

НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРОБЛЕМЕ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ АН СССР ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ АН КазССР  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН

(Материалы V Всесоюзного симпозиума)



Издательство «НАУКА» Казахской ССР АЛМА-АТА-1973

УДК 539.374

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В МАТЕРИАЛАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ТЕКУЧЕСТИ

*Н. Г. БУРАГО, В. Н. КУКУДЖАНОВ  
(Москва)*

Рассматривается распространение волн в стержнях, материал которых обладает свойством задержки текучести. Принимается, что после выполнения условия Котрелла поведение материала описывается упруго-вязкопластическими зависимостями, позволяющими предложить простой численный метод для решения задач с запаздыванием текучести. Показано, что этим методом можно получить решение для модели Ю. Н. Работнова [1]. Приводится сравнение результатов аналитического решения, основанного на данной модели, полученного в работе [2], с результатами настоящей работы.

§ 1. Исследованию запаздывания текучести в малоуглеродистых сталях посвящено большое количество экспериментальных работ, выполненных в основном в квазидинамическом диапазоне [3]. Имеется несколько теоретических работ [4—5], в которых предлагаются определенные модели для описания этого свойства малоуглеродистых сталей при распространении волн.

Ю. Н. Работновым на основе существующей дислокационной теории и экспериментальных результатов предложена модель упругопластической среды с запаздыванием текучести. В соответствии с этой моделью переход из упругого состояния в пластическое происходит мгновенно при выполнении функционального условия Котрелла. Это приводит к появлению волн сильных разрывов, которые, взаимодействуя с упругими и пластическими волнами, дают весьма сложную картину движения. Аналитическое решение удается получить лишь в случае простейших граничных условий для идеализированной диаграммы Прандтля [2].

Получение решений для реальных диаграмм требует привлечения численных методов. Большое число разнообразных разрывов в конкретных задачах делает практически невозможным численное решение с точным рассмотрением всех разрывов. Поэтому необходимо введение некоторых реологических соотношений, которые описывали бы переход от упругого к пластическому состоянию. Это приводит к определенному сглаживанию разрывов и к возможности применения схемы сквозного счета.

Вообще говоря, если реальный переход близок к скачкообразному, то можно не заботиться об его адекватном описании. Достаточно, чтобы дополнительно вводимые в уравнения члены были малы и приводили бы к достаточному сглаживанию разрывов (например, введение искусственной вязкости в идеальном газе).

В твердых телах при распространении волн за пределами упругости для многих материалов силы вязкости оказывают существенное влияние, и переходный слой имеет гораздо большую толщину, чем в газах. Поэтому целесообразно, несмотря на недостаточность экспериментальных данных, вводить такое реологическое описание, которое отражало бы качественно особенности поведения материалов после наступления текучести и одновременно содержало бы определенный произвол, который можно было бы использовать для количественного описания экспериментальных данных. Для тех материалов, в которых влияние диссипативных сил пренебрежимо мало, имеющийся произвол можно использовать для упрощения численного решения задачи. Это позволяет применять один и тот же метод решения и, кроме того, одну и ту же программу как в случае тех, так и других материалов

За условие наступления текучести возьмем соотношение, выведенное Коттреллом:

$$\int_0^1 \varphi(\sigma, T) dt \geq t_1 \quad (1)$$

Примем, что

$$\varphi(\sigma, T) = \left( \frac{|\sigma|}{\sigma_s} - 1 \right)^n H \left( \frac{|\sigma|}{\sigma_s} - 1 \right)$$

где  $\sigma_s$  — статический предел текучести;

$t_1$  и  $n$  — константы, зависящие от температуры  $T$  и определяемые экспериментально;

$t$  — время;

$\sigma$  — напряжение;

$H(z)$  — функция Хевисайда.

Следуя Ю. Н. Работнову [1], будем считать, что пока условие (1) не выполнено, материал подчиняется закону Гука, а в момент выполнения этого условия материал переходит в состояние текучести. Примем, что состояние текучести описывается упруго-вязкопластическими уравнениями типа Соколовского — Малверна, в которых учитываются влияние скорости деформирования на нижний предел текучести и некоторые другие особенности при распространении упругопластических волн [6]. Уравнение состояния можно записать в виде единого соотношения:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\tau} H(\Theta) H(\kappa) F(\kappa) \text{sign} \sigma \quad (2)$$

$$\Theta = \int_0^1 \varphi(\sigma, T) dt - t_1, \quad \kappa = |\sigma| - f(|\varepsilon|)$$

Здесь зависимость  $\sigma = f(\varepsilon)$  соответствует статической диаграмме материала при одноосном растяжении — сжатии,  $F(z)$  — функция вязкости,  $E$  — модуль Юнга,  $\tau$  — константа, характеризующая вязкость и обладающая размерностью (сек).

