

УДК 519.634

Памяти О.М. Белоцерковского посвящается

ГИБРИДНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ АДАПТИВНЫХ НАЛОЖЕННЫХ СЕТОК¹⁾

© 2016 г. Н. Г. Бураго*, И. С. Никитин**, В. Л. Якушев**

(* 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101, кор. 1; Ин-т проблем механики РАН;

** 123056 Москва, Брестская ул. 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН)

e-mail: buragong@yandex.ru; i_nikitin@list.ru; yakushev@icad.org.ru

Поступила в редакцию 09.11.2015 г.

Предлагаются некоторые приемы численного решения задач механики сплошных сред в условиях сложной, переменной во времени, геометрии, позволяющие одновременно увеличить точность расчета и снизить затраты вычислительной работы. Это достигается методом сквозного счета при совместном применении следующих составляющих: 1) метод наложенных сеток для задания сложной геометрии; 2) метод упругих произвольно подвижных адаптивных сеток для минимизации ошибок аппроксимации в окрестности ударных волн, пограничных слоев, контактных разрывов и подвижных границ; 3) безматричная реализация эффективных итерационных и явно-неявных схем метода конечных элементов; 4) метод уравновешивающей вязкости (вариант стабилизированного метода Петрова-Галеркина); 5) метод экспоненциальной подгонки коэффициентов физической вязкости; 6) пошаговая коррекция решения, обеспечивающая свойства монотонности и консервативности. Библ. 31. Фиг. 6.

Ключевые слова: безматричный метод конечных элементов, экспоненциальная подгонка физической вязкости, наложенные адаптивные сетки, течения газа и жидкости, большие упругопластические деформации.

DOI: 10.7868/S0044466916060107

1. НАЛОЖЕННЫЕ СЕТКИ

Генерация расчетных сеток для описания сложной и, возможно, переменной во времени геометрии области решения является очень непростой и трудоемкой задачей, над решением которой математики активно работают начиная с шестидесятых годов 20-го века [1]. Помимо трудностей, связанных с конструированием методов построения сеток, например, с помощью отображений, значительные затраты труда расчетчика требуются потом при подготовке входных данных о геометрии области и при задании сеток на ее границах. Значительно упростить задачи построения расчетных сеток и задания сложной геометрии можно с помощью метода наложенных сеток, который заключается в том, что сначала вводится регулярная окаймляющая сетка, покрывающая (возможно, с запасом) рассматриваемую область движения сплошной среды. Например, вводится окаймляющий параллелепипед, заполненный маленькими ячейками-параллелепипедами. Для описания границ используются дополнительные, так называемые, наложенные сетки. Из расчета исключаются те узлы и ячейки окаймляющей сетки, которые накрыты наложенными сетками и, значит, расположены вне разрешенной области движения сплошной среды. Во многих случаях такое исключение можно проводить альтернативно с помощью аналитически заданных условий, с помощью переменных во времени непрерывных маркер функций, принимающих определенные значения в области разрешенного движения среды, или с помощью лагранжевых дискретных частиц-маркеров, движущихся со средой (см. обзор [1]). В настоящей статье рассматривается описание геометрии наложенными сетками. Истоки метода наложенных сеток можно обнаружить в трудах по

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту 15-08-02392-а

численным методам полувековой давности, например в [2,3]. В то время описание границ наложенными сетками не обеспечивало достаточной точности численного решения на вынужденно грубых сетках из-за малых объемов памяти и слабого быстродействия компьютеров. Попытки повышения точности путем применения улучшенных аппроксимаций решения вблизи границ, описываемых пересечениями окаймляющей и наложенных сеток, приводили к значительному усложнению алгоритмов (см. например, введение множества типов дробных ячеек в [4]). В настоящее время ситуация кардинально изменилась. Благодаря значительно возросшей мощности современных компьютеров (даже персональных!), стало реальностью применение сеток высокого разрешения. При использовании подвижных адаптивных сеток высокого разрешения метод наложенных сеток уже обеспечивает достаточную точность и становится все более привлекательным.

2. АДАПТИВНЫЕ ПРОИЗВОЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ СЕТКИ

Столь же старой является идея произвольно подвижных адаптивных сеток, история которой описана в обзорных разделах работ [1-17]. Такие подвижные сетки подстраиваются под особенности решения и, сгущаясь, уменьшают ошибки аппроксимации около внешних, контактных и межфазных границ, а также в зонах больших градиентов решения в ударных волнах и пограничных слоях. Для управления адаптацией к решению в уравнения генерации сеток отображениями вводится так называемая мониторинная функция. Мониторная функция выбирается так, что она имеет всплески (большие положительные значения) в местах больших градиентов решения и указывает на необходимость уменьшения в таких местах шага пространственной сетки для подавления ошибок аппроксимации. Идеальным было бы определение мониторинных функций по оценкам ошибок аппроксимации, однако в реальных задачах определение таких оценок возможно только очень приближенно, так что мониторинные функции чаще всего определяются из анализа метода решения на упрощенных модельных задачах. В нашей работе [18] было замечено, что постепенное совершенствование нелинейных уравнений в частных производных, применяемых для генерации сеток отображениями, ведет в конечном счете к уравнениям нелинейной теории упругости:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t) : \min \int_V \varphi(\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{T}) dV, \quad \mathbf{x}|_{\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{V}} = \mathbf{x}_*(\tilde{\mathbf{x}}, t) \quad (2.1)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{V}$ - прообраз области решения (произвольно подвижные координаты), \mathbf{x} - актуальная конфигурация области решения ("сетка в области решения в данный момент времени"), $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ - траектории подвижных координат, $\tilde{\mathbf{e}} = 0.5(\tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{I})$ - тензор конечных деформаций Грина для координатной среды, $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\nabla} \otimes \mathbf{x}$ - тензор градиентов деформации, \mathbf{I} - единичный тензор, $\tilde{\nabla}$ - оператор пространственного дифференцирования в подвижных координатах, $\varphi \geq 0$ - энергия деформаций, $\tilde{T} = \|\tilde{\nabla} \otimes \mathbf{y}\|$ - мониторинная функция ("антитемпература"), \mathbf{y} - вектор искомых функций для материальной среды. Подвижная расчетная сетка трактуется как изотропная термоупругая среда. Деформации этой среды определяются минимизацией функционала энергии (2.1), который принимается в простейшем виде в соответствии с двухконстантной теорией изотропной нелинейной термоупругой среды:

