

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Бураго Николай Георгиевич

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ
И ЗАКРИТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 1977 г.

Работа выполнена в Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте.

Научный руководитель: доцент, кандидат физико-математических наук В.Н.Кукуджанов.

Официальные оппоненты: профессор, доктор физико-математических наук В.С.Ленский,
старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук
В.И.Малый.

Ведущее предприятие - Московский инженерно-строительный институт.

Автореферат разослан " 10 " мая " 1977 года.

Защита состоится " 10 " июня " 1977 года в 15 ч. 30 мин. на заседании Специализированного Совета № 3 по механике при МГУ (Д.053.05.03) по адресу: П17234, Москва, Ленинград, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Университета.

Ученый секретарь
Специализированного Совета
№ 3 по механике при МГУ
профессор

И.А.Кийко

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию квазистатических геометрически нелинейных осесимметричных задач о выпучивании и закритическом деформировании тонких непологих упруго-пластических оболочек. Изучение таких задач представляет собой сложную проблему механики деформируемого твердого тела, требующую привлечения численных методов и мощных ЭВМ.

Актуальность этой проблемы обусловлена непрерывным повышением уровня технических требований к точности оценок несущей способности оболочек - часто встречающихся элементов конструкций в различных областях техники.

Основные цели работы заключаются в том, чтобы

- а) построить эффективные численные алгоритмы для расчета осесимметричных квазистатических процессов выпучивания упругопластических оболочек, включая закритические режимы деформирования, отвечающие потере устойчивости;
- б) исследовать с помощью этих алгоритмов характерные новые задачи указанного класса.

Научная новизна работы состоит в том, что

- а) задачи осесимметричного выпучивания упругопластических оболочек, характеризующиеся неоднозначностью форм равновесия по отношению к параметру нагрузки (нелинейные задачи устойчивости "в большом"), рассмотрены в уточненной постановке: на основе геометрической и нелинейной теории тонких непологих оболочек в форме Э.Рейсснера при общем виде связи между напряжениями и деформациями ("в приращениях"), допускающей применение различных моделей упругопластического тела.

- б) построены новые численные алгоритмы решения указанного выше класса задач, основанные на методе Ньютон -Канторовича и (другой вариант) на методе дифференцирования по параметру. Аппроксимации решения осуществлялась при этом с помощью сеточных функций и (другой вариант) с помощью сплайн-функций.
- в) предложен основанный на сплайн-аппроксимации новый алгоритм решения вспомогательных линейных двухточечных краевых задач, возникающих при реализации упомянутых выше общих методов (при использовании сеточной аппроксимации решение таких вспомогательных задач проводилось методом ортогональной прогонки).
- г) решен и проанализирован ряд новых задач о выпучивании и закритических деформациях сферических цилиндрических, конических и тороидальных оболочек в упомянутой выше постановке.
- д) проведены многочисленные сравнения полученных в настоящей работе решений с соответствующими результатами известных физических экспериментов по выпучиванию сферических куполов и цилиндрических оболочек.

Для обоснования достоверности представленных результатов приняты следующие меры:

- а) эффективность предложенных в работе алгоритмов и правильность работы соответствующих программ для ЭВМ показана на примерах решения характерных известных задач теории оболочек (линейные краевые задачи моментной теории непологих оболочек, геометрически нелинейные задачи докритического деформирования упруго-пластических оболочек, задачи о выпучивании и закритических деформациях упругих оболочек).

- б) сходимость численных решений новых задач контролировалась путем просчета вариантов при последовательном измельчении расчетной сетки. Решение конкретных задач проводилось по различным программам, различными методами. Хорошее согласование полученных таким образом результатов дает определенную уверенность в их правильности.

Практическая ценность работы состоит в том, что на основе предложенных в работе алгоритмов получены программы универсального характера для решения задач указанного класса на ЭВМ.

Анализ соответствия полученных в работе численных решений и результатов известных физических экспериментов показал, что предложенные алгоритмы и составленные на их основе программы позволяют моделировать на ЭВМ процессы осесимметричного выпучивания упруго-пластических оболочек с хорошей точностью.

В настоящее время такие программы могут быть использованы как для дальнейших теоретических исследований процессов выпучивания оболочек, так и в практической работе проектно-конструкторских организаций.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертации по мере ее выполнения (1974-1976 г.г.) обсуждались на научных семинарах и конференциях в МФТИ, МГУ, МАИ, ВИА им. Жуковского и ВЦ АН СССР. Диссертация была доложена на Всесоюзном семинаре по механике деформируемого твердого тела под руководством чл.-корр. АН СССР Э.И. Григолюка (тезисы доклада см. [1]) и на VII научной конференции по применению ЭВМ в механике деформируемого твердого тела (см. [2]). Основное содержание диссертации отражено в работах [3-5].

Объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и выводов, содержит 131 страницу, в том числе 12 таблиц, 33 рисунка. Библиография включает 115 наименований.

Краткое содержание работы.

Во введении изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена анализу современного состояния исследований по задачам выпучивания упругопластических оболочек.

