

Расчет сплошных сред с подвижными границами раздела

Н.Г. Бураго

Оглавление

Введение	6
1 Обзор методов расчета границ раздела	7
1.1 Обзоры формулировок контактных задач	9
1.2 Обзоры методов расчета контакта	10
1.3 Контакт с абсолютно жесткими телами	11
1.4 Лагранжевы алгоритмы сквозного счета	12
1.5 Алгоритмы поиска зоны контакта	17
1.6 Лагранжевы расчеты контактных границ	22
1.7 Эйлеровы расчеты контактных границ	27
1.8 Расчеты методом граничных элементов	33
1.9 Расчеты контакта бессеточными методами	34
1.10 Учет контактного трения	35
1.11 Проблемно-ориентированные алгоритмы	36
1.12 Оптимизация контакта	38
1.13 Векторизация и распараллеливание	39
1.14 Оценки точности и сравнение методов	42
1.15 Заключительные замечания	44
2 Основные уравнения	46
2.1 Состояние вопроса	46
2.2 Закон движения	48
2.3 Деформации	49
2.4 Плотность, напряжения и тепловые потоки	50
2.5 Материальные и пространственные меры	51
2.6 Определяющие соотношения	53
2.7 Примеры определяющих соотношений	58
2.7.1 Вязкие газ и жидкость	60
2.7.2 Термо-упругая среда	62
2.7.3 Термо-упруго-вязко-пластическая среда	63
2.8 Задачи разрушения и консолидации	66
2.8.1 Пористость как определяющий параметр	66

2.8.2	Параметр разрушения (поврежденность) . . .	67
2.8.3	Зависимость упругости от пористости и поврежденности	68
2.8.4	Свободная энергия и скорость диссипации .	69
2.8.5	Определяющие соотношения для теории разрушения и консолидации	69
2.9	Подвижные адаптивные координаты	71
2.10	Постановка начально-краевой задачи	74
3	Численные алгоритмы	79
3.1	Алгоритмы генерации сеток.	79
3.2	Лагранжевы схемы МКЭ	82
3.2.1	Лагранжева формулировка.	82
3.2.2	Пространственные КЭ-аппроксимации. . . .	85
3.2.3	Схема крест	85
3.2.4	Схема квазивторого порядка точности. . . .	91
3.2.5	Полностью консервативная схема.	92
3.2.6	Квазиньютоновская неявная схема.	93
3.2.7	Решение вспомогательных задач методом сопряженных градиентов.	96
3.2.8	Векторизация вычислительного процесса. .	98
3.2.9	Применение итераций на вложенных сетках.	100
3.3	Эйлерово-лагранжевы схемы МКЭ	101
3.3.1	Учет конвекции	101
3.3.2	Расчет сильных ударных волн и зон разрежения	104
3.3.3	Схема коррекции давления для несжимаемых течений	106
3.3.4	Схема метода штрафа для несжимаемых течений	107
3.3.5	Управление произвольно подвижными сетками	108
3.4	Расчет выделенной контактной границы	112
3.4.1	Метод множителей Лагранжа	113

3.4.2	Метод штрафа	119
3.5	Сквозной расчет границ раздела	120
3.5.1	Метод фиктивных областей	120
3.5.2	Метод дискретных маркеров	121
3.5.3	Метод непрерывных маркеров	122
3.5.4	Расчет межфазных границ	124
4	Примеры расчетов	126
4.1	Проверка методов на тестовых примерах	126
4.2	Квазистатика, упругопластичность	128
4.2.1	Расчет гребенчатых соединений	128
4.2.2	Расчет плотины в поле сил тяжести.	131
4.2.3	Задачи формования	131
4.3	Динамика, упругопластичность	135
4.3.1	Удар стальным шаром в алюминиевую преграду	135
4.3.2	Удар алюминиевым шаром в стальную преграду	136
4.3.3	Соударение алюминиевых шара и преграды	137
4.3.4	Трехмерные задачи удара	138
4.3.5	Расчет образования воронки при взрыве	140
4.4	Задачи о локализации деформаций	142
4.4.1	Растяжение стандартного образца	142
4.4.2	Резка металлического листа	146
4.4.3	Оползень склона	148
4.4.4	Удар двух тел под углом с учетом разрушения.	148
4.5	Спекание порошковых композитов.	151
4.5.1	Холодное прессование	151
4.5.2	Горячее спекание	153
4.5.3	Прессование и спекание	154
4.6	Жидкость с границами раздела	158
4.6.1	Задачи о росте кристаллов из расплавов	158
4.6.2	Расчет течений со свободными границами, непрерывные маркеры	163

