

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ**

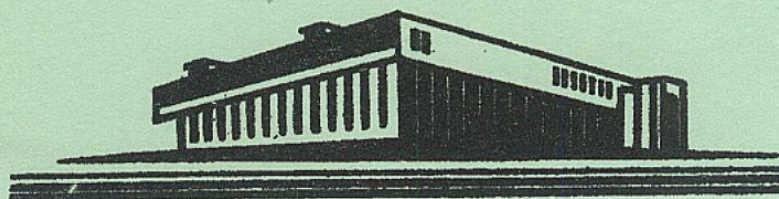
**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**



Н. Г. Бураго, В. А. Герман, А.Д. Никитин, И. С. Никитин

**РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕЛКОЙ
ВОДЫ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Препринт № 1182



Москва 2019 г.

АННОТАЦИЯ

Целью работы является применение теории мелкой воды к расчету течений переменной геометрии. Сквозной счет течений проведен по модифицированной явной центрально-разностной схеме Лакса на окаймляющей область течения регулярной эйлеровой сетке. Для обеспечения монотонности и консервативности в условиях подвижных границ разработаны пошаговые коррекционные процедуры.

Представлены следующие задачи: 1) обрушение колонны тяжелой вязкой жидкости в замкнутом бассейне; 2) заполнение бассейна тяжелой вязкой жидкостью; 3) обтекание жидкостью движущихся погруженных тел; 4) прорыв дамбы.

Даны сравнения результатов с имеющимися решениями других авторов, полученными по теории мелкой воды.

Ключевые слова: мелкая вода, прорыв плотины, метод Лакса, нестационарное течение, обтекание погруженного тела

ISBN 978-5-91741-245-6

055(02)2 © Институт проблем механики РАН 2019 г.

Содержание

АННОТАЦИЯ.....	2
СОДЕРЖАНИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	6
2. МЕТОД РЕШЕНИЯ	8
2.1 СХЕМА ЛАКСА	8
2.2 УСТРАНЕНИЕ НАРУШЕНИЯ МОНОТОННОСТИ РЕШЕНИЯ	10
2.3 УСТРАНЕНИЕ НАРУШЕНИЯ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МАССЫ	12
3. РЕЗУЛЬТАТЫ	16
3.1 ОБРУШЕНИЕ ВОДЯНОЙ КОЛОННЫ В ЗАМКНУТОМ БАСЕЙНЕ	16
3.2 ЗАДАЧА О ЗАПОЛНЕНИИ БАСЕЙНА	20
3.3 ОБТЕКАНИЕ ПОГРУЖЕННЫХ ТЕЛ	22
3.4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ДВИЖЕНИЯ ПОГРУЖЕННОГО ТЕЛА	27
3.5 ПРОРЫВ ДАМБЫ	29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	31
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	32

Введение

Моделирование гидродинамики жидкостей является фундаментальным во многих инженерных приложениях. Исторически считалось, что приближенное решение уравнений, которые определяют физические явления, было лучшим способом изучения природных процессов. Для корректного построения математических моделей и численных методов расчета течений в реках необходимо иметь представление об описании основных процессов, происходящих в водоеме. Для этого строятся более простые модели для течения в каналах, учитывающие, однако, основные характеристики течения в природной среде.

Уравнения мелкой воды (уравнения Сен-Венана) представляют собой систему нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, которые аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера, описывающую течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести. Предполагается, что глубина жидкости много меньше горизонтального размера водоема, поэтому вертикальной компонентой скорости можно пренебречь по сравнению с горизонтальными компонентами, которые можно считать постоянными по глубине. Полученные в рамках такой упрощенной математической модели решения, естественно, носят приближенный характер, но во многих случаях хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В последние десятилетия было разработано большое количество численных алгоритмов для моделирования гидродинамических задач в

приближении мелкой воды, к которым относятся метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод конечных объемов.

Стоит отметить, что при моделировании гидродинамических задач в приближении мелкой воды возникают трудности, связанные с нелинейностью уравнений, с разрывным профилем поверхности и с наличием движущейся границы, разделяющей область, занятую жидкостью и область сухого дна (область с малой глубиной жидкости). В связи с этим разработка новых и модификация имеющихся алгоритмов, позволяющих моделировать течения в приближении мелкой воды, является актуальной задачей [1-4].

В настоящей работе предложен простой алгоритм решения нестационарных задач теории мелкой воды о течениях с переменными границами и представлены решения ряда типовых задач данного класса.

1. Постановка задачи

Система уравнений теории мелкой воды в декартовых координатах x, y имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + h \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + f_h \\ \frac{du_x}{dt} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + f_x \\ \frac{du_y}{dt} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + f_y \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_x \partial/\partial x + u_y \partial/\partial y$ - материальная временная производная, v и v_c - коэффициенты диффузии, $z = \eta(x, y, t)$ - уровень поверхности воды, $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$ - горизонтальные скорости, осредненные по глубине $h = \eta - z_0$, $z = z_0(x, y, t)$ - уровень дна. Внешние нагрузки f_x и f_y зависят от координат, времени и решения и используются для задания ветровых нагрузок, донного трения и сил Кориолиса, уравнения для уровня η могут содержать источники/стоки воды f_h . Система уравнений дополняется начальными условиями

$$t = 0, (x, y) \in S: \eta = \eta_0, u_x = u_{x0}, u_y = u_{y0}$$

и граничными условиями

$$t \geq 0, (x, y) \in \partial S_G: G = G_*; \quad t \geq 0, (x, y) \in \partial S \setminus \partial S_G: \mathbf{n} \cdot \nabla G = F_*$$

Здесь G обозначает основные искомые функции η, u_x, u_y ; S - область решения, ∂S - граница области решения. Функции правых частей

граничных и начальных условий полагаются заданными. Отметим, что при малых диффузионных членах уравнения мелкой воды описывают волновые процессы и принадлежат гиперболическому типу. Скорость распространения малых возмущений определяется соотношением $c = (gh)^{1/2}$. Диффузионные члены в уравнение для уровня свободной поверхности добавлены постольку, поскольку такие члены при численном решении возникают из-за искусственной и/или аппроксимационной вязкости.

Отметим, что при постановке граничных условий важно учитывать тип течения – докритическое ($|u| < c$) или сверхкритическое ($|u| > c$), что характеризуется величиной числа Фруда $Fr = |u| / \sqrt{gh}$. Уравнения теории мелкой воды совпадают с уравнениями для двумерных течений баротропного газа с показателем адиабаты равным 2 ($p = C\rho^2/2$), поэтому имеет место полная аналогия в формулировке начально-краевых задач для этих двух типов течений. Для мелкой воды роль плотности играет уровень свободной поверхности η , а роль градиента давления играет величина $gh\partial\eta/\partial x$.

2. Метод решения

2.1 Схема Лакса

В качестве метода решения поставленной задачи был выбран метод конечных разностей, а в качестве разностной схемы - схема Лакса. Схема Лакса была выбрана в силу ее удобства, надежности, легкости программирования. Рассмотрим эту схему на примере одномерных задач.

Схема Лакса для системы уравнений (1.1) на равномерной сетке D для одномерных задач имеет вид [5-9]:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_i^{n+1} - \tilde{\eta}_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{2\Delta x} + h_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \\ \frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + g \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Это явная одношаговая двухслойная центрально-разностная схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x^2 / \Delta t)$. Схема является условно устойчивой благодаря усреднению Лакса

$$\tilde{f}_i^n = \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n}{2}$$

Шаблон разностной схемы изображен на рис. 1.

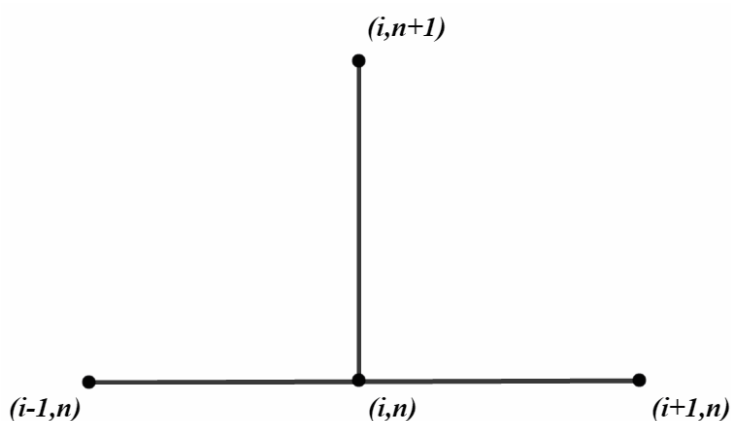


Рис. 1. Шаблон разностной схемы (2.1)

Найдем условие устойчивости схемы с помощью дифференциальных приближений. Для этого применим разложения в ряд Тейлора.

$$f_i^{n+1} = f(x_i, t^{n+1}) = f_i^n + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3), \quad (2.2)$$

$$f_{i\pm 1}^n = f(x_{i\pm 1}, t^n) = f_i^n \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^n \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), учитывая исходные уравнения (1.1) и пренебрегая остаточными членами второго порядка, получим, что разностная схема Лакса аппроксимирует следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt}\Big|_i^n + \left[h \frac{\partial u}{\partial x}\right]_i^n &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right]_i^n \\ \frac{du}{dt}\Big|_i^n + \left[g \frac{\partial \eta}{\partial x}\right]_i^n &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_u \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_i^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полученная система уравнений по старшим производным является параболической с коэффициентами вязкости (диффузии)

$$k_\eta = k_u = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} - \frac{(u^2 + c^2)\Delta t}{2} \quad (2.5)$$

При отрицательном значении коэффициентов диффузии решение этой системы уравнений неустойчиво и экспоненциально растет во времени. Таким образом, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{u^2 + c^2}} \quad (2.6)$$

Это условие устойчивости называется условием Куранта-Фридрихса-Леви. Если скорость не является постоянной в вычислительной области, то для устойчивости требуется, чтобы

$$\Delta t \leq \alpha \min \frac{\Delta x}{\sqrt{(u_i^n)^2 + (c_i^n)^2}}, \quad (2.7)$$

где $0 < \alpha < 1.0$ - коэффициент запаса, обеспечивающий положительность коэффициентов диффузии, возникающих при численном решении.