Первые исследования задач выпучивания оболочек в условиях неоднозначности форм равновесия оболочки по отношению к параметру нагрузки были выполнены В.И.Феодосьевым [1946, 1963], И.И.Трапезиним [1958], Б.Будянским [1959], Г.Вейнитшке [1960], Г.Тарстоном [1961], Г.Б.Келлером [1968] и другими на основе геометрически нелинейной теории пологих оболочек типа Т.Кармана для упругого материала. Подробный анализ этих работ дан в известных монографиях А.С.Большира [1956, 1967], а также в обзоре И.И.Воровича и Н.И.Мианковой [1974]. В исследованиях последнего времени, выполненных Э.И.Григолюком, В.И.Мамаем и А.Н.Фроловым [1972], Н.В.Валишвили [1972, 1974], выпучивание упругих оболочек было изучено на основе более точной геометрически нелинейной теории непологих оболочек типа Э.Рейсснера. Было выяснено, что влияние уточняющих членов на верхние критические нагрузки выпучивания может достигать порядка 10%. При закритическом деформировании это влияние является еще более существенным.

Успехи упругопластического анализа докритического деформирования пластин и оболочек, обусловленные работами А.А.Ильющина

[1944, 1948]; Ю.Н.Работнова [1951]; В.В.Соколовского [1944, 1946]; И.А.Биргера [1951, 1961]; А.С.Григорьева [1954]; Ю.Р.Лепика [1956, 1964]; П.М.Огибалова, М.А.Колтунова [1969]; И.С.Цуркова [1956] и многих других, стимулировали развитие исследований по геометрическим нелинейным задачам устойчивости оболочек с учетом пластических эффектов. Ряд принципиальных вопросов, связанных с устойчивостью и выпучиванием упругопластических оболочек освещен в серии работ В.Д.Клюшника [1958, 1976].

Первые решения задач о выпучивании и закритических деформациях упругопластических оболочек даны А.А.Курдюмовым [1961], П.А.Лукашем [1961], В.В.Сорокиным [1966] и др. на основе геометрически нелинейной теории оболочек типа Кармана и деформационной теории пластичности Генки-Ильющина. Эти исследования получили дальнейшее развитие в работах Б.Я.Кантора [1971], М.Г.Корнишина, Н.И.Дедова и Н.И.Столярова [1973], Л.Г.Корнейчука [1975] и др.

В последнее время значительный интерес также проявляется к решению геометрически нелинейных задач выпучивания упругопластических оболочек на основе теории течения Прандтля-Рейсса с учетом истории нагружения. Большая часть имеющихся в этом направлении работ посвящена изучению процессов докритического деформирования упругопластических оболочек. Такие процессы исследовались Ю.М.Волчковым и А.В.Павловым [1970]; П.Марколом [1970]; Дж.Гердингом, Ф.Симоненом и Д.Хантером [1971]; Е.Поповым [1970]; на основе нелинейной теории оболочек типа Т.Кармана, а также И.В.Ширко и В.Л.Якушевым [1973]; М.Хамада и М.Танака [1973] на основе более точной нелинейной теории оболочек типа Э.Рейсснера.

В работах Р.Эмертона и Н.Морриса [1972], М.Вилкинсона и Р.Фултона [1972] алгоритмы расчета докритического деформирования

упруго-пластических сферических оболочек по теории течения были применены для определения верхних критических нагрузок выпучивания, при этом полагалось, что признаком верхней критической нагрузки выпучивания является расходимость процесса решения. Такой подход к определению критических нагрузок является ненадежным, поскольку нет полной уверенности в том, что нагрузки, при которой процесс решения задачи разошелся, действительно соответствует верхней критической нагрузке выпучивания.

Более корректный подход к определению верхних критических нагрузок выпучивания, позволяющий проследить поведение упруго-пластических оболочек в области закритических деформаций, развивается в работах Дж.Хайеса и Л.Ли [1970], И.Андо, К.Инда, Т.Кавая, Г.Ягава, и Ф.Кичуки [1972], а также в наших работах [1-5]. В соответствии с этим подходом в алгоритмах решения геометрически нелинейных задач выпучивания упруго-пластических оболочек по теории течения предусматривается в том или ином виде процедура смены параметра выпучивания. Роль такого параметра в зависимости от ситуации предоставляется параметру нагрузки, характерному перемещению, деформации и другим подобным параметрам.

Значительное место в первой главе отведено качественному анализу имеющихся методов решения геометрически нелинейных задач для упруго-пластических оболочек и встречающихся при решении таких задач математических трудностей.