Оглавление	5
4.6.3 Фонтаны и струи	165
4.7 Адаптивные сетки	168
Заключение	173
Список литературы	175

Введение

В книге описаны численные решения широкого круга нелинейных задач механики сплошной среды, включающего контактные задачи квазистатики и динамики упругопластических сред, задачи о разрушении и консолидации материалов, задачи формования и штамповки изделий, нестандартные задачи о течения несжимаемой вязкой среды с подвижными границами раздела, задачи о росте кристаллов и спекании.

В первой главе дан анализ работ по методам численного решения задач МСС с подвижными границами раздела.

Во второй главе представлена постановка общей задачи МСС в подвижных координатах.

В третьей главе описаны разработанные численные алгоритмы для расчета течений нелинейных сплошных сред.

В четвертой главе приведено описание типичных численных решений, полученных с использованием разработанных теории, методов и программы АСТРА.

Выводы приведены в Заключение.

Описанные в монографии исследования проведены при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, начиная с 1993 года (19 проектов).

Глава 1

Обзор методов расчета границ раздела

В технологических и природных процессах важную роль играют подвижные границы раздела сред. Разработка методов решения задач с подвижными границами раздела является одной из основных целей механики сплошных сред. Настоящий обзор посвящен работам по численно-дискретным (сеточным) методам расчета контактных, свободных и межфазных границ.

Типы контактных алгоритмов. Во-первых, контактные алгоритмы могут быть классифицированы по применяемому способу описания движения сплошной среды. В лагранжевых алгоритмах узлы движутся со скоростью материальной среды. В нелагранжевых алгоритмах узлы неподвижны (эйлеровы алгоритмы) или движутся независимо от материальной среды (произвольные эйлерово-лагранжевы алгоритмы). Характерной особенностью нелагранжевых алгоритмов является наличие в эволюционных уравнениях конвективных членов, обусловленных разностью в скоростях движения координат и среды.

Во-вторых, в обоих случаях (эйлеровом и лагранжевом) подвижные границы раздела могут явно выделяться "отслеживающими алгоритмами" как совокупность поверхностных узлов (маркеров) и ячеек или неявно определяться "улавливающими алгоритмами", основанными на использовании непрерывных маркер-функций.

Эта известная классификация и положена в основу систематизации рассматриваемых работ. В настоящем обзоре рассматриваются все типы контактных алгоритмов, что находится в согласии с современными тенденциями к синтезу методов механики деформируемых сред и гидродинамики, обусловленными требованиями построения интегрированных математических моделей техноло-

гических и природных процессов.

Рассматриваемые типы границ. В дополнение к классическим постановкам начально-краевых задач механики сплошной среды контактные задачи содержат специальные граничные условия (ограничения), которые управляют движением границ раздела и возможными граничными сингулярностями.

Для классических контактных задач эти ограничения выражают условие непроникания, третий закон Ньютона о равенстве действия и противодействия и закон поверхностного трения. Проекция условий на нормаль предотвращают взаимное проникание несмешивающихся сред, а касательные проекции представляют трение контактирующих поверхностей. Расширенная физико-химическая формулировка включает контактные граничные условия для теплопередачи, электро-магнитного взаимодействия, диффузии, химических реакций и так далее.

Дополнительные родственные случаи граничных условий, описывающие поведение свободных и межфазных границ также рассматриваются. Подвижные свободные границы являются лагранжевыми поверхностями между конденсированной (жидкой или твердой) и разреженной средами. Граничные условия на свободных границах описывают влияние разреженной среды, представленное силами внешнего давления и трения, а также действие сил поверхностного натяжения, зависящих от ориентации и кривизны границы.