2.2. Устранение нарушения монотонности решения

С.К. Годуновым показано [10], что для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}$$

не существует разностных схем с постоянными коэффициентами, имеющих второй порядок аппроксимации и сохраняющих монотонность численного решения.

При использовании схемы Лакса заданный начальный (при $t=0$) разрыв в графиках искомых функций (Рис. 2) искажается на следующих временных слоях нефизическими осцилляциями. Немонотонность решения возникает из-за разрыва в начальном распределении уровня свободной поверхности. Признаком немонотонности является смена знака второй производной функции уровня на концах ребра сетки (ребро сетки – линия, соединяющая соседние узлы).

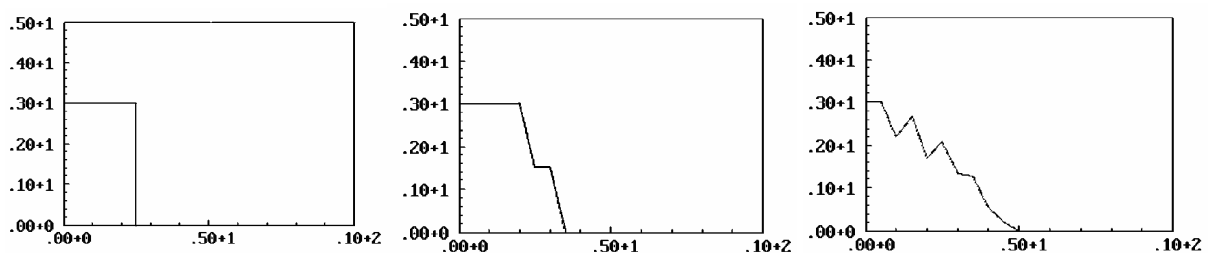


Рис. 2. Уровень свободной поверхности для моментов времени 0с, 0.1с, 0.2 с.

Однако, схему Лакса можно модифицировать так, чтобы монотонность численного решения была сохранена. Применяемый алгоритм устранения нарушений монотонности решения заключается в следующем. Пусть $\tilde{\eta}_i^{n+1} = \tilde{\eta}(x_i, t^{n+1})$, $(i=0,1,\dots,N)$ - решение на временном слое $n+1$, полученное после применения схемы Лакса. Аппроксимируя вторую пространственную производную функции $\tilde{\eta}(x, t)$ следующим образом

$$\tilde{\eta}''(x_i, t) = \left(\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\tilde{\eta}_{i+1} - 2\tilde{\eta}_i + \tilde{\eta}_{i-1}}{(\Delta x)^2},$$

вычислим значения вторых производных во внутренних точках области решения. Признаком немонотонности решения (признаком "пилы"), которое показано сплошной линией, является смена знака второй производной на концах ребра сетки $[x_i, x_{i+1}]$ (Рис. 3).

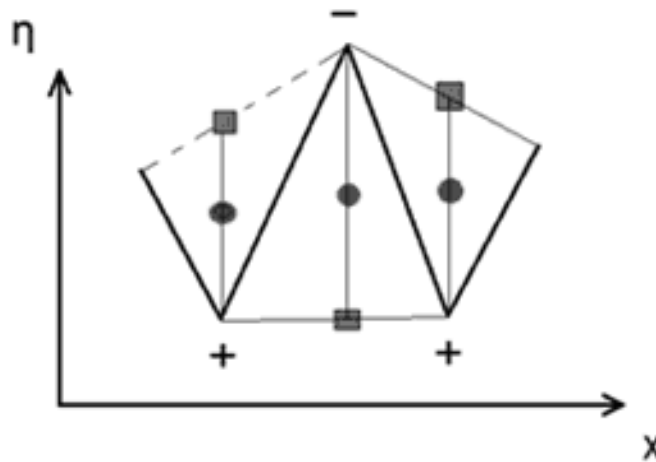


Рис. 3. "Пила" и знаки второй производной

При обнаружении пилы значения функции $\eta(x, t)$ в узлах ребра с "пилой" корректируются так :

$$\eta(x_i, t^{n+1}) = \frac{\tilde{\eta}_i^{n+1} + (\tilde{\eta}_{i-1}^{n+1} + \tilde{\eta}_{i+1}^{n+1})/2}{2}, \quad (2.8)$$

а значения функции в остальных точках оставляются без изменений.

После замены (2.8) произойдет сглаживание «пилообразной» структуры (круглые точки на рис. 3), и немонотонность исчезнет, что изображено на Рис. 4.

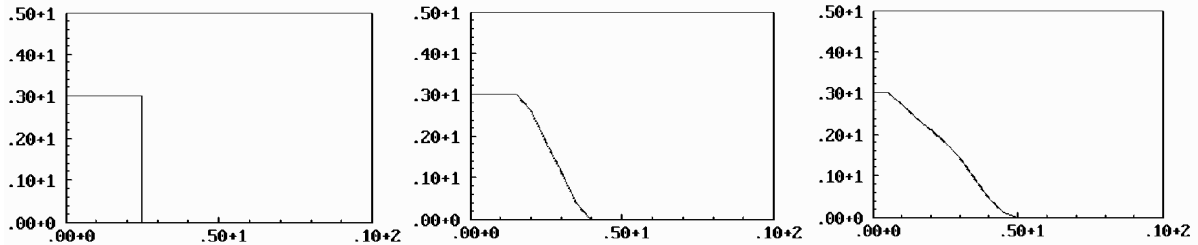


Рис. 4. Уровень свободной поверхности после монотонизации для моментов времени 0с, 0.1с, 0.2с.

2.3 Устранение нарушения закона сохранения массы

Используемый вариант схемы Лакса и процедура сглаживания неконсервативны. В связи с этим требуется алгоритм контроля и коррекции консервативности. Рассмотрим этот тип коррекции на примере закона сохранения массы. В случае одномерной задачи о течениях (несжимаемой) мелкой воды, масса измеряется площадью под графиком глубины (см. например, Рис. 5).

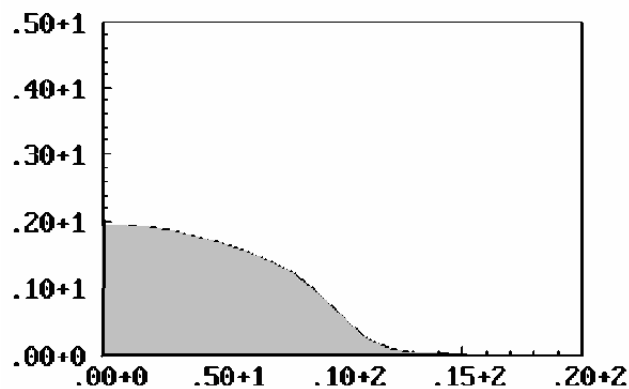


Рис. 5. Масса несжимаемой жидкости определяется площадью под графиком глубины

Масса воды, то есть площадь под графиком функции глубины $\tilde{h}(x_i, t^{n+1}) = \tilde{\eta}(x_i, t^{n+1}) - b(x_i, t^{n+1})$, $i = 0, 1, \dots, N$ определяется по методу трапеций, который проиллюстрирован на Рис. 6.

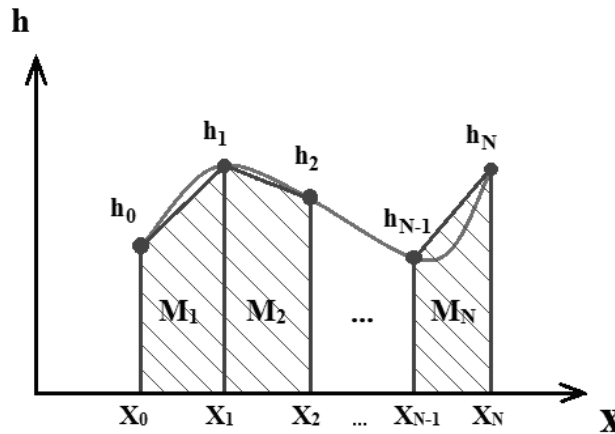


Рис. 6. Иллюстрация метода трапеций

Масса жидкости является суммой приузловых масс.

$$M^n \approx \sum_{i=1}^N M_i^n,$$

где $M_i^n = h_i^n \Delta x$.