Вторая глава содержит описание принятой в настоящей работе постановки задачи. Процесс выпучивания упруго-пластических оболочек полагается осесимметричным. Геометрические соотношения и уравнения равновесия соответствуют геометрически нелинейной теории

оболочек Э.Рейсснера, соотношения которой имеют вид: 1)

$$\begin{aligned} \beta &= \varphi_0 - \varphi; u = r - r_0; w = z - z_0; r' = \alpha \cos \varphi; z' = \alpha \sin \varphi; \\ \varepsilon_{z_0} &= \alpha / \alpha_0 - 1; \delta \varepsilon_z = \beta' / \alpha_0; \varepsilon_{\theta\theta} = u / r_0; \delta \varepsilon_{\theta} = (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) / r_0; \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_{z_0} + \eta \delta \varepsilon_z; \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta_0} + \eta \delta \varepsilon_{\theta}; H = N_z \sin \varphi + Q \cos \varphi; \\ V &= N_z \cos \varphi - Q \sin \varphi; (rH)' - \alpha N_{\theta} + \alpha r \rho_H = 0; \\ (\alpha V)' + \alpha r \rho_V &= 0; (zN_z)' - r' M_{\theta} - \alpha r Q = 0; \end{aligned} \quad (I)$$

$$\rho_V = \rho_V(r, \varphi, z, \beta, \rho); \rho_H = \rho_H(r, \varphi, z, \beta, \rho);$$

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i d\eta; M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \eta d\eta; i = z, \theta;$$

где штрих означает дифференцирование по пространственному переменному ξ

($\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$); $r_0, z_0, \varphi_0, \alpha_0$ - заданные функции от ξ , характеризующие начальную геометрию оболочки вращения (см. рис.1); аналогичные геометрические характеристики для деформированного состояния оболочки обозначены через r, z, φ, α ;

α_0, α - коэффициенты Ляме вдоль меридиана; η - координата, отсчитываемая от срединной поверхности вдоль нормали по направлению к оси симметрии (ось x_2); h - толщина оболочки ($-h/2 \leq \eta \leq h/2$); β - угол поворота нормали; u, w ; H, V и ρ_H, ρ_V - проекции вектора перемещений

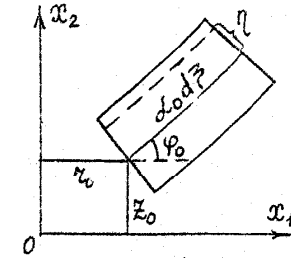


рис. 1

1) Используется уточненная форма теории, см. статью Э.И. Григолюка, В.И. Мамая, А.Н. Фролова, Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 2.

точек срединной поверхности, главного вектора сил в меридиональной плоскости и вектора распределенной нагрузки на оси X_1 и X_2 . В общем случае полагается, что P_H и P_V могут зависеть от параметров текущей геометрии срединной поверхности, пространственного параметра ξ и параметра нагрузки P . Остальные обозначения являются общепринятыми.

Связь между напряжениями и деформациями принята в следующей общей дифференциальной форме ("в приращениях"):

$$\Delta \epsilon_{\xi} = g_{10} + g_{11} \Delta \epsilon_{\xi} + g_{12} \Delta \epsilon_{\theta}; \Delta \epsilon_{\theta} = g_{20} + g_{21} \Delta \epsilon_{\xi} + g_{22} \Delta \epsilon_{\theta}; \quad (2)$$

где коэффициенты g_{ij} являются заданными функциями напряжений, деформаций, констант материала и параметров упрочнения. В работе приведены конкретные выражения для этих коэффициентов для случаев линейно-упругого материала и упруго-пластических материалов, описываемых деформационной теорией и теорией течения.

Параметр выпучивания или параметр "времени" (т.е. величина, монотонное независимое изменение которой определяет развитие процесса деформирования) t в общем случае определяется как некоторый функционал от решения:

$$t = T(\bar{P}), \quad (3)$$

где $\bar{P} = (w, \beta, u, V, H, M_{\xi}, \epsilon_{\xi}, \epsilon_{\theta}, P)$ - вектор основных искомым величин (вектор решения). Остальные искомые величины нетрудно выразить через основные с помощью соотношений (1).

Вид функционала (3) может быть различным для различных этапов процесса деформирования и определяется так, чтобы монотонное возрастание величины t на данном этапе отвечало физической сущности задачи. Параметр выпучивания может иметь вид,

например:

$$T(\bar{P}) = P; \quad T(\bar{P}) = w \Big|_{\xi=\xi_0}; \quad T(\bar{P}) = \frac{\int_{\xi_0}^{\xi_0} w d\xi}{(\xi_0 - \xi_0)} \quad \text{и т.д.}$$

т.е. параметром выпучивания является параметр нагрузки, характерное перемещение, интегральный прогиб и т.д. Весьма удобным оказывается выбор в качестве параметра выпучивания работы внешних сил. В этом случае решение большинства задач о выпучивании и закритических деформациях удается получить, не прибегая к операции смены параметра. Характерным признаком необходимости смены параметра выпучивания является появление быстрого роста производных от решения по этому параметру.

Система уравнений (1) - (3) дополняется начальным и граничным условиями:

$$\bar{P} \Big|_{t=t_0} = \bar{P}_0; \quad (4)$$

$$U_a \bar{y} \Big|_{\xi=\xi_a} = \bar{V}_a; \quad U_e \bar{y} \Big|_{\xi=\xi_e} = \bar{V}_e; \quad (5)$$

где $\bar{y} = (w, \beta, u, V, H, M_{\xi})$. Полагаем, что граничные условия (5) удовлетворяют известным ограничениям, вытекающим из принципа виртуальных перемещений, а также запрещают смещение оболочки как жесткого целого. Векторы \bar{V}_a и \bar{V}_e могут зависеть от параметра нагрузки (действие на оболочку краевых сил и моментов).