Будем рассматривать распространение плоских волн в стержне из материала, подчиняющегося уравнению состояния (2). Добавляя к уравнению (2) уравнение движения и связь между деформацией и скоростью

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

получаем полную систему уравнений, описывающих движение. Введем безразмерные переменные:

$$\bar{t} = \frac{tc}{l}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$$

Здесь  $l$  — длина стержня,  $c = E/\rho$  — скорость упругих волн,  $\rho$  — плотность,  $\varepsilon_s$  — деформация, соответствующая пределу текучести. В дальнейшем будем использовать безразмерные переменные и крышечки над ними опустим.

Относительно первоначального состояния стержня примем  $v = \sigma = \varepsilon = 0$  при  $t < 0$ . Граничные условия возьмем в общем виде, охватывающем все возможные случаи:

$$A_1 \frac{\partial v}{\partial t} + A_2 v + A_3 \sigma = \phi_1(t), \quad \text{при } x = 0 \quad (4)$$

$$B_1 \frac{\partial v}{\partial t} + B_2 v + B_3 \sigma = \phi_2(t), \quad \text{при } x = 1$$

При  $A_1 \neq 0$  или  $B_1 \neq 0$  необходимы дополнительные условия:  $t = 0, v|_{x=0} = v_0, v|_{x=1} = u_0$

§ 2. Система уравнений (2)—(3) представляет собой систему уравнений с главной линейной частью, у которой недифференциальные члены претерпевают разрывы. Эта система отличается от системы уравнений распространения волн, рассмотренной в работе [6], лишь недифференциальным членом, а именно множителем  $H(\Theta)$ , связанным с запаздыванием текучести. Описываемая система уравнений имеет три семейства характеристик, вдоль которых выполняются следующие соотношения:

$$dx \mp dt = 0, \quad dv \mp d\sigma = \pm \delta \Phi dt,$$

$$dx = 0, \quad d\varepsilon = d\sigma + \delta \Phi dt, \quad (5)$$

где

$$\delta = \frac{e}{\tau c}, \quad \Phi = H(\Theta)H(\kappa)\text{sign}\sigma$$

Рассмотрим разрывы, которые могут существовать в среде, описываемой уравнением (2). Система уравнений (2)—(3) принадлежит к системам, имеющим дивергентный вид или вид «законов сохранения», для которых может быть построена теория обобщенных решений и получены необходимые условия на разрывах, обеспечивающие единственность обобщенного решения [7, стр. 485]. Используя этот подход, находим, что на сильном разрыве должны выполняться следующие соотношения:

$$D[v] + [\sigma] = 0, \quad D[\sigma] + [v] = 0, \quad D[\varepsilon] + [v] = 0 \quad (6)$$

где  $D = dx/dt$  — скорость распространения разрыва в безразмерных переменных;  $[u] = u^+ - u^-$  — скачок величины  $u$ . Из условия существования нетривиального решения системы (6) следует, что  $D = \pm 1$ , т. е. сильные разрывы могут распространяться только со скоростью упругих волн. Совпадение линий сильного разрыва с характеристиками позволяет с помощью соотношений (5) и (6) получить (так же, как и в случае линейных систем) дифференциальное уравнение для определения интенсивности сильного разрыва. Однако в отличие от упругой среды, где разрывы могут возникать только вследствие скачкообразного изменения в граничных условиях, в рассматриваемом случае возможно образование сильных разрывов и при гладких граничных условиях. Это становится возможным, когда на линиях  $dx \pm dt = 0$  выполняется условие  $\Theta = 0$ . Например, когда упругий предвестник распространяется по невозмущенному стержню, условие  $\Theta = 0$  выполняется на линии  $x = t - t_0$  ( $t_0$  — время задержки текучести в сечении стержня  $x = 0$ ). В этом случае уравнение для определения напряжения за фронтом волны  $x = t - t_0$  будет

$$\frac{d\sigma^+}{dt} = \delta\Phi^+ \quad (7)$$

Так как напряжение  $\sigma^-$  и деформация  $\varepsilon^-$  перед фронтом остаются постоянными, а  $\sigma^+$  убывает  $d\sigma^+/dt < 0$ , то вдоль рассматриваемой линии развивается скачок: в момент времени  $t = t_0$  он равен нулю, а со временем его абсолютная величина возрастает, асимптотически приближаясь к предельному значению  $|\sigma^-| - 1$ . Этот скачок, распространяясь и отражаясь, сталкивается со скачками, возникающими вследствие разрывных граничных условий. Образующиеся после столкновения скачки распространяются с теми же скоростями  $D = \pm 1$ , а начальные значения напряжений и деформаций определяются с помощью соотношений (6).