$$\min \int_{\tilde{V}} [\tilde{K}[(I_{3\tilde{\epsilon}} - 1) / 2 + I_{1\tilde{\epsilon}} \tilde{T}] + 2\tilde{\mu} I_{2\tilde{\epsilon}}] J_*^{-\alpha} d\tilde{V} \quad (2.2)$$

Здесь \tilde{K} - модуль упругости всестороннего растяжения-сжатия, $\tilde{\mu}$ - модуль упругости сдвига, $I_{1\tilde{\epsilon}} = \tilde{\mathbf{e}} : \mathbf{I}$, $I_{2\tilde{\epsilon}} = (\tilde{\mathbf{e}} - I_{1\tilde{\epsilon}} \mathbf{I} / 3)^2 : \mathbf{I}$, $I_{3\tilde{\epsilon}} = J^2$, $J = \det(\tilde{\mathbf{F}})$, $J_* = \max(J, 10^{-4})$ - инварианты деформаций, $\alpha \geq 0.5$. Важный для успешной реализации множитель $J_*^{-\alpha}$ в (2.2) обеспечивает отсутствие в построенных сетках вывернутых наизнанку (точнее, невыпуклых) ячеек даже в том случае, когда начальное приближение $\{\mathbf{x}_0\}$ в итерационном процессе решения (2.2) задано с вывернутыми ячейками. Этот множитель создает барьер на границе множества сеток с выпуклыми ячейками. При отыскании минимума функционала энергии (2.2) на границах области решения учитываются

ограничения на движение граничных узлов, определяемые дополнительными условиями задачи в зависимости от типа границы (контактная граница, граница фазового перехода, свободная, заданно подвижная граница и так далее). Для отыскания минимума функционала энергии самый простой и вполне эффективный путь к решению заключается в искусственном превращении нелинейной эллиптической задачи теории упругости для сеток (2.2) в параболическую задачу. Для этого в сеточный функционал вводятся дополнительные нестационарные члены с первыми производными по фиктивному времени. Полученная начально-краевая параболическая задача интегрируется по явной схеме до установления с начальным условием $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0$. Вариационное уравнение вспомогательной параболической задачи (условие минимума функционала для сетки) принимает вид:

$$\int_V [\partial_t \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} + (L : \tilde{\nabla} \mathbf{x}) : \tilde{\nabla} \delta \mathbf{x} - f \delta J] dV = 0 \quad (2.3)$$

где тензор четвертого ранга L и скаляр f зависят от деформаций и “антитемпературы” в соответствии с выражением для функции энергии деформации φ . Заметим, что для корректности сеточной задачи член с положительно определенным оператором L должен по норме уравновешивать член с множителем f . Подчеркнем, что поправка якобиана $J_* = \max(\det(\mathbf{F}), 10^{-4})$ существенна для успешной реализации [11,13,14].

Мониторная функция названа “антитемпературой”, поскольку с ростом \tilde{T} сеточная среда сжимается в то время, как обычная упругая среда при нагреве расширяется. Например, в рассматриваемых далее примерах из газовой динамики мониторная функция принимается прямо пропорциональной дивергенции скорости со знаком минус и имеет максимальные значения на скачках уплотнения. Записанные выше уравнения нелинейной упругости были успешно применены для построения адаптивных сеток в работе [19], где имеется более подробное описание сеточных алгоритмов данного типа и их предыстории.

Далее расчетами показано, что совместное применение наложенных и адаптивных сеток приводит к очень хорошим численным решениям даже на относительно грубых сетках.

3. ГИБРИДНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

В основе применяемого гибридного метода решения лежит идея сквозного счета эволюции течения сплошной среды по модифицированной схеме SUPG FEM [20, 21] на произвольно подвижных адаптивных и наложенных сетках. Рассмотрим основные особенности этого метода.

3.1. Законы сохранения (балансные уравнения) приняты в вариационной форме метода Галеркина-Петрова, полученной с использованием интегрирования по частям и содержащей производные от искомым функций не выше первого порядка (вывод рассмотрен в [18]):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V A \delta A dV + \int_V (\mathbf{B} - A \mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \delta A dV = \int_V f \delta A dV + \int_S (\mathbf{B} - A \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{n} \delta A dS \quad (3.1)$$

Здесь A сохраняемая величина, \mathbf{B} поток величины A , обусловленный взаимодействием и хаотическими движениями молекул (упругость, вязкость, диффузия), $A \mathbf{\Omega}$ - конвективный поток величины A (обусловленный упорядоченным движением материальной среды относительно координатной среды), f - источник/сток величины A , V - область решения с границей S , $\mathbf{\Omega} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ - конвективная скорость, \mathbf{u} и \mathbf{w} - скорости материальной и координатной сред. Временная производная $\partial / \partial t$ вычисляется вдоль траекторий произвольно подвижных координат (вдоль траекторий узлов подвижной сетки). В частности, в данной точке при $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ имеем лагранжев узел, при $\mathbf{w} = 0$ имеем эйлеров узел.