В отличие от классических контактных и свободных границ межфазные границы не являются лагранжевыми и их движение по сплошной среде определяется условиями межфазного равновесия (например, законом Стефана (Stefan law), условием детонации Чепмена-Жуге (Chapman-Jouguet condition), условием пластичности, условием разрушения и так далее). Межфазные границы являются поверхностями слабого разрыва и движутся по сплошной среде, отслеживая скачкообразный процесс фазового перехода, заключающийся в резком изменении свойств сплошной среды. На межфазных границах температура, векторы ско-

ростей, перемещений и напряжений непрерывны, а теплоемкость, сжимаемость и другие свойства могут меняться скачком.

Упомянем также еще один важный предельный частный случай контакта, который отвечает взаимодействию деформируемых сред с абсолютно жесткими.

1.1 Обзоры формулировок контактных задач

Начально-краевые контактные задачи можно сформулировать в дифференциальной, интегральной или вариационной формах. Вариационные формулировки, в частности, формулировки контактных задач в виде вариационных неравенств играют важную роль в изучении вопросов корректности начально-краевых задач, существования и единственности решений.

Формулировки контактных задач исследовались в работах (Signorini (1933, 1959) [591, 592], Stampacchia, Lions (1965, 1967) [601, 602], Фикера (1974) [204], Lions (1978) [473], Дюво, Лионс (1980) [93], Сосу (1984) [307], Rabier, Martins, Oden (1986) [565], Martins, Oden (1987) [485], Rabier, Oden (1988) [567], Кравчук (1988, 1997, 2001) [134, 135, 136]), где можно найти ссылки на дополнительные источники. Теоретические исследования постановок контактных задач и задач с фазовыми переходами отражены в обзорах следующих работ: Мейдер (1985) [150], Venson (1992, 2002) [263, 264], Садовский (1997) [185], Фомин и др. (1999) [205], Манжиров (2001) [147, 148]; Кондауров (2002) [429]). Ссылки на библиографические коллекции работ по вопросам существования и единственности решений контактных задач можно найти в сборнике обзоров под редакцией Александрова и Воровича (2001) [3].

В многих современных работах по контактам сред, свойства которых зависят от истории нагружения, начально-краевые задачи формулируются как вариационные задачи в форме Бубнова-Галеркина. Контактные граничные условия рассматриваются как ограничения и включаются в вариационное уравнение с помощью метода множителей Лагранжа или метода штрафных функций.

Обзор методов учета ограничений для вариационных задач общего вида имеется, например, в монографии (Пшеничный, Данилин (1979) [172]).

Обзор эйлерово-лагранжевых формулировок задач механики сплошных сред приведен в работе (Бураго (1984) [35]).

1.2 Обзоры методов расчета контакта

Большая коллекция свежих обзоров по численным и аналитическим методам расчета контакта, начало которым было положено в работе Герца (Hertz (1882) [388]), представлена в сборнике под редакцией Александрова и Воровича (2001) [3].

В настоящем обзоре рассматриваются численно-дискретные методы расчета контактных границ. К этой категории относятся конечно-разностные, конечно-объемные и конечно-элементные алгоритмы, "бессеточные" методы Галеркина, контактные алгоритмы метода граничных элементов.

По способу описания движения сплошной среды численно-дискретные методы можно разделить на два огромных семейства алгоритмов - лагранжевы и эйлеровы алгоритмы. В лагранжевых алгоритмах узлы и ячейки движутся вместе со сплошной средой, в эйлеровых алгоритмах узлы и ячейки покоятся, а сплошная среда движется сквозь эйлерову сетку (конвективное движение). Случай подвижных сеток, скорость движения которых отлична от скорости материальной среды, отвечает эйлерово-лагранжевому описанию движения. Обзор эйлерово-лагранжевых формулировок задач механики сплошных сред приведен в работе Бураго (1984) [35].