Заметим, что когда линия перехода к пластическому состоянию ( $\Theta = 0$ ) не совпадает с прямыми  $dx \pm dt = 0$ , она является линией разрыва первых производных решения, т. е. в этом случае волна запаздывания будет волной слабого разрыва. Линии, на которых  $K = 0$ , являются волнами упругой разгрузки или повторной нагрузки и на них претерпевают разрыв вторые производные решения (см. [6]). Такой слабый характер разрывов позволяет отказаться от подробного рассмотрения областей, разделенных упругими, пластическими волнами и волнами запаздывания, и применять единую схему расчета, учитывая только один вид разрывов, распространяющихся со скоростью упругих волн. Благодаря этому алгоритм вычислений крайне упрощается по сравнению с алгоритмом в случае модели Ю. Н. Работнова.

Для численного интегрирования системы уравнений (2)—(3) используется конечно-разностная схема, предложенная в работе [6] и основанная на записи уравнений в характеристическом виде (5):

$$\begin{aligned} (v - \sigma)_{j+1}^{i+1} - (v - \sigma)_{j+1}^i &= \delta\Phi_{j+1}^{i+1/2} h \\ (v + \sigma)_{j+1}^{i+1} - (v + \sigma)_j^{i+1} &= \delta\Phi_{j+1/2}^{i+1} h \\ (\varepsilon - \sigma)_{j+1}^{i+1} - (\varepsilon - \sigma)_j^i &= \delta\Phi_{j+1/2}^{i+1/2} h. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $i$  и  $j$  — номера характеристик соответственно положительного и отрицательного

наклона, образующих расчетную сетку.

Вычисления по схеме (8) ведутся по слоям, расположенным вдоль характеристик положительного наклона. При решении системы уравнений (8) на каждом шаге используется метод итераций. Как обычно, достаточна одна итерация, так как остальные практически не уточняют решения. В каком из возможных состояний находится рассчитываемая точка, учитывается проверкой условий  $\Theta > 0, \Theta < 0$  и  $\kappa > 0, \kappa < 0$ . Схема (8) имеет второй порядок аппроксимации, устойчивость ее может быть доказана в локальном приближении.

Таким образом, численное решение задач, основанное на предлагаемой системе уравнений, оказывается значительно проще, чем решение тех же задач по упругопластической теории. Поэтому можно применять уравнения (2)—(3) и для таких материалов, у которых влияние скорости деформации на нижний предел текучести несущественно. С этой целью в уравнения для упругопластического материала искусственно вводим малые дополнительные члены в соответствии с законом (2). Функция  $F(\kappa)$  и параметр  $\delta = 1/c\tau$  выбираются так, чтобы численное решение быстро сходилось к решению без дополнительных членов. Асимптотическое поведение решения при  $\delta \gg 1$  проведено в работе [6], где показано, что целесообразно принять  $F(\kappa) = \kappa^{1/2}$ . Величину  $\delta$  следует определять из условия соблюдения геометрического подобия решения. В безразмерных переменных это означает, что необходимо найти такое значение  $\delta$ , при котором решение становится малочувствительным к его дальнейшему увеличению, исключая области быстрого изменения решения, которые соответствуют линиям разрыва. В практических расчетах это соответствует  $\delta = 50 - 100$ , при этом изменение решения составляет около 1 %.

Следует отметить, что выбор излишне большого  $\delta$  нецелесообразен, так как увеличение этого параметра требует уменьшения шага интегрирования и, следовательно, увеличения времени счета. Исследование устойчивости разностной схемы (8), проведенное для идеально пластической диаграммы, показало, что схема устойчива при условии  $\delta h \leq 1$ . Это также накладывает ограничение на величину  $\delta$  при практическом интегрировании.

Предлагаемый метод использовался при решении задачи по определению времени соударения упругопластических стержней без учета задержки текучести и были получены хорошие результаты [8].

§ 3. Рассмотрим некоторые примеры расчета. Для того чтобы убедиться в правильности сделанных выводов, решалась задача об ударе по стержню, один конец которого ( $X = 1$ ) жестко заделан, а по другому ( $X = 0$ ) наносится удар с постоянной скоростью  $v = v_0$ . Полагалось, что материал обладает линейным упрочнением:

$$f = \begin{cases} \epsilon & \text{при } \sigma \leq 1 \\ k(\epsilon - 1) & \text{при } \sigma > 1 \end{cases}$$

Аналитическое решение этой задачи дано в работе [2].