Для закона сохранения массы в (3.1) полагаем $A = \rho$, $\mathbf{B} = v_{art}^{(1)} \nabla \rho$, $f = 0$; для закона сохранения количества движения принимаем $A = \rho \mathbf{u}$, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\sigma} + v_{art}^{(2)} (\nabla \otimes (\rho \mathbf{u}) + (\nabla \otimes (\rho \mathbf{u}))^T) / 2$, $f = \rho \mathbf{g}$; для

уравнения баланса энергии используем $A = \rho e = \rho(U + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2)$, $\mathbf{B} = -\mathbf{q} + \nu_{art}^{(3)} \nabla(\rho e)$, $f = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) + \rho r$. В этих выражениях $\rho \mathbf{g}$ - внешние массовые силы, ρr - внешние источники/стоки тепла, T - температура, $U = c_V T$ - внутренняя энергия, c_V - теплоемкость при постоянном объеме. Вычисление коэффициентов искусственной вязкости $\nu_{art}^{(j)}$ ($j=1,2,3$) рассмотрено далее.

3.2. Определяющие соотношения. В представленных далее расчетах для задач гидрогазодинамики и упругопластичности определяющие соотношения для напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тепловых потоков \mathbf{q} записывались единообразно с использованием векторов и тензоров в актуальной конфигурации $\{\mathbf{x}\}$, подробное описание для различных сред дано в [22].

Например, для течений сжимаемой жидкости и газа определяющие соотношения имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_v, \quad \boldsymbol{\sigma}_v = 2\mu_v(\mathbf{e} - (\mathbf{e} : \mathbf{I})\mathbf{I}/3), \quad p = (\gamma - 1)\rho U, \quad \mathbf{q} = -k_T \nabla T$$

где p - давление, $\boldsymbol{\sigma}_v$ - девиатор вязких напряжений, μ_v - коэффициент физической вязкости, $\mathbf{e} = 0.5(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T)$ - эйлеров тензор скоростей деформаций, \mathbf{q} - тепловой поток, k_T - коэффициент теплопроводности.

3.3. Аппроксимации решения и уравнений. В численном методе используются только простейшие кусочно-линейные, билинейные и трилинейные аппроксимации решения в ячейках (конечных элементах). Интегралы вариационных уравнений вычисляются простейшими квадратурами Гаусса, которые в одномерном случае отвечают формуле трапеций для членов с временными производными и формуле прямоугольников для прочих членов вариационного уравнения. Таким образом, при аппроксимации членов с временными производными используются диагональные несогласованные матрицы масс [23]. Благодаря этому применяемые алгоритмы являются очень простыми аналогами явных центрально-разностных схем. Кроме того, такие алгоритмы являются очень гибкими, легко программируемыми и модифицируемыми при изменениях в постановках задач.

Предпочтение простым аппроксимациям отдано потому, что реализация аппроксимаций более высокой точности значительно усложняет работу по программированию, отладке и модификации алгоритмов, а выигрыш в точности, по чисто субъективному впечатлению авторов, не оправдывает требуемых затрат труда.

3.4. Учет дополнительных условий (ограничений). Дополнительные условия (ограничения), например, контактные условия, условия разрушения/консолидации, условия фазовых переходов, условия несжимаемости и другие учитываются в сквозном счете [24-28] модификацией вариационных уравнений с применением методов множителей Лагранжа или штрафных функций (в разных вариантах).

3.5. МКЭ схемы. В зависимости от скорости процесса эволюционные задачи рассчитываются по явным, явно- неявным и неявным двухслойным схемам первого и квазивторого порядков точности. Для конвективных членов всегда применяется явная центрально-разностная аппроксимация, при этом для устойчивости вводится искусственная вязкость.

3.6. Реализация явно-неявных и неявных схем. Неявная аппроксимация потоковых членов \mathbf{B} применяется в случаях, когда их явные аппроксимации требуют слишком сильных ограничений на величину шага по времени или в случаях решения стационарных (или квазистатических по терминологии механики деформируемых тел) задач. Неявные схемы реализуются итерационно, при этом алгоритм расчета отдельной итерации полностью идентичен расчету временного шага явной схемы. Поэтому алгоритмы неявных схем являются очень короткими и простыми, никаких матриц жесткости вычислять и запоминать не требуется и никаких матричных операций проводить не нужно. Память ЭВМ расходуется очень экономно, а быстродействие неявных схем достигается применением метода сопряженных градиентов [29], требующего для решения конечного числа операций, пропорционального $N^{3/2}$, где N - число неизвестных. Для необходимого предобуславливания используется диагональная составляющая матрицы жесткости, вычисление и запоминание которой не составляет труда. Потребная память ЭВМ для итерационного процесса сопряженных градиентов составляет $5N$ (независимо от числа пространственных измерений).

Используется вариант метода, не требующий симметрии и положительности дискретного оператора. Подробное описание неявных конечно-элементных алгоритмов и метода сопряженных градиентов сделано в [27].

3.7. Консервативность алгоритмов обеспечивается проинтегрированной по частям вариационной формой Галеркина-Петрова применяемых законов сохранения и последующей конечно-элементной аппроксимацией решения. Локальная консервативность, то есть баланс потоков между приузловыми объемами обосновывается элементарно и является следствием вариационной записи и факта равенства нулю производных от константы. Глобальная консервативность определяется корректным заданием граничных условий.