В третьей главе описаны алгоритмы решения поставленной общей задачи. Пусть при значении параметра выпучивания $t = t_n$ решение задачи $\bar{P} = \bar{P}_n$ известно. Найдем решение \bar{P}_{n+1} для следующего близкого значения параметра выпучивания t_{n+1} .

В пределах малого шага $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ проведем квазилинеаризацию исходных нелинейных уравнений (I), (3), (5) (путем их разложения в ряд Тейлора по степеням малых добавок

$\Delta \bar{\Gamma}_n = \bar{\Gamma}_{n+1} - \bar{\Gamma}_n$ с удержанием первых двух членов разложения).

Дополним полученную квазилинейную систему уравнений соотношениями (2) и преобразуем ее так, чтобы она содержала только приращения основных искомым величин $\Delta \bar{\Gamma}_n$. Система квазилинейных уравнений на шаге Δt_n имеет вид (индекс n опущен):

$$\begin{cases} \Delta \bar{y}' = A \Delta \bar{y} + \bar{F}^{(1)} + \bar{F}^{(2)} \Delta \rho, \\ U_a \Delta \bar{y} \Big|_{z=z_a} = \bar{V}_a^{(1)} + \bar{V}_a^{(2)} \Delta \rho, U_b \Delta \bar{y} \Big|_{z=z_b} = \bar{V}_b^{(1)} + \bar{V}_b^{(2)} \Delta \rho, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Delta \epsilon_z = (g_{11} \bar{E}_1 + g_{12} \bar{E}_2) \Delta \bar{y} + \tilde{g}_{10}, \\ \Delta \epsilon_\theta = (g_{21} \bar{E}_1 + g_{22} \bar{E}_2) \Delta \bar{y} + \tilde{g}_{20}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\Delta t = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial T}{\partial \gamma_k} \Delta \gamma_k + \frac{\partial T}{\partial \rho} \Delta \rho + \tilde{z}_0, \quad (8)$$

где γ_k - компоненты вектора $\bar{\Gamma}$; коэффициенты и правые части этих уравнений являются определенными функциями вектора решения, соответствующие выражения и их вывод приведены в диссертации.

Решения краевой задачи (6) ищем в виде

$$\Delta \bar{y} = \Delta \bar{y}^{(1)} + \Delta \bar{y}^{(2)} \cdot \Delta \rho \quad (9)$$

где векторы $\Delta \bar{y}^{(i)}$ являются решениями следующих краевых задач

$$\begin{cases} (\Delta \bar{y}^{(i)})' = A \Delta \bar{y}^{(i)} + \bar{F}^{(i)}; \\ U_a \Delta \bar{y}^{(i)} \Big|_{z=z_a} = \bar{V}_a^{(i)}; U_b \Delta \bar{y}^{(i)} \Big|_{z=z_b} = \bar{V}_b^{(i)}; \end{cases} \quad (10)$$

где $i = 1, 2$. Приращения напряжений также представим в виде

$$\Delta \epsilon_k = \Delta \epsilon_k^{(1)} + \Delta \epsilon_k^{(2)} \cdot \Delta \rho; \quad k = z, \theta. \quad (11)$$

Связь величин $\Delta \epsilon_z^{(i)}, \Delta \epsilon_\theta^{(i)}$ с векторами $\Delta \bar{y}^{(i)}$, вытекающая из соотношений (7), (9) и (11), очевидна. Подставляя выражения (9) и (11) в соотношения (8), получим выражение для приращения параметра нагрузки:

$$\Delta \rho = \frac{\Delta t - \sum_{k=1}^8 \frac{\partial T}{\partial \gamma_k} \Delta \gamma_k^{(1)}}{\frac{\partial T}{\partial \rho} + \sum_{k=1}^8 \frac{\partial T}{\partial \gamma_k} \Delta \gamma_k^{(2)}}. \quad (12)$$

Определив $\Delta \rho$, по формулам (9), (11) найдем приращения остальных искомым величин на шаге Δt_n . Окончательно решение $\bar{\Gamma}_{n+1}$ при $t = t_{n+1}$ найдем по формуле

$$\bar{\Gamma}_{n+1} = \bar{\Gamma}_n + \Delta \bar{\Gamma}_n \quad (13)$$

Описанная шаговая процедура имеет второй порядок точности.

Точность решения может быть повышена за счет итерационного уточнения решения при $t = t_{n+1}$. На каждой такой дополнительной итерации поправка к решению $\Delta \bar{\Gamma}$ найдется из решения системы уравнений (6-8), в которой нужно положить в этом случае $\Delta t = 0$ и заново определить коэффициенты и правые части как функции от $\bar{\Gamma}_{n+1}$. Такой процесс решения соответствует методу Ньютона-Канторовича.

