 2002), в которых индикатором границы служит функция уровня, указывающая расстояние до границы раздела.

Одной из трудностей большинства методов непрерывных маркеров является проблема диффузии границ раздела, обусловленной погрешностями численного решения эйлерова уравнения переноса. В методе функций уровня эта проблема снимается, так как в отличие от других методов непрерывного маркера, использующих функции Хевисайда (ступеньки) с резкой сменой значений на границе раздела, метод функций уровня использует

медленно меняющуюся маркер-функцию, связанную с расстоянием до границы, которая рассчитывается путем численного решения эйлерова уравнения переноса гораздо точнее, нежели функции Хевисайда.

Нарушения консервативности вблизи границы раздела имеют место в методах маркеров (дискретных и непрерывных) и требуют дополнительных приемов контроля и коррекции.

Идея отслеживания границ по значениям концентрации или функции области описана также в работах по сквозному счету границ (Erlich, 1958; Олейник, 1960; Самарский, Моисеенко, 1965), по методу фиктивных областей (Коновалов, Яненко, 1977), по методу R-функций (Рвачев и др., 1989; Rvachev, Sheiko, 1995).

По сравнению с методами частиц и дискретных маркеров алгоритмы непрерывных маркеров дают возможность облегченного вычисления таких характеристик как нормаль, касательные и кривизны контактной поверхности через производные функции уровня в эйлеровых ячейках, содержащих границу раздела. Соответствующие математические формулы для геометрических характеристик используются при записи граничных условий на контактных и межфазных границах, выражающих, например, закон Стефана, силовые условия для давления, трения, поверхностного натяжения и так далее.

Во многих случаях методы маркеров решают задачи, которые ставят в тупик методы, подразумевающие явное выделение контактных границ. Примерами могут служить случай множественного контакта, явления с переменной топологией материальных подобластей, например, опрокидывающиеся волны, фонтаны, фрагментация тел при разрушении, отрыв или воссоединение капель, заполнение водоемов, пузыри, кавитационные полости и т.п.

Отметим, что из-за накопления ошибок в граничных условиях точность решения, предоставляемая эйлеровыми методами сквозного счета часто недостаточна для удовлетворительного моделирования явлений контакта структурированных материалов с ярко выраженными гиперупругими свойствами сопротивления деформации при медленных нагружениях малой интенсивности.

Эйлеровы методы сквозного счета контакта эффективны в классе задач о кратковременных процессах: задачи удара со скоростями порядка скорости звука, о детонации, взрыве, кумуляции, сварке взрывом и тому подобных процессах.

Алгоритмы улавливания скачков, разработанные для сквозного счета разрывных решений в эйлеровых алгоритмах гидродинамики, могут быть применены для повышения точности численного интегрирования уравнения переноса при отслеживании межфазных границ и контактных разрывов при совместном использовании с методами лагранжевых маркеров. С методами улавливания скачков можно ознакомиться по обзорам и описаниям, данным во многих современных трудах по численным методам расчета сжимаемых течений, например, в работах (Benson, 1992; Куликовский, Погорелов, Семенов, 2001).

Дальнейшее уточнение решения в зоне границ раздела сред может быть достигнуто путем применения адаптивных сеток.

Алгоритмы адаптивных сеток уменьшают ошибки аппроксимации сеточных методов в зонах больших градиентов путем локального уменьшения шага сетки, оптимизации формы ячеек, адаптации сеток к границам подобластей и к решению, в частности, к



разрывам и пограничным слоям. Такой путь подсказан анализом ошибок сеточной аппроксимации, показывающим, что они пропорциональны норме производных, некоторой степени характерного шага сетки и возрастают при появлении острых углов и искажениях формы ячеек сетки (Самарский, 1979; Шокин, 1979; Стренг, Фикс, 1979).

Развитию подхода адаптивных подвижных сеток (moving adaptive grid method) посвящены работы (Hirt, 1973; Годунов, Прокопов, 1972; Лисейкин, Яненко, 1977; Данаев, Лисейкин, Яненко, 1977; Dwyer et al., 1980; Ковеня, Яненко, 1981; Brackbill, Saltzman, 1982; Гриднева, Меркулова, 1983; Бураго, 1984; Дуайер, 1985; Кутлер, 1985; Tompson, 1985; Сидоров, Ушакова, 1985; Ушакова, 1989; Li, Bettess, 1997; Carey, 1997; Иваненко, 1998, 2001; Liseikin, 1999; Jacquotte, 1999; Гаранжа, 2000, 2001; Гильманов, 2000; Азаренок, 2001, 2002; Чарахчян, 2002), в которых можно найти более обстоятельный анализ и обзор исследований. Характерной особенностью таких алгоритмов является сохранение числа узлов сетки в процессе решения и повышение точности (адаптация) за счет оптимального расположения узлов.

Подход к описанию подвижных контактных границ, основанный на локальном измельчении и перестройке сеток (adaptive mesh refinement method) описывается и обсуждается в работах (Толстых, 1978, 1979, 1983; Berger et al., 1984, 1985, 1989; Войнович, Шаров, 1993; Гаврилюк и др., ???; Гильманов, 2000). В этом случае число узлов сетки и их объединение в ячейки являются переменными.

## 8. От сеточных к бессеточным дискретным алгоритмам

Стремление избежать трудностей построения сеток и получить численное решение более экономным и простым путем выразилось в двух крупных направлениях развития контактных алгоритмов связанных с методами граничных элементов (граничных интегральных уравнений) и обширным семейством бессеточных алгоритмов свободных точек.

Алгоритмы метода граничных элементов рассмотрены в работах (Круз, 1978; Федоренко, 1979; Гольдштейн и др., 1979; Партон, Перлин, 1981; Кравчук, 1982; Кравчук, Ахунджанов, 1983; Бенерджи, Баттерфилд, 1984; Гольдштейн, Спектор, 1986; Aliabadi, Brebbia, 1993; Aliabadi, 1997; Eck et al., 1999a, 1999b).

В основе алгоритмов граничных элементов лежит идея сведения классических линейных уравнений механики сплошных сред к граничным интегральным уравнениям путем представления решений в виде суперпозиции фундаментальных решений отвечающих единичным возмущениям или с использованием функций влияния Грина. Для дискретизации объемная сетка не требуется и достаточно ввести сетку граничных элементов, то есть размерность задач уменьшается на единицу. Имеются варианты алгоритмов, в которых стадия вывода граничных интегральных уравнений минует и уравнения дискретной задачи составляются непосредственно с использованием фундаментальных решений для единичных возмущений (Поттер, 1980; С. Белоцерковский, Ништ, 1984).

В нелинейных задачах приходится вводить внешние итерации по нелинейности, на каждой из которых решается линеаризованная задача с классическим линейным оператором и нелинейными членами, отнесенными в правые части и вычисляемыми по предыдущему приближению. Возникающие трудности связаны с необходимостью вычисления объемных интегралов и введения объемной сетки, а также с катастрофическим ухудшением сходимости внешних итераций с нарастанием влияния нелинейности.

Свободные лагранжевы дискретные алгоритмы представляют попытку избавиться от трудностей связанных с искажениями ячеек подвижных сеток при отслеживании границ раздела. Это делается либо путем пошаговой перестройки сеток с изменением соседства (Pasta, Ulam, 1959; Ulam, 1964; Djachenko, 1967, 1973; Glagoleva et al., 1972; Anuchina et al., 1980; Monaghan, 1982), либо путем переинтерполяции на улучшенные сетки (Аганин, Кузнецов, 1985; Gil'manov, 2000)

Бессеточные контактные алгоритмы представляют дальнейшую тенденцию к отказу от сеток в пользу свободных лагранжевых узлов. Эти алгоритмы реализуют метод Галеркина-Петрова с использованием специальных нефинитных, но быстро затухающих базисных функций, строящихся с учетом расположения лагранжевых узлов (частиц) без их объединения в ячейки. Эволюцию этих алгоритмов можно проследить по работам (Monaghan 1982; Belytschko et al., 1994, 1996; Liu et al., 1995, 1996; Duarte, Oden, 1996; Melenk, Babushka, 1996; J. Chen et al., 1996, 2001; Li, Liu, 2002).

Для вывода системы уравнений дискретизированной задачи в первых работах использовались Гауссовы процедуры численного интегрирования, что представляло определенные вычислительные трудности. Улучшенные алгоритмы численного интегрирования (SCNI - stabilized conforming nodal integration) представлены в работе (J. Chen et al., 2001)

В настоящее время бессеточные методы начинают успешно конкурировать с традиционными сеточными методами при численном моделировании контакта при больших деформациях и сложной реологии материала (Gunter, Liu, 1997; Kaljevic, Saigal, 1997; Zhu, Atluri, 1998; J. Chen, Wang, 1998).

**9. Учет контактного трения** Во многих технологических проблемах учет контактного трения играет решающую роль. Ярким примером, где такой учет составляет суть проблемы, является моделирование работы автомобильных тормозов.

Обзоры по численно-аналитическим методам учета трения сделаны в работах (Александров, Мхитарян, 1983; Горячева, Добычин, 1988; Галахов, Усов, 1990; Bhushan, 1996; Gorjacheva, 1998) и в сборнике обзоров (Александров, Ворович, 2001).

Рассмотрим типичные модели контактного трения, применяемые в численно-дискретных алгоритмах. Во первых, следует отметить модификацию классической модели Кулонова трения (Michalowski, Mroz, 1978), в которой силы трения ограничены предельными величинами касательных напряжений, поддерживаемых контактирующими средами. По этой модели величина пограничного сдвигового контактного напряжения ограничена наименьшим из пределов текучести контактирующих материалов. Wriggers et al. (1990) предложили детализацию этой модели разделяя тангенциальный скачок смещения на микросмещение, вызванное пограничными упругими деформациями и макросмещение, вызванное пластическим (необратимым) сглаживанием шероховатостей. Вторым примером часто используемого закона трения может служить модель динамического трения, в которой контактные нагрузки трения зависят от скачка тангенциальной скорости (Oden, Martins, 1985). Подробный анализ законов трения для расчета больших деформаций имеется в работе (Cheng, Kikuchi, 1985).

Описание и обзоры контактных алгоритмов, учитывающих трение, имеются в работах Key (1974), Кравчук, Васильев (1980), Кравчук (1980, 1981, 1988), Chaudhary, Bathe (1986), Chen, Tsai (1986), Kikuchi, 1986; Гулидов, Шабалин (1987, 1988), Бураго (1987а), Бураго

и Кукуджанов (1988, 1991), Taylor, Flanagan (1987), Bathe, Mijailovich (1988), Ju, Taylor (1988), Klarbring, Bjorkman (1988), Zhong (1988, 1993), Brunet (1989), Benson, Hallquist (1990), Laursen, Simo (1991, 1992, 1993a, 1993b) Kwak (1991, 1997), Benson (1992), Cescotto, Charlier (1993), Lee, Oden (1993a, 1993b, 1994), Jean (1995), Kim, Kwak (1996), Armero, Petocz (1996, 1997a, 1997b, 1998, 1999), Ling, Stolarski (1997), Christiansen et al. (1998), Chawla, Laursen (1998), Фомин и др. (1999). Alart et al. (1998, 1999), Laursen (1999).

Следующие работы посвящены моделированию процессов контакта с учетом трения качения: Kalker и Paul (1972,1990), Batra (1980,1981), Endo et al. (1984), Oden, Lin (1986), Padovan et al. (1987, 1994), Bass (1987), Stechschulte, Luchini (1987), Chang et al. (1988), Faria et al. (1989,1992). Произвольный эйлерово-лагранжев подход в задачах качения представлен в работах (Nackenhorst, 1993; Lee, Oden, 1994).

**10. Обзоры проблемно-ориентированных контактных алгоритмов.** Приведем ниже ссылки на обзоры и отдельные работы, содержащие описание специализированных контактных алгоритмов, адаптированных к определенным приложениям.

Контактные алгоритмы для мультипликации (типа фильмов о динозаврах) используют простые безитерационные явные схемы, не предполагающие выполнения законов механики и удовлетворяющие условиям непроникания с помощью эвристических методов, обеспечивающих минимально необходимую правдоподобность результата. Основным требованием, отличающим анимационные контактные алгоритмы от применяемых в механике сплошных сред, является возможность вмешательства аниматора в сценарий движения контактирующих тел и сред в процессе создания фильма. В качестве примера отметим алгоритм свободной деформации форм (Sederberg, Parry, 1986) и алгоритм кожно-скелетной деформации (Lewis, Cordner, Fong, 2000). Подробнее с такими алгоритмами можно ознакомиться по обзору (Bechmann, 1994).

Контактные алгоритмы для медико-биологических приложений. Дальнейшее приближение к реальности, необходимое в медицинских приложениях в связи с моделированием хирургических операций и построением обучающих программ-тренажеров, а также для компьютерного прогнозирования результатов пластических операций, достигается путем частичного учета законов механики деформируемого тела и придания математическим моделям свойств сопротивления деформации (Gourret et al., 1989; Donzelli, 1995; Koch et al., 1996; Wilhelms et al., 1997).

Упомянутые выше упрощенные модели при повышении требований к соответствию результата численного моделирования поведению реальных объектов сменяются уже полноценными контактными алгоритмами, разрабатываемыми в рамках механики сплошных сред. Непрерывно возрастающая производительность компьютеров способствует активизации исследований по разработке алгоритмов моделировании движений живых тел с учетом их сложной внутренней структуры, хотя пока таких работ мало и они реализуют лишь очень простые механические модели. Механические свойства живых тел рассмотрены в книге (Fung, 1981). Попытки анимации контактных взаимодействий упругих тел с приложениями к потребностям медицины делались в работах (Terzopoulos et al., 1987; Baraff, Witkin, 1992; Miller, et al., 2000; Zhuang, 2000). Обзоры контактных алгоритмов, применяемых в медицине, сделаны в работах (Klisch, 1999; Hirota et al., 2001).

Приведем ссылки на обзоры проблемно-ориентированных контактных алгоритмов:

по геомеханике (Moresi et al., 2002), по расчету течений со свободными подвижными границами (Floryan, Rasmussen, 1989; Shyy et al., 2001; Gillow, Howison, 2002), по межфазным границам (Tarzia, 1988; Udaykumar et al. 1999), по кавитации (Wikstrom, 2000), по моделированию поведения одежды (Baraff, Witkin, 1998). Следует также обратить внимание на *удивительные по разнообразию приложений* работы по расчету границ раздела (Sethian, 1996, 1999), которые основаны на методах функций уровня (level set function method).

**11. Алгоритмы оптимизации контактных взаимодействий.** Контактные нагрузки распределяются в общем случае неравномерно в зависимости от формы поверхностей контакта и могут иметь нежелательные пики, ухудшающие характеристики технологических процессов и сокращающие время жизни технических изделий.

Одна из первых попыток выравнивания контактных нагрузок путем оптимизации формы поверхности контакта была сделана в работе (Conry, Seireg, 1972) с использованием методов линейного программирования. Дальнейшее развитие на основе метода конечных элементов и линейного программирования эта тема получила в исследовании (Haug, Kwak, 1978), а с применением методов нелинейного программирования продолжена в работах (Cheng et al., 1988; Belegundu, Chandrupatla, 1990; Clarke, 1983; Park and Anderson, 1995;). В работах (Fancello et al., 1994, 1995) предложены целевые функции для оптимизации поверхностей контакта.

Упрощенная итерационная процедура для сглаживания пиков контактных нагрузок при постоянном объеме контактирующих тел предложена в работе (Tada, Nishihara, 1993). Дальнейшее упрощение оптимизация контакта получила в алгоритме ESO (evolutionary structural optimisation), предложенном в работах (Xie, Steven, 1993, 1997) и пригодном для широкого класса контактных оптимизационных задач.

Все упомянутые оптимизационные задачи рассматриваются для случаев очень простой реологии (линейная изотропная упругость) и геометрии (пространственно двумерные статические задачи, два контактирующих тела) и носят модельный характер. То есть это направление пока находится в стадии становления.

**12. Векторизация и распараллеливание контактных алгоритмов** При анализе контактных взаимодействий в сложных конструкциях дискретные модели имеют очень высокую размерность и для получения решения в разумное время используются векторные и многопроцессорные компьютеры. Поэтому многие работы по контакту специально посвящены вопросам векторизации и распараллеливания имеющихся контактных алгоритмов. Вопросы векторизации контактных алгоритмов рассматривали (Hallquist 1976, 1983, 1993; Бураго, 1987b; Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991; Ginsberg, Katnik, 1989).

В 80-е и 90-е годы были разработаны и испытаны параллельные компьютеры различных типов и в настоящее время наиболее подходящими для распараллеливания алгоритмов решения задач математической физики являются многопроцессорные компьютеры с локально распределенной памятью в комбинации с MIMD (Multiple instruction, multiple data) технологией вычислений см. обзоры (Родрига, 1986; Oishi, 1999). Были испытаны способы распараллеливания, ориентированные на группы узлов сетки, на группы элементов и на подобласти. Наиболее эффективным признан способ распараллеливания по подобластям (DDM - domain decomposition method), элементы которого применительно к контактным задачам можно найти в работах (Malone, 1988; Carter, 1989; Farhat, 1991,

1994, 1995; Oishi, 1999).