3.8. Задание искусственной вязкости. Применяемые схемы расчета по времени (физическому или фиктивному в итерациях) полностью аналогичны центрально-разностным двухслойным схемам. Устойчивость явных центрально-разностных схем обеспечивается искусственной вязкостью. Среди множества рецептов введения искусственной вязкости [30] в настоящей работе после огромного множества тестов предпочтение было отдано способу стабилизированной конечно-элементной схемы Петрова-Галеркина с разностями против потока [20,21]. Однако схема эта используется в упрощенном варианте без введения направленных разностей. Искусственная вязкость определяется так, чтобы на границах между приузловыми объемами уравновесить по норме вклад от диффузионных членов и вклад от прочих членов однородной части уравнения. Поясним, что “на границах между приузловыми объемами” означает “в гауссовых точках используемых квадратур интегрирования вариационного уравнения”, расположенных в центрах конечных элементов. Такую упрощенную разновидность стабилизированной схемы Галеркина-Петрова называем “схемой уравнивающей вязкости”. Формулы для вычисления коэффициентов искусственной вязкости $\nu_{art}^{(j)}$ имеют вид:

$$[\nu_{art}^{(1)}]_k = \alpha_k \frac{d_{1k}^{(1)}}{d_{2k}^{(1)}}, \quad [\nu_{art}^{(2)}]_k = \alpha_k \frac{d_{1k}^{(2)}}{d_{2k}^{(2)}}, \quad [\nu_{art}^{(3)}]_k = \alpha_k \frac{d_{1k}^{(3)}}{d_{2k}^{(3)}}$$

где k – номер конечного элемента, индекс временного слоя u всех переменных опущен, чтобы не загромождать записи. Параметр $\alpha_k = 0.5$ при $[\nabla \cdot \mathbf{u}]_k \Delta t < 0.1$, иначе $\alpha_k = 1.0$. Шаг по времени Δt определяется условием устойчивости далее. Коэффициенты $d_{1k}^{(j)}$ и $d_{2k}^{(j)}$ ($j=1,2,3$) определяются так

$$\begin{aligned} (d_{1k}^{(1)})^2 &= ([\nabla \cdot (\rho \Omega)]_k)^2 / m, & (d_{2k}^{(1)})^2 &= \sum_{l=1}^m ([\nabla \rho]_k \cdot \nabla_{kl})^2 \\ (d_{1k}^{(2)})^2 &= [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \Omega) + \nabla p]_k \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \Omega) + \nabla p]_k / m \\ (d_{2k}^{(2)})^2 &= \sum_{l=1}^m ([\nabla (\rho \mathbf{u})]_k \cdot \nabla_{kl}) \cdot ([\nabla (\rho \mathbf{u})]_k \cdot \nabla_{kl}) \\ (d_{1k}^{(3)})^2 &= ([\nabla \cdot (\rho e \Omega + p \mathbf{u})]_k)^2 / m, & (d_{2k}^{(3)})^2 &= \sum_{l=1}^m ([\nabla (\rho e)]_k \cdot \nabla_{kl})^2 \end{aligned}$$

Значения искоемых функций $[A]_k$ в центре каждого элемента k вычисляются по формуле

$$[A]_k = \sum_{l=1}^m s_{kl}^0 A_{J(k,l)}$$

где $s_{kl}^0 = 1/m$, m - число узлов в элементе, $J(k,l)$ - глобальный номер узла с локальным номером l в элементе k . Пространственные производные вычисляются по формуле $[\nabla A]_k = \sum_{l=1}^m \nabla_{kl} A_{J(k,l)}$.

Свойство коэффициентов $\nabla_{kl} : \sum_{l=1}^m \nabla_{kl} = 0$ определяет равенство нулю производной от константы. В

зонах сильного разрежения, вызванного ускорением потока при $[\nabla \cdot \mathbf{u}]_k \Delta t \geq 0.1$, коэффициент уравнивающей вязкости специально увеличивается вдвое, что необходимо для устойчивости расчета в таких зонах.

3.9. Корректировка физической вязкости. Для повышения точности решения в пограничных слоях физическая вязкость корректируется (уменьшается с ростом искусственной вязкости) по методу экспоненциальной подгонки, предложенному в 60х годах А.А. Самарским и развитому в [31]. Простейшая корректировка имеет вид:

$$\tilde{\mu}_v = \frac{\mu_v^2}{\mu_v + \rho V_{art}^{(2)}}, \quad \tilde{k}_T = \frac{k_T^2}{k_T + \rho V_{art}^{(3)}}$$

3.10. Устранение мелкомасштабных паразитных возмущений. Поскольку все элементы алгоритма обосновываются только на уровне простейших модельных задач и не строго, то в решении задач по полным уравнениям в области решения местами возникают паразитные возмущения решения с длиной волны, пропорциональной шагу пространственной сетки. Такие нефизические возмущения (“пила”) немедленно отлавливаются по смене знака второй производной по проверяемому координатному направлению в соседних узлах, принадлежащих ребру сетки. Взаимная ориентация ребра и координатного направления роли не играет. Такие возмущения, хотя и не нарушают устойчивость метода (не растут), но их присутствие портит графики решения (дает негладкие картины изолиний). Для устранения этих возмущений применяется простейшее консервативное покоординатное сглаживание. Реально эта процедура проводится в крайне малом количестве узлов в конце каждого шага.

3.11. Определение вторых производных w_{xx} от некоторой компоненты решения w по координате x в условиях кусочно-линейных аппроксимаций решения реализуется так. Очевидное вариационное уравнение для вторых производных

$$\int_V (w_{xx} - \partial^2 w / \partial x^2) \delta w_{xx} dV = 0$$

интегрированием по частям приводится к виду

$$\int_V w_{xx} \delta w_{xx} dV + \int_V \partial w / \partial x \partial w_{xx} / \partial x dV = \int_S \partial w / \partial x \delta w_{xx} n_x dV$$

где область решения V имеет границу S . Правая часть уравнения для простоты полагается равной нулю. То есть, на границе либо первая, либо вторая производная по координате x считается равной нулю. Если для первого интеграла левой части использовать квадратуры Гаусса с гауссовыми точками интегрирования в узлах сетки, то вторые производные определяются вариационным уравнением явно, для их определения никаких недиагональных матриц обращать не требуется. Таким способом вторые производные быстро вычисляются по кусочно-линейным функциям приближенного решения. Вторые производные по координатам y и z вычисляются аналогично.