Лагранжевы и эйлеровы алгоритмы подразделяются в свою очередь на алгоритмы явного выделения контактных разрывов и на алгоритмы улавливания разрывов (сквозной счета разрывов). Эта известная классификация и положена в основу систематизации рассматриваемых работ. В настоящем обзоре рассматриваются все типы контактных алгоритмов, что находится в согласии с

современными тенденциями к синтезу методов механики деформируемых сред и гидродинамики, обусловленными требованиями построения интегрированных математических моделей технологических и природных процессов.

Крупные подборки литературы по контактными алгоритмам в механике деформируемого твердого тела делали ранее Кукуджанов (1985) [141], Johnson (1985) [409], Kikuchi, Oden (1986) [419], Hughes (1987) [398], Kardestuncer, Norrie (1987) [416], Benson (1992) [263], Zhong, Mackerle (1992, 1993) [681, 682], Aliabadi, Brebbia (1993) [214], Фомин и др. (1999) [205], Горшков и Тарлаковский (1995, 2001) [69, 70], Laursen (2002) [456] и ряд других авторов, цитируемых далее в связи с конкретными типами алгоритмов.

Обзоры по алгоритмам расчета границ раздела несмешивающихся сред в рамках гидродинамики имеются в работах: Анучина (1970) [8], Поттер (1975) [171], Анучина, Бабенко, Годунов и др. (1979) [9], О. Белоцерковский (1973, 1984) [22, 24], О. Белоцерковский, Ю. Давыдов (1982) [23], Benson (1992) [263], Rider, Kothe (1995) [572], Johnson (1996) [410], Kothe et al. (1998) [432], Sethian (1999) [586], Гильманов (2000) [59]).

Далее даются ссылки и на другие, более специализированные, библиографические коллекции.

1.3 Контакт с абсолютно жесткими телами

подавляющее число работ по контактными задачам относятся именно к случаю контакта деформируемых тел (сред) с абсолютно жесткими телами (штампами, ударниками или преградами). Подвижная граница жестких тел при этом рассматривается как заданная поверхность скольжения. Она может быть гладкой или шероховатой. Движение жестких тел либо полагается predetermined, либо рассчитывается в процессе решения общей задачи методами теоретической механики с учетом их массы и сил реакции.

Примеры расчетов контакта с жесткими телами и дополнительные ссылки можно найти в работах Баничука (1967) [19], Баничука, Картвелишвили, Черноусько (1972) [20], Баничука и Черноусько (1973) [21], Меньшикова, Одинцова, Чудова (1976) [152], Кондаурова и др. (1978, 1980, 1984) [113, 114, 116], Гулидова (1980) [80], Запарова, Кукуджанова (1984, 1986) [95, 96], Петрова, Холодова (1984) [166], Кукуджанова (1985) [141], Григорьева (1986) [76], Поздеева, Трусова, Няшина (1986) [168] и многих других. Обзоры исследований этого направления можно найти в работах Фомина и др. (1999) [205], В. Давыдова, Чумаченко (2000) [88], Симонова (2001) [195].

В сеточных лагранжевых контактных алгоритмах скорости на границах между жесткими и деформируемыми телами либо задаются, либо определяются по прониканию узлов подвижной сетки в недозволенные области пространства, представляющие жесткие тела. Нормальные к поверхности жесткого тела компоненты скорости и перемещения корректируются с тем, чтобы устранить счетное проникание. Во многих алгоритмах такая корректировка сводится к приравнению нормальных скоростей движения деформируемой и жесткой границ. Если же корректировка проводится путем приложения внешних нормальных нагрузок, то тем самым определяется контактное давление. Учет трения особенностей по сравнению с более общими контактными алгоритмами не имеет.

1.4 Лагранжевы алгоритмы сквозного счета

Лагранжевы алгоритмы сквозного счета используют единую лагранжеву сетку в контактирующих средах (телах) с общими узлами на границе раздела. В алгоритмах сквозного счета решение при переходе через контактную границу полагается непрерывным, а контактные разрывы моделируются узкими зонами больших градиентов решения.