Пусть в момент времени t^n масса жидкости в области решения равна M^n . Учитывая приток и отток массы на границах и распределенные источники/стоки массы, несложно определить ожидаемую массу жидкости M^{n+1} для следующего момента времени t^{n+1} . Из-за неконсервативности применяемой разностной схемы и процедуры монотонизации расчетная масса в общем случае не совпадает с ожидаемой

$$\tilde{M}^{n+1} = \sum_{i=1}^N \tilde{M}_i^{n+1} \neq M^{n+1}.$$

Данное нарушение закона сохранения массы устраняется следующей коррекцией сеточных значений искомой функции уровня:

$$\eta_i^{n+1} = b_i^n + \frac{M^{n+1}}{\tilde{M}^{n+1}} (\tilde{\eta}_i^{n+1} - b_i^n) \quad (2.9)$$

После коррекции имеем $\sum_{i=1}^N h_i^{n+1} \Delta x = M^{n+1}$, то есть нарушение консервативности по массе устранено.

Закон сохранения количества движения корректируется аналогично. Стоит отметить, что контроль и коррекция законов сохранения производится на каждом шаге по времени. На Рис. 7-8 приведены результаты расчета задачи о заполнении бассейна без коррекции и с коррекцией закона сохранения массы.

Масса жидкости в обоих случаях подобрана таким образом, чтобы полностью заполнить впадину. Однако, в первом случае (без коррекции закона сохранения массы) возникает избыток массы, что видно на Рис. 7.

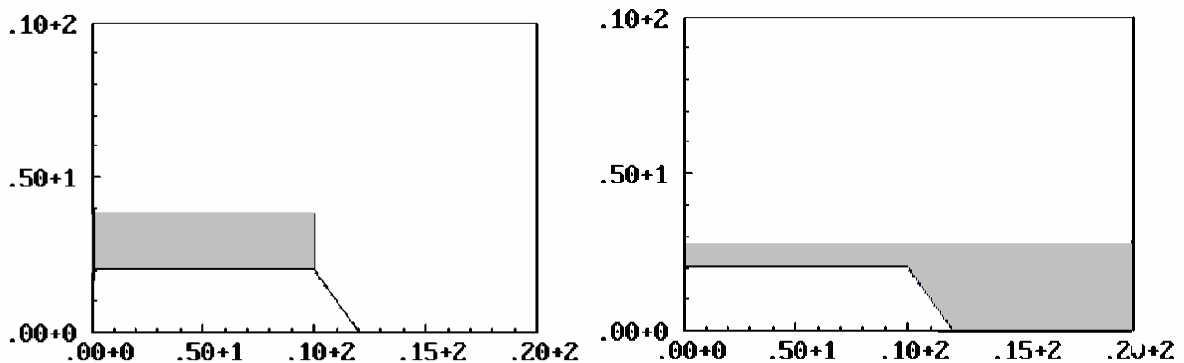


Рис. 7. Расчет без коррекции закона сохранения массы

После корректировки (2.9) нарушение консервативности по массе устранено, что видно на рис. 8.

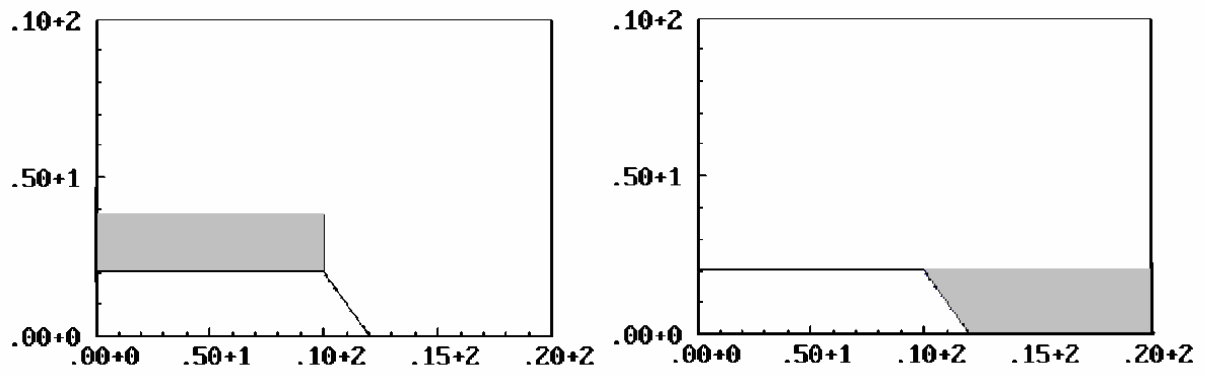


Рис. 8. Расчет с коррекцией закона сохранения массы

3. Результаты

Численный алгоритм решения рассматриваемых задач реализован в виде программ, написанных на языке Fortran77.

3.1 Обрушение водяной колонны в замкнутом бассейне

Схема начального состояния мелкой воды показана на Рис. 9. Бассейн $x \in [0, 100]$ разделен две части с постоянным уровнем дна $b = 0$ в каждой из частей. Первая часть $x \in [0, 50]$ заполнена водой глубины $h_1 = 10$. Вторая часть $x \in [50, 100]$ – почти пустая, заполнена водой малой глубины $h_2 = 1$. Между частями имеется перегородка. Ускорение силы тяжести $g = 9.81$. На левом и правом краях области решения при $x = 0$ и при $x = 100$ имеются высокие стенки, на которых $u = 0$ (условие непротекания). Начальная скорость жидкости при $t = 0$ равна нулю. Система находится в равновесии, пока перегородка на месте. В момент времени $t = 0$ перегородка убирается, и вода стекает из первой части бассейна во вторую под действием силы тяжести (водяная колонна обрушается).

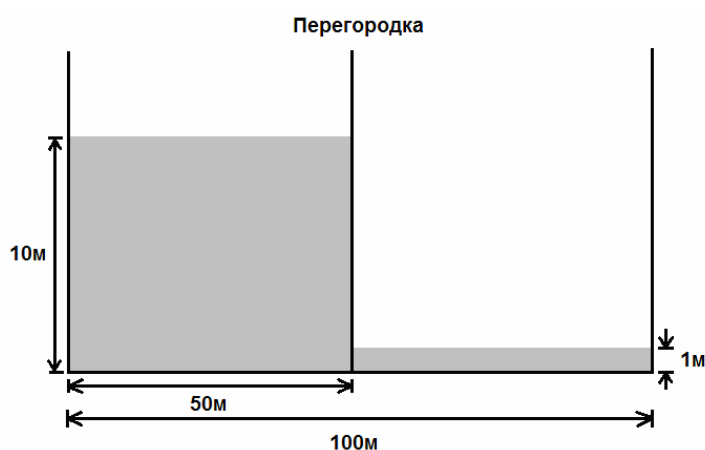


Рис. 9. Схема задачи об обрушении водяной колонны в замкнутом бассейне

Рассчитанная кинограмма процесса обрушения водяной колонны приведена на Рис. 10.