3.12. Условия устойчивости. Для явных схем шаг по времени Δt определяется из условия устойчивости, которое имеет обычный вид

$$\Delta t \leq \min_k \beta \frac{h_k}{(c_k + |\Omega_k| + (D+1)! \max(\mu_v, k_T) / \rho / h_k)}$$

где h_k - размер k -го конечного элемента, $D=1,2,3$ – число пространственных измерений в задаче, c_k - скорость звука, β - коэффициент запаса (обычно равный 0.3 - 0.6) Если диффузионное ограничение на шаг по времени становится обременительным (большие коэффициенты μ_v и k_T) или если течение в значительной части дозвуковое ($|\mathbf{u}| \ll c_k$), то условие устойчивости можно существенно ослабить применением неявных аппроксимаций для неконвективных потоков. Ограничение по конвекции (слагаемое $|\Omega_k|$ в знаменателе условия устойчивости) из-за явной аппроксимации конвективных потоков должно выполняться в любом случае. В задачах упругопластичности с большими деформациями необходимо дополнительно ограничивать шаг по времени условием точности решения, а именно, требованием малости изменения нормы деформаций по сравнению с характерной деформацией, отвечающей пределам текучести или прочности. Подробности даны в [27].

Описанная совокупность приемов, обосновать которые удастся только на уровне правдоподобных рассуждений, и наложенные сетки, применяемые совместно с адаптацией произвольно подвижной окаймляющей сетки по методу упругих сеток, дает удивительно хорошие результаты. Особенно ценно то, что в опробованном алгоритме не требуется без конца подстраивать какие-либо параметры метода при смене типа задач (кроме выбора мониторинговых функций).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже приводятся решения характерных задач с подвижными границами раздела сред и скачками с помощью подвижных адаптивных и наложенных сеток.

Пример 1. На Рис. 1, а-б для моментов времени 0.5 и 4.0 показана адаптивная упругая сетка в известной тестовой задаче о течении идеального совершенного газа в канале (3.0x1.0) со ступенькой высоты 0.4, расположенной на расстоянии 0.6 от входа в канал. Скорость на входе характеризуется числом Маха 3.0, показатель адиабаты 1.4. Скачки видны по сгущению адаптивной сетки. Согласование с известным решением отличное. Единственный явный недостаток адаптации связан с отсутствием сгущения сетки на контактном разрыве, идущем от начала “ножки” первого отражения ударной волны от верхней стенки. Контактный разрыв можно отловить, если член с дивергенцией скорости в выражении для мониторинжной функции просуммировать с нормой градиента плотности. Этого пока не делалось.

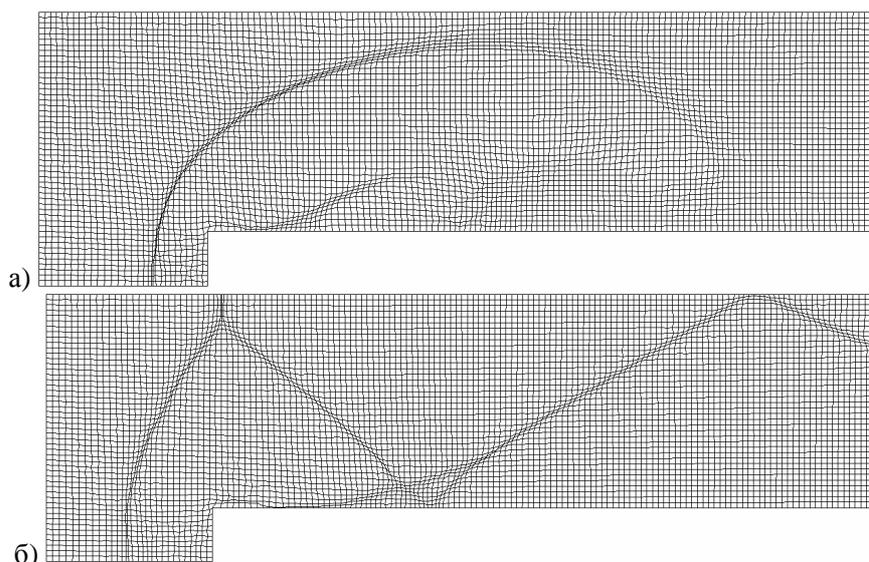


Рис. 1. Адаптивная сетка для течения идеального газа в канале со ступенькой: $M=3$, $\gamma=1.4$ для моментов времени $t=0.5$ (а) и $t=4.0$ (б)

Половину века назад вычислители пытались явно выделять сильные разрывы (скачки) решений с использованием соотношений на скачках для определения их положения и величины. Эти попытки столкнулись с непреодолимыми трудностями из-за того, что по мере взаимодействия скачков между собой и отражения от стенок число скачков и количество областей гладкого решения резко возрастало, что делало невозможным их явное рассмотрение. В этом плане метод адаптивных сеток, который отлавливает с хорошей точностью скачки в сквозном счете фактически можно рассматривать как хороший способ достижения поставленной полвека назад цели – численного расчета течений с множественными разрывами.

Пример 2. Следующий пример показывает применение наложенных сеток для расчета обтекания двух цилиндров. Выгода проявилась еще до начала расчета и состояла в легкости описания сложной геометрии многосвязной области решения. Фрагмент окаймляющей сетки с наложенной сеткой одного из цилиндров показан на Рис.2

Наложённые сетки показывают положение цилиндров. Не составляет никакого труда менять положение и размеры цилиндров простым изменением нескольких входных параметров (положение центра и радиус).

. Окаймляющая адаптивная сетка (Рис. 3) не только отловила разрывы решения, но и подстроилась под форму границ области течения, описанных наложенными сетками. На Рис. 4, а-б для моментов времени 0.45 и 7.0 представлены изолинии местного числа Маха (число изолиний и диапазон изменения показаны на рисунках).