Идеальный контакт, согласованные сетки. Простейший прием сквозного счета контакта, используемый в случае малых деформаций в условиях заранее известной и неизменной зоны контакта, заключается в реализации приближенных контактных условий "полного слипания (склейки)" контактирующих тел, реализующих идеальный контакт.

Лагранжевы сетки в зоне контакта при этом согласованы и "сращены" по принципу "узел в узел", скольжение и отскок (отлипание) не допускаются. Решение на контактной границе непрерывно по скорости и перемещению (идеальный контакт). Работ, в которых такая схема расчета контакта используется, опубликовано великое множество. Практически любой алгоритм, решающий задачу механики сплошной среды сеточным методом при задании разных свойств материалов в подобластях автоматически реализует сращивание решений на контактных границах между такими подобластями.

Приведем ниже произвольную выборку российских работ по МКЭ 20-30-летней давности, в которых были даны типичные примеры расчетов идеального контакта: Розин (1971, 1977) [178, 179], Угодчиков, Коротких (1971) [199], Вайнберг и др. (1972) [54]; Постнов, Хархурим (1974) [170], Шевченко и др. (1975) [210], Подгорный и др. (1976) [167], Квитка, Ворошко, Бобрицкая (1977) [105], Бураго (1978, 1979) [33, 34]; Е. Морозов, Никишков (1980) [155]. Ссылки на зарубежные работы по идеальному контакту можно найти в книге Зенкевича (1975) [97].

В общем случае переменной зоны контакта, когда имеют место скольжение и отлипание контактирующих тел, модель идеального контакта дает физически неверное описание и не используется.

Идеальный контакт, несогласованные сетки. Контактный алгоритм сопряжения решений с обеспечением идеального контакта при несогласованных в зоне контакта сетках для двумерного случая предложен в работе Баженова, Зефирова, Петрова (1984) [12] и развит для трехмерного случая в работах: Баженов с соавторами (1994, 1995) [15, 16, 17], Park, Felippa, Rebel

(2000) [550, 551], Felippa, Park, Farhat (2001) [349]. Применение такого контактного алгоритма на искусственных границах между подобластями позволяет не заботиться о согласовании сеток на границах подобластей. Это может значительно упростить построение сеток в трехмерных областях сложной формы.

Алгоритмы буферного слоя позволяют имитировать контактный разрыв как зону больших градиентов решения и основаны на введении между контактирующими телами фиктивного буферного контактного слоя ("контактной псевдосреды"). Буферный слой состоит из контактных ячеек, узлы которых принадлежат контактирующим границам. Введение буферного слоя ячеек сводит контактную задачу для многих тел к задаче для одного составного неоднородного тела. По толщине буферного слоя используется как правило одна ячейка, которая в зависимости от приписываемых свойств может играть роль упругой пружины, вязкого элемента, склейки и т.д. Действующие в буферном слое напряжения имитируют контактные нагрузки. Успешность такой имитации зависит от свойств, приписываемых материалу буферного слоя. Эти свойства должны обеспечивать возникновение сжимающих контактных нагрузок, не допускать растягивающих контактных нагрузок (чтобы имитировать отлипание) и моделировать силы трения. Результирующая математическая модель должна быть корректной. Кроме того, из косметических соображений и требований точности желательно, чтобы толщина такого слоя была бы намного меньше, чем характерный размер шага пространственной сетки в контактирующих телах.

Примеры реализации и теоретического обоснования алгоритмов буферного слоя даны в работах: Ghaboussi et al. (1973) [359], Michalowski, Mroz (1978) [490], Мелещенко (1978) [151], Поздняков (1979) [169], А. Кузьменко (1980) [140], Desai et al. (1984) [318], Никишков, Пашнин (1985) [158], Никишков (1988) [159], Рвачев (редактор) (1989) [174], Вовкушевский (1991) [55], Kowalczyk (1994) [434], Зернин, Е. Морозов (2001) [98], Розин, Смирнов (2000) [180].