Фиктивные подобласти имеют перекрывающиеся границы, на которых обеспечивается непрерывность решения путем межпроцессорного обмена пограничными данными в процессе реализации итерационных методов. Одним из наиболее эффективных и удобных для распараллеливания и векторизации является итерационный метод сопряженных градиентов, вопросам реализации которого применительно к контактными алгоритмам посвящены работы (Бураго, 1978, 1979, 1987b; Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991; Yagawa, 1991, 1993; Oishi, 1999).

Рассматривавшиеся выше алгоритмы поиска зон контакта (в том числе глобальные LPOCA, NITA и локальные (пинболл, господин-слуга и др.) в исходной форме плохо приспособлены к параллельным вычислениям и их подключение значительно снижает выигрыш от использования параллельных процессоров. При распараллеливании контактная поверхность разбивается на подобласти, для расчета которых подключаются дополнительные процессоры, отличные от тех, что задействованы для расчета внутренних подобластей контактирующих тел (см. работы Hoover, 1997; Oishi, 1999). Распараллеленные контактные алгоритмы представлены также в работах (Ginsberg, Johnson, 1988; Praskacz, 1995; Malone, Johnson, 1994a, 1994b; Elsner et al, 1996; Attaway et al., 1997, 1998). Распараллеленный алгоритм расчета множественного контакта представлен в работе (Alart, Barboteu, 2001).

Наивысшее в смысле быстродействия достижение в распараллеливании контактных задач о высокоскоростных соударениях за 2001 год принадлежит американской государственной исследовательской организации Sandia National Laboratories (SNL), достигнутое при использовании распараллеленного пакета программ PRONTO на компьютере Intel Teraflor Computer (3600 процессоров). Было достигнуто быстродействие порядка 1/10 секунды на шаг по времени для задач размерностью более 10-15 миллионов трехмерных 8-узловых конечных элементов. Рассчитан ряд примеров от простых тестов до практически важной и еще недавно абсолютно безнадежной для численного решения задачи о крушении самолета с учетом деформаций составной конструкции, гидродинамики топлива (метод частиц) и деформаций грунта. В данной задаче собраны все элементы явления контакта, обсуждавшиеся выше, и самоконтакт, и множественный контакт деформируемых тел, и элементы методов сквозного счета и т.д., и т.п. Описание этого уникального расчета приведено в отчете SNL (Attaway et al., 2001).

Учитывая интенсивное развитие параллельных компьютеров, сопровождающееся изменениями в их архитектуре и математическом обеспечении, их возможную экспансию в мир персональных компьютеров можно ожидать, что проблема адаптации контактных алгоритмов к параллельным компьютерам в ближайшее время будет весьма актуальной.

Не следует, однако, переоценивать значение данного направления. Дело в том, что параллельные компьютеры пока составляют весьма малую часть имеющегося компьютерного парка и используются, как правило, в режиме удаленного доступа. Это резко увеличивает время ожидания решения и создает парадоксальную ситуацию: формально время расчета резко сокращается, а фактически время ожидания решения увеличивается из-за малой скорости передачи данных по сети и из-за возможной конкуренции, поскольку параллельные машины являются компьютерами коллективного пользования. По

сравнению с традиционным скалярным программированием распараллеливание программ требует значительно больших усилий и кардинального перепрограммирования и ревизии обычных скалярных алгоритмов. Поэтому для успешного распараллеливания требуется очень хорошая материальная база и мощная финансовая поддержка, поскольку пока только большим исследовательским центрам, выполняющим крупные государственные заказы.

При планировании работ по распараллеливанию (контактных) алгоритмов необходимо учитывать и временные факторы, а именно время жизни параллельного компьютера и его математического обеспечения, время, требующееся на разработку параллельного варианта программы и время, в течение которого параллельный компьютер является суперкомпьютером. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что скалярные (в частности, персональные) компьютеры, также быстро прогрессируют, и нередко успешно конкурируют по всем статьям со многими параллельными еще недавно "суперкомпьютерами". Например, сравнение современного персонального Pentium/4 с 5-ти летней давности параллельным "8-головым" Parcytec'ом будет не в пользу Parcytec'a.

**13. Исследования по оценке точности и сравнению контактных алгоритмов** Практически все контактные алгоритмы дают лишь приближенные решения. Важное, но пока не очень развитое направление работ по контакту посвящено исследованию точности контактных алгоритмов и априорному/апостериорному анализу ошибок численных решений. Отметим работы по оценке точности лагранжевых алгоритмов (Babushka, Rheinboldt, 1978; Babushka, Miller, 1987; Zienkiewicz, Zhu, 1987; Lee, Oden, Ainsworth, 1991; Verfurth, 1993; Lee, Oden, 1993a, 1993b; 1994; Цветкова (1995, 1996), Becker, Rannacher, 1996; Twodzydlo et al., 1997; Rannacher, Suttmeier, 1999; Bourago, 2001; Sharif, Wiberg, 2001).

Сравнительный анализ различных подходов осложняется тем, что значительное влияние на успех применения того или иного контактного алгоритма оказывает качество программной реализации и недокументируемые особенности алгоритмов. К сожалению, пока очень мало имеется работ, в которых сравнение различных подходов проводится одними и теми же авторами. Сравнения, которые выполняются в условиях одной и той же "кухни", дают более ясные и определенные результаты. Дело в том, что нередко незначительная, на первый взгляд, деталь алгоритма, не упоминаемая в статьях и отчетах, может играть решающую роль в успехе/неуспехе алгоритма в целом. Это происходит не по злому умыслу авторов, скрывающих "секрет", а чаще всего из-за обилия составляющих алгоритма и неоднозначности его возможных формулировок. Классическим образцом сравнительного анализа контактных алгоритмов может служить работа (Rider, Kothe, 1995), в которой качество численного моделирования контактных разрывов различными методами сквозного счета оценивалось на четырех тестовых задачах переноса некоторой специальным образом распределенной скалярной субстанции в заданных постоянных во времени полях скорости, описывающих простую трансляцию, вращение жесткого тела, отдельный вихрь и поле сложной деформации. Испытывались следующие четыре метода: 1) наиболее свежая версия алгоритма маркеров и ячеек, 2) метод жидкости в ячейках, 3) метод функций уровня и 4) методы улавливания скачков типа TVD и ENO.

По качеству результата от лучшего к худшему методы распределились в порядке при-

веденного перечисления. Результаты по методу непрерывного маркера были улучшены в работе (Enright et al., 2002) с помощью нового метода HPLS (Hybrid Particle Level Set method), который воплощает технику дискретных и непрерывных лагранжевых маркеров в едином алгоритме.

Среди опубликованных работ, имеющих отношение к критическому анализу контактных алгоритмов, имеется очень любопытный доклад (N. Johnson, 1996), в котором приведена ироническая коллекция типичных образцов авторской необъективности в оценках реальных достоинств имеющихся численных методов и компьютерных программ вычислительной механики:

- \* Программа решит Вашу проблему без модификаций.
- \* Руководство содержит все, что нужно, чтобы запустить программу.
- \* Стандартный графический вывод, совместимый с любыми постпроцессорами.
- \* Легко используемая программа.
- \* Исполняемая на всех компьютерах без изменений.
- \* Универсальная и точная.
- \* Покрывающая всю физику.
- \* Имеющая дружественный интерфейс.
- \* Не содержащая ошибок, а только недокументированные особенности.
- \* Вы сможете запустить программу без руководства.
- \* Метод был впервые разработан здесь.”

Авторы обзора вполне разделяют скепсис Н. Джонсона. Уже сам тот факт, что одновременно сосуществует великое множество контактных алгоритмов, говорит о том, что они не идеальны. Приводимые в статьях самооценки предлагаемых алгоритмов и результатов надо воспринимать очень осторожно.

**Заключение.** К настоящему времени мировая литература по численным методам расчета контактных взаимодействий деформируемых тел насчитывает уже сотни наименований работ, опубликованных за последние 3-4 десятилетия. Для обзора были отобраны только характерные работы, посвященные именно разработке алгоритмов. Если бы в обзор были включены еще и исследования, посвященные изучению физики контакта и решению отдельных задач, то счет работ пошел бы уже на тысячи, а объем обзора превысил бы разумные рамки.

Представленный обзор рисует впечатляющую картину исследований по численному моделированию контактных взаимодействий, позволяет получить представление о возможностях, предоставляемых контактными алгоритмами для исследований явления контакта. Обзор может быть использован как путеводитель по контактными алгоритмам и облегчить выбор подходящего алгоритма, оценку новизны и подбор литературы для изучения и цитирования.

Несмотря на обилие предложенных контактных алгоритмов, их основные идеи вполне обозримы и поддаются классификации. Одна из возможных классификаций была представлена в данном обзоре. Она не оптимальна, но продиктована сортируемым материалом.

Авторы искренне надеются, что специалисты найдут в данном обзоре много неожиданных, интересных и полезных ссылок на имеющиеся работы по контактными алгорит-

мам.

Работа поддерживалась Российским Фондом Фундаментальных Исследований по грантам 01-01-00659 и 01-00-00173.

Москва

Поступила  
20.05.2002

## References

- [1] Аганин А.А., Кузнецов В.Б. Метод консервативной интерполяции интегральных параметров ячеек произвольных сеток. Динамика оболочек в потоке. // Труды семинара. Казань: Казанский физ.-тех. инст. 1985, Вып. 18, С. 144-160.
- [2] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М., Наука, 1983, 488 с.
- [3] Александров, В.М. и Ворович, И.И. (Ред.) Механика контактных взаимодействий, М. Наука, 2001, 600 с.
- [4] Аннин Б.Д., Садовская О.В., Садовский В.М. Численное моделирование косоугольного удара пластин в упругопластической постановке // Физическая мезомеханика, 2000, Т. 3, N. 4, С. 23-28.
- [5] Аннин Б.Д., Садовская О.В., Садовский В.М. Численное моделирование волнообразования при сварке взрывом в упругопластической постановке // Матер. Межд. конф. "Синергетика 2000", Комсомольск-на-Амуре, 2000, С. 52-54.
- [6] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел, М., Наука, 1991, 176 С.
- [7] Астанин В.В., Галиев Ш.У., Иващенко К.В. Особенности деформирования и разрушения алюминиевых преград при взаимодействии по нормали со стальным ударником. Проблемы прочности, 1988, N. 12, с. 52-58.
- [8] Анучина Н.Н., Бабенко К.И., Годунов С.К., Дмитриев Н.А., Дмитриева Л.В., Дьяченко В.Ф., Забродин А.В., Локуцкий О.В., Малиновская Е.В., Подливаев И.Ф., Прокопов Г.П., Софронов И.Д., Федоренко Р.П. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики. М., Наука, 1979.
- [9] Баженов В.Г., Зефирова С.В., Петров М.В. Численное решение задач нестационарного контактного взаимодействия упругопластических оболочек вращения при больших деформациях. // Прикл. проблемы прочности и пластичности, Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности, Всес. межвуз. сб. , Горьк. ун-т, Горький, 1984, с.54-59.



- [10] Баженов В.Г., Кибец А.Г., Садырин А.И. О модификации схемы Уилкинса численного решения трехмерных динамических задач // Прикл. пробл. прочн. и пластичности. Алгоритмизация и программное обеспечение задач прочности. Всес. межвуз. сб., Горьковский ун-т, 1986, С. 14-19.
- [11] Баженов В.Г., Кибец А.Г. Численное моделирование нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечных элементов // Известия РАН, МТТ, 1994, N. 1, С. 52-57.
- [12] Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1995, N. 2, с. 20-26.
- [13] Баженов В.Г., Кибец А.И., Кибец Ю.И., Цветкова И.Н. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия узлов составных конструкций в трехмерных задачах динамики // Тезисы докл. всерос. симп. "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред, М., Моск. Авиаци. Ин-т, 1995.
- [14] Баженов В.Г., Зефирова С.В., Цветкова И.Н. Численное решение задач нестационарного контактного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Численное моделирование физикомеханических процессов: Межвуз. сб., М., Изд-во "Товарищество научных изданий КМК", 1995.
- [15] Баничук Н.В. Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями // Инж. журнал, МТТ, 1967, N. 1, С. 138-142.
- [16] Баничук Н.В., Картвелишвили В.М., Черноушко Ф.Л. Численное решение осесимметричной задачи о вдавливании штампа в упругопластическую среду, // Известия АН СССР, МТТ, 1972, N. 1.
- [17] Баничук Н.В., Черноушко Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления, М.: Наука, 1973, 236 с.
- [18] Бейкер М., Кокс П., Уэстайн П. и др. Взрывные явления, Оценки и последствия, в 2-х томах, М., Мир, 1986, т. 1 - 319 с., т. 2 - 384 с.
- [19] Белов Н.Н., Демидов В.Н., Ефремова Л.В. и др. Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений // Известия вузов, Физика, 1992, N. 8, С. 5-48.
- [20] Белоцерковский О.М. (Ред.) Численные методы в механике жидкостей, М., Мир, 1973, 304 с.
- [21] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике, М., Наука, 1982.

- [22] Белоцерковский О.М. Численные методы в механике сплошных сред, М., Наука, 1984, 519 с.
- [23] Бруд Г. Расчеты взрывов на ЭВМ, М., Мир, 1976, 270 с.
- [24] Бураго Н.Г. Численный метод решения физически и геометрически нелинейных задач деформирования тел сложной формы // VII Всес. конф. по прочности и пластичности, Тез. докл., Горький, 1978, С. 24-25.
- [25] Бураго Н.Г. Формулировка уравнений механики сплошной среды в подвижных адаптивных координатах // Числ. методы в меха тв. деф. тела, М., ВЦ АН СССР, 1984, С. 32-49.
- [26] Бураго Н.Г. Моделирование контакта упругопластических тел // Материалы VI Всероссийского Съезда по теоретической и прикладной механике, Ташкент, 1986, с. 142-143
- [27] Бураго Н.Г. Метод расчета контактных взаимодействий упругопластических тел // Труды 8-го Всероссийского Симпозиума по распространению упругих и упругопластических волн, Новосибирск, "Наука", 1987, с. 18-25.
- [28] Бураго Н.Г. О векторном варианте метода конечных элементов на вложенных сетках и векторизации КЭ-алгоритмов решения задач теории упругости и пластичности // Численная реализация физико-механических задач прочности: 2 Всесоюз. конф., Горький, 1987, с. 18-19.
- [29] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ АСТРА // Препринт Института проблем механики АН СССР, N. 326, 1988, с. 1-63.
- [30] Бураго Н.Г. Численное моделирование взрывов в геоматериале // Труды Всероссийской конф. "Деформации и разрушение горных пород", Фрунзе, ИЛИМ, 1990, с. 49-56.
- [31] Бураго, Н.Г. и Кукуджанов, В.Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов // Вычислительная механика деформируемого твердого тела, М.: Наука, 1991, вып. 2, стр. 78-122.
- [32] Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н. Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН, МТТ, 2000, N.6, с. 4-15.
- [33] Н.Г.Бураго, В.Н.Кукуджанов Расчет процессов континуального разрушения термоупругопластических тел // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Межвуз. сб., М., Наука, 2001, вып. 63, с. 41-48.

- [34] Бураго Н.Г., Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Численное моделирование континуального разрушения упругопластических тел // Науч. сессия МИФИ-2002, научно-техн. конф. "Науч.-инновац. сотрудничество" Сб. науч. трудов, ч.1, М.:МИФИ, 2002, с. 95-96.
- [35] Быковских А.М., Кошур В.Д., Мартьянов В.А., Филимоненко И.В. Моделирование динамических процессов удара и проникания // Числ. методы реш. задач теории упруг. и пластич., Тр. 13 межресп. конф., Новосибирск, 1995, С. 30-35.
- [36] Бычек (Садовкая) О.В., Садовский В.М. К исследованию динамического контактного взаимодействия деформируемых тел // ПМТФ, 1998, Т. 39, N. 4, С. 167-173.
- [37] Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел // Прикладная механика, 1972, 8, N. 8, с. 4-27.
- [38] Вовкушевский А.В. Вариационная постановка и методы решения контактной задачи с трением при учете шероховатости поверхности // Известия РАН, МТТ, 1991, N. 3.
- [39] Галахов М.А., Усов П.П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения, М., Наука, 1990, 280 с.
- [40] Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления, // ПММ, 1945, Т. 9, Вып. 5, с. 413-424.
- [41] Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости, М., Гостехиздат, 1953, 264 с.
- [42] Галин Л.А. (ред.) Развитие теории контактных задач в СССР, М., Наука, 1979, 493 с.
- [43] Галин Л.А. (ред.) Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М., Наука, 1980, 304 с.
- [44] Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Физматгиз, 2000, 248 с.
- [45] Глаголева Ю.П., Жогов В.М., Кирьянов Ю.Ф. и др. Основы методики "Медуза". // Числ. методы МСС, Новосибирск, 1972, т. 3, N. 2.
- [46] Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Мат. сборник, 1959, 47 (89), No. 3, 271-306.
- [47] Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // ЖВМиМФ, 1972, Т. 12, N. 2, с. 429-440.
- [48] Годунов, С.К., Забродин, А.В., Иванов, М.Я., Крайко, А.Н., Прокопов, Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики, Москва, Наука, 1976.