Окаймляющая сетка содержала всего 160x160 квадратных ячеек. Размер области решения 5.0x5.0. Радиусы цилиндров 0.2. Скачки и их взаимодействие рассчитаны отлично.

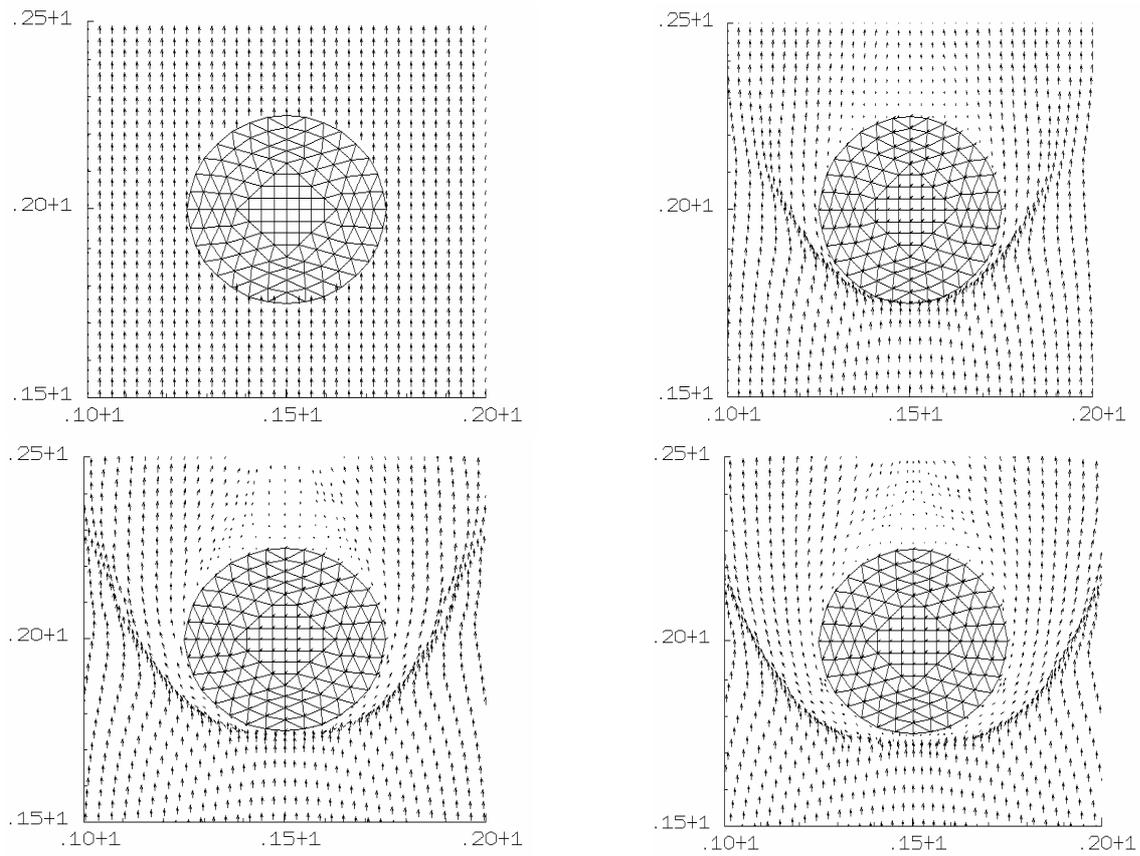


Рис. 2. Поле скоростей около наложенного цилиндра для $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3$.