Другой применяемый в работе путь построения шагового алгоритма решения задачи заключается в квазилинеаризации исходных нелинейных уравнений путем дифференцирования этих уравнений по

параметру выпучивания I). Полученная таким путем квазилинейная система уравнений отличается от системы уравнений (6) - (8) отсутствием нелинейных членов; знак приращения Δ в этом случае трактуется как знак производной по параметру выпучивания t . Эта система уравнений позволяет поставить в соответствие вектору решения \bar{r} вектор "скоростей" $\dot{\bar{r}}$ (т.е. производных по t , в данном случае $\dot{\bar{r}} \equiv \Delta \bar{r}$), что условно можно записать в виде

$$\dot{\bar{r}} = \Pi(\bar{r}), \tag{14}$$

где Π означает совокупность операций по формированию и решению квазилинейной системы уравнений в "скоростях". Алгоритмы численного решения задач Коши (14), (4) могут быть построены по аналогии с известными методами решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе применялись шаговые процедуры решения второго порядка точности - метод Эйлера с пересчетом и метод предиктор-корректор.

При численной реализации описанных выше алгоритмов напряжения G_z и G_θ представлялись в виде сеточных функций на двумерной сетке: разбиение вводилось вдоль меридиана и по толщине оболочки. В формировании системы уравнений (6)-(18) участвуют коэффициенты

I) Такой подход к решению нелинейных задач развивался в работах И.А.Биргера [1951], Д.Ф.Давиденко [1953], И.И.Воровича и В.Ф. Зипаловой [1965], В.В.Петрова [1970], И.В.Широ и В.Л.Якушева [1973].

жесткости оболочки, определяемые как интегралы по толщине от коэффициентов g_{ij} , (g_{ij} - коэффициенты из соотношений (2)). Эти интегралы вычислялись по методу Симпсона. Система уравнений (6)-(8) не содержит производных от коэффициентов жесткости по меридиональной координате.

Аппроксимация функций, образующих вектор \bar{y} , и решение вспомогательных двухточечных краевых задач (10) осуществлялись двумя различными путями: а) применялась конечно-разностная аппроксимация и метод ортогональной прогонки С.К.Годунова, решение вспомогательных задач Коши при этом проводилось по методу Рунге-Кутты; б) использовалась сплайн-аппроксимация (см. Алберг, Нильсон, Уолш. Теория сплайнов и их приложения, "Мир", 1972) и вариант метода сплайнов [5], который заключается в следующем.

Решение краевой задачи (10) ищется в виде сплайна второй степени:

$$\bar{y}(\bar{z}) \approx \bar{y}_{00} + \bar{y}_{01}(\bar{z} - \bar{z}_a) + \int_{\bar{z}_a}^{\bar{z}} \bar{y}_*''(\tau)(\bar{z} - \tau) d\tau, \tag{15}$$

где на разбиении $\bar{z}_a = \bar{z}_0 < \bar{z}_1 < \bar{z}_2 < \dots < \bar{z}_{n-1} < \bar{z}_n = \bar{z}_b$ функция $\bar{y}_*''(\bar{z})$ имеет вид:

$$\bar{y}_*''(\bar{z}) = \bar{y}_{k2}, \quad \bar{z} \in [\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Для получения системы уравнений относительно коэффициентов сплайна $\bar{y}_{00}, \bar{y}_{01}, \bar{y}_{k2} (k=0, 1, \dots, n-1)$ потребуем: а) чтобы сплайн (15) удовлетворял краевым условиям задачи (10) (индекс i опускаем):

$$U_a \bar{y}_{00} = \bar{V}_a; \quad U_b \{ \bar{y}_{00} + (\bar{z}_b - \bar{z}_a) \bar{y}_{01} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\bar{z}_k^2 - 2\bar{z}_b(\bar{z}_k - \bar{z}_{k+1}) - \bar{z}_{k+1}^2) \bar{y}_{k2} \} = \bar{V}_b; \tag{16}$$

и б) чтобы сплайн (15) удовлетворял уравнениям задачи в узлах введенного разбиения:

$$-A|_{\beta=\beta_0} \bar{y}_{00} + \bar{y}_{01} = \bar{F}|_{\beta=\beta_0}; \quad -A|_{\beta=\beta_i} \bar{y}_{00} + \{E - (\beta_i - \beta_0) \times A|_{\beta=\beta_i}\} \bar{y}_{01} + \sum_{k=0}^{i-1} \{E(\beta_{k+1} - \beta_k) - \frac{1}{2}[(\beta_i - \beta_k)^2 - (\beta_i - \beta_{k+1})^2]\} A|_{\beta=\beta_k} \bar{y}_{k2} = \bar{F}|_{\beta=\beta_i}; \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (17)$$

где E - единичная матрица (6x6). Матрица системы уравнений (16), (17) имеет квазитреугольный вид, что учитывалось при решении этой системы уравнений методом Гаусса.