- [49] Гольдштейн Р.В., Зазовский А.Ф., Спектор А.А., Федоренко Р.П. Решение пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением вариационным методом // Препринт №. 134, Ин-т проблем механики АН СССР, М., 1979.
- [50] Гольдштейн Р.В., Спектор А.А. (1986) Вариационные методы решения и исследования пространственных контактных и смешанных задач с трением // Механика деформируемого тела, М., Наука, 1986, с. 52-73.
- [51] Горельский, В.А., Хорев И.Е., Югов Н.Т. Численное моделирование трехмерных задач внедрения и разрушения цилиндров при несимметричном нагружении // Физика горения и взрыва, 1987, N. 1, С. 71-74.
- [52] Горельский, В.А., Зелепугин, С.А., Сидоров, В.Н. Численное исследование трехмерной задачи взаимодействия с высокопрочной преградой профилированного ударника с наполнителем // Проблемы прочности, 1992, N.1, с.47-50.
- [53] Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами, М., Наука, Физматлит, 1995, 352 с.
- [54] Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарные динамические контактные задачи // Механика контактных взаимодействий, под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова, Москва, Физматгиз, 2001, с. 349-416.
- [55] Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии, М., Машиностроение, 1988, 256 С.
- [56] Горячева И.Г., Чекина О.Г. Механика дискретного контакта // Механика контактных взаимодействий, под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова, Москва, Физматгиз, 2001, с. 418-437.
- [57] Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение, 1976, 200 с.
- [58] Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек, М., Машиностроение, 1980, 416 с.
- [59] Григорян С.С. (ред.) Динамика удара. М.: Мир, 1985, 296 с.
- [60] Григорьев В.В. Метод конечных элементов в решениях задач динамики упругопластических сред // Дисс. канд. тех. наук, Институт сейсмологии АН Каз. ССР, Алмата, 1986.
- [61] Гриднева В.А., Корнеев А.И., Трушков В.Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы // Изв. АН СССР, МТТ, 1980, N. 1, с. 146-157.

- [62] Гриднева В.А., Немирович-Данченко М.М. Метод разделения точек сетки для численного расчета разрушения твердых тел // Томский Государственный Ун-т, Томск, 1983, Рук. депонирована в ВИНТИ, N. 3258-83деп.
- [63] Гулидов А.И. и Фомин В.М. Модификация метода Уилкинса для решения задач соударения тел // Препринт ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.
- [64] Гулидов А.И. Проникание твердого ударника в деформируемую преграду. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности // Материалы VI Всес. конф., Новосибирск, 1980, с. 59-69.
- [65] Гулидов А.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. Алгоритм перестройки разностной сетки при численном решении задач соударения с образованием трещин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Матер. VII Всес. конф., Новосибирск, 1982, с. 182-192.
- [66] Гулидов А.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. Численное моделирование задачи удара двух тел с учетом разрушения // Численная реализация физико-механических задач прочности, Тез. докл. - Горький, 1983, с. 60.
- [67] Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах // Препринт ИТПМ СО АН СССР N. 12-87, 1987, 37 с.
- [68] Гулидов А.И., Шабалин И.И. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности // Материалы IX Всес. конф., Новосибирск, 1988, с. 70-75.
- [69] Гулидов А.И., Шабалин И.И. Метод свободных элементов // Препринт ИТПМ СО РАН N. 9-94, Новосибирск, 1994, 32 с.
- [70] Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численное моделирование процесса проникания стержней в массивные мишени методом свободных элементов // Числ. методы реш. задач теории упруг. и пластич., Тр. 13 межресп. конф., Новосибирск, 1995, с. 68-76.
- [71] Давыдов В.С., Чумаченко Е.Н. Метод реализации модели контактного взаимодействия в МКЭ при решении задач о формоизменении сплошных сред // Известия РАН, МТТ, 2000, N. 4, с. 53-63.
- [72] Давыдов Ю.М. Численное исследование тейлоровской неустойчивости в нелинейном приближении // Числ. методы механ. сплошной среды, Новосибирск, Наука, 1978, 9, N. 3, с. 67-69.
- [73] Давыдов Ю.М., Пантелеев М.С. Развитие трехмерных возмущений при релей-тейлоровской неустойчивости // ПМТФ, 1981, N. 1, с. 117-122.

- [74] Дьяченко В.Ф. Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными // ЖВМ и МФ, 1965, 5, N. 4, с. 680-688.
- [75] Дюво Ж. и Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике, М., Наука, 1980, 383 с.
- [76] Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Решение нестационарных задач динамики упругопластической среды методом подвижных сеток // Численные методы в механике твердого деформируемого тела, М., ВЦ АН СССР, 1984, с. 65-86
- [77] Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Математическое моделирование задач импульсного взаимодействия и разрушения упругопластических тел // Ин-т проблем механики АН СССР, препринт No. 280, Москва, 1986, с. 1-67.
- [78] Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, М., Мир, 1975, 541 с.
- [79] Зернин М.В. Проблемы и перспективы построения эффективного конечноэлементного описания течения масла в зазоре опор жидкостного трения с учетом неоднородного распределения температур и деформаций поверхностей // Проблемы трибологии, 1997, Часть 1. - N. 1, С. 73-78. Часть 2. - N. 2, С. 57-64.
- [80] Зернин М.В. Дискретное моделирование повреждений подшипников скольжения с учетом комплекса воздействий и критериев отказа, Сообщение 2. Конечноэлементные модели течения смазывающей жидкости // Трение и износ, 1997, Т. 18, N. 5, С. 603-611.
- [81] Зернин М.В., Морозов Е.М. Механика разрушения тел при контактном взаимодействии // Механика контактных взаимодействий, под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова, Москва, Физматгиз, 2001, с. 624-639.
- [82] Зернин М.В., Бабин А.П., Бурак В.Ю. и др. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики "контактной псевдосреды" // Изв. РАН, МТТ, 2002, в печати.
- [83] Иващенко К.Б. Расчет контактных границ в задачах взаимодействия деформируемых тел // Динамические задачи механики сплошной среды, Тез. докл. регион. конф., Дивноморск, 1988, КубГУ, Краснодар, 1988, с. 59-61.
- [84] Иващенко К.Б. Алгоритм расчета контактных границ при взаимодействии деформируемых твердых тел // Проблемы прочности, 1989, N.2, с. 79-82.
- [85] Калмыков С.Г., Кукуджанов В.Н. Метод потоков и корректирующих маркеров (пикм - метод) для численного моделирования высокоскоростных соударений твердых тел // М., ИПМех РАН, Препринт 529, 1993, с. 1-37.
- [86] Квитка А.Л., Ворошко П.П., Бобрицкая С.Д. Напряженно-деформированное состояние тел вращения, Киев, Наукова думка, 1977, 208 с.

- [87] Киселев А.Б. Развитие метода Уилкинса для решения трехмерных задач соударения деформируемых тел // Взаимодействие волн в деформируемых средах, М., МГУ, 1984, с. 87-100.
- [88] Киселев А.Б. К расчету трехмерного соударения упругопластического стержня с жесткой преградой // Вест. МГУ, Математика, механика, 1988, N. 2, с. 30-36.
- [89] Киселев А.Б. Численное моделирование в трехмерной постановке наклонного пробивания тонких преград, Численное решение задач волновой динамики, // Мат. исследования, 1989, вып. 108, Кишинев, Штиинца, с. 19-26.
- [90] Киселев А.Б., Кабак Н.Е. Метод построения расчетных сеток с выделением внутренних контактных границ // Моделирование в механике, 1990, Т. 4, N. 5, с. 96-110.
- [91] Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластической среды с конечными деформациями // Сб. по численным методам в механике деформируемого твердого тела, М., ВЦ АН СССР, 1978, с. 84-121.
- [92] Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Соударение жесткого цилиндра со слоистой упруго-пластической преградой // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Материалы VI Всес. конф., Новосибирск, 1980, с. 105-120.
- [93] Кондауров В.И., Петров И.Б. Численное исследование процесса внедрения жесткого цилиндра в упругопластическую преграду // Числ. методы в мех. тверд. деформир. тела, М., 1984, с. 115-132.
- [94] Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую среду // ПМТФ, 1984, No. 4, с. 132-139.
- [95] Кондауров В.И. Тензорная модель континуального разрушения и длительной прочности упругих тел // Изв. РАН, МТТ, 2001, N. ???
- [96] Корнеев А.И., Николаев А.П. Расчет упругопластического течения при ударе методом конечных элементов // Томский Гос. Ун-т, 1980, С. 1-10. Деп. в ВИНТИ N. 2137-80.
- [97] Корнеев А.И., Николаев А.П., Шиповский И.Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VII Всес. конференции, Новосибирск, 1982, с. 122-129.
- [98] Корнеев А.И., Шугалев В.Б. Численный расчет трехмерного напряженного состояния стержня при ударе частью боковой поверхности // Изв. АН СССР, МТТ, 1986, N. 1, с. 189-192.

- [99] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел, Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2000, 261 с.
- [100] Кошур В.Д., Мартьянов С.А. Однородный, сквозной, симметричный алгоритм численного моделирования динамических контакт-ных взаимодействий деформируемых тел // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. XII Всесоюз. конф. Новосибирск, ИТПМ СО РАН, 1992, с. 142-147.
- [101] Кравчук А.С., Васильев В.А. Численные методы решения контактной задачи для линейных и нелинейно упругих тел конечных размеров // Прикл. мех., 1980, Т. 16, N. 6, С. 9-15.
- [102] Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ, 1980, Т. 44, Вып. 1, С. 122-129.
- [103] Кравчук А.С. Решение некоторых пространственных контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Трение и износ, 1981, Т. 2, N. 4, С. 589-595.
- [104] Кравчук А.С. Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ, 1982, Т. 43, Вып. 2, С. 283-288.
- [105] Кравчук А.С., Ахунджанов Е.П. Численная реализация вариационного подхода к решению контактных задач теории упругости методом потенциалов // Расчеты на прочность, М.: Машиностроение, 1983, Вып. 25, С. 12-18.
- [106] Кравчук А.С. (1988) Решение нелинейных контактных задач с учетом трения вариационными методами // Механика и научно-технический прогресс, Т. 3, - Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988, с. 154-169.
- [107] Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М., Моск. гос. акад. приборостроения и информатики, 1997, 339 с.
- [108] Кравчук А.С. Метод вариационных неравенств в контактных задачах // Механика контактных взаимодействий, под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова, Москва, Физматгиз, 2001, с. 93-115.
- [109] Кроули У. FLAG - свободно-лагранжев метод для численного моделирования гидродинамических течений в двух измерениях // В кн.: Численные методы в механике жидкостей. М., Мир, 1973, С. 135-145.
- [110] Кубенко В.Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев, Наукова Думка, 1981, 159 с.
- [111] Кубенко В.Д. Ударное взаимодействие тел со средой (Обзор) // Прикладная механика, 1997, т. 33, N. 12, с. 3-29.



- [112] Кузьменко А.Г. Основные уравнения теории упругости и пластичности и метод конечного элемента // Тула: Тульский политехнический ин-т, 1980, 100 с.
- [113] Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики, 1985, Т. 8, Н. 4, с. 25-65.
- [114] Кукуджанов В.Н., Сантаойя К. Термодинамика вязкопластических сред с внутренними параметрами // Известия РАН, МТТ, 1997, No. 2, с. 115-126.
- [115] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений, М., Физматгиз, 2001, 608 с.
- [116] Майнчен Д., Сак С. Метод расчета "Тензор" // Вычислительные методы в гидродинамике, Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг (Ред.), М., Мир, 1967, с. 185-211.
- [117] Манжиров А.В. Контактные задачи для неоднородных стареющих тел // В кн.: Механика контактных взаимодействий, под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова, Москва, Физматгиз, 2001, с. 549-565.
- [118] Манжиров А.В. (2001b) Контактные задачи механики наращиваемых тел // Механика контактных взаимодействий, под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова, Москва, Физматгиз, 2001, с. 607-621.
- [119] Мейдер Ч. Численное моделирование детонации, М., Мир, 1985, 384 с.
- [120] Мелещенко Н.Г. К вопросу расчетной оценки условий работы стыковых соединений двигателей // Тр. Центрального научно-исслед. дизельного ин-та, 1978, Вып. 73, с. 31-36.
- [121] Меньшиков Г.П., Одинцов В.А., Чудов Л.А. Внедрение цилиндрического ударника в конечную плиту // Известия АН СССР, МТТ, 1976, N. 1, с. 125-130.
- [122] Мержиевский Л.А., Ресиянский А.Д. Численное моделирование пробивания преград цилиндрическим ударником // Механика быстропотекающих процессов, - Новосибирск, 1984, с. 86-91.
- [123] Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения, М., Наука, 1980, 254 с.
- [124] Морозов Н.Ф., Смирнов В.И., Петров Ю.В. Об эрозионном разрушении твердых тел // Механика контактных взаимодействий, под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова, Москва, Физматгиз, 2001, с. 640-650.
- [125] Никитин И.С. Динамика слоистых блочных сред с проскальзыванием и трением // М., Институт проблем механики АН СССР, 1989, Препринт N. 366, 1989, с. 1-43.

- [126] Никишков Г.П., Пашнин В.Г. Расчет напряженного состояния контактирующих тел с использованием изопараметрических элементов // Прочность материалов и элементов конструкций атомных реакторов, Сб. науч. трудов, Московский инженерно-физический ин-т, М.: Энергоатомиздат, 1985, С. 38-43.
- [127] Никишков Г.П. (1988) Программный комплекс для решения задач механики деформируемого твердого тела // М.: Московский инженерно-физический ин-т, 1988, 84 с.
- [128] Николс, Б. Дальнейшее развитие метода маркеров и ячеек для течений несжимаемой жидкости // Численные методы в механике жидкостей, ред. О.М. Белоцерковский, М., Мир, 1973, с. 165-173.
- [129] Нох В.Ф. СЭЛ - совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике, М., Мир, 1967, с. 128-184.
- [130] Няшин Ю.И., Трусов П.В., Чернопазов С.А. К решению контактных задач упруго-пластичности для неоднородных деформируемых тел // Тез. докл. II Всес. конф.: Механика неоднородных структур, Львов, 1987, с. 227.
- [131] Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Докл. АН СССР, 1960, 135, N.5, 1054-1057.
- [132] Пашнин В.Г., Сапунов В.Т. Контактное взаимодействие топливного сердечника с оболочкой ТВЭЛА // Деформация и разрушение материалов и элементов конструкций ЯЭУ, Сб. науч. трудов, каф. физики прочности, Московский инженерно-физический ин-т, М.: МИФИ, 1993, с. 38-47.
- [133] Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // ЖВМиМФ, 1984, Т. 24, с. 722-739.
- [134] Подгорный А.М., Гонтаровский П.П., Марченко Г.А. и др. Некоторые прикладные упругоэластические задачи смешанного типа. Харьков, 1976, 43 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; N. 36).
- [135] Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю. И. Большие упругоэластические деформации. М.: Наука, 1986, 232 с.
- [136] Поздняков А.А. Метод расчета контакта // М., Труды МФТИ, 1979.
- [137] Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций, Л., Судостроение, 1974, 344 с.
- [138] Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1980.

- [139] Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах М.: Наука, 1979, 319 с.
- [140] Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения, Киев, Наукова Думка, 1982.
- [141] Рвачев В.Л. (редактор) Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций // Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др.; Отв. ред. Рвачев В.Л., Ин-т проблем машиностроения, Киев, Наукова думка, 1989, 232 с.
- [142] Реснянский А.Д., Мержиевский Л.А. Применение метода подвижных сеток в задачах разрушения твердых тел // Динамика сплошной среды, 1984, Вып. 66, с. 150-157.
- [143] Роговой А.А., Вариационная постановка упруго-пластической задачи при больших деформациях в эйлерово-лагранжевых координатах // Напряжения и деформации в конструкциях и материалах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985, с. 77-83.
- [144] Родрига Г. (редактор) Параллельные вычисления. М.: Наука, 1986, 376 с.
- [145] Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. М., Энергия, 1971, 214 с.
- [146] Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам, М., Стройиздат, 1977, 129 с.
- [147] Розин Л.А., Смирнов М.С. Решение контактной задачи теории упругости с податливостью в односторонних связях // Известия вузов, Строительство, 2000, N. 5.
- [148] Рузанов А.И., Романычева Л.К., Волков И.А. Построение расчетных моделей и численный анализ разрушения твердых тел при импульсных нагрузках, Механика быстройпротекающих процессов, Новосибирск, 1984, с. 98-105.
- [149] Сагомоян А.Я. Динамика пробивания преград. М. Изд-во МГУ, 1980, 221 с.
- [150] Садырин А.И. К определению контактных усилий при соударении упругопластических тел // Прикл. проблемы прочности и пластичности, Всес. межвуз. сб., вып. 3, Горьк. ун-т, Горький, 1976, с. 70-73.
- [151] Садырин А.И. Конечно-разностная аппроксимация граничных условий в динамической контактной задаче // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Статика и динамика деформируемых систем, Всес. межвуз. сб., Горьковский ун-т, Горький, 1979.
- [152] Садырин А.И. Моделирование динамического разрушения деформируемых тел при ударных контактных взаимодействиях // Прикладные проблемы прочности и пластичности, ТНИ КМК, М., 1995, с. 132-141.