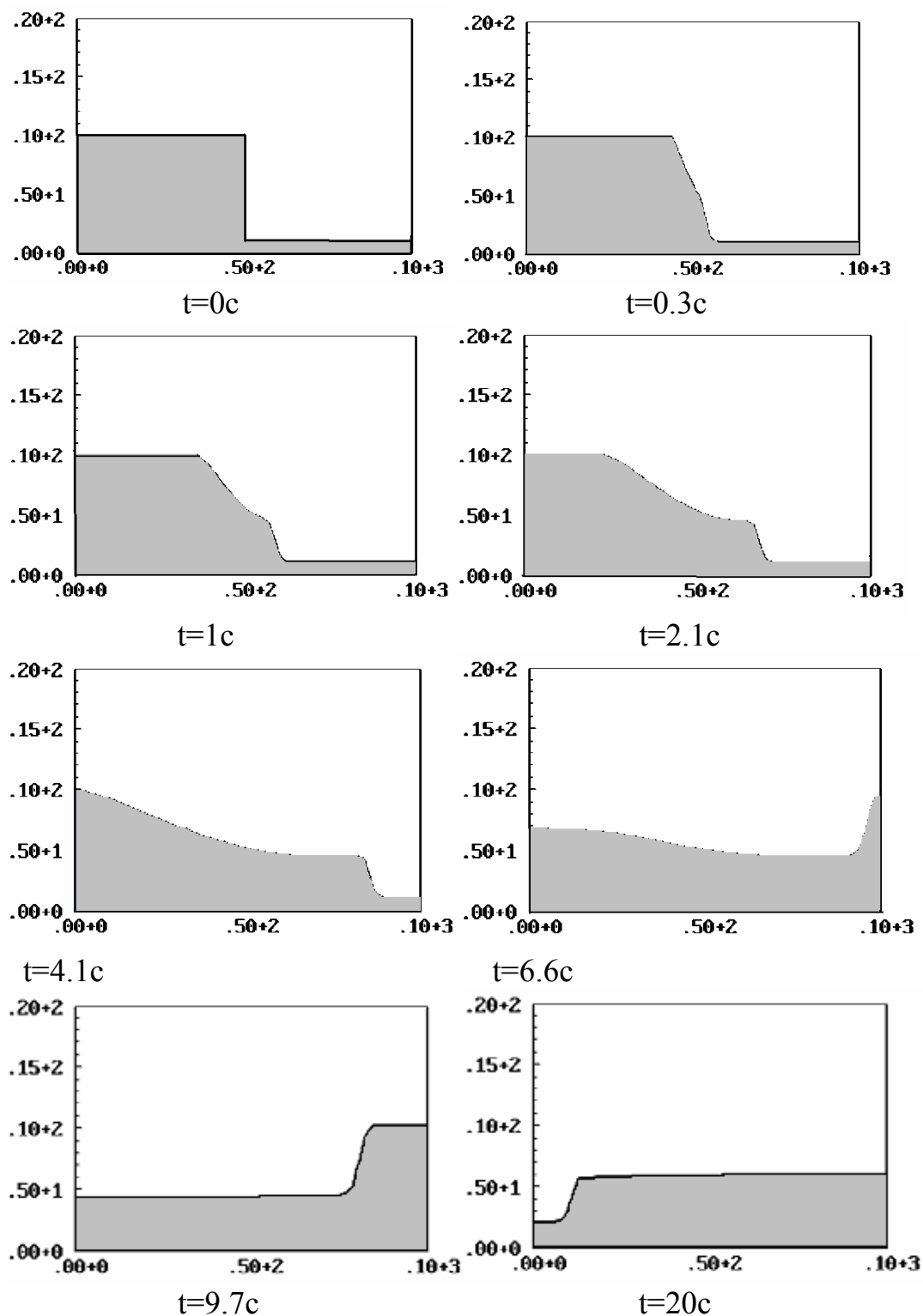


Рис. 10. Кинограмма процесса обрушения водяной колонны

На Рис. 11-14 приведено сравнение решений для профиля свободной поверхности этой задачи (в момент времени $t=4c$), полученных различными методами другими авторами [11]. Рис. 15 показывает решение настоящей работы.

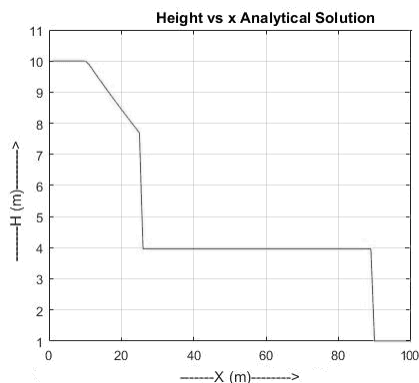


Рис. 11. Аналитическое решение [11]

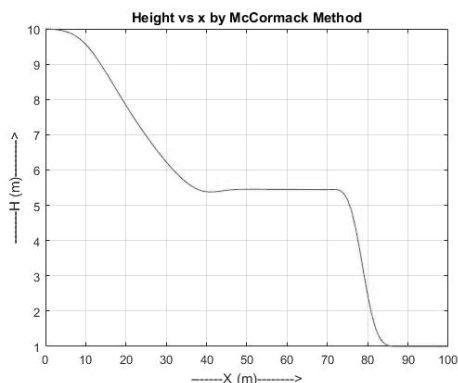


Рис. 12. Решение методом Мак-Кормака [11]

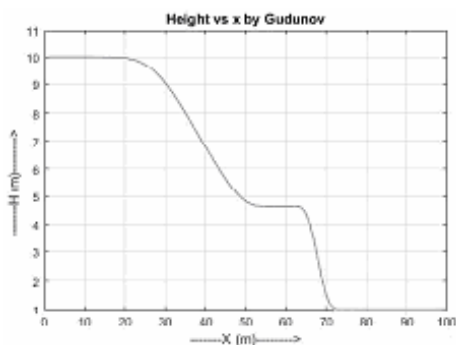


Рис. 13. Решение методом Годунова [11]

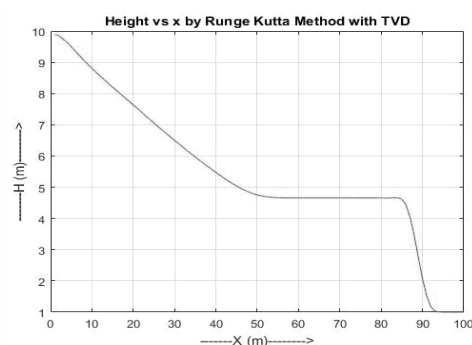


Рис. 14. Решение методом Рунге-Кутты [11]

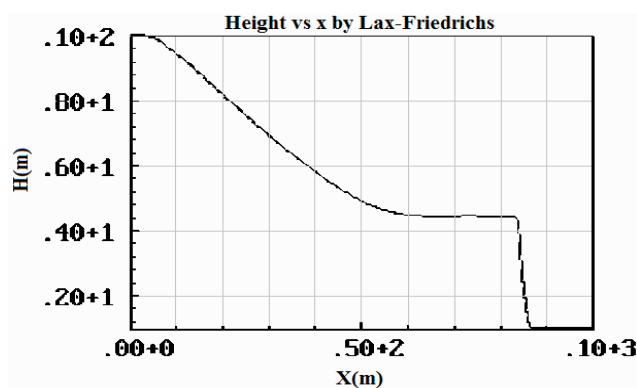


Рис. 15. Решение методом Лакса

Сравнение профилей скорости в момент времени $t=4\text{c}$ для аналитического решения [12] и нашего решения по методу Лакса показано на Рис. 16-17.

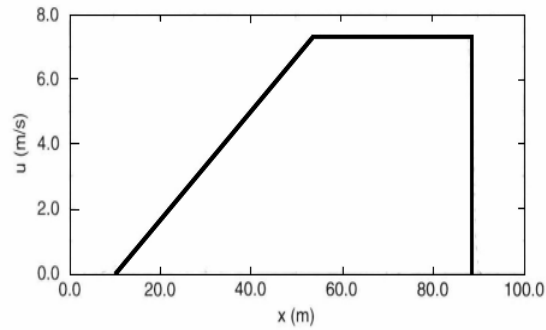


Рис. 16. Аналитическое решение для профиля скорости [12]

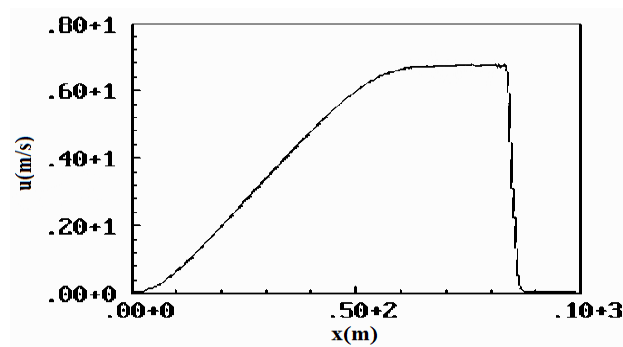


Рис. 17. Решение для профиля скорости методом Лакса

3.2 Задача о заполнении бассейна

Схема начального состояния мелкой воды показана на Рис. 18. Бассейн $x \in [0, 100]$ разделен на три части с уровнями дна $b_1 = 2.0$ в первой части, $b_2 = 6 - 0.1x$ во второй и $b_3 = 0$ в третьей. Вторая часть (крутой склон) задается для того, чтобы избежать резкого изменения уровня дна между первой и третьей частями. Первая часть $x \in [0, 40]$ заполнена водой глубины $h_1 = 2.5$. Вторая ($x \in [40, 60]$) и третья ($x \in [60, 100]$) части – пустые, т.е. $h_2 = h_3 = 0$. Между первой и второй частями имеется перегородка. Ускорение силы тяжести $g = 9.81$. На левом и правом краях области решения при $x = 0$ и при $x = 100$ имеются высокие стенки, на которых $u = 0$ (условие непротекания). Начальная скорость жидкости при $t = 0$ равна нулю. Система находится в равновесии, пока перегородка на месте. В момент времени $t = 0$ перегородка убирается, и вода стекает из первой части бассейна во вторую и третью под действием силы тяжести (происходит заполнение бассейна).