При больших деформациях и сильных изменениях зоны кон-

такта в процессе деформации требуется пошаговое автоматизированное переопределение буферного слоя. Поэтому при последовательном доведении алгоритмов буферного слоя до работоспособного состояния в указанных условиях они превращаются в рассматриваемые ниже алгоритмы, в которых "буферные элементы" или "контактные пары" переопределяются в процессе численного решения автоматически, а контактные реакции определяются путем непосредственного удовлетворения контактных условий.

Алгоритмы единого уравнения состояния для сквозного счета межфазных границ используют уравнения, описывающие различные состояния среды с учетом явлений, сопутствующих переходам материала из одного состояния в другое. Примерами являются алгоритмы моделирования контактных разрывов, вызванных континуальным разрушением и локализацией деформаций (Maenchen, Sack (1964) [478], Кукуджанов (1985) [141], Кондауров, Петров (1985) [117], Ахмадеев (1986) [11], Кондауров (1988) [118], Кондауров, Л. Никитин (1989) [119], Lemaitre (1992, 1996) [466], Гулидов, Шабалин (1994, 1995) [86], Tomita (1994) [628], Садырин (1995) [188], Kukudzhanov et al. (1995) [436], Kondaurou и др. (1997) [121], Фомин и др. (1999) [205], Бураго, Глушко, Ковшов (2000) [48] Кондауров (2001) [123] Бураго, Кукуджанов (2002) [51]. Другие примеры сквозного счета фазовых переходов жидкость-пар, твердое тело-жидкость при плавлении и кристаллизация представлены в работах: Ehrlich (1958) [333], Олейник (1960) [163], Самарский, Моисеенко (1965) [190] и в большом цикле работ, подитоженном в монографии Sethian (1999) [586].

Расчеты разрушения дискретными частицами предлагались в работах: (Stecher, Johnson (1984) [603] Belytschko, Lin (1987) [255], Johnson, Stryk (1987, 1990) [407, 408], Гулидов, Фомин (1994) [86]. Если в лагранжевой ячейке выполняется условие разрушения (по предельному значению деформации, пластической деформации, максимальному главному напряжению, и т.д.), то связи между узлами в таких ячейках освобождаются, напряже-

ния релаксируют к нулю и сопротивление сохраняется только по отношению к сжатию. Подробный обзор и описание такого типа алгоритмов сквозного счета имеется в книге Фомина и др. (1999) [205].

Работы по множественному контакту. Задачи множественного контакта упругопластических тел возникают во многих приложениях, в частности, при численном изучении свойств композитных материалов, состоящих из множества разнородных компонентов, при расчете поражения мишеней картечью, при взаимодействии шероховатых поверхностей и т.д. Обзоры этого направления даны в работах: Goryacheva, Dobychin (1988) [71], Glocker, Pfeiffer (1996) [365], Фомин и др. (1999) [205], Xing (2000) [669], Горячева, Чекина (2001) [72].

Описание явлений контакта в наращиваемых телах и обзоры сделаны Арутюняном, Манжировым, Наумовым (1991) [6], Манжировым (2001) [148]. К этому типу задач относятся задачи о намотке и послойном изготовлении композиционных материалов, о нагружении грунта в процессе строительства сооружений, о выращивании кристаллов в процессах отверждения металлических расплавов и полимерных растворов, о напылении, осаждении и намерзании.

При решении задач множественного контакта полезными являются модели и алгоритмы сквозного счета контактных границ, которые применяются при изучении сопротивления композитных материалов на примерах деформаций идеализированного малого объема, содержащего довольно большое количество разнородных контактирующих подобластей (матрица и включения).

С ростом числа контактирующих элементов прямое численное моделирование становится затруднительным и приходится привлекать модели континуального описания множественного контакта. Например, для сред слоистой и блочной структуры эффективный путь решения задач множественного контакта указывается методом асимптотического усреднения структурно-периодических сред. Обзор работ этого направления с примерами

моделей усреднения и их численной реализации сделан И. Никитиным (1989) [157].