- [153] Садовская О.М. О численной реализации условий динамического контактного взаимодействия с учетом трения // Матер. Всес. семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань, Унипресс, 1998, с. 63-64.
- [154] Садовская О.М. О численном исследовании соударения упругопластических тел с учетом конечных поворотов // Динамика сплошной среды, Сб. науч. трудов, Вып. 114, Математические проблемы механики сплошных сред, Новосибирск, 1999, с. 196-199.
- [155] Садовская О.М. Численное решение динамических контактных задач // Материалы конференции молодых ученых ИВМ СО РАН, Красноярск, 1999, с. 42-54.
- [156] Садовский В.М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упруго-пластических тел // ПММ, 1991, Т. 55, Вып. 6, с. 1041-1048.
- [157] Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред, М., Наука-Физматлит, 1997, 208 с.
- [158] Сажин В.В., Симонов И.В. Соударение упругих и упругопластических прямоугольников под малым углом // М., Институт проблем механики СССР, препринт N. 300, 1987, с. 1-57.
- [159] Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМиМФ, т.5, N.5, 1965, С.816-827
- [160] Симонов И.В. Контактные задачи расклинивания упругих тел // В кн. "Механика контактных взаимодействий", под ред. В.М. Александрова и И.И. Воровича, Москва, Физматгиз, 2001, с. 654-667.
- [161] Угодчиков А.Г., Коротких Ю.Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек, К., Наукова думка, 1967, 219 с.
- [162] Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике, М.: Мир, 1967, с. 212-263.
- [163] Федоренко Р.П. Метод численного решения пространственных задач качения с проскальзыванием и сцеплением // Препринт N. 158, Ин-т прикладной математики АН СССР, М., 1979.
- [164] Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости, М., Мир, 1974, 159 с.
- [165] Фомин В.М., Яненко Н.Н. Численное моделирование задач высокоскоростного взаимодействия тел // Матер. симп. "Нелинейные волны деформации", Т. 2, Таллин, 1978, с. 179 - 182.
- [166] Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999, 600 с.

- [167] Фукс И.И. Об одном методе численного решения двумерных динамических контактных задач упругопластических тел // Прикл. проблемы прочности и пластичности, Всес. межвуз. сб., вып. 3, Горьк. ун-т, Горький, 1976, с. 78-81.
- [168] Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейке для задач гидродинамики, Вычислительные методы в гидродинамике // М.: Мир, 1967, с. 316-342.
- [169] Цветкова И.Н. Анализ точности алгоритмов контактного взаимодействия в трехмерных задачах динамики упруго-пластических тел // Вестник Нижегород. Гос. Ун-та, 1995, с. 93-95.
- [170] Цветкова И.Н. Численный анализ нестационарного наклонного проникания стального цилиндра в алюминиевую пластину // Тез. докл. 22-й науч.-тех. конф. "Проектирование систем", М., Моск. Гос. Техн. Ун-т им. Баумана, 1995.
- [171] Чарахчян А.А. Сеточный генератор барьерного типа для задач с подвижными границами // Труды семинара "Построение расчетных сеток: теория и приложения" (С.А.Иваненко и В.А.Гаранжа, ред.) Москва, Вычислительный центр РАН, 2002, с. 195-206.
- [172] Шевченко Ю.Н., Пискун В.В., Савченко В.Г. Решение осесимметричной пространственной задачи термопластичности на ЭЦВМ типа М-220, Киев, Наукова думка, 1975, 108 с.
- [173] Addessio F.L., Carroll D.E., Dukowicz J.K., Harlow F.H., Johnson J.N., Kaskiwa B.A., Maltrud M.E. and Ruppel H.M. CAVEAT: A computer code for fluid dynamics problems with large distortion and internal slip // Los Alamos National Laboratory, Report UC-32, 1988.
- [174] Alart P. and Curnier A. A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems prone to Newton like Solution Methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1991, v. 92, p. 353-375.
- [175] Aliabadi M.H. and Brebbia C.A. Computational Methods in Contact Mechanics // Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston, 1993.
- [176] Aliabadi M.H. Boundary element formulations in fracture mechanics. // AMR, 1997, v. 50(2), p. 83-96.
- [177] Amsden A.A. and Harlow F.H. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations. // J. Comput. Phys., 1970, v. 6, p. 322.
- [178] Aoki T. Multi-dimensional advection of CIP (cubic-interpolated propagation) scheme. // CFD J., 1995, v. 4, p. 279.
- [179] Argyris J.H. and Doltsinis J.S. On the Natural Formulation and Analysis of Large Deformation Coupled Thermomechanical Problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1981, v. 25, p. 195-253

- [180] Armero F. and Petocz E. A New Dissipative Time-Stepping Algorithm for Frictional Contact Problems: Formulation and Analysis, // UCB/SEMM Report 97/13, University of California at Berkeley, 1997.
- [181] Armero F. and Petocz E. Formulation and Analysis of Conserving Algorithms for Frictionless Dynamic Contact/Impact Problems, // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1998, v. 158, p. 269-300.
- [182] Armero F. and Petocz E. A New Dissipative Time-Stepping Algorithm for Frictional Contact Problems: Formulation and Analysis // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1999, v. 179, p. 151-178.
- [183] Asano N. A finite element method applicable to elasto-impact contact structures // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ., 1982, No. 17, p. 39-54.
- [184] Asano, N. An approximate hybrid type of virtual work principle for two elastoimpact bodies // Bulletin of JSME, 1983, v. 26, p. 1849-1856.
- [185] Asano N. A new dynamic zooming method for elastoimpact contact stress analysis // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ., 1984, No. 19, p. 51-64.
- [186] Asano N. A study on efficient condensation methods for elastoimpact contact stress analysis using finite element method // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ., 1984,, No. 19, p. 65-79.
- [187] Asano N. Virtual work principles and their subsidiary conditions for two elastoimpact contact bodies // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ., 1984, No. 19, p. 81-97.
- [188] Asano N. Virtual work principle for two elastoimpact bodies in separate state and formulation of finite element method // Mem. Fac. Eng. Tamagawa Univ., 1984, No. 19, p. 99-114.
- [189] Asano N. A virtual work principle using penalty function method for impact contact problem of two bodies // Trans. of JSME, 1985, A51, No. 467, p. 1863-1898.
- [190] Asano N. A virtual work principle using penalty function method for impact contact problems of two bodies // Bulletin of JSME, 1986, v. 29, No. 249, p. 731-736.
- [191] Asano N. A hybrid type of virtual work principle for impact contact problems of two bodies // Bulletin of JSME, 1986, v. 29, No. 252, p. 1679-1684.
- [192] Asano N. A penalty function type of virtual work principle for impact contact problems of two bodies // Bulletin of JSME, v. 29, 1986, 3701-3709.
- [193] Attaway S., Barragy T., Brown K., Gardner D., Hendrickson B., Plimpton S.J., Vaughan C. Transient Solid Dynamics Simulations on the Sandia/Intel Teraflop Computer // Gordon Bell finalist paper, in Proc of SuperComputing '97, San Jose, CA, November 1997. Available at <http://www.cs.sandia.gov/~sjplimp/main.html>

- [194] Attaway S.W., Hendrickson B.A., Plimpton, S.J., Gardner, D.R., Vaughan, C.T., Brown, K.H., Heinstein M.W. A Parallel Contact Detection Algorithm for Transient Solid Dynamics Simulations Using PRONTO3D // *J. Comput. Mech.*, 1998, v. 22, p. 143-159.
- [195] Attaway S.W., Barragy E.J., Brown K.H. et al. Transient Solid Dynamics Simulations on the Sandia/Intel Teraflop Computer // Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2001, Report NM 87185-0437. Available at <http://www.cs.sandia.gov/~sjplimp/main.html>
- [196] Babushka I. and Rheinboldt W. Error estimates for Adaptive Finite Element Computations // *J. Num. Analysis*, 1978, v.15, p. 736-754.
- [197] Babushka I. and Miller A. A feedback finite element method with a posteriori error estimation: Part 1. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1987, v. 61, p. 1-40.
- [198] Baraff D. and Witkin A. Dynamic simulation of non-penetrating flexible bodies // *Proceedings of SIGGRAPH 92, Computer Graphics*, 1992, v. 26, No. 2, p. 303-308.
- [199] Baraff D., and Witkin A., Large steps in cloth simulation // *Proceedings of SIGGRAPH 98, Computer Graphics, Annual Conference Series*, 1998, p. 43-54.
- [200] Bartold F. J. and Bischoff D. Generalization of Newton type Methods to Contact Problems with Friction // *J. Mech. Theor. Appl.*, Special issue: Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, 1988, p. 97-110.
- [201] Bass J.M. Three dimensional finite deformations rolling contact of a hyperelastic cylinder: formulation of the problem and computational results // *Computers and Structures*, 1987, v. 26, p. 991-1004.
- [202] Bathe K.J. and Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1985, v. 21, p. 65-88.
- [203] Bathe K.J. and Chaudhary A. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimesional contact problems with friction // *Computers and Structures*, 1986, v. 24, p. 855-873.
- [204] Bathe K.J. and Mijailovich S.S. Finite-element analysis of frictional contact problems // *J. de Mecanique Theorique et Appliquee*, 1988, v. 7, p. 31-45.
- [205] Bathe K.J., Zhang H., Wang M.H. Finite element analysis of incompressible and compressible flows with free surfaces and structural unteractions // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1995, v. 56, p. 193-213.
- [206] Bathe K.J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, EngleWood Cliffs, NJ, 1996.
- [207] Bathe K.J. and Bouzinov P.A. On the constraint function-method for contact problems // *Computers and Structures*, 1997, v. 64, p. 1069-1085.

- [208] Batra R.C. Rubber-covered balls - the non-linear elastic problem // J. Appl. Mech., 1980, v. 47, p. 82-86.
- [209] Batra R.C. Quasistatic indentation of a rubber-covered roll by a rigid roll // Int. J. Numer. Meth. Engng., 1981, v. 17, p. 1823-1833.
- [210] Bechmann D., Space deformation models survey // Computer & Graphics, 1994, v. 18(4), p. 571-586.
- [211] Becker R., Rannacher R. A Feed-Back Approach to Error Control in Finite Element Methods: Basic Analysis and Examples, // EAST-WEST J. Num. Math. 1996, v. 4, p. 237-264.
- [212] Belytschko T., Kennedy J.M. and Lin J.I. Three-dimensional penetration computation // Struct. Mech. React. Technol., 1987, V.B., p. 83-88.
- [213] Belytschko T. and Lin J.I. A three dimensional impact-penetration algorithm with erosion // Computers and Structures, 1987, v. 25, p. 95-104.
- [214] Belytschko T. and Lin J.I. A three dimensional impact-penetration algorithm with erosion // Int. J. Impact Engng., 1987, v. 5, p. 111-127.
- [215] Belytschko T., Wong B.L. and Plaskacz E.J. Fission-fusion adaptivity in finite elements for nonlinear dynamics of shells // Computers and Structures, 1989, v. 33, p. 1307-1323.
- [216] Belytschko T. and Neal M.O. Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty Projection and Lagrangian Methods // In: L.E. Schwer, N.J. Salamon and W.K. Liu, eds., Proc. Symp. on Comput. Techniques for impact, Penetration and Perforation of Solids, ASME, Winter Annual Meeting, San Francisco, CA, 1989, AMD-Vol. 103.
- [217] Belytschko T. and Neal M.O. Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods // Int. J. Num. Meth. Engrg., 1991, v. 31, p. 547-572.
- [218] Belytschko T. and Yeh L.S. The splitting pinball method for contact-impact problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1993, v. 105, p. 375-393
- [219] Belytschko T., Lu Y.Y., and Gu L. Element-Free Galerkin Methods // Int. J. Num. Meth. Eng., 1994, v. 37, p. 229-256,
- [220] Belytschko T., Kronggauz Y., Organ D. and Fleming M. Meshless Methods: An Overview and Recent Developments // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1996, v. 139, p. 3-47.
- [221] Benaroya H. (Ed.) (1996) Localization and effects of irregularities in structures. Special Issue edited by H Benaroya. AMR 49(2) 55-135.
- [222] Benson D.J. and Hallquist J.O. A single surface contact algorithm for the postbuckling analysis of shell structures // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng, 1990, v. 78, p. 141-163.



- [223] Benson D.J. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1992, v. 99, p. 235-394.
- [224] Benson D.J. Volume of fluid interface reconstruction methods for multi-material problems // *AMR*, 2002, 55(2), p. 151-165.
- [225] Bertolf L.D., Buxton L.D., Thorue B.J. et al. Damage in steel plates from hypervelocity impact II. Numerical results and spall measurement // *J. Appl. Phys.*, 1975, v. 46, p. 3776-3783.
- [226] Bertsekas D.P. *Constraint Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, New York, 1984.
- [227] Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: Single asperity contact // *AMR*, 1996, v. 49(5), p. 275-298.
- [228] Bjorkman G., Klarkbring A., Sjodin A., Larsson T. and Ronnquist M. Sequential Quadratic Programming for Non-Linear Elastic Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1995, v. 38, p. 137-165.
- [229] Bowden F.P. and Tabor D. *The Friction and Lubrication of Solids. Part II*. Clarendon press, Oxford, 1964.
- [230] Brackbill J.U., Kothe D.B. and Ruppel H.M. FLIP: A low dissipation, particle-in-cell method for fluid flow // *Computer Physics Communication*, 1988, v. 48, p. 25-38.
- [231] Brackbill J.U., Kothe D.B. and Zemach C. A continuum method for modeling surface tension. // *J. Comput. Phys.*, 1992, v. 100, p. 335.
- [232] Brown K., Attaway S., Plimpton S., Hendrickson B., Parallel strategies for crash and impact simulations // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2000, v. 184, p. 375-390.
- [233] Brunet M.A. A solution method for large strain of anisotropic material with contact and friction boundary conditions // *Proc. 5th Int. Symp. Numer. Meth. Engng.*, Lausanne-Switzerland, Eds. R. Gruber, J. Periaux and R.P.Shaw, Berlin, Springer-Verlag, 1989, v.2, pp. 369-374.
- [234] Campos L.T., Oden J.T., Kikuchi N. A Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatics // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1982, v. 34, p. 821-845.
- [235] Carey G. *Computational grids: Generation, Adaptation and Solution Strategy*. Taylor & Francis, Florida, 1997.
- [236] Carpenter N.J., Taylor R.L. and Katona M. G. Lagrange constraints for transient finite-element surface-contact // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1991, v. 32, p. 103-128.

- [237] Cescotto S. and Charlier R. Frictional Contact Finite Elements Based on Mixed Variational Principles. // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1993, v. 35, p. 1681-1701.
- [238] Cescotto S. and Zhu Y.Y. Large Strain Dynamic Analysis using Solid and Contact Finite Element Based on a Mixed Formulation; Application to Metal Forming. // *J. of Mater. Proces. Techn.*, 1994, v. 45, p. 657-663.
- [239] Chan S. H., Tuba I.S. A Finite Element Method for Contact Problems in Solid Bodies // *Int. J. Mech. Sci.*, 1971, v. 13, p. 615-639.
- [240] Charbrand P., Dubois F. and Raous M. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction // *Math. Comput. Modelling*, 1998, v. 28, No. 4-8, p. 97-108.
- [241] Chaudhary A.B. and Bathe K.J. A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction // *Computer and Structures*, 1986, v. 24, p. 855-873.
- [242] Chawla V. and Laursen T.A. Energy Consistent Algorithms for Frictional Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1998, v. 42, p. 799-827.
- [243] Chel I.H. and Hong C.S. New Approach for Simple Prediction of Impact Force History on Composite Laminates. // *AIAA J.*, 1994, v. 32, N.10, p. 2067-2072.
- [244] Chen J. S., Pan C., Wu C. T. and Liu W. K. Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Analysis of Nonlinear Structures // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1996, v. 139, p. 195-229.
- [245] Chen J.S., Pan C. and Wu C.T. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1997, v. 19, p. 211-227.
- [246] Chen J.S., Wu C.T., Yoon S. and You Y. Stabilized Conforming Nodal Integration for Galerkin Meshfree Methods // *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2001, v. 50, p. 435-466.
- [247] Chen W.H. and Tsai P. Finite Element Analysis of Elastodynamic Sliding Contact Problems with Friction // *Computers and Structures*, 1986, v. 22, N. 6, p. 925-938.
- [248] Chen Y.M. and Wilkins M.L. Stress Analysis of Crack Problems a Three-Dimensional Time-Dependent Computer Program. // *Int. J. Fracture*, 1976, v. 12, N. 4, p. 607-617.
- [249] Cheng J.H. and Kikuchi N. An Incremental Constitutive Relation of Unilateral Contact Friction for Large Deformation Analysis. // *J. Appl. Mech.*, ASME, 1985, v. 52, p. 639-648.
- [250] Cheng T.Y., Saleeb A.F. and Shyu S.C. Finite Element Solutions of Two-Dimensional Contact Problems Based on a Consistent Mixed Formulation. // *Computers and Structures*, 1987, v. 27, N.4, p. 455-466.