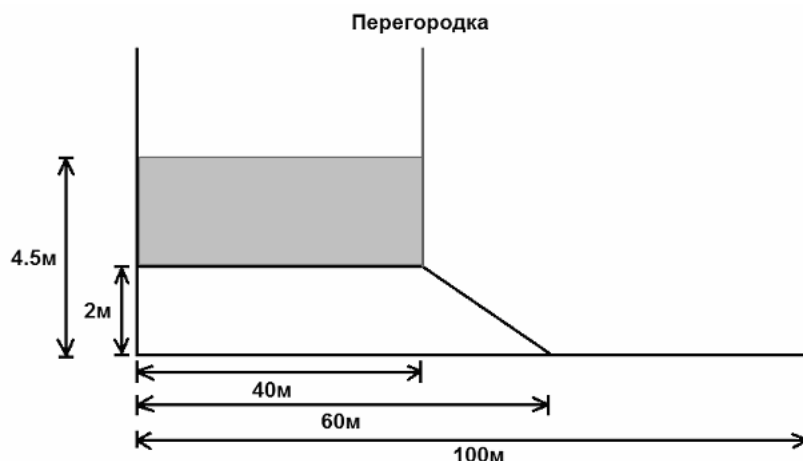


Рис. 18. Схема задачи о заполнении бассейна

Рассчитанная кинограмма заполнения бассейна показана на Рис. 19

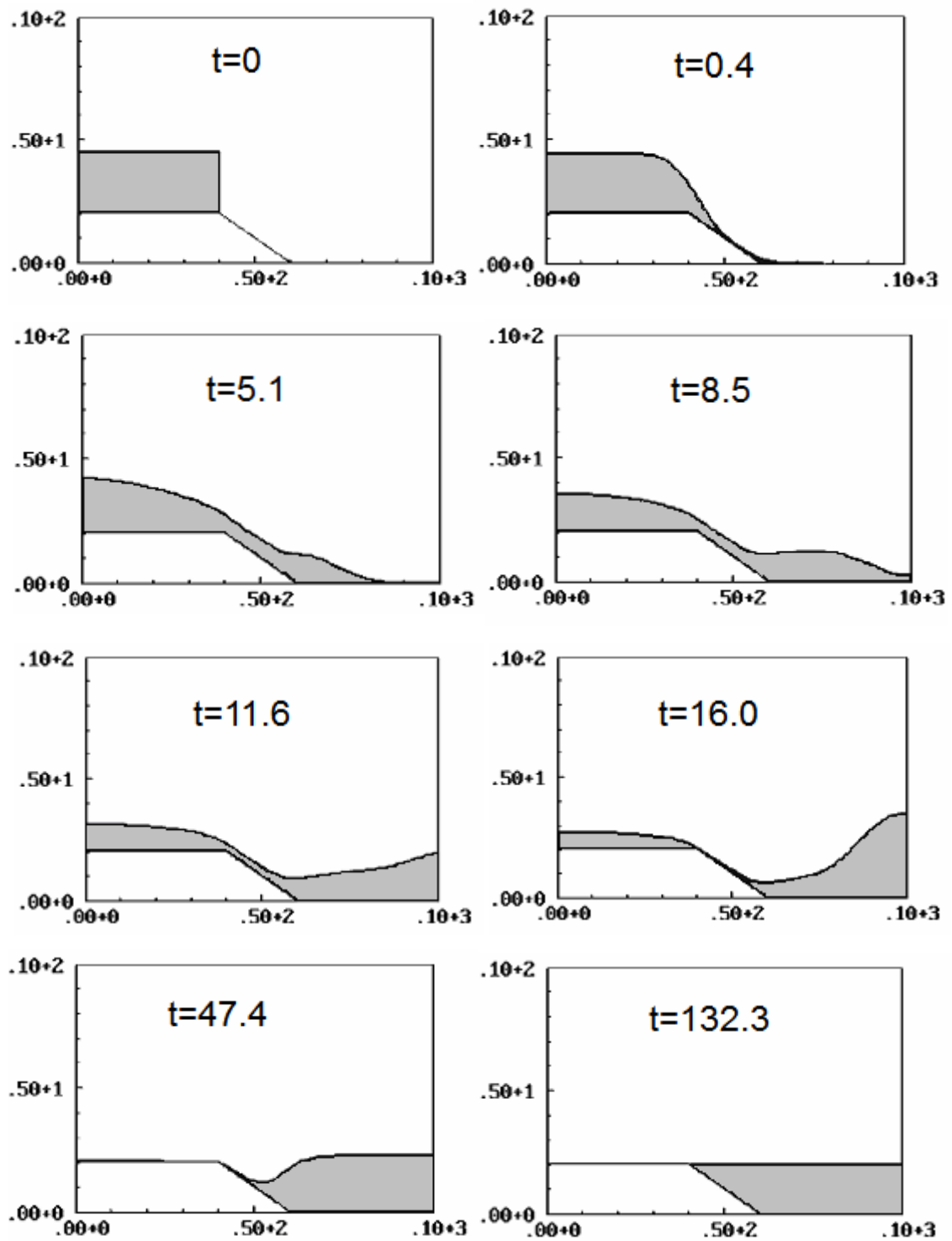


Рис. 19. Кинограмма процесса заполнения бассейна

3.3 Обтекание погруженных тел

Движение погруженных тел рассматривается при упрощающем предположении о существовании плоскости тока $z=0$, делящей поток на верхнюю и нижнюю части, обтекающие соответственно верхнюю и нижнюю поверхности погруженного тела. Предполагается также, что разделяющая поверхность тока является горизонтальной плоскостью симметрии обтекаемого погруженного тела. Это накладывает очевидные ограничения на форму рассматриваемых погруженных тел (симметричность относительно горизонтальной плоскости тока) и на направление движения тела относительно жидкости (горизонтальное).

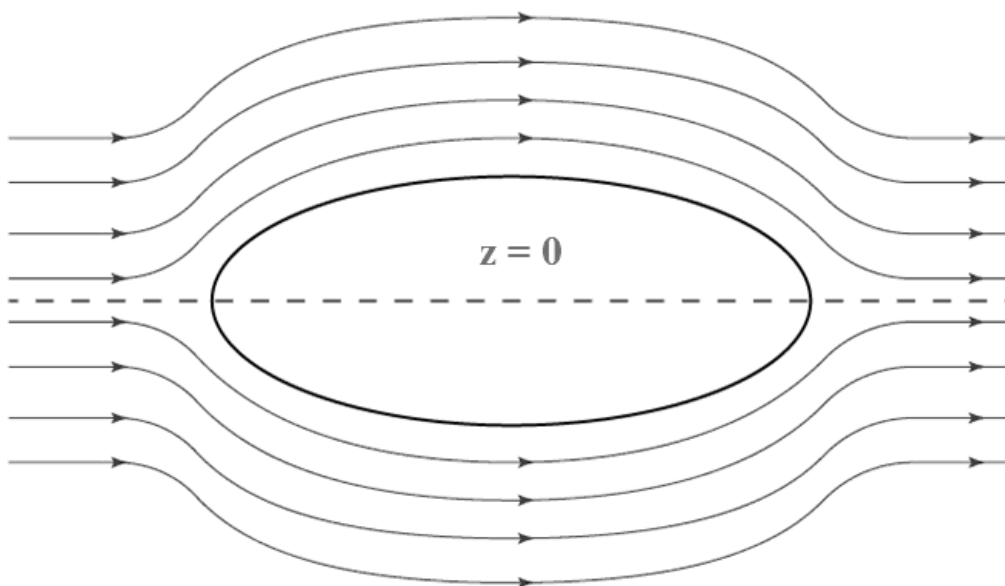


Рис. 20. Плоскость тока $z=0$

Расчет обтекания погруженного тела в результате сводится к расчету течения в канале, который имеет неровность на дне в виде верхней

половины погруженного тела. Схема расчета возмущений свободной поверхности жидкости погруженными телами приведена на Рис. 21.

Рассматривается одномерная нестационарная задача о течении жидкости в канале. Канал на участке $x \in [0, 10]$ имеет неровность на дне, расположенную посередине, то есть рельеф дна такой:

$$z_0 = \begin{cases} 0, & x \in [0, 4) \cup (6, 10]; \\ 0.5, & x \in [4, 6]. \end{cases}$$

Начальные условия имеют вид:

$$t = 0: \eta = 1, u = 1.$$

Граничные условия задавались так:

$$x = 0: \eta = 1, u = 1.$$

$$x = 10: \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Сначала жидкость имеет скорость u_0 во всей области решения. Неровность дна мгновенно появляется и вызывает перестройку решения. Требуется рассчитать установившееся течение.