1.5 Алгоритмы поиска зоны контакта

При численной реализации лагранжевых сеточных методов границы тел представляются множеством граничных поверхностных ячеек. Зона контакта в большинстве случаев заранее неизвестна и ее приходится искать в ходе расчета. Она ищется либо по прониканию граничных узлов через граничные ячейки, либо по их сближению путем попарных проверок всех граничных узлов и ячеек.

Результатом поиска зоны контакта является список контактных пар типа, например, "узел - граничная ячейка" и, тем самым, реализуется автоматизированное построение контактных или буферных элементов. Иногда это могут быть пары узел-фиктивный узел или ячейка-ячейка (поверхностные), то есть пары дискретных элементов контактирующих границ.

Число операций по поиску контактных пар растет пропорционально квадрату числа граничных ячеек или узлов. Для задач с большим числом узлов это приводит к неприемлемым затратам вычислительной работы. Рассмотрим имеющиеся алгоритмы ускоренного поиска зоны контакта.

Алгоритм господин-слуга является одним из первых алгоритмов поиска, он был предложен в работах Hallquist, Goudreau, Venson (1982, 1985) [368, 376]. В соответствии с этим алгоритмом экономия вычислений достигается за счет того, что зоны возможного контакта (части поверхностей тел) задаются заранее. и одна из поверхностей считается основной (господствующей), а вторая - подчиненной. Первая представлена граничными ячейками, а вторая граничными узлами. Алгоритм использует априорную информацию о зоне возможного контакта и находит контактные пары по прониканию подчиненных узлов через "господские" граничные ячейки. Для обнаружения такого проника-

ния проверяется знак нормальной проекции подчиненного узла на ячейку-господина и то обстоятельство, что нормаль, опущенная из этого узла на ячейку пересекает ее.

Отметим, что во многих задачах нельзя заранее предсказать основные и подчиненные контактные поверхности. Кроме того, необходимость описания зоны контакта в исходных данных в случае сложной геометрии обременительна.

Дополнительный довод против использования априорной информации о зоне контакта предоставляется явлением самоконтакта. Самоконтактом называется контактное взаимодействие различных частей поверхности одного и того же тела, которое может иметь место при больших деформациях.

В рассматриваемых далее алгоритмах поиска для ускорения процесса отбора контактных пар процесс поиска разбивается на два и более уровней, называемых обычно глобальными и локальным. На глобальных уровнях зоны возможного контакта ищутся среди групп близлежащих узлов. Далеко отстоящие группы, заведомо не участвующие в контакте, быстро отсеиваются по некоторому групповому признаку, связанному с расстоянием. На последнем (локальном) уровне уже непосредственно разыскиваются контактные пары "узел - граничная ячейка" по нарушению условия непроникания или по признаку достаточной близости. Отличия алгоритмов поиска друг от друга состоят в принципах образования групп, групповых характеристиках, иерархии и методах быстрой сортировки.

Отметим известные глобальные алгоритмы поиска зон контакта: алгоритм регулярных ячеек (Santos, 1993 [580]), алгоритм иерархических территорий (НІТА) (Zhong, 1993 [682]), линейно-позиционный алгоритм (Oldenburg, Nilsson, 1994 [516]), алгоритмы сортировки окрестностей (Belytschko et al., 1987, [254]; Venson, Hallquist, 1990, [262]; Papadopoulos, 1993, [622] и др.).

Наиболее употребительными и эффективными алгоритмами глобального поиска зон контакта являются алгоритмы НІТА и линейно-позиционный.

Глобальный алгоритм иерархии территорий предложен в работе (Zhong, 1993, [682]), сокращенно называется НІТА - Hierarchical Territory Algorithm, основан на группировании расположенных вблизи друг друга граничных элементов и поиске зон возможного контакта путем анализа расстояний между такими группами элементов. Если найдены группы возможного контакта, далее проводится локальный поиск. При очень большом числе граничных элементов строится иерархия групп и поиск возможного контакта идет последовательно от групп верхнего уровня к нижнему.

Глобальный линейный позиционный алгоритм предложен в работе (Oldenburg, Nilsson, 1994 [516]), сокращенно называется LPOCA - Linear POsition Code