- [251] Cheng W.Q., Zhu F.W. and Luo J.W. Computational Finite Element Analysis and Optimal Design for Multibody Contact System. // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1988, v. 71, p. 31-39.
- [252] Christiansen P.W., Klarbring A., Pang J.S. and Stromberg N. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1998, v. 42 p. 145-173.
- [253] Clarke F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis. John Wiley Sons, New York, 1983.
- [254] Cocu M. Existence of solutions of Signorini problems with friction. // *Int. J. Engng. Sci.*, 1984, v. 22, p. 567-575.
- [255] Cocu M., Pratt E. and Raous M. Formulation and approximation of quasistatic frictional contact // *Int. J. Engng. Sci.*, 1996, v. 34, p. 783-798.
- [256] Cocu M., Pratt E. and Raous M. Constructive aspects of functional analysis for the treatment of frictional contact // *Math. Comput. Modelling*, 1998, v. 28, p. 109-120.
- [257] Colella P., Woodward P. The Piecewise Parabolic Method for Gas-Dynamical Problems // *J. Comput. Phys.*, 1984, v. 106, p. 319-336.
- [258] Conry T.F. and Seireg A. A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact" // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 1971, p.387 -392.
- [259] Cooper M. G., Mikic B. B. and Yovanovich M. M. Thermal Contact Conductance // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1969, v. 12, p. 279-300.
- [260] Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume I: Essentials, John Wiley & Sons, 1997 (ISBN 0 471 92956 5) Volume II: Advanced Topics, John Wiley & Sons, 1997 (ISBN 0 471 95649 X)
- [261] Curnier A. Theory of Friction. // *Int. J. Solids Structures*, 1984, v. 20, p. 637-647.
- [262] Curnier A. and Alart P. A Generalized Newton Method for Contact Problems with Friction // *J. Mec. Theor. Appl.*, 1988, Special Issue: Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, p. 67-82.
- [263] Curnier A., He Q. C. and Telega J. J. Formulation of Unilateral Contact between two Elastic Bodies undergoing Finite Deformation // *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1992, v. 314, p. 1-6.
- [264] Curnier A., He Q. C. and Klarbring A. Continuum Mechanics Modelling of Large Deformation Contact with Friction // in *Contact Mechanics*, eds. M. Raous, M. Jean and J. J. Moreau, Plenum Press, New York, 1995.

- [265] Daux C., Moes N., Dolbow J., Sukumar N. and Belytschko T. Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the Extended Finite Element Method. // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2000, v. 48, p. 1741-1760.
- [266] Desai S., Zaman M.M., Lightner J.G. and Siriwardane H.J. Thin-Layer Element for Interfaces and Joints // *Int. J. of Anal. Num. Geomech.*, 1984, v. 8, p. 19-43.
- [267] Devaut G. and Lions J. L. *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [268] Diekmann R., Hungershofer J., Lux M., Taenzer L. and Wierumy J.-M. Using Space Filling Curves for Efficient Contact Searching // 16th IMACS World Congress, 2000.
- [269] Dilintas G., Laurent-Gengoux P. and Trystam D. A conjugate projected gradient method with preconditioning for unilateral problems // *Computers and Structures*, 1988, v. 29, No. 4, p. 675-680.
- [270] Djachenko V.F. *The Free Point Method for Problems of Continuous Media* // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1973, N. 2.
- [271] Dolbow J. *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics* // PhD thesis, Northwestern University, USA, 1999.
- [272] Dolbow J., Moes N. and Belytschko T. Discontinuous Enrichment in Finite Elements with a Partition of Unity Method // *Finite Elements Anal.* 2000, Des. 36, p. 235-260.
- [273] Dolbow J., Moes N. and Belytschko T. An Extended Finite Element Method for Modeling Crack Growth with Frictional Contact // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 2001, v. 190, p. 6825-6846.
- [274] Doltsinis I. S. *Aspects of Modelling and Computation in the Analysis of Metal Forming* // *Engng. Computations*, 1990, v. 7, p. 2-20.
- [275] Dowson D. *History of Tribology*, Longman, New York, 1979.
- [276] Duarte C.A. and Oden J.T. An h-p Adaptive Method Using Clouds // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1996, v. 139, pp. 237-262.
- [277] Duarte C.A., Hamzeh O.N., Lyszka T.J. and Tworzydlo W.W. A Generalized Finite Element Method for the Simulation of Three-Dimensional Dynamic Crack Propagation // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2001, v.190, p. 2227-2262.
- [278] Eck C., Steinbach O. and Wendland W.L. A Symmetric Boundary Element Method for Contact Problem with Friction // *Mathematics and Computers in Simulation*, 1999, v. 20(1-4), p. 43-61.

- [279] Eck C. and Wendland W.L. An Adaptive Boundary Element Method for Contact Problems // In M. Bonnet, A.-M. Sandig, W. L. Wendland (eds.) *Mathematical Aspects of Boundary Element Method*, 1999, p. 116-127,
- [280] Ehrlich L.W. A Numerical Method of Solving a Heat Flow Problem with Moving Boundary // *J. Assoc. Comput. Machinery*, 1958, v. 5, N.2, p. 161-176.
- [281] Enright D., Fedkiw R., Ferziger J. and Mitchell I. A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing, dated by March, 21, 2002, in printing. Available at <http://graphics.stanford.edu/~fedkiw/papers/stanford2001-04.pdf>
- [282] Endo T., Oden J.T., Becker E.B. and Miller T. A numerical analysis of contact and limit-point behavior in a class of problems of finite elastic deformations // *Computers and Structures*, 18, 1984, 899-910.
- [283] Eterovic A.L. and Bathe K.J. On the Treatment of Inequality Constraints Arising from Contact Conditions in Finite-Element Analysis // *Computers and Structures*, 1991, v. 40, p. 203-209.
- [284] Eterovic A.L. and Bathe K.J. An Interface Interpolation Scheme for Quadratic Convergence in the Finite Element Analysis of Contact Problems. // in *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, eds. P. Wriggers and W. Wagner, Springer, Berlin, 1991.
- [285] Fancello E.A., Haslinger J. and Feijoo R.A. Numerical Comparison Between Two Cost Functions in Contact Shape Optimization // *Structural Optimization*, 1995, v. 9, No. 1, pp.57-68.
- [286] Farahani K., Mofid M. and Vafai A. A solution method for general contact-impact problem // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2000, v. 187, p. 69-77.
- [287] Farahani K., Mofid M. and Vafai A. United Elements Method for General Contact-Impact Problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 2001, v. 191, p. 843-860.
- [288] Faria L.O., Bass J.M., Oden J.T., Yavari B., Tworzidlo W.W. and Becker, E.B. Tire Modelling by Finite Elements // *Tire Sci. Technol., TSTCA*, 1992, v. 20, p. 33-56.
- [289] Farhat C. and Roux F.-X. A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm // *Int. J. Num. Mech. Engng*, 1991, v. 32, p. 1205-1227.
- [290] Farhat C., Cruvelli L. and Roux F.-X. A Transient FETI Methodology for Large-Scale Parallel Implicit Computations in Structural Mechanics // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1994, v. 37, p.1945-1975.
- [291] Farhat, C., Chen, P.-S. and Mandel, J. (1995), A Scalable Lagrange Multiplier Based Domain Decomposition Method for Time-Dependent Problems // *Int. J. Num. Meth. in Engng*, 1995, v. 38, p. 3831-3853.

- [292] LaFaurie B., Nardone C., Scardovelly R. and Zaleski S. Modelling Merging and Fragmentation in Multiphase Flows with SURFER // *J. Comput. Phys.*, 1994, v. 113, p. 134-147
- [293] Felippa C.A., Park K.C. and Farhat C. Partitioned Analysis of Coupled Mechanical Systems // Invited Plenary Lecture, Fourth World Congress in Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, July 1998 // Expanded version in *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 2001, v. 190, p. 3247-3270.
- [294] Fish J. Finite Element Method for Localization Analysis. Ph.D. thesis, Northwestern University, USA, 1989.
- [295] Flanagan L. M. and Flanagan D. P. PRONTO3D: A Three-Dimensional Transient Solid Dynamics Program // Tech. Rep. SAND87-1912, Sandia National Labs, Albuquerque, NM, March 1989.
- [296] Fleming M.Y., Chu A., Moran B. and Belytschko T. Enriched Element-Free Galerkin Methods for Singular Fields // *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 1997, v. 40, p. 1483-1504.
- [297] Floryan J.M. and Rasmussen H. (1989) Numerical algorithms for viscous flows with moving boundaries // *AMR*, 1989, v. 42(12), p. 323-341.
- [298] Francavilla A. and Zienkiewicz O. C. A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1975, v. 9, p. 913-924.
- [299] De La Fuente, H.M., Felippa, C.A. (1991) Ephemeral penalty functions for contact dynamics // *Finite Elements in Analysis and Design*, 1991, v. 9, p. 177-191.
- [300] Fung Y.C., *Biomechanics*. Springer-Verlag, 1993.
- [301] Galin L.A. *Contact Problems in the Theory of Elasticity* (edited by I. N. Sneddon), North Carolina State College Translation, 1961.
- [302] Ghaboussi J., Wilson E.L., Isenberg J. Finite element of rock joints and Interfaces // *J. of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE* 99, 1973, p. 833-848.
- [303] Giannopolis A.E. The Return Mapping Method for the Integration of Friction Constitutive Equations // *Computers and Structures*, 1989, v. 32, p. 157-168.
- [304] Gillow K.A., Howison S.D. A bibliography on free and moving boundary problems for Hele-Shaw and Stokes Flow, Available at Web: <http://www.maths.ox.ac.uk/~howison/Hele-Shaw>.
- [305] Ginsberg M. and Katnik R.B. Improving Vectorization of a Crashworthiness Code, SAE Technical Paper No. 891985, Passenger Car Meeting and Explosion, Dearborn, 1989.
- [306] Glocker Ch. and Pfeiffer F. *Multibody dynamics with unilateral contacts*. John Wiley Sons, 1996.

- [307] Glocker Ch. (1999) Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1999, v. 177, p. 199-214.
- [308] Goryacheva I.G. and Dobychin M.N. Multiple contact model in the problem of tribomechanics // *Tribology International*, 1991, v. 24, No. 1, p. 29-35.
- [309] Goryacheva I.G. *Contact Mechanics in Tribology*, Kluwer Academic Publishers, 1998, 344 p.
- [310] Goudreau G.L. and Hallquist J.O. Recent developments in large-scale finite element Lagrangian hydrocode technology // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1982, v. 33, p. 725-757.
- [311] Guerra F.M. and Browning R.V. Comparison of two slideline methods using ADINA // *Computers and Structures*, 1983, v. 17, N. 5/6, P. 819-834.
- [312] Gunther F.C. and Liu W.K. Implementation of Boundary Conditions for Meshless Methods // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1997.
- [313] Hallquist J.O. A Procedure for the Solution of Finite Deformation Contact-Impact Problems by the Finite Element Method // Univ. of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1976, Rept. UCRL-52066.
- [314] Hallquist J.O. Preliminary User's Manuals for DYNA3D and DYNAP (Nonlinear Dynamic Analysis of Solids in Three Dimension) // Univ. of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1976, Rept. UCID-17268.
- [315] Hallquist J.O. Theoretical Manual for DYNA2D // Lawrence Livermore National Laboratory, 1983, Rept. UCID-19401.
- [316] Hallquist J.O., Goudreau G.L. and Benson D.J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1985, v. 51, p. 107-137.
- [317] Hallquist J.O., Schweizerhof K. and Stillman D. Efficiency Refinements of Contact Strategies and Algorithms in Explicit FE Programming // in *Proceedings of COMPLAS III*, eds. D.R.J. Owen, E. Hinton, E.E. Onate, Pineridge Press, 1992.
- [318] Hallquist J.O. *LS-DYNA Theoretical Manual*, Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [319] Hamill IS, Jun L, Waterson N 1991 "A model for the simulation of three-dimensional mould-filling processes with complex geometries." Presented at the International Conference on Mathematical Modelling of Materials Processing, Bristol, 23-25 September 1991
- [320] Harlow F.H. and Shannon J.P. The splash of a liquid drop. // *J. Appl. Phys.*, 1967, v. 38, p. 3855.

- [321] Harlow F.H. and Amsden A.A. Numerical simulation of almost incompressible flow. // J. Comput. Phys., 1968, v. 3, p. 80.
- [322] Harlow F.H. and Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free boundaries. // Phys. Fluids, 1968, v. 8, p. 2182.
- [323] Haug E.J. and Kwak B.M. Contact Stress Minimization by Contour Design // Int. J. Numer. Meth. Engng., 1978, v. 12, p. 917-930.
- [324] Heegaard J.-H. and Cournier A. An Augmented Lagrangian method for discrete large-slip contact problems involving friction // Int. J. Numer. Meth. Engng., 1993, v. 36, 569-593.
- [325] Heinstein M.W., Attaway S.W., Swegle J.W., Mello F.J. A general contact detection algorithm for finite element analysis. In Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. (eds.), Contact Mechanics, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1993.
- [326] Heinstein M.W. and Laursen T.A. An Algorithm for the Matrix-Free Solution of Quasi-static Frictional Contact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1999, v. 44, p. 1205-1226.
- [327] Heinstein M.W., Mello F.J., Attaway S.W., Laursen T.A. Contact-Impact Modeling in Explicit Transient Dynamics // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 2000, v. 187, p. 621-640.
- [328] Hertz H. Study on the Contact of Elastic Bodies // J. Reine Angew. Math., 1882, v. 29, 156-171.
- [329] Hestenes M.R., Stiefel E. Method of conjugate gradients for solving linear systems // J. Res. Nat. Bur. Std., 1952, v. 69, p. 409-436.
- [330] Hibbit, Karksson and Sorensen, ABAQUS Theory Manual, ver. 5.8, 1998.
- [331] Hibbit, Karksson and Sorensen ABAQUS/Explicit Example Problems Manual, ver. 5.8, 1998.
- [332] Hirokawa S. and Tsuruno R. Three-dimensional deformation and stress distribution in an analytical computational model of the anterior cruciate ligament // J. Biomechanics, 2000, v. 33, p. 1069-1077.
- [333] Hirota G., Fisher S., State A., Lee C. and Fuchs H. An Implicit Finite Element Method for Elastic Solids in Contact, SIGGRAPH 2001 Conf, 2001, Available at [http://www.cs.unc.edu/~andrei/pubs/2001\\_ComputerAnimation\\_FEM.pdf](http://www.cs.unc.edu/~andrei/pubs/2001_ComputerAnimation_FEM.pdf) or at <http://www.cs.unc.edu/~hirota>
- [334] Hirt C.W. and Nickols B.D. (1981) Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Physics, 1981, v. 39, p. 201-225.



- [335] Hlavacek I., Haslinger J., Necas J. and Lovisek J. Solution of variational inequalities in mechanics, Springer, New York, 1988.
- [336] Hoover C.G., Badders D.C., De Groot A.J. and Sherwood R.J. Parallel algorithm research for solid mechanics applications using finite element analysis, Thrust Area Report, UCRL-ID-125471, Lawrence National Laboratory, 1997.
- [337] Hughes T.J.R., Taylor R.L., Sackman J.L., Curnier A. and Kanoknukulchai W. A finite element method for a class of contact-impact problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1976, v. 8, p. 249-276.
- [338] Hughes T.J.R., Taylor R.L. and Kanoknukulchai W. A finite element method for Large Displacement Contact and Impact Problems // in *Formulations and Computational algorithms in FE Analysis*, ed. K. J. Bathe, MIT-Press, Boston, 1977, p. 468-495.
- [339] Hughes T.J.R. Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior // In T. Belytschko and T. J. R. Hughes, eds., *Computational Methods for Transient Analysis*, North-Holland, 1983, p. 67-155.
- [340] Hughes T.J.R. *The Finite Element Method*, New York: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1987.
- [341] Huh G.J. and Kwak B.M. Constrained variational approach for dynamic analysis of elastic contact problems // *Finite Elem. Anal. and Des.*, 1991, V. 10, No. 2, P. 125-136.
- [342] Hunek I. On a penalty formulation for contact-impact problems // *Computers and Structures*, 1993, v. 11, p. 193-203.
- [343] Hyman J.M. Numerical methods for tracking interfaces // *Physics*, 1984, v. D12, p. 396-407.
- [344] Ingraffea A.R. and Heuze F.E. Finite element models for rock fracture mechanics // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 1980, v. 4, p. 25-43.
- [345] Jacqmin D. A variational approach to deriving smeared interface surface tension models // in *Barriers and Challenges in CFD*, ed. by V. Venkatakrishnan et al., Dordrecht-Nowell, MA, Kluwer Academic, 1998, p. 231.
- [346] Jean M. The nonsmooth contact dynamics method // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, 1999, v. 177, p. 235-257.
- [347] Johanson L. and Klarbring A. Thermoelastic Frictional Contact Problems: Modelling, Finite Element Approximation and Numerical Realization // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1993, v. 105, p. 181-210.
- [348] Johnson A.A., Tezduyar T.E. Mesh updated strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundary and interface // *Comput Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1994, v. 119, p. 73-94.