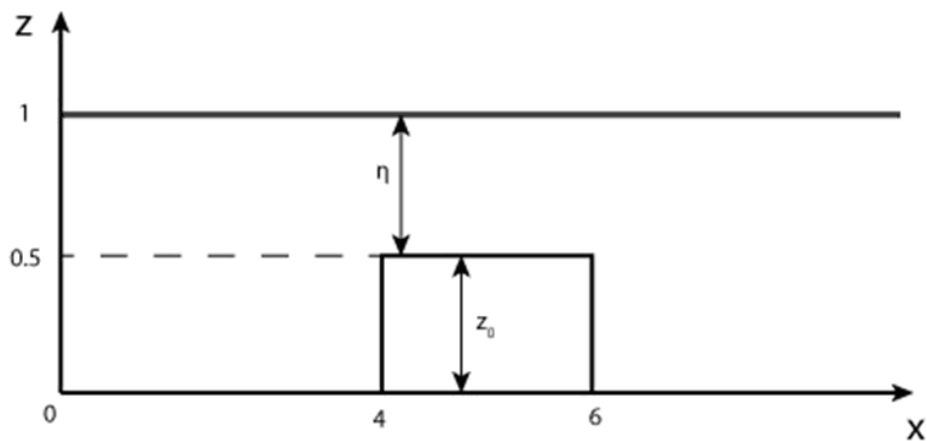


Рис. 21. Схема задачи об обтекании погруженных тел

На серии следующих рисунков будут представлены результаты расчетов задачи об обтекании погруженных тел различной формы при разных типах течений¹.

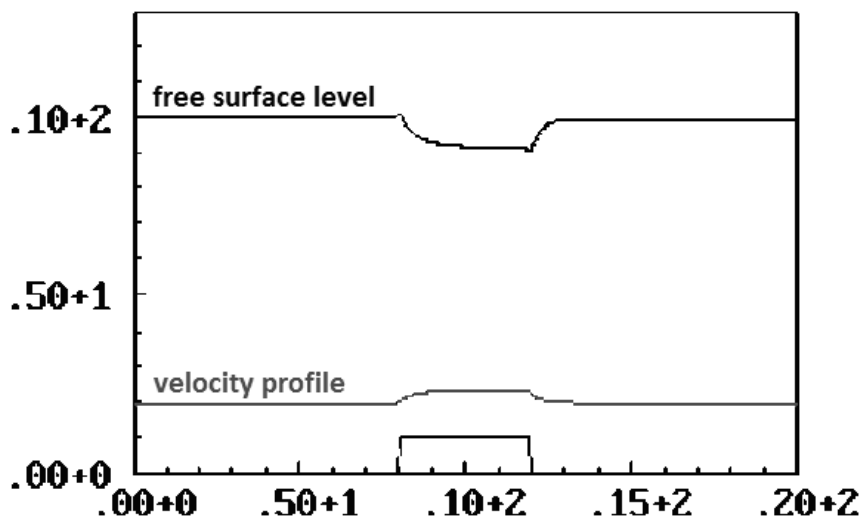


Рис.22. Установившееся докритическое течение над прямоугольником
($Fr=0.6$)

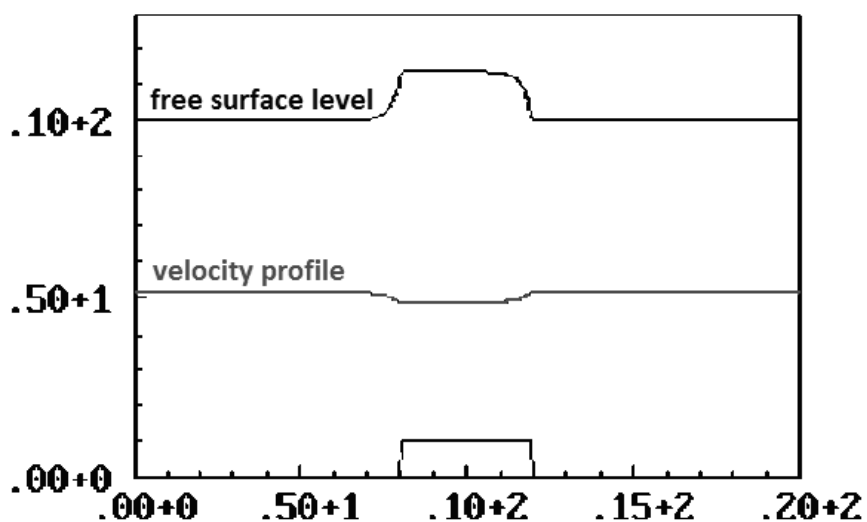


Рис.23. Установившееся сверхкритическое течение над прямоугольником
($Fr=1.6$)

¹ Расчеты обтекания погруженных тел выполнены М.А.Чайковским.

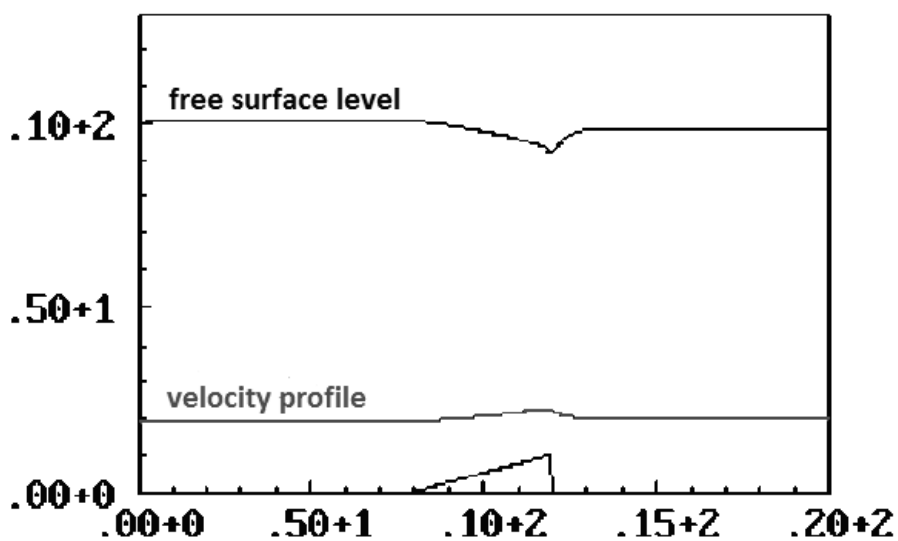


Рис.24. Установившееся докритическое течение над треугольником
($Fr=0.6$)

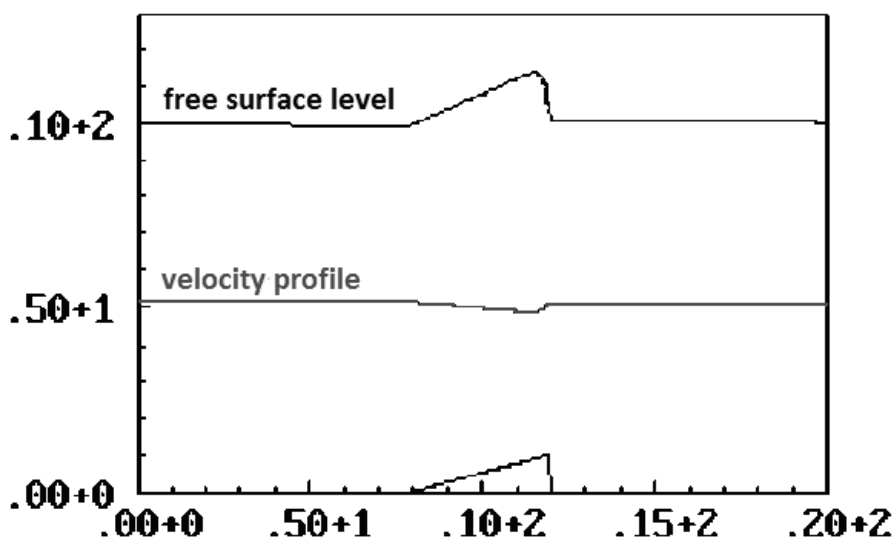


Рис.25. Установившееся сверхкритическое течение над треугольником
($Fr=1.6$)

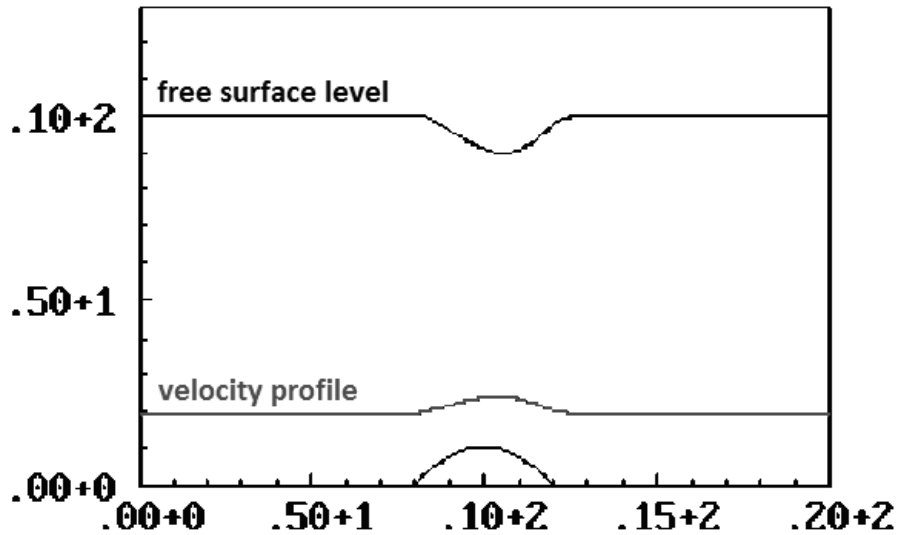


Рис.26. Установившееся докритическое течение над телом параболической формы ($Fr=0.6$)