В завершение третьей главы приведены результаты численного исследования эффективности построенных алгоритмов и соответствующих программ для ЭВМ. Это исследование проведено на примерах решения следующих известных задач: а) физически и геометрически нелинейная задача изгиба круглых пластин (контроль по результатам Б.А.Горлача [1970]); б) геометрически нелинейные задачи устойчивости "в большом" для упругих сферических куполов (контроль по результатам Дж.Голдберга [1971], Н.В.Вылишвили [1972]). Сравнение эффективности метода сплайнов и метода ортогональной прогонки проведено на примере линейных задач изгиба цилиндрических оболочек (сравнение с аналитическим решением) и тороидальных оболочек (сравнение с численным решением А.Калиниса [1964]). Показано (см. также [5]), что в диапазоне параметров геометрии $\lambda \approx 25+30$ ¹⁾ метод сплайнов позволяет

1) здесь
$$\lambda = [3(1-\nu)^2]^{1/4} L_m / (Rh)^{1/2},$$

λ - параметр непологости, L_m - длина меридиана, R - минимальный радиус кривизны средней поверхности, h - толщина оболочки, ν - коэффициент Пуассона.

получить решение линейных краевых задач с точностью порядка 1-3% более экономно (в 2-4 раза) нежели метод ортогональной прогонки. Вне указанного диапазона а также при решении задач с большей точностью это преимущество теряется и предпочтение отдается методу ортогональной прогонки.

Хорошее соответствие решений, полученных с помощью различных построенных в диссертации алгоритмов с известными данными, а также между собой служит гарантией их правильности.

Четвертая глава содержит решения характерных новых задач рассматриваемого класса, полученных с помощью описанных выше численных алгоритмов.

Подробно изучена задача о выпучивании и закритических деформациях упругопластических сферических куполов, жестко зацементированных по контуру, нагруженных внешним давлением. Расчеты выполнены по деформационной теории и теории пластического течения с учетом сжимаемости и упрочнения материала. Результаты представлены в виде диаграммы равновесных состояний (нагрузка - характерный прогиб), прослежена эволюция форм прогибов и зон упругого и пластического состояний материала. Показано, что процесс выпучивания сферических оболочек сопровождается появлением обширных зон сложного нагружения. Серия сравнений (см. рис.2) численных решений настоящей работы (□) с данными экспериментов (●) Кренцке и Кирмана [1963] показала, что учет пластических эффектов существенно улучшает соответствие теоретических и экспериментальных верхних критических нагрузок выпучивания ¹⁾ формы прогибов при потере устойчивости характеризуются образованием ряда кольцевых выпучин. Ближайшая к краю выпучина в дальнейшем очень интенсивно возрастает. Такая картина

1) Сплошной линией на рис.2 показано известное решение для упругого материала.

выпучивания хорошо согласуется с наблюдениями в экспериментах И.Сунакава и К.Ичида 1973. По сравнению с теорией течения деформационная теория дает снижение верхних критических нагрузок выпучивания примерно на 10-15%. В области закритических деформаций решения, полученные по этим теориям отличаются более существенно. Закритическое деформирование сопровождается возникновением обширных зон сложного нагружения.

Второй параграф четвертой главы посвящен осесимметричной задаче о выпучивании цилиндрических оболочек под действием осевого сжатия. Тип условий закрепления краев - подвижный шарнир. Поскольку радиальные смещения краев запрещены, состояние оболочки уже на начальных стадиях процесса нагружения является моментным (эффект Пуассона), поэтому явление бифуркации исключено.

Для случая упругого материала показано, что осесимметричная форма выпучивания цилиндрической оболочки близка к синусоидальной, а значения верхних критических нагрузок выпучивания близки к соответствующим значениям, предсказываемым линейным бифуркационным анализом. Как показали расчеты, для упругопластического материала форма выпучивания характеризуется образованием кольцевой внешней выпучины вблизи края оболочки, что хорошо согласуется с наблюдениями в экспериментах Д.Ли 1961, С.Баттермена 1964 и др. Теория течения дает более интенсивный рост прогибов в области закритического деформирования, нежели деформационная теория (при одном и том же уровне нагрузки). Верхние критические нагрузки, определенные по деформационной теории, ниже, чем критические нагрузки, предсказываемые по теории течения. Однако отличие не превышает 10%. Серия сравнений численных решений настоящей работы с данными экспериментов С.Баттермена 1964 показала, что обе упомянутые теории в данном

случае хорошо согласуются с экспериментом (сравнение проводилось по диаграммам выпучивания в области до и закритического деформирования, одно из таких сравнений показано на рис.3). Расчеты показали, что в этих случаях процесс нагружения был весьма близок к простому при деформировании в окрестности верхней критической нагрузки, а зоны сложного погружения были малы.

В третьем параграфе рассмотрены задачи о выпучивании упругой и упруго-пластической конических панелей под действием внешнего сжатия. Тип закрепления краев - подвижная заделка. В этих задачах весьма заметным является эффект перестройки формы прогибов в процессе деформирования: положение максимального прогиба постепенно смещается к оси симметрии. В толще материала оболочки пластические зоны движутся вслед за положением максимального прогиба, оставляя за собой след в виде зон разгрузки. Форма прогибов упругой оболочки весьма сильно отличается от параболической, которая априори использовалась в работе И.И.Трапезина [1957] для приближенного решения этой задачи. Вследствие этого сильно отличаются и соответствующие диаграммы равновесных состояний: наши результаты дали более низкое значение верхней критической нагрузки и более высокое значение нижней критической нагрузки выпучивания.