- [349] Johnson C. Adaptive finite element methods for the obstacle problem. Technical Report, Chalmers University of Technology, Goteborg, 1991.
- [350] Johnson C. and Hansbo P. Adaptive finite element methods in computational mechanics, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1992, v. 101, p. 143-181.
- [351] Johnson G.R. Analysis of elastic-plastic impact involving severe distortions // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1977, v. 43, p. 439-444.
- [352] Johnson G.R. High velocity impact in three dimensions // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1977, v. 44, p. 95-100.
- [353] Johnson G.R. , Stryk R.A. Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions // *Int. J. Impact Engng*, 1987, v. 5, p. 411-421.
- [354] Johnson G.R. , Stryk R.A. Recent EPIC code developments for high velocity impact // *Int. J. Impact Eng.* 1990, v.10, p. 281-294.
- [355] Johnson K.L., *Contact Mechanics*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985.
- [356] Johnson N.L., Legacy and future of CFD at Los Alamos, Canadian CFD Conference Ottawa, Canada, June 3-4, 1996, Technical Report of Los Alamos National Lab., LA-UR-96-1426, p. 1-20, available at [http://gnarly.lanl.gov/History/CFD\\_paper\\_6\\_24\\_96.pdf](http://gnarly.lanl.gov/History/CFD_paper_6_24_96.pdf) and at <http://t3.lanl.gov/secondlevel/history/viewgraphs.pdf>.
- [357] Ju J.W., Taylor R.L., Cheng L.Y. A consistent finite element formulation of nonlinear frictional contact problems, *Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design, Proc. of the NUMETA '87 conf.*, G.N. Pande, J. Middleton (Eds.), Martinus, Nijhoff Publ., 1987, p. D5/1-D5/13.
- [358] Ju J.W. and Taylor R.L. A perturbed lagrangian formulation for the finite-element solution of nonlinear frictional contact problems // *J. de Mecanique Theorique et Appliquee*, 1988, v. 7, p. 1-14.
- [359] Jun L, Spalding D.B. "Numerical simulation of flows with moving interfaces." *PHOENICS Journal of Computational Fluid Dynamics* Vol 10, No 5/6, pp. 625-637 1988. Published by Pergamon Press
- [360] Kaljevic I. and Saigal S. An Improved Element Free Galerkin Formulation // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1997.
- [361] Kalker J.J. and Randen Y., A Minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to non-Hertzian Half-Space Contact Problems // *J. of Engineering Mathematics*, 1972, v. 6, p. 193-206.
- [362] Kalker J.J. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

- [363] Kane C., Repetto E.A., Ortiz M. and Marsden J.E. Finite element analysis of nonsmooth contact // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1999, v. 180, p. 1-26.
- [364] Kane C., Marsden J.E., Ortiz M. and West M. Variational integrators and the newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2000, v. 49, p. 1295-1325.
- [365] Kanto Y. and Yagawa G. A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1990, v. 29, p. 755-774.
- [366] Karni S. Multicomponent flow calculation by a consistent primitive algorithm // *J. Comput. Phys.*, 1994, v. 112, p. 31.
- [367] Key S.W. HONDO - A Finite Element Computer Program for the Large Deformation Response of Axisymmetric Solids // Sandia National Laboratories, Report 74-0039, 1974.
- [368] Kikuchi N. and Song Y. J. Penalty finite element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity // *Quarterly of Appl. Mech.*, 1981, v. 39, No. 1, pp. 1-21.
- [369] Kikuchi N. A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1982, v. 18, p. 343-350.
- [370] Kikuchi N. and Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods // *SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics*, v. 8, Philadelphia, 1986.
- [371] Kim J.O. and Kwak B.M. Dynamic analysis of two-dimensional frictional contact by linear complementary problem formulation.// *Int. J. Solids and Structures*, 1996, v. 33, N. 30, p. 4605-4624.
- [372] Klarbring A. A Mathematical Programming approach to Three-dimensional Contact Problems with Friction // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1986, v. 58, p. 175-200.
- [373] Klarbring A. and Bjorkman G. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface // *Computer and Structures*, 1988, v. 30, p. 1185-1198.
- [374] Klarbring A. Examples of non-uniqueness and non existence of solutions to quasistatic contact problem with friction // *Ingenieur Archiv.*, 1990, v. 50, p. 529-541.
- [375] Klarbring A. and Bjorkman G. Solution of Large Displacement Contact Problems with Friction using Newton's Method for Generalized Equations // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1992, v. 34, p. 249-269.
- [376] Klarbring A., Mikelic A. and Shillor M. A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance // *Int. Series Num Math.*, 1992, v. 101, p. 85-111.

- [377] Klisch S.M. and Lotz J.C. Application of a fiber-reinforced continuum theory to multiple deformations of the annulus fibrosus // *J. Biomechanics*, 1999, v. 32, p. 1027-1036.
- [378] Koch R. M., Gross M. H., Carls F. R., von Biren D.F., Fankhauser G. and Parish Y.I.H. Simulating facial surgery using finite element methods // *Proceedings of SIGGRAPH '96, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 1996, p. 421-428.
- [379] Kondaurov, V.I. and Kukudzhanov, V.N. On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic media with finite deformations // *Archives of Mechanics*, 1979, v. 31, N 5.
- [380] Kondaurov V.I. and Lomov I.N. Fracture of brittle material with initial porosity under high energy density flows // *Shock Compression of Condensed Matter*, 1997. Proc. Conf. Amer Phys. Society. Topical Group of Shock Condensed Matter. Ed. S.C.Smidt, 1998, pp.247-250.
- [381] Kondaurov V.I. Thermomechanics of Phase Transitions of the First Order in Solids // *Russian Journal of Earth Science*, 2002, v. 4, No. 2, p. 1-18.
- [382] Korobeinikov S.N., Alyokhin V.V., Bondarenko M.I. Application of a finite element method for the solution of three dimensional contact problems // *Advances in Simulation and Interaction Techniques, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Computational Structures Technology*, M. Papadrakakis, B.H.V. Topping (Eds.), Edinburgh, Civil-Comp. Press, 1994, P. 165-175.
- [383] Kothe D.B. and Rider W.J. Comments on modelling interfacial flows with volume-of-fluid method // Technical report LA-UR-3384, Los Alamos National Lab., 1994. Available at <http://www.c3.lanl.gov/~vjr/pubs.html>.
- [384] Kothe D.B., Rider W.J. Mosso S.J. and Brock J.S. Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions // *AIAA Paper 96-0859*, 1996.
- [385] Kothe D., Juric D., Lam K. and Lally B. Numerical recipes for mold filling simulation, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, Rept. 87545, USA, 1998 (in B. Thomas, C. Beckermann (Eds.) *Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes VIII*, New York, 1998, TMS Publishers. Available at <http://www.lanl.gov/energy/est/transportation/trans/pdfs/materials/NUMREC.PDF>)
- [386] Kowalczyk P. (1994) Finite-deformation interface formulation for frictionless contact problems // *Comm. Num. Meth. Engng.*, 1994, v. 10, p. 879-893
- [387] Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S. *Friction and Wear - Calculation Methods*, Pergamon Press, 1982.
- [388] Kukudzhanov V.N., Bourago N.G., Glushko A.I., Kovshov A.N., Ivanov V.L. and Shneiderman D.I. On the problem of damage and localization of strains // *Chalmers Univ. of Tech., Dept. of Struct. Mech., publ.95:11*, Goteborg, 1995, p. 1-35.

- [389] Kulak R.F. Adaptive contact elements for three-dimensional explicit transient analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1989, v. 72, p. 125-151.
- [390] Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V. and Semenov A.Yu. *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic systems*, Chapman & Hall/CRC, London, Boca Raton, 2001.
- [391] Kunugi T. MARS for multiphase flow, Kyoto Univ., 2002, P. 1-10. Available at Web: <http://www.nucleng.kyoto-u.ac.jp/Groups/F-group/gallery/pdf/iscfd13.pdf>
- [392] Kwak B.M. Complementary problem formulation of three-dimensional frictional contact // *J. Appl. Mech.*, ASCE, 1991, v. 58, p. 134-140.
- [393] Ladeveze P. *Nonlinear Computational Structural Mechanics*, Springer, New York, 1998.
- [394] Larsson R. and Runesson K. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1993, v.36, p. 2087-2105.
- [395] Laursen T.A. and Simo J.C. Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems Using Augmented Lagrangians // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1993, v. 108, p. 133-146.
- [396] Laursen T.A. and Simo J.C. A Continuum-Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multibody, Large Deformation Frictional Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1993, v. 36, p. 3451-3485.
- [397] Laursen T.A. and Govindjee S. A note on the treatment of frictionless contact between nonsmooth surfaces in fully nonlinear problems // *Comm. Num. Meth. Engng.*, 1994, v. 10, p. 869-878.
- [398] Laursen T.A. and Oancea V.G. Automation and Assessment of Augmented Lagrangian Algorithms for Frictional Contact Problems // *J. Appl. Mech.*, 1994, v. 61, p. 956-963.
- [399] Laursen T.A. The Convected Description in Large Deformation Frictional Contact Problems // *Int. J. Solids and Structures*, 1994, v. 31, p. 669-681.
- [400] Laursen T.A. and Maker B.N. An Augmented Lagrangian Quasi-Newton Solver for Constrained Nonlinear Finite Element Applications // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1995, v. 38, p. 3571-3590.
- [401] Laursen T.A. Review of Computational Methods in Contact Mechanics // Eds. M.H. Aliabadi and C.A. Brebbia, *American Scientist*, 1995, v. 83, p. 196-198.
- [402] Laursen T.A. and Oancea V.G. On the Constitutive Modeling and Finite Element Computation of Rate Dependent Frictional Sliding in Large Deformations // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1997, v. 143, p. 197-227.
- [403] Laursen T.A. and Chawla V. Design of Energy Conserving Algorithms for Frictionless Dynamic Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1997, v. 40, p. 863-886.

- [404] Laursen T.A. On the development of thermodynamically consistent algorithms for thermomechanical frictional contact // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1999, v. 48, p. 1525-1547.
- [405] Laursen T.A. and Meng X.N. A New Solution Procedure for Application of Energy-Conserving Algorithms to General Constitutive Models in Nonlinear Elastodynamics // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2001, v. 190, p. 6309-6322.
- [406] Laursen T.A. *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [407] Laursen T.A. and Love G.R. Improved Implicit Integrators for Transient Impact Problems - Geometric Admissibility Within the Conserving Framework // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2002, v. 53 , p. 245-274.
- [408] Lebon F. and Raous M. Multibody contact problem including friction in structure assembly // *Computers and Structures*, 1992, v. 43, No. 5, p. 925-934.
- [409] Lee C.Y., Oden J.T. and Ainsworth M. Local a posteriori error estimates and numerical results for contact problems and problems of flow through porous media // in: P. Wriggers, W. Wagner (Eds.), *Nonlinear Computational Mechanics*, Springer, Berlin, 1991, p. 671-689.
- [410] Lee C.Y. and Oden J.T. A priori error estimation of hp-finite element approximations of frictional contact problems with normal compliance // *Int. J. Engng. Science*, 1993, v. 31, p. 927-952.
- [411] Lee C.Y. and Oden J.T. Theory and approximation of quasi-static frictional contact problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1993, v. 106, p. 407-429.
- [412] Lee C.Y. and Oden J.T. A-posteriori error estimation of hp finite-element approximations of frictional contact problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1994, v. 113, p. 11-45.
- [413] Lee S.H. Rudimentary consideration for adaptive gap/friction element based on the penalty method // *Computers and Structures*, 1993, v. 47, p. 1043-1056.
- [414] Lemaitre J. *A course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, 1992.
- [415] Lemaitre J. *A course on Damage Mechanics*. Springer, Berlin, 2nd ed, 1996.
- [416] Lewis J.P., Cordner M. and Fong N. Pose space deformation: a unified approach to shape interpolation and skeleton-driven deformation // *Proceedings of SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 2000, pp. 165-172.
- [417] Li L-y. and Bettess P. Adaptive finite element methods: A review // *AMR*, 1997, v. 50(10), p. 581-591.

- [418] Li S. and Liu W.K. Meshfree and particle methods and their applications // AMR, 2002, v. 55(1) P. 1-34.
- [419] Light C., Pratt E. and Raous M. Remarks on a numerical method for unilateral contact including friction // Int. Series Num. Math., 1991, v. 101, p. 129-144.
- [420] Ling W., Stolarski H.K. On elasto-plastic finite element analysis of some frictional problems with large sliding // Engng. Computations, 1997, v. 14, No. 5, p. 558-580.
- [421] Lions J.-L. The work of Stampacchia in variational inequalities // Boll. Unione mat. Ital. 1978, A15, No. 3, p. 736-756.
- [422] Liseikin V.D. Grid Generation Methods, Springer-Verlag, New-York, 1999.
- [423] Liu W.K., Jun S. and Zhang Y.F. Reproducing Kernel Particle Methods // Int. J. Numer. Meth. Fluids, 1995, v. 20, p. 1081-1106.
- [424] Liu W.K., Chen Y., Uras R.A. and Chang C.T. Generalized Multiple Scale Reproducing Kernel Particle Methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1996, v. 139, p. 91-158.
- [425] Madhusudana C.V. and Fletcher L.S. Gas conductance contribution to contact heat transfer // AIAA Paper 81-1163, 1981.
- [426] Maenchen G. and Sack S. The TENSOR code // in "Methods in Computational Physics", v. 3, Fundamental methods in Hydrodynamics, Academic Press, New York, 1964.
- [427] Maker B.N. and Laursen T. A. A Finite Element Formulation for Rod/Continuum Interactions: The One-Dimensional Slideline // Int. J. Num. Meth. Engng., 1994, v. 37, p. 1-18.
- [428] Malone J.G. Automated mesh decomposition and concurrent finite element analysis for hypercube multiprocessor computer // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1988, v. 70, p. 27-58.
- [429] Malone J.G. and Johnson N.L. A parallel finite element contact impact algorithm for non-linear explicit transient analysis: Part I - The search algorithm and contact mechanics // Int. J. Num. Meth. Engng., 1994, v. 37, p. 559-590.
- [430] Malone J.G. and Johnson N.L. A parallel finite element contact impact algorithm for non-linear explicit transient analysis: Part II - Parallel implementation // Int. J. Num. Meth. Engng., 1994, v.37, p. 591-603.
- [431] Marks W.R. and Salamon N.J. A projected conjugate gradient method for frictionless contact problems // Trans. ASME, J. Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1983, v. 105.

- [432] Martins J.A.C. and Oden J.T. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws // *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, 1987, v. 11, p. 407-428.
- [433] May H.-O. The conjugate gradient method for unilateral problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1986, v. 12, No. 4, p. 595-598.
- [434] McDevitt T.W. and Laursen T.A. A Mortar-Finite Element Formulation for Frictional Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2000, v. 48, p. 1525-1547.
- [435] McMaster W.H. Computer Codes for Fluid-Structure Interactions // Lawrence Livermore Laboratory, Report N. UCRL-89724, 1984.
- [436] Melenk J.M. and Babuska I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1996, v. 139, p. 289-314.
- [437] Michalowski R. and Mroz Z. Associated and nonassociated sliding rules in contact friction problems // *Arch. Mech.*, 1978, v. 30, p. 259-276.
- [438] Mikolajczak A., Rassinoux A., Dufossi F. and Kromer V. A finite element procedure of contact problems based on a remeshing of the contact zone // *European Congress on Comput. Methods in Appl. Sci. Engng, ECCOMAS 2000, Barcelona, 2000*, p. 1-15.
- [439] Miller K., Chinzei K., Orssengo G. and Bednarz P. Mechanical properties of brain tissue in-vivo: experiment and computer simulation // *J. Biomechanics*, 2000, v. 33, p. 1369-1376.
- [440] Moes N., Dolbow J. and Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // *Int. J. Numer. Methods Engng.* 1999, v. 46, p. 131-150.
- [441] Monaghan J. J. Why Particle Methods Work // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1982, v. 3 (4), p. 422-433.
- [442] Moreau J.J. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics // In: J. J. Moreau and P. D. Pana-giotopoulos, editors, *International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures*, v. 302. Springer-Verlag, Vienna, 1988.
- [443] Moresi L., Muhlhaus H. and Dufour F. An overview of numerical methods for Earth simulations, 2001. Available at <http://www.ned.dem.csiro.au/research/solidMech/Geodynamics/ChapmanConference/AbstractsReceived/AbstractFiles/Moresi-et-al.pdf>
- [444] Munjiza A., Owen D.E. and Bicanic N. A Combined Finite-Discrete Element Method in Transient Dynamics of Fracturing Solids // *Eng. Computations*, 1995, v. 12, p. 145-174.
- [445] Von Neumann J. and Richtmyer R.D. A method for the numerical calculation of the hydrodynamic shocks // *J. Appl. Phys.*, 1950, v. 21, p. 232.