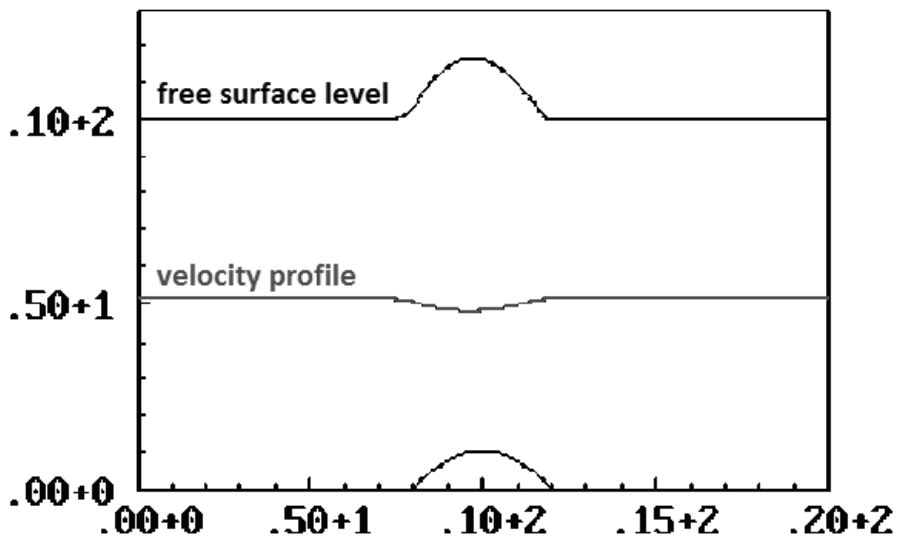


Рис.27. Установившееся сверхкритическое течение над телом параболической формы ($Fr=1.6$)

На Рис. 28 приведено сравнение численного решения задачи об обтекании тела параболической формы, полученного методом Лакса с

известным решением другого автора [13]. Видно, что результаты качественно согласуются между собой.

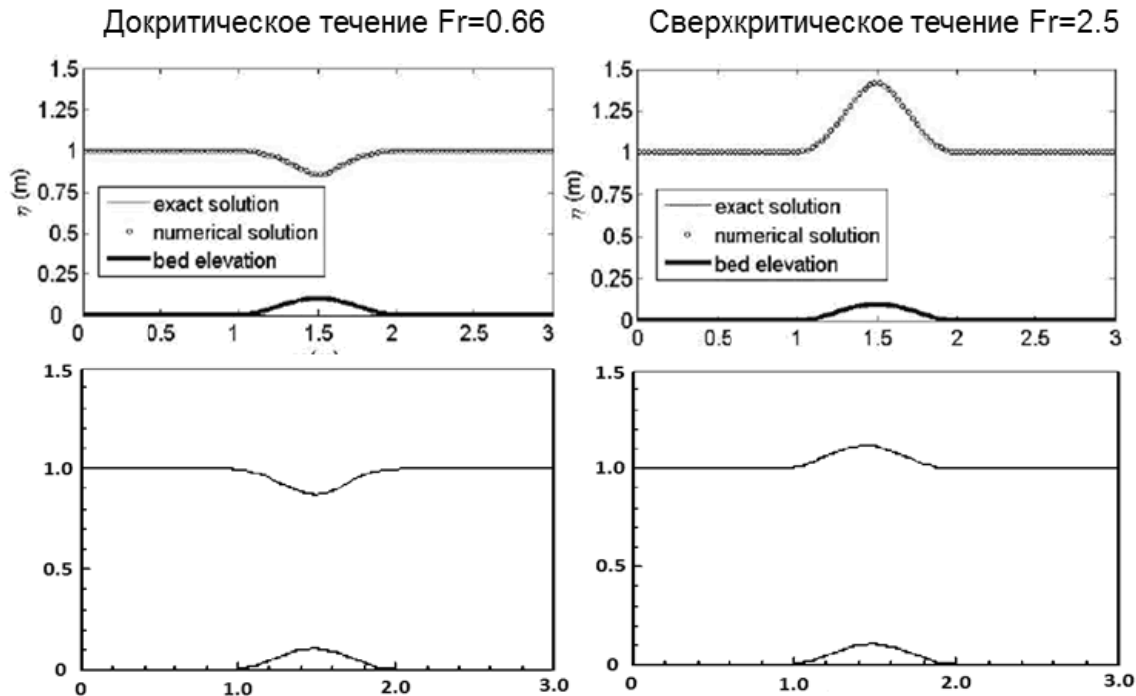


Рис. 28. Сравнение результатов расчета задачи об обтекании погруженных тел

3.4 Аналитическая оценка возмущений от движения погруженного тела

Важным моментом является аналитическая оценка возмущения уровня свободной поверхности из-за движения подводного тела. Для стационарного потока уравнения мелкой воды можно приближенно проинтегрировать аналитически. Пусть z_{00}, η_0, h_0, u_0 - параметры невозмущенного течения. Пусть теперь «дно» z_{00} получило возмущение δz_0 . Подставляя разложения $z_0 = z_{00} + \delta z_0$, $u = u_0 + \delta u$ и $\eta = h_0 + z_{00} + \delta \eta$ в уравнения стационарного течения мелкой воды, получаем

$$\begin{cases} \delta\eta u_0 - \delta z_0 u_0 + h_0 \delta u + (\delta\eta \delta u) - \delta z_0 \delta u = 0 \\ u_0 \delta u + (\delta u^2 / 2) + g \delta\eta = 0 \end{cases}$$

Пренебрегая нелинейными членами (в круглых скобках), получаем

$$A = \frac{\delta\eta}{D} = \frac{0.5}{(1 - Fr_{h_0}^{-2} (1 - 1/(2\tilde{H})))}$$

где $D = 2\delta h$ - вертикальный размер погруженного тела, $Fr_{h_0}^2 = u_0^2 / (gh_0)$ - квадрат числа Фруда по глубине h_0 , $\tilde{H} = h_0 / D$ - параметр глубины.

В работе [14] приведено сравнение аналитического решения задачи о движении погруженного цилиндра под поверхностью жидкости с экспериментальными данными [15]. Результаты представлены на Рис. 29.

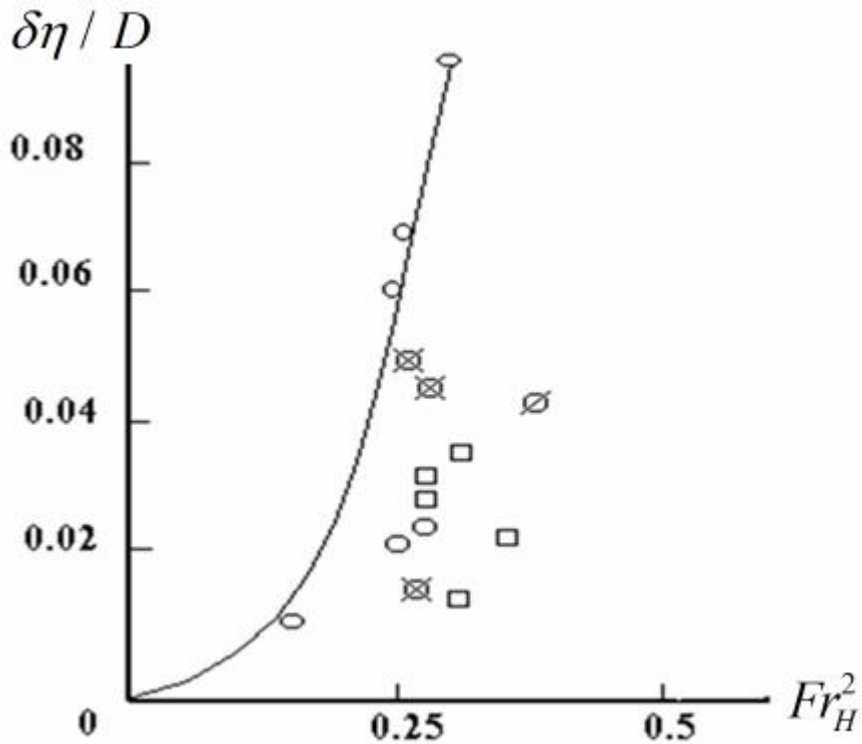


Рис. 29. Аналитическое решение показано сплошной линией. Значки отвечают разным значениям \tilde{H} (чем больше глубина, тем точнее работает формула).