На Рис.1 приведено сравнение кривых изменения  $\epsilon$  во времени при  $X = 1$  для двух решений: сплошная кривая соответствует численному решению, полученному предлагаемым методом, а пунктирная—аналитическому решению. На Рис. 2 показаны линии разрыва в аналитическом решении в плоскости  $(X, t)$  для рассматриваемого примера. В расчете принималось  $k = 0.2$ ;  $n = 1$ ;  $t_1 c / \epsilon = 1$ ;  $\delta = 64$ ;  $v_0 = 2$ ;  $h = 0.0025$ .

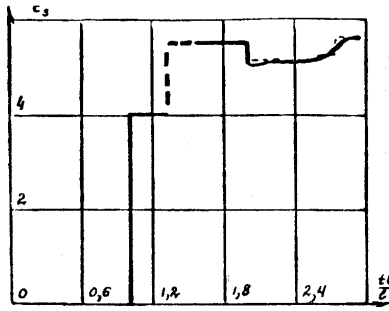


Рис. 1

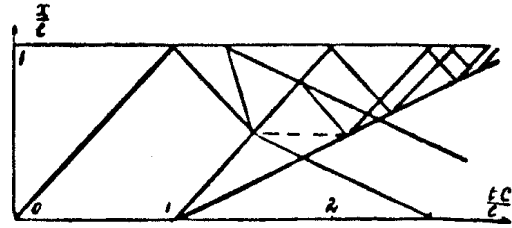


Рис. 2

Как видно, решения совпадают в областях, где деформация постоянна. Вместо скачков при численном решении получаем области быстрого, но плавного изменения величины. Второй пример был просчитан уже для реальной диаграммы, взятой для материала «Сталь-3», которая аппроксимировалась кусочно-линейной кривой. Константы запаздывания в соответствии с критерием Котрелла в форме (1) вычислялись по данным [9] в диапазоне изменения времени задержки текучести  $10^{-1} - 10^{-4}$  сек. Принималось:  $n = 5, t_1 = 10^{-3.5}$  сек. Граничные условия были такие же, что и в первом примере, но  $V_0 = 1.35$ . На Рис. 3 приведены результаты изменения деформации и напряжения во времени в сечении  $x = 0.8$ . Скачкообразные изменения соответствуют упругим скачкам, вызванным задержкой текучести, а область быстрого роста — пластической волне. В этом примере области пластических деформаций появляются только после отражения волны от заделанного конца, хотя напряжения на ударяемом конце превышают статический предел текучести ( $|\sigma| = 1.35$ ). Скорость волны разгрузки, обусловленной задержкой текучести, почти совпадает с упругой, поэтому картина движения в плоскости  $(x, t)$  полностью отличается от той, которая изображена на Рис. 2.

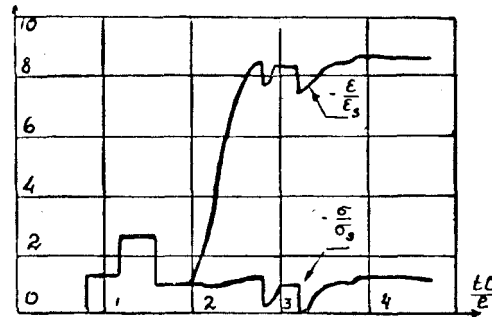


Рис. 3

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Модуль упругопластической среды с запаздыванием текучести. «ПМТФ», 1968, № 3.
2. Ломакин Е. В. Распространение упругопластических волн в материале с запаздыванием текучести. «Изв. АН СССР. МТТ», 1970, № 5.
3. Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в сталях (обзор экспериментальных работ). «ПМТФ», 1968, № 3.

4. Ленский В. С., Фокина Л. Н. Распространение одномерных волн в материалах с запаздывающей текучестью. «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1959, № 3.
5. Котляревский В. А. Уруго-вязкопластические волны в материале с запаздывающей текучестью. «ПМТФ», 1962, № 3.
6. Кукуджанов В. Н. Распространение уругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. Труды Вычислительного центра АН СССР, т. 1. М., 1967.
7. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
8. Веклич Н. А., Кукуджанов В. Н., Малышев Б. М. Продолжительность удара уругопластического стержня. Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума по распространению уругих и уругопластических волн. Кишинев, 1968.
9. Johnson G. I., Wood D. S., Clark D. S. Delay Yielding in the Low carbon Steel under Compression Impact, Proc. Amer. Soc. for Testing Materials, 1953, vol. 53, p. 755—764.
10. Wood D. S., Clark D. S. The Influence of Temperature upon the Time Delay for Yielding in Annealed Mild Steel. Trans. Amer. Soc. for Metals, 1952, vol. 44, p. 671—586.