- [446] Nichols B.D. and Hirt C.W., Methods for Calculating Multi-Dimensional, Transient Free Surface Flows Past Bodies // Proc. First Intern. Conf. Num. Ship Hydrodynamics, Gaithersburg, 1975.
- [447] Nour-Omid B. and Wriggers P. A 2-level iteration method for solution of contact problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, v. 54, p. 131-144.
- [448] Nour-Omid B. and Wriggers P. A Note on the Optimum Choice for Penalty Parameters // Comm. Appl. Num. Meth., 1987, v. 3, p. 581-585.
- [449] Oancea V.G. and Laursen T.A. A Finite Element Formulation of Thermomechanical Rate-Dependent Frictional Sliding // Int. J. Num. Meth. Engng., 1997, v. 40, p. 4275-4311.
- [450] Oancea V.G. and Laursen T.A. Stability Analysis of State Dependent Dynamic Frictional Sliding // Int. J. of Non-Linear Mech., 1997, v. 32, p. 837-853.
- [451] Oden J.T. Exterior Penalty Methods for Contact Problems in Elasticity // in Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, eds. W. Wunderlich, E. Stein, K.J. Bathe, Springer, Berlin, 1981.
- [452] Oden J.T. and Pires E.B. Algorithms and numerical results for finite-element approximations of contact problems with non-classical friction laws // Computers and Structures, 1983, v. 19, p. 137-147.
- [453] Oden J.T. and Pires E.B. Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity // J. Appl. Mech., 1983, v. 50, p. 67-76.
- [454] Oden J.T. and Carey G.F. Finite Elements // Special Problems in Solid Mechanics, Volume V, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1984.
- [455] Oden J.T. and Martins J.A.C. Models and computational methods for dynamic frictional phenomena // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, v. 52, p. 527-634.
- [456] Oden J.T. and Lin T.L. On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, p. 297-367.
- [457] Ogata Y. and Yabe T. Shock capturing with improved numerical viscosity in primitive Euler representation // Comput. Phys. Comm., 1999, v. 119, p. 179.
- [458] Oishi A. Large-scale dynamic analyses with contact-impact using the hierarchical domain decomposition method // Annual report of Adventure Project ADV-99-1, Tokushima, 1999, p. 1-23.
- [459] Okamoto N. and Nakazawa M. Finite Element Incremental Contact Analysis with Various Frictional Conditions // Int. J. Num. Meth. Engng, 1979, v. 14, p. 337-357.

- [460] Okrouhlik M. (Ed.) Mechanics of contact impact, Edited by M Okrouhlik. // AMR, 1994, v. 47(2), p. 33-99.
- [461] Oldenburg M. and Nilsson L. The position code algorithm for contact searching // Int. J. Num. Meth. Engng, 1994, v. 37, p.359-386.
- [462] Oran E.S. and Boris J.P. Numerical Simulation of Reactive Flow, Elsevier, New York, 1987.
- [463] Ortiz M., Quigley J.J. IV Adaptive Mesh Refinement in Strain Localization Problems // Comput. Meth. appl. Mech. Engng., 1991, v. 90, p. 781-804.
- [464] Osher S. and Sethian J.A. Front propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. // J. Comput. Phys., 1988, v. 79, p. 12.
- [465] Osher S. and Fedkiw R. Level Set Methods: An Overview and Some Recent Results // J. Comput. Phys., 2001, v. 169, p. 463-502.
- [466] Osher S.J., Tryggvason G. Preface // J. Comput. Phys., 2001, v. 169, No. 2, p. 249-249 (Special issue of JCP on methods for multiphase flows).
- [467] Osher S. and Fedkiw R. The Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [468] Padmanabhan V. and Laursen T.A. A Framework for Development of Surface Smoothing Procedures in Large Deformation Frictional Contact Analysis // Finite Elements in Analysis and Design, 2001, v. 37, p. 173-198.
- [469] Padovan J. Finite element analysis of steadily and transiently moving and rolling viscoelastic structure-I // Theory Comput. Struct., 1987, v. 27, p. 249-257.
- [470] Padovan J., Padovan P. Modelling wear at intermittently slipping high speed interfaces // Computers and Structures, 1994, v. 52, p. 795-812.
- [471] Panagiotopoulos P.D. Inequality Problems in Mechanics and Applications. Birkhauser, Boston, 1985.
- [472] Pandolfi P., Kane C., Marsden J.E. and Ortiz M. Time-Discretized Variational Formulation of Nonsmooth Frictional Contact // Int. J. Num. Meth. Engng., 2001, 31 p.
- [473] Papadrakakis M. and Ghionis P. Conjugate gradient algorithms in nonlinear structural analysis problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, v. 59, p. 11-27.
- [474] Papadopoulos P. and Taylor R.L. A Simple Algorithm for Three-dimensional Finite Element Analysis of Contact Problems // Computers and Structures, 1993, v. 46, p. 1107-1118.

- [475] Papadopoulos P., Jones R.E. and Solberg J. A Novel Finite Element Formulation For Frictionless Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1995, v. 38, p. 2603-2617.
- [476] Parisch H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1989, v. 28, p. 1803-1812
- [477] Parisch H. and Lubbing Ch. Formulation of arbitrary shaped surface elements for 3D large deformations contact with friction // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1997, v. 40, p. 3359.
- [478] Park J. and Anderson W.J. Geometric Optimization in Presence of Contact Singularities // *AIAA Journal*, 1995, v. 33, No. 8, p. 1503-1509.
- [479] Park K.C. and Felippa C.A. A variational framework for solution method development in structural mechanics // *J. Appl. Mech.*, 1998, v. 65, No. 1, p. 242-249.
- [480] Park K.C. and Felippa C.A. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2000, v. 47, p. 395-418.
- [481] Park K.C., Felippa C.A. and Rebel G. A simple algorithm for localized construction of nonmatching structural interfaces, Center for Aerospace Structures // Report No. CU-CAS-00-22, University of Colorado, Boulder, 2000.
- [482] Park K.C., Gumaste U. and Felippa C.A. A localized version of the method of Lagrange multipliers and its applications // *J. Comput. Mech.*, 2000, v. 24, No. 6, p. 476-490.
- [483] Peric D. and Owen D.R.J. Computational model for 3-d contact problems with friction based on the penalty method // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1992, v. 35, p. 1289-1309.
- [484] Peskin A.P., Hardin G.R. Moving Particles Through a Finite Element Mesh // *J. Research of the National Institute of Standards and Technology*, 1998, v. 103, No. 1, p. 77-93.
- [485] Petocz E. and Armero F. A Sorting Contact Detection Algorithm: Formulation and Finite Element Implementation // UCB/SEMM Report 98/06, University of California at Berkeley, 1998.
- [486] Pfeiffer F. Unilateral problems of dynamics // *Archive of Applied Mechanics*, 1999, v.69, p. 503-527.
- [487] Pietrzak G., Curnier A. Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of multibody, large deformation frictional contact problems // *Comput. Plasticity, Fundamentals and Applications*, Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton, Barcelona, CIMNE, 1997, p. 878-883.
- [488] Pifco A.B., Winter R. Theory and application of finite element analysis to structural crash simulation // *Computers and Structures*, 1981, v. 13, p. 277-285.

- [489] Pires E.B. and Oden J.T. Analysis of contact problems with friction under oscillating loads // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1983, v. 39, p. 337-362.
- [490] Plimpton S., Attaway S., Hendrickson B., Swegle J., Vaughan C., Gardner D. Transient Dynamics Simulations: Parallel Algorithms for Contact Detection and Smoothed Particle Hydrodynamics. Proc. Supercomputing'96, Pittsburgh, PA, November 1996. Available at <http://www.cs.sandia.gov/~sjplimp/main.html>
- [491] Plimpton S., Attaway S., Hendrickson B., Swegle J., Vaughan C., Gardner D. Transient Dynamics Simulations: Parallel Algorithms for Contact Detection and Smoothed Particle Hydrodynamics // *J. Parallel and Distributed Computing*, 1998, v. 50, p. 104-122.
- [492] Puckett E.G. and Saltzman J.S. A 3D adaptive mesh refinement algorithm for multimaterial gas dynamics // *Physica*, 1992, v. D60, p. 84.
- [493] Puckett E.G., Almgren A.S., Bell J.B., Marcus D.L. and Rider W.J. A high-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows // *J. Comput. Phys.*, 1997, v. 130, p. 269.
- [494] Puso M.A. and Laursen T.A. A 3D Contact Smoothing Method Using Gregory Patches // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2002.
- [495] Rabier P.J., Martins J.A.C., Oden T.J. and Campos L. Existence and local uniqueness of solutions to contact problems in elasticity with nonlinear friction laws // *Int. J. Engng. Sci.*, 1986, v. 24, p. 1755-1768.
- [496] Rabier P.J. and Oden J.T. Solution to Signorini-like contact problems through interface models. 1. Preliminaries and formulation of a variational equality // *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, 1987, v. 11, p. 1325-1350.
- [497] Rabier P.J. and Oden, J.T. Solution to Signorini-like contact problems through interface models. 2. existence and uniqueness theorems // *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, 1988, v. 12, p. 1-17.
- [498] Rannacher R. and Suttmeier F.T. A posteriory Error Control in Finite Element Methods via Duality Techniques: Application to Perfect Plasticity, // *Comput. Mech*, 1999.
- [499] M. Raous (Ed.) Numerical methods in mechanics of contact involving friction // *J. de Mécanique Théorique et Appliquee*, Special Issue, Supp. 1 to v. 7, Gauthier-Villars, 1988.
- [500] Raous M. and Barbarin S. Conjugate Gradient for Frictional Contact // *Proceedings in Contact Mechanics Int. Symp.*, a Curnier (ed.), Presses Polytech. et Univ. Romandes, Lausanne, 1992, p. 123-132.
- [501] Raous M. and Barbarin S. Stress waves in a sliding contact - Part 2: Modeling // In: *Proc. 22nd Leeds-Lion Symposium on Tribology*, D. Dowson et al. (Eds.), Tribology Series, v. 31, Elsevier, Amsterdam, 1996.

- [502] Rashid M.M. The arbitrary local mesh refinement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1998, v. 154, p. 133-150.
- [503] O'Reilly O.M., Papadopoulos P., Lo J.-G. and Varadi P.C. Models of Vehicular Collision: Development and Simulation with Emphasis on Safety. II: On the Modeling of Collision between Vehicles in a Platoon System // *California PATH Research Report UCB-ITS-PRR 97-34*, 1997.
- [504] Rider W.J., Kothe D.B. Stretching and Tearing Interface Tracking Methods // *Technical Report AIAA - 95-0699*, AIAA, 1995 (Available at [www.c3.lanl.gov/~wjr/publ.html](http://www.c3.lanl.gov/~wjr/publ.html)).
- [505] Riedel H. and Sun D.-Z. Simulation of die pressing and sintering of powder metals, hard metals and ceramics // *Num. Meth. in Indust. Proc.*, Chenot, Wood and Zienkiewicz (Eds.), Balkema, Rotterdam, 1992, p. 883-886.
- [506] Ringers B.E. New sliding surface techniques enable lagrangian code to handle deep target penetration/perforation problems // *Lect. Notes Engng.* 1983, No. 3, p. 36-46.
- [507] Rvachev V.L. and Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // *AMR*, 1995, v. 48(4), p. 151-188
- [508] Sachdeva T.D. and Ramakrishnan C.V. A Finite Element Solution for the Two-dimensional Elastic Contact Problems with Friction // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1981, v. 17, p. 1257-1271.
- [509] Saleeb A.F., Chen K. and Chang T.Y.P. An effective two-dimensional frictional contact model for arbitrary curved geometry // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1994, v. 37, p. 1297-1321
- [510] de Saracibar A. and Chiumenti M. Numerical Analysis of Frictional Wear Contact Problems. Computational Model and Applications // to appear in *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1998.
- [511] Sarwas R.E. Hidden line elimination and a modified pinball algorithm for finite element contact-impact problems with shell elements, // M.S. Thesis, Northwestern University, Evanston, IL, 1989.
- [512] de Souza Neto E.A., Hashimoto K., Peric D. and Owen D.R.J. A phenomenological model for frictional contact accounting for wear effects // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1996, A354, p. 819-843.
- [513] Schweizerhof K. and Hallquist J.O. Explicit integration schemes and contact formulations for thin metal forming. FE-simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry // *VDI Berichte 894*, Zurich-Switzerland, Dusseldorf: VDI Verlag, 1991, p. 405-439.

- [514] Schweizerhof K., Hallquist J.O., Waincott B. Improvements in contact algorithms for the simulation of thin sheet metal forming with explicit finite element programs // In: Num. Meth. in Industrial Forming Processes. Proc. of NUMIFORM 92, Valbonne-France, Edited by J.L. Chenot, R.D. Wood and O.C.Zienkiewicz, Rotterdam: Balkema, 1992, p. 535-542.
- [515] Seireg A.A. and Rodriguez J. Optimizing the Shape of Mechanical Elements and Structures, Marcel Dekker, Inc., New York, 1997.
- [516] Sethian J.A. Level Set Methods. Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, Cambridge University Press, 1996.
- [517] Sethian J.A. Tracking interfaces with level sets // American Scientist, 1998, v. 85, p. 254.
- [518] Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1999.
- [519] Sethian J., Evolution, Implementation, and Application of Level Set and Fast Marching Methods for Advancing Fronts // J. Comput. Phys., 2001, 169, p. 503-555.
- [520] Shai I. and Santo M. Heat transfer with contact resistance // Int. J. Heat Mass Transfer, 1982, v. 24, 465-470.
- [521] Sharif N.H. and Wiberg N.-E. Stationary level set method for modeling sharp interfaces in groundwater flow // Preprint 2001:06, Chalmers University, Goteborg, 2001. Available at [http://www.phi.chalmers.se/pub/preprints/pdf/-\\_phiprint-2001-06.pdf](http://www.phi.chalmers.se/pub/preprints/pdf/-_phiprint-2001-06.pdf)
- [522] Shephard M.S. Approaches to the automatic generation and control of finite element meshes // AMR, 1988, v. 41(4), p. 169-185.
- [523] Shyy W., Francois M., Udaykumar H.S., N'dri N. and Tran-Son-Tay R. Moving boundaries in micro-scale biofluid dynamics // AMR, 2001, v. 54(5), p. 405-453.
- [524] Signorini A. Sopra alcune questione di elastostatica // Atti Soc. Ital. Progr. Sci., 1933, p. 513-533.
- [525] Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinearizzat e semilinearizzata // Rend. di Matem. e delle sue appl., 1959, T. 18, No. 1-2, p. 95-139.
- [526] Simo J.C., Wriggers P. and Taylor R.L. A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite-element Solution of Contact Problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1985, v. 50, p. 163-180.
- [527] Simo J.C., Wriggers P., Schweizerhof K.H. and Taylor R.L. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints // Int. J. Num. Meth. Engng., 1986, v. 23, p. 779-800.

- [528] Simo J.C. and Laursen T.A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction // *Computer and Structures*, 1992, v. 42, p. 97-116.
- [529] Simo J., Oliver J. and Armero F. An analysis of strong discontinuities induced by softening solutions in rate-independent solids // *J. Comput. Mech.*, 1993, v. 12, p. 277-296.
- [530] Simon J.C. On a fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1991, v. 60, p. 153-173.
- [531] Simons J.W. and Bergan P.G. A finite element formulation of three-dimensional contact problems with slip and friction // *J. Comput. Mech.*, 1986, v. 1, p. 153-164.
- [532] Singh K.P., Paul B. Numerical solutions of non-Hertzian elastic contact problems // *J. Appl. Mech.*, 1974, v. 41, p. 484-490.
- [533] Spalding D.B., Jun L. "Numerical simulation of flows with moving interfaces." Published in *PCH PhysioChemical Hydrodynamics*. 1988. Vol 10, No. 5/6, pp. 625-637.
- [534] Stadter J.T. and Weiss R.O. Analysis of Contact through Finite Element Gaps // *Computers and Structures*, 1979, v. 10, p. 867-873.
- [535] Stampacchia G. and Lions J.L. Inequations variationnelles non coercives // *C. R. Acad. Sci, Paris*, 1965, v. 261, p. 25-27.
- [536] Stampacchia G. and Lions J.L. Variational inequalities // *Com. Pure Appl. Math.*, 1967, v. 20, p. 493-519.
- [537] Stechschulte R.A., Luchini J.R. A laminated composite solid element and its application to tire analysis // *Tire Sci. Technol., TSTCA*, 1987, v. 15, p. 42-57.
- [538] Stein E. and Wriggers P. Calculation of impact contact problems of thin elastic shells taking into account geometrical nonlinearities within the contact region // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1982, v. 34, p. 861-880.
- [539] Sumi Y. Computational crack path prediction // *Theoret. Appl. Fract. Mech.*, 1985, v. 4, pp. 149-156.
- [540] Sun S.M., Tzou H.S. and Natori M.C. Parametric quadratic programming method for dynamic contact problems with friction // *AIAA J.*, 1994, v. 32, No. 2, p. 371-378.
- [541] Sussman M., Smereka P. and Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow // *J. Comput. Phys.*, 1994, v. 114, p. 146.
- [542] Sussman, M., et al. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows // *J. Comput. Phys.*, 1999, v. 148, p. 81.