3.5 Прорыв дамбы

Ниже представлено решение пространственно двумерной нестационарной задачи о прорыве дамбы. Область решения состоит из двух подобластей квадратной формы размера 10×10 , разделенных перегородкой (дамбой, плотиной) при $x=10$. Левая подобласть заполнена покоящейся водой глубины 2.0 . Левая граница этой подобласти при $x=0$ является открытой и соединяется с очень большим водоемом, так что глубина на этой границе во времени постоянна. Правая подобласть при $t=0$ сухая и глубина в ней равна нулю. Правая граница этой подобласти при $x=20$ является открытой и на ней выполняются условия свободного вытекания (нормальные производные от уровня свободной поверхности и скорости равны нулю). На горизонтальных границах при $y=0$ и $y=10$ ставились условия непротекания ($v_y=0$) и свободного скольжения ($\partial v_x / \partial y = 0$). Физическая вязкость воды в расчете не учитывалась ($\nu=0$).

В момент времени $t=0$ часть дамбы ($x=10, 3 \leq y \leq 7$) внезапно убирается и тяжелая вода ($g=1$) начинает стекать в правую подобласть и течение постепенно устанавливается.

На Рис. 30-32 для установившегося течения показаны уровень свободной поверхности η , треки лагранжевых маркеров, изолинии уровня свободной поверхности и скоростей. Наличие зон возвратно-поступательного движения в правой подобласти (Рис. 31а) обусловлено аппроксимационной вязкостью. Чтобы избежать деления на ноль из-за нулевой глубины в “сухих” частях области решения, глубина полагалась равной малому числу 10^{-4} .

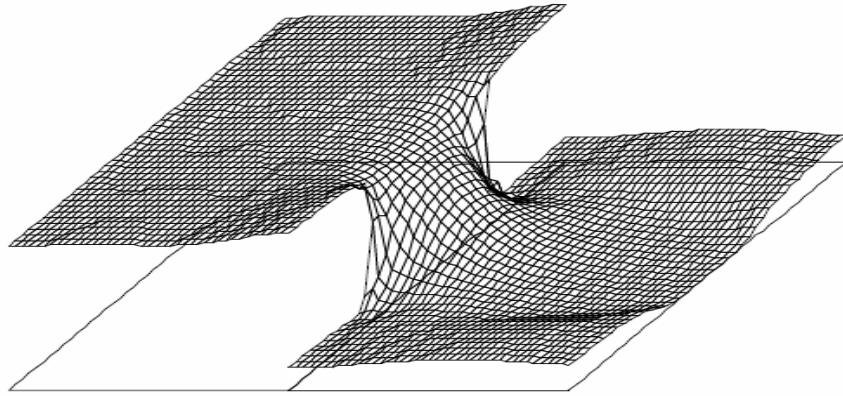


Рис. 30. Уровень свободной поверхности (установившееся течение).

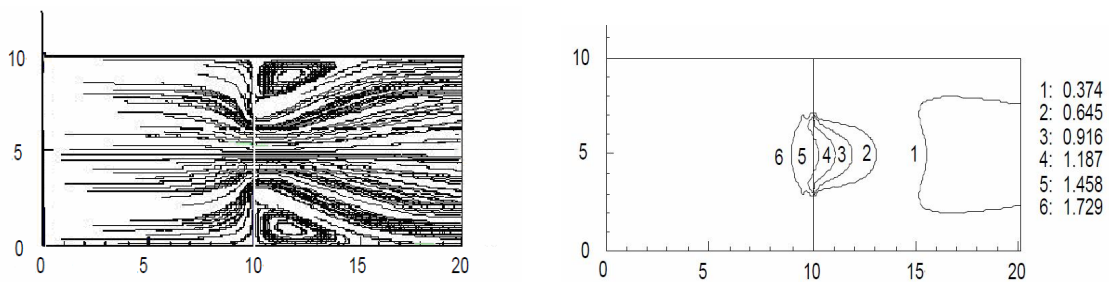


Рис. 31. а) Треки лагранжевых маркеров; б) изолинии уровня свободной поверхности.

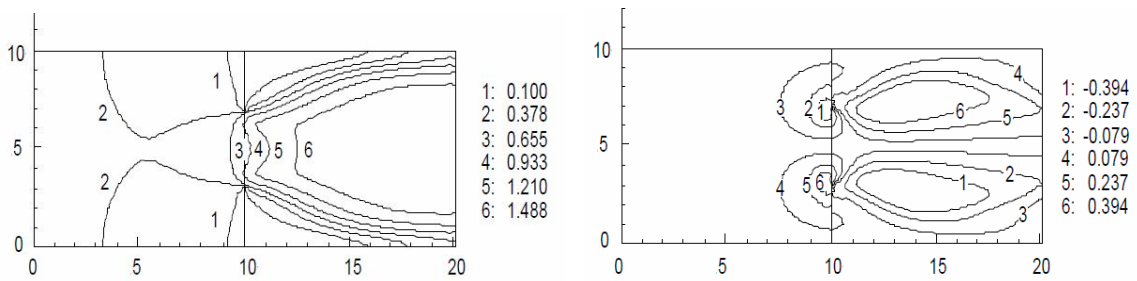


Рис. 32. а) скорость по x; б) скорость по y

Заключение

В работе описан алгоритм и результаты применения теории мелкой воды к расчету течений переменной геометрии. Сквозной счет течений проведен на окаймляющих область течения регулярных эйлеровых сетках по схеме Лакса.

Схема Лакса дополнена процедурами контроля и коррекции возможных нарушений свойств монотонности и консервативности численных решений из-за разрывных начальных данных. Алгоритмы реализованы в виде программ на языке ФОРТРАН-77 для IBMPC под управлением ОС Windows. Проведено тестирование программ на аналитических решениях задач конвекции и диффузии.

Представлены решения задач об обрушении водяной колонны, о заполнении водоема, о возмущениях уровня поверхности подвижными погруженными телами и о прорыве дамбы. Дана аналитическая оценка возмущений свободной поверхности из-за движения погруженных тел.

Показано, что результаты хорошо согласуются с известными аналитическими и численными решениями других авторов, а также с экспериментом.

Достоинством представленного алгоритма является простота реализации и использования.

Список литературы

1. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости/ Л.: Судостроение, 1979. – 204 с.
2. Булатов О.В. Численное моделирование течений в приближении мелкой воды на основе регуляризованных уравнений: диссертация кандидата физико-математических наук: 05.03.18; Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН – Москва, 2014. – 155 с.
3. Бошнятов Б.В., Лисин Д.Г. Численное моделирование волн типа цунами в гидродинамическом лотке /Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2013, № 6(26). – С. 45-55
4. Чуруксаева В.В., Михайлов М.Д. Численное моделирование потока жидкости над рельефом дна /Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2014, № 1(27). – С. 51-60
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / М.: Мир, 1980. – 616 с.
6. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики / М.: Наука, 1980. – 352 с.
7. Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики / М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
8. Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики, учебник и практикум для академического бакалавриата, 2-е изд. / М.: Юрайт, 2017. – 255 с.
9. Бураго Н.Г. Вычислительная механика, Москва, 2012. – 275 с.
DOI:10.13140/RG.2.1.4610.5047

10. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения / Вычислительные технологии, 2012. – С. 78-98
11. Bhatt. S. Investigation of Dam Break Problem through solution of 1D-Shallow Water equations using Fourth order Runge-Kutta Method, McCormack's Method and Gudonov's Method / Report of Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University at Buffalo, 2015. – 24 с.
12. Vincent S., Caltagirone J.-P. & Bonneton P. Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme, Journal of Hydraulic Research, 2001. 39:1, pp. 41-49, DOI: 10.1080/00221680109499801
13. Nor A. A., Lariyah M. S. Numerical Simulation on the Integrated Shallow Water Flow Model, 13th International Conference on Urban Drainage, Sarawak, Malaysia, 2014.
14. Bourago N.G., Bojarintcev V.I., Lednev A.I., Frost V.I. Application of reflected grid method for examination of small surface deformation of moving fluid, J. of Fluid Visualization and Image Processing, vol.1, No.3, 1993, P. 235-238.
15. Бояринцев В.И., Леднев А.К., Фрост В.А. Движение погруженного цилиндра под поверхностью жидкости. М., Препринт ИПМех АН СССР, 1988 N.332, 39с.

Николай Георгиевич Бураго¹

Владислав Александрович Герман²

Александр Дмитриевич Никитин³

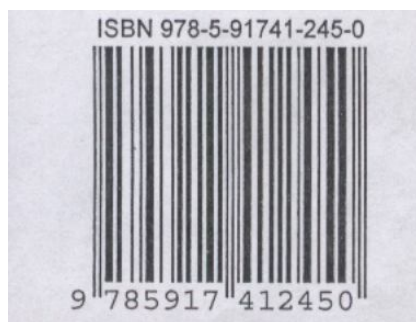
Илья Степанович Никитин³

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

²Московский физико-технический институт (Госуниверситет)

³Институт автоматизации проектирования РАН

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ



Подписано к печати 4 марта 2019 г. Заказ № 6-2019 Тираж 40 экз.

Отпечатано в ФЕДЕРАЛЬНОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УЧРЕЖДЕНИИ НАУКИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю.ИШЛИНСКОГО РАН

119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1