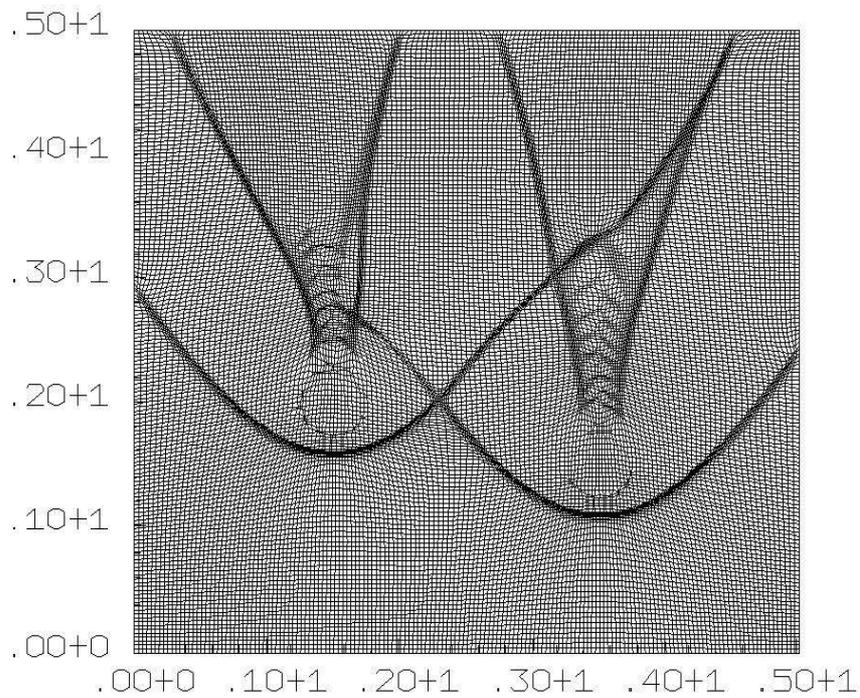


Рис. 3. Окаймляющая адаптивная сетка для $t = 7.0$

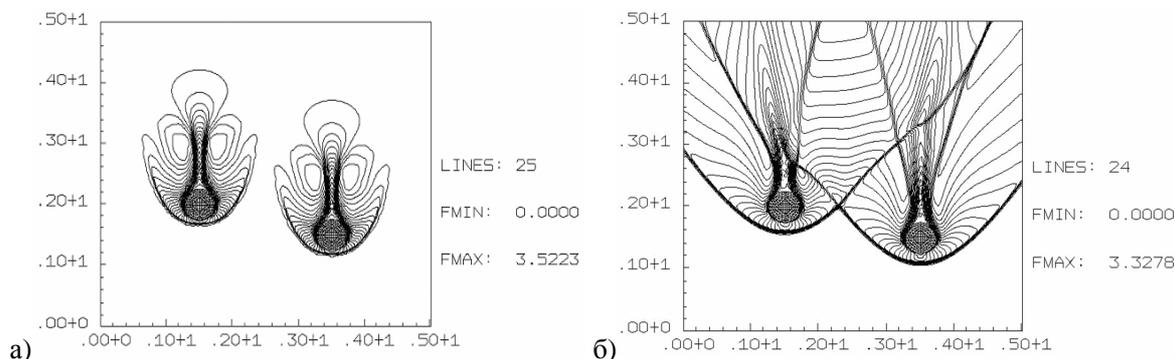


Рис. 4. Изолинии местного числа Маха при $t=0.45$ (а) и $t=7.0$ (б)

Пример 3. На рис. 5 показано сравнение результатов нашего расчета (а) с результатом работы [21]. Показаны изолинии давления для течения идеального совершенного газа в канале с параболической аркой для $M = 1.4$ $\gamma = 1.4$. Область решения имеет размер 3.0×1.0 . Расчет [21] выполнен на сетке 184×60 (без адаптации), в нашем расчете использована адаптивная сетка 240×80 . Уравнение арки имеет вид

$$1.0 \leq x \leq 2.0: \quad y = 0.05(1 - (2(x - 1.5))^2)$$

где x и y - горизонтальная и вертикальная координаты в области решения.

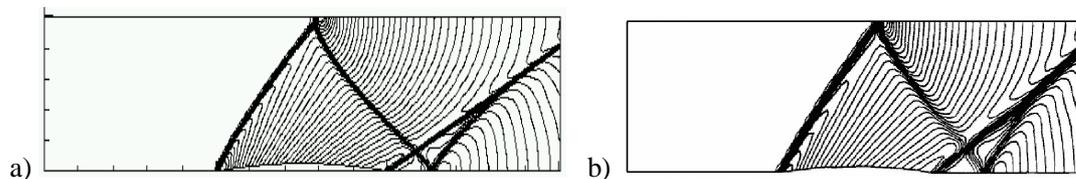


Рис. 5. Изолинии давления для течения идеального совершенного газа в канале с параболической аркой: (а) – наш расчет, (б) – расчет [21] для $M=1.4$, $\gamma=1.4$, $t=8.0$.

Пример 4. На Рис. 6, а-б показано поведение подвижной адаптивной сетки в упругопластической задаче формования лопатки турбины из цилиндрической заготовки под действием абсолютно жестких штампов. В течение всего процесса узлы сетки автоматически двигались так, чтобы размер всех ячеек сетки поддерживать по возможности одинаковым, чтобы избежать катастрофического уменьшения шага по времени из-за сплющивания ячеек в зонах сжатия при расчетах на лагранжевых сетках, движущихся вместе со средой. В уравнениях управления упругими сетками для выравнивания объемов ячеек коэффициент сеточной упругости сдвига задавался в 100 раз меньше коэффициента сеточной упругости всестороннего сжатия, а мониторинговая функция не требовалась.

Определяющие соотношения принимались в соответствии с теорией пластического течения Прандтля-Рейса

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}', \quad d\boldsymbol{\sigma}'/dt = 2\mu(\mathbf{e}' - H(F)\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\sigma}'), \quad p = K\rho / \rho_0(\rho / \rho_0 - 1), \quad \mathbf{q} = 0$$

где μ и K - модули упругости сдвига и всестороннего сжатия, H - функция Хевисайда и тензор $\boldsymbol{\lambda}$ определяется условием текучести Мизеса $F = \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - k_\sigma^2 = 0$, k_σ - радиус поверхности текучести, $\boldsymbol{\sigma}'$ и \mathbf{e}' - девиаторы напряжений и скоростей деформаций.

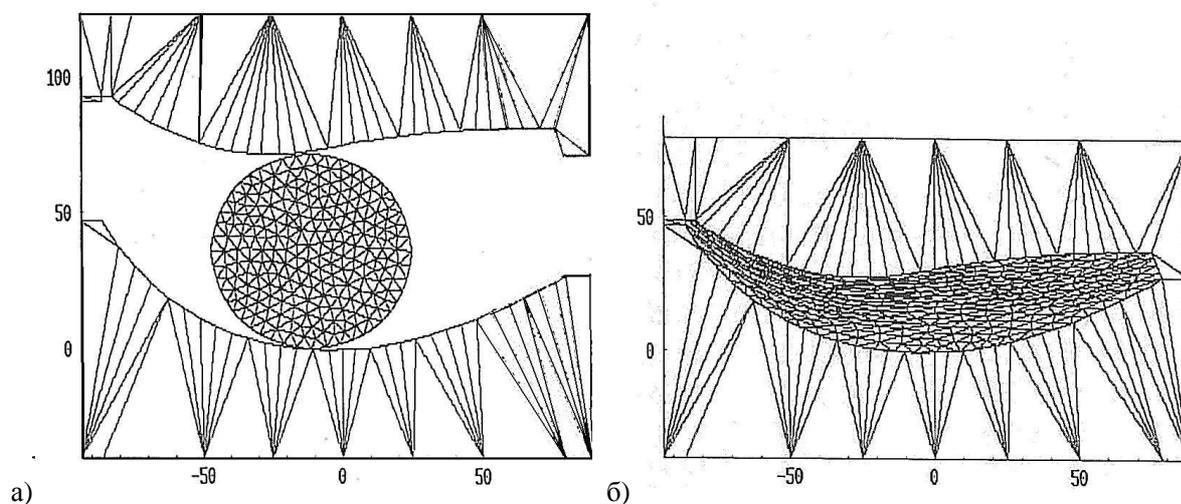


Рис. 6. Уругопластическая задача о формовании лопатки турбины жесткими штампами. Адаптивная сетка в начале (а) и конце (б) процесса.