- [543] Suttmeier F.T. Adaptive Finite Element Approximation of Problems un Elastoplasticity Theory // PhD Dissertation, Institute for Applied Mathematics, Univ. of Heidelberg, 1996.
- [544] Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Num. Anal., 1984, v. 21, p. 995.
- [545] Szymczak W.G., Rogers J.C.W., Solomon J.M., Berger A.E. A numerical algorithm for hydrodynamic free boundary problems // J. Comput. Phys., 1993, v. 106, p. 319-336.
- [546] Tada, Y. and Nishihara, N. Optimum Shape Design of Contact Surface with Finite Element Methods // Advances in Engineering Software, 1993, v. 18, p.75-85.
- [547] Tabor D. Friction - The Present state of Our Understanding // J. Lubr. Technology, 1981, v. 103, p. 169-179.
- [548] Takewaki H., Nishiguchi A. and Yabe T. The cubic-interpolated pseudo-particle (CIP) method for solving hyperbolic-type equations // J. Comput. Phys., 1985, v. 61, p. 261.
- [549] Takewaki H. and Yabe T. Cubic-interpolated pseudo-particle (CIP) method - application to nonlinear or multi-dimensional problems // J. Comput. Phys., 1987, v. 70, p. 355.
- [550] Le Tallec P. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations // Int. J. Num. Meth. Engng., 1994, v. 37, p. 1159-1186.
- [551] Tanaka Koichi, Masuda Taisuke, Kodama Hitochi High-speed impact of baseball bats and balls, 1st Report Impact of alloy bats and balls // Trans. JSME, 1992, A58, No. 556, p. 2365-2369 (in Japanese).
- [552] Tanaka Koichi, Masuda Taisuke, Kodama Hitochi High-speed impact of baseball bats and balls, 2nd Report Impact of CFRP cylinders and balls // Trans. JSME, 1992, A58, No. 556, p. 2370-2374 (in Japanese).
- [553] Tanaka R., Nakamura T., Yabe T. and Wu H. A class of conservative formulation of the CIP method. // CFD J., 1999, v. 8, p. 1.
- [554] Tanaka R., Nakamura T. and Yabe T. Constructing an exactly conservative scheme in a non-conservative form. // Comput. Phys. Comm., 2000, v. 126, p. 232.
- [555] Tarzia D.A. A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion Stefan problem // University di Ferenze, Technical Report, 1988.
- [556] Taylor R.L. and Papadopoulos P. On a Finite Element Method for Dynamic Contact/Impact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1993, v. 36, p. 2123-2140,
- [557] Terzopoulos D., Platt J., Barr A., and Fleischer K., Elastically deformable models // In: Proc. of SIGGRAPH'87, Computer Graphics, 1987, v. 21, No. 4, pp. 205-214.



- [558] Thompson E. Use of Pseudo-Concentrations to Follow Creeping Viscous Flows During Transient Analysis // *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 1986, v. 6, pp. 749-761; *Proc. of the Third Inter. Conf. Numer. Meth. in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, v. 18, Springer Verlag N.Y., 1986, pp. 163-173.
- [559] Tomita Y. Simulations of plastic instabilities in solid mechanics // *AMR* 1994, v. 47(6) Part 1, p. 171-205; A. S. Kobayashi (ed.) *AMR*, 1994, v. 47(6) Part 2.
- [560] J. F. Tompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill (Eds.) *Handbook of grid generation*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [561] Toro E.T. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics* // Berlin, Springer-Verlag, 1997.
- [562] Tseng J. and Olson M.D. The Mixed Finite Element Method Applied to Two-dimensional Elastic Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1981, v. 17, p. 991-1014.
- [563] Udaykumar H.S., Mittal R. and Shyy W. Computation of Solid-Liquid Phase Fronts in the Sharp Interface Limit on Fixed Grids // *J. Comput. Phys.*, 1999, v. 153, p. 535-574.
- [564] Unverdi S.O. and Trugggvason G. A front-tracking projection method for viscous, incompressible, multi-fluid flows // *J. Comput. Phys.* 1992, v. 100, p. 25-37.
- [565] Utsumi T., Kunugi T. and Aoki T. Stability and accuracy of cubic-interpolated propagation scheme. // *Comput. Phys. Comm.*, 1996, v.101, p. 9.
- [566] Verfurth R. A Review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques // Technical report, Institut fur Angewandte Mathematik, Universitat, Zurich, 1993.
- [567] Wakisaka T., Takeuchi S. and Chung J.H. A numerical study on the mixture formation process in fuel injection engines by means of the CIP method // *CFD J.*, 1999, v. 8, p. 82.
- [568] Wang P.Y., Yabe T. and Aoki T. A general hyperbolic solver - the CIP method - applied to curvilinear coordinates // *J. Phys. Soc. Japan*, v. 62, p. 1865.
- [569] Wang S.P. and Nakamachi E. The inside-outside search algorithm for finite element analysis // *Int. J. Num. Meth. Engng*, 1997, v. 40, p. 3665-3685.
- [570] Welch J.E., Harlow F.H., Shannon J.P. and Daly B.J. *The MAC method* // Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-3425, 1965.
- [571] White L. and Oden J.T. Dynamics and control of viscoelastic solids with contact and friction effects // *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, 1989, v. 13, p. 459-474.

- [572] Wikstrom N. A literature survey aiming to shed some light on the cavitation simulation problem // Techn. Report, Chalmers Univ. Techn., 2000, available at <http://www.na.chalmers.se/~niklasw/documents/survey.pdf>
- [573] Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow // In: Methods in Computational Physics, v. 3, Fundamental methods in Hydrodynamics, Academic Press, New York, 1964, p. 211-263.
- [574] Wilkins M.L. Mechanics of penetration and perforation // Int. J. Engng. Sci., 1978, v. 16, p. 793-807.
- [575] Wilkins M.L. Computer simulation of penetration phenomena // In: Ballistic materials and penetration mechanics, Roy C. Laible (Ed.), Amsterdam, New York, Oxford, 1980, p. 225-252.
- [576] Wilkins M.L. Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations. // J. Comput. Phys., 1980, v. 36, p. 281.
- [577] Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [578] Wilson E.A. and Parsons B. Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems using Differential Displacements. // Int. J. Num. Meth. Engng., 1970, v. 2, p. 387-395.
- [579] Woo K.L. and Thomas T.R. Contact of Rough Surfaces: A Review of Experimental Works // Wear, 1980, v. 58, p. 331-340.
- [580] Woodward P.Y. and Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. // J. Comput. Phys., 1984, v. 54, p. 115.
- [581] Wriggers P. and Simo J.C. A Note on Tangent Stiffness for Fully Nonlinear Contact Problems // Comm. Appl. Num. Meth., 1985, v. 1, p. 199-205.
- [582] Wriggers P., Simo J.C. and Taylor R. L. Penalty and Augmented Lagrangian Formulations for Contact Problems. // In: Proc. NUMETA 85 Conf., eds. J. Middleton and G. N. Pande, Balkema, Rotterdam, 1985.
- [583] Wriggers P., Wagner W. and Stein E. Algorithms for Nonlinear Contact Constraints with Application to Stability Problems of Rods and Shells, // J. Comput. Mech., 1987, v. 2, p. 215-230.
- [584] Wriggers P. On Consistent Tangent Matrices for Frictional Contact Problems. // In: Proc. of NUMETA 87 Conf., eds. J. Middleton and G. N. Pande, Nijhoff, Dordrecht, 1987.
- [585] Wriggers P. and Wagner W. a Solution Method for the Postcritical Analysis of Contact Problems. // In: The Mathematics of Finite Elements and Applications VI Proceedings of MAFLEAP 87, ed. J. Whiteman, Academic Press, London, 1988.

- [586] Wriggers P., Van T.V. and Stein E. Finite-element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. // *Computers and Structures*, 1990, v. 37, p. 319-331.
- [587] Wriggers P. and Miehe C. Recent Advances in the Simulation of Thermomechanical Contact Processes // In: *Proceedings of COMPLAS III*, eds. D.R.J. Owen, E. Hinton, E. E. Onate, Pineridge Press, 1992.
- [588] Wriggers P. Continuum Mechanics. Nonlinear Finite Element Techniques and Computational Stability // In: *Progress in Computational Analysis of Inelastic Structures*, ed. E. Stein, Springer, Wien, 1993.
- [589] Wriggers P. and Zavarise G. Thermomechanical Contact - A Rigorous but Simple Numerical Approach // *Computers and Structures*, 1993, v. 46, p. 47-53.
- [590] Wriggers P. and Zavarise G. Application of Augmented Lagrangian Techniques for Non-linear Constitutive Laws in Contact Interfaces // *Comm. Num. Meth. Engng.*, 1993, v. 9, p. 815-824.
- [591] Wriggers P. and Miehe C. Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis - A Finite Element Model. // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1994, v. 113, p. 301-319.
- [592] Wriggers P. Finite Element Algorithms for Contact Problems. // *Archive Comput. Meth. Engng.*, 1995, v. 2, p. 1-49.
- [593] Wriggers P. and Zavarise G. On contact between 3-dimensional beams undergoing large deflections // *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13:429-438, 1997.
- [594] Wriggers P. and Scherf O. Adaptive finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strains. // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1998, v. 151, p. 593-603.
- [595] P.Wriggers, P. Panagiotopoulos (Eds.) *New Developments in Contact Problems* // CISM courses and lectures, No.384, Udine, Springer-Verlag, Wien, New York, 1999, p. 1-246.
- [596] Wronski M. and Jean M. Some computational aspects of structural dynamics problems with frictional contact // In: *Contact Mechanics*, M. Raous, J.J. Moreau, J.J. Jean (Eds.), Plenum Press, New York, 1995.
- [597] Xie Y.M. and Steven G.P. A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization // *Computers and Structures*, 1993, v. 49, p. 885-896.
- [598] Xie Y.M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

- [599] Xing H.-L., Fujimoto T., Makibouchi A. and Nikishkov G.P. (1998) Static-explicit FE modeling of 3-d large deformation multibody contact problems on parallel computer // In: Simulation of Material Processing: Theory, Methods, Applications. Huetink, Baajiens (Eds.), Balkema, Rotterdam, 1998, p. 207-212.
- [600] Xing H.-L. and Makinouchi A. A node-to-point contact element strategy and its applications // RIKEN Review No. 30, 2000.
- [601] Yabe T. and Takei E. A new higher order Godunov method for general hyperbolic problems. // J. Phys. Soc. Japan, 1988, v. 57, p. 2598
- [602] Yabe T. and Aoki T. A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation. I. One-dimensional solver. // Comput. Phys. Comm., 1991, v. 66, p. 219.
- [603] Yabe T., Ichikawa T., Wang P.Y., Aoki T., Kadota Y. and Ikeda F. A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation. II. Two- and Threedimensional solvers. // Comput. Phys. Comm., 1991, v. 66, p. 233.
- [604] Yabe T. and Wang P.Y. Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid. // J. Phys. Soc. Japan, 1991, v.60, p. 2105.
- [605] Yabe T. and Xiao F. Description of complex and sharp interface during shock wave interaction with liquid drop. // J. Phys. Soc. Japan, 1993, v. 62, p. 2537.
- [606] Yabe T. and Xiao F. Description of complex and sharp interface with fixed grids in incompressible and compressible fluid. // Comput. Math. Appl., 1995, v. , p. 15.
- [607] Yabe T. Interface capturing and universal solution of solid, liquid and gas by CIP method. // Proceedings Conf High Performance Computing on Multi-phase Flow, Tokyo, 1997.
- [608] Yabe T., Zhang Y. and Xiao F. A numerical procedure  $\Psi$ CIP $\Psi$  to solve all phases of matter together // Lecture Note in Physics, Sixteenth Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York, 1998, p. 439.
- [609] Yabe T. Simulation of laser-induced melting and evaporation dynamics by the unified solver CIP for solid, liquid and gas // in Mathematical Modeling of Weld Phenomena 4, edited by H. Cerjak Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1998, p. 26.
- [610] Yabe T., Xiao F. and Zhang Y. Strategy for unified solution of solid, liquid, gas and plasmas // AIAA Paper No. 99-3509, 30th AIAA Fluid Dynamics Conference, Norfolk, 1999.
- [611] Yoon S.Y. and Yabe T. The unified simulation for incompressible and compressible flow by the predictor-corrector scheme based on the CIP method // Comput. Phys. Commun., 1999, v. 119, p. 149.

- [612] Yagawa G., Soneda N. and Yosimura S. A large scale finite element analysis using domain decomposition method on a parallel computer // *Computers and Structures*, 1991, v. 38, p. 615-625.
- [613] Yagawa G. and Sgiويا R. Parallel finite elements on a massively parallel computer with domain decomposition // *Computing Systems Engng.*, 1993, v. 4, p. 495-503
- [614] Yagawa G., Yoshioka A., Yoshimira S. and Soneda N. A parallel finite element method with a supercomputer network. // *Computers and Structures*, 1993, v. 47, p. 407-418.
- [615] Yavari B., Tworzydlo W.W. and Bass J.M. A thermo-mechanical model to predict the temperature distribution of steady state rolling tires. // *Tire Sci. Technol., TSTCA*, 1993, v. 21, p. 163-178.
- [616] Yovanovich M. M. Thermal Contact Correlations // *AIAA Paper*, 81-1164, 1981.
- [617] Zavarise G., Wriggers P., Stein E. and Schrefler B.A. A Numerical Model for Thermo-mechanical Contact based on Microscopic Interface Laws. // *Mechanics Research Comm.*, 1992, v. 19, p. 173-182.
- [618] Zavarise G., Wriggers P., Stein E. and Schrefler B.A. Real contact mechanisms and finite-element formulation - a coupled thermomechanical approach. // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1992, v. 35, p. 767-785.
- [619] Zavarise G., Wriggers P. and Schrefler B.A. On Augmented lagrangian Algorithms for Thermomechanical Contact Problems with Friction. // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1995, v. 38, p. 2929-2949.
- [620] Zavarise G., Wriggers P. and Schrefler B.A. A Method for Solving Contact Problems. // *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, 1998, v. 42, p. 473-498.
- [621] Zhang Q., Hisada T. Analysis of fluid-structure interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE finite element method // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2001, v. 190, p. 6341-6357.
- [622] Zhong Z.H. A contact searching algorithm for general 3-D contact-impact problems. // *Dissertation no. 178, Linkoping Institute of Technology*, 1988.
- [623] Zhong Z.H. and Nilsson L. A contact searching algorithm for general contact problems. // *Computers and Structures*, 1989, v. 33, p. 197-209.
- [624] Zhong Z.H. and Mackerle J. Static Contact Problems - A Review, // *Engineering Computations*, 1992, v. 9, p. 3-37.
- [625] Zhong Z.H. and Mackerle J. Contact-impact Problems: A Review with Bibliography. // *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.*, 1993, v. 47(2), p. 55-76.

- [626] Zhong Z.H. Finite Element Procedures for Contact-impact Problems, Oxford University Press Inc., Oxford, 1993.
- [627] Zhong Z.-H. and Mackerle J. Contact-impact problems : A review with bibliography. // Applied Mechanics Review, 1994, v. 47, p. 55-76.
- [628] Zhong Z.H. and Nilsson L. Automatic contact searching algorithm for dynamic finite element analysis // Computers and Structures, 1994, v. 52, N. 2, p. 187-197.
- [629] Zhong Z.H. and Nilsson L. Lagrange multiplier approach for evaluation of friction in explicit finite-element analysis. // Communications in Numerical Methods in Engng, 1994, v. 10, p. 249-255.
- [630] Zhu T. and Atluri S.N. A Modified Collocation Method and a Penalty Formulation for Enforcing the Essential Boundary Conditions in the Element Free Galerkin Method // Computational Mechanics, 1998, v. 21, p. 211-222.
- [631] Zhuang Y., Real-time simulation of physically-realistic global deformations. // PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 2000.
- [632] Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Analysis // Int. J. Num. Meth. Engng., 1987, v. 24, p. 337-357.
- [633] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. The Finite Element Method, Volume I and II, Mac-Graw Hill Book Company, 1991.
- [634] Zukas J.A. Numerical simulation of impact phenomena // In: Impact dynamics, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapur, 1982, p. 367-417.
- [635] Zukas J.A., Nickolas T., Swift H.F., Greszuk L.B. and Curran D.R. Impact dynamics, New York, Wiley, 1982 ( Перевод: Зукас Дж. А., Николас Т., Свифт Х.Ф., Грешук Л.В., Курран Д.Л. Динамика удара, М., Мир, 1985, 296 с.)