В четвертом параграфе впервые получено решение нелинейной осесимметричной задачи устойчивости "в большом" для упругой и упруго-пластической круговых торoidalных оболочек (аналогичных решений в известной нам литературе нет). Получены диаграммы равновесных состояний (рис.4), формы прогибов для различных этапов процесса выпучивания (рис.5) и прослежено развитие зон упругого

(отсутствие штриховки) и пластического состояния (косая штриховка) материала (рис.6). Как показали расчеты формы выпучивания упругой и упруго-пластической оболочек качественно совпадают. Впервые зоны пластического состояния возникают в ближайших к оси симметрии областях материала оболочки. При достижении верхней критической нагрузки выпучивания в оболочке образуются зоны разгрузки (горизонтальная штриховка), охватывающие при закритическом деформировании значительную часть материала оболочки. Зоны повторного пластического погружения в рассмотренном примере не наблюдались.

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Дан обстоятельный анализ исследований по геометрически нелинейным задачам для упруго-пластических оболочек (включая задачи устойчивости "в большом").
2. Приведена уточненная постановка геометрически нелинейных задач устойчивости "в большом" для упруго-пластических оболочек.
3. Построены различные численные алгоритмы решения задач указанного класса.
4. Предложен алгоритм решения вспомогательных двухточечных краевых задач основанный на сплайн-аппроксимации и выявлены границы его целесообразного применения.
5. Предложенные алгоритмы реализованы в виде универсальных (для задач указанного класса) программ для ЭВМ, прошедших тщательную проверку.
6. Исследованы в уточненной постановке задачи устойчивости "в большом" для упруго-пластических сферических, конических и цилиндрических оболочек. Впервые проведено исследование таких задач для круговых торoidalных оболочек.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Численный метод решения геометрически нелинейных осесимметричных задач для упругопластических оболочек вращения, сб. "Краткие тезисы VII-й научной конференции по применению ЭВМ в механике деформируемого твердого тела", Ташкент, 1975, стр.30-31, (в соавторстве с В.Н.Кукуджановым).
2. Численное решение геометрически нелинейных осесимметричных задач о выпучивании и закритических деформациях тонких непологих упругопластических оболочек, Тезисы доклада на Всесоюзном семинаре по механике деформируемого твердого тела под рук. чл.-корр. АН СССР Э.И.Григорья, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1975, № 5, стр. 206-207, (в соавторстве с В.Н.Кукуджановым).
3. Численный метод решения геометрически нелинейных осесимметричных задач для упругопластических оболочек вращения, ж-л "Строительная механика и расчет сооружений", 1976, № 5, стр. 44-49, (в соавторстве с В.Н.Кукуджановым).
4. Численный метод для решения осесимметричных геометрически нелинейных задач о выпучивании и закритических деформациях упругопластических оболочек, ВИНТИ АН СССР, № 499-76, 1976, (в соавторстве с В.Н.Кукуджановым).
5. Численное решение линейных двухточечных краевых задач моментной теории оболочек методом сплайнов, ВИНТИ АН СССР, 1976, № 428-76 Доп.

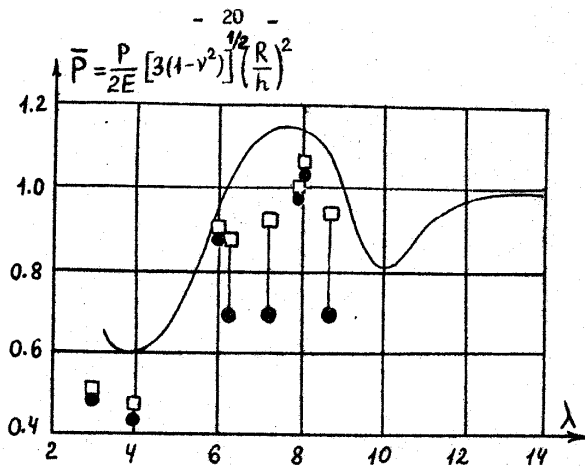


Рис.2 Верхние критические нагрузки выпучивания сферических куполов (\bar{P}) в зависимости от параметра непологости (λ).

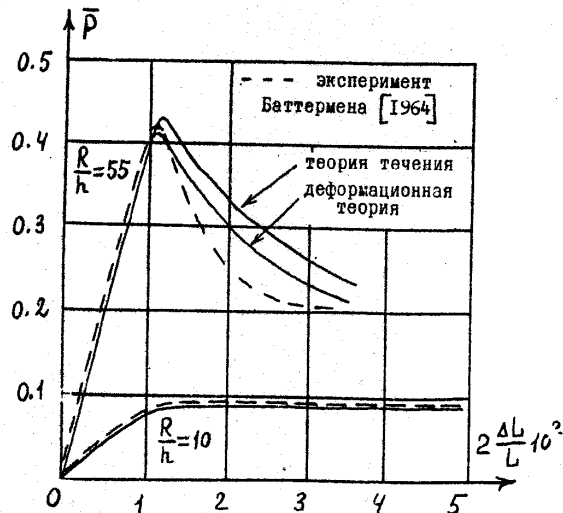


Рис.3 Диаграммы выпучивания цилиндрических оболочек.