Поскольку штампы абсолютно жесткие, то сетки в них задавались предельно грубыми, лишь бы рабочая граница штампов была точно задана. Чтобы цилиндрическая заготовка не “выскальзывала” из под штампов, на контактных поверхностях вводилось небольшое трение, пропорциональное контактному давлению. Задача решалась в безразмерных переменных. Напряжения, модули упругости и радиус поверхности текучести отнесены к пределу текучести. Скорости отнесены к скорости звука. Безразмерные значения пространственных координат ясны из рисунков расчетной сетки. В расчете принималось $K = 833$, $\mu = 384$, $k_\sigma = 0.816$. Скорость движения верхнего штампа составляла одну сотую часть скорости звука, нижний штамп был неподвижен.

Заметим, что дополнительные члены, отвечающие объективным тензорным временным производным Яуманна [16], обычно используемые в определяющих соотношениях для напряжений, в данной задаче заметного влияния на решение не оказывают.

5. Заключительные замечания

Все составляющие рассмотренного подхода к численному решению уже многократно по отдельности обсуждались различными авторами (см. обзор [1]). Здесь лишь показано, насколько привлекательным для улучшения качества численных решений является одновременное использование описанной выше коллекции находок в области вычислительных методов. Сделанный выбор вычислительных алгоритмов не претендует на оптимальность, но, как показано, он имеет серьезные положительные качества. Показаны результаты для пространственно двумерных задач. Отладочные расчеты трехмерных задач проведены, но на используемых обычных персональных компьютерах получить достойные показателя результаты пока не удается из-за недостаточного быстродействия.

Список литературы

1. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. No.1. С. 44-85.
2. Вычислительные методы в гидродинамике / Ред. Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг, М., Мир, 1967.
3. Численные методы в механике жидкостей / Ред. О.М.Белоцерковский. М., Мир. 1973.
4. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц. М., Наука, 1982.
5. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 2. С. 429-440.
6. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск, Наука, 1981.

7. Круглякова Л.В., Неледова А.В., Тишкин В.Ф., Филатов А.Ю. Неструктурированные адаптивные сетки для задач математической физики (обзор). Мат. моделирование, 1997, Т. 10. № 3. С. 93-116.
8. Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М., ФИЗМАТЛИТ, 2000.
9. Прокопов Г.П. Выбор параметров при вариационном подходе к расчету регулярных сеток. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2006.
10. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 36. № 1. С. 3-41.
11. Иваненко С.А. Вариационные методы построения сеток. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 6. С. 830-844.
12. Баженов В.Г. Согласование различных разностных схем в нестационарных задачах динамики сплошных сред методом наложенных сеток / В.Г. Баженов, В.Л. Котов, С.В. Зефирова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. 2006. № 1 (7). С. 134-140.
13. Азаренок Б.Н. О построении адаптивных подвижных пространственных сеток. М., ВЦ РАН, 2007.
14. Advances in Grid Generation / Ushakova O.V. (Ed.), Nova Science Publishers, New York, 2007.
15. Минаков А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А. Численный алгоритм решения пространственных задач гидродинамики с подвижными твердыми телами и свободной поверхностью. Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 4 (36). С. 94-104.
16. Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред. М., Физматлит, 2008.
17. Liseikin V.D. Grid generation methods. Springer, 2010.
18. Бурого Н.Г. Формулировка основных уравнений механики сплошной среды в подвижных адаптивных координатах // В книге "Численные методы в механике твердого деформируемого тела" / Ред. Г.И. Пшеничников. - М.: ВЦ АН СССР, 1984. С. 32-49.
19. Бурого Н.Г., Иваненко С.А. Применение уравнений теории упругости к построению адаптивных сеток // Труды Всеросс. Конф. по прикладной геометрии, построению сеток и высокопроизводительным вычислениям, Москва, ВЦ РАН, 28 июня - 1 июля 2004г. / Ред. В.А. Гаранжа - М.: ВЦ РАН, 2004. С. 107-118.
20. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline Upwind Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982. V.32. P. 199-259.
21. Le Beau G.J., Ray S.E., Aliabadi S.K. and Tezduyar T.-E. SUPG finite element computation of compressible flows with the entropy and conservation variables formulations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993. V. 104. P. 397-422.
22. Бурого Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н. Термодинамический метод вывода определяющих соотношений для моделей сплошных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. №.6. С. 4-15.
23. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., "Мир", 1977.
24. Бурого Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислительная механика сплошных сред, 2008. Т. 1, N. 4, С. 5-20.
25. Бурого Н.Г., Никитин И.С. Моделирование спекания с помощью теории пластичности // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8. URL:<http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/883.html>
26. Бурого Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л. Численное моделирование спекания порошковых материалов под действием подвижного лазерного импульса // Вестник кибернетики. 2014. N. 3. С. 12-23.
27. Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет программ АСТРА. В кн. Вычислительная механика твердого деформируемого тела, Вып. 2, М.: Наука, 1991. С. 78-122.
28. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМиМФ, т.5, N.5, 1965, С.816-827.
29. Уилкинсон, Райнш Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. / Ред. Ю.И.Толчеев. М., Машиностроение, 1976.
30. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., ФИЗМАТЛИТ, 2001.
31. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с граничным слоем. М., "Мир", 1983.