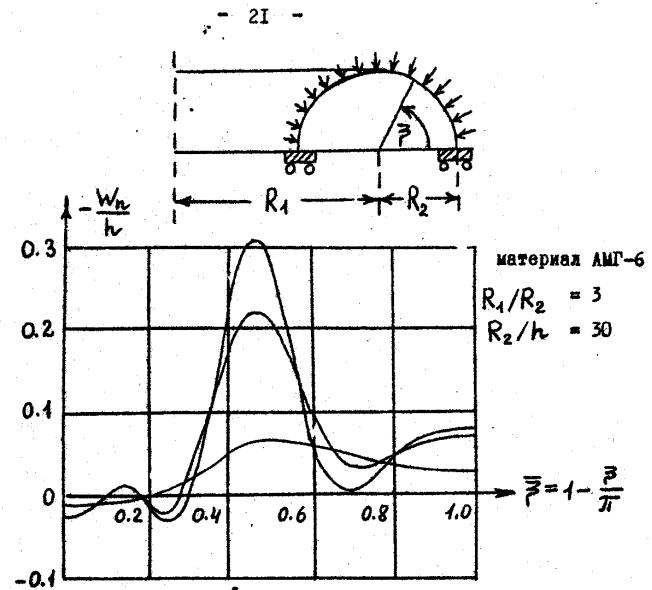


Рис.4 Формы прогибов тороидальной оболочки (теория течения).

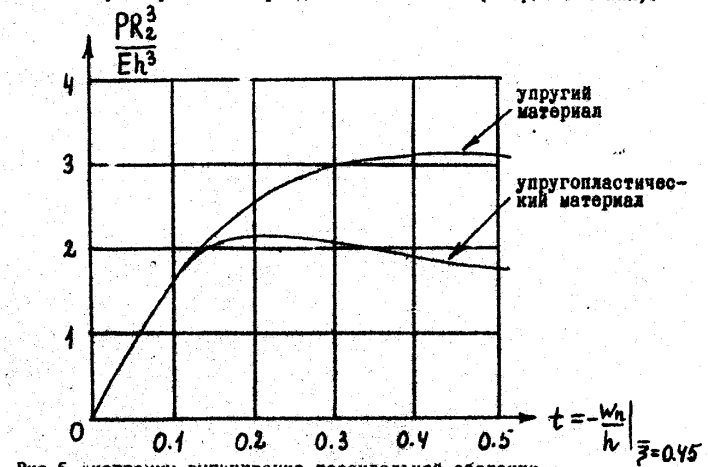


Рис.5 Диаграммы выпучивания тороидальной оболочки.

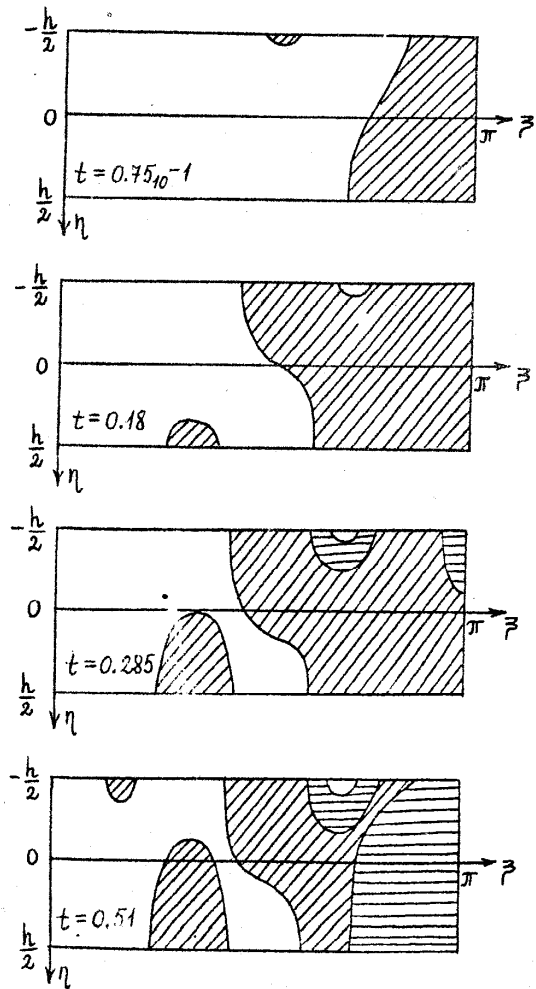


Рис.6 Торoidalная оболочка, состояние материала при выпучивании.

Handwritten signature or initials.

ОМП ВНИИИМТ
заказ 4397, тираж 120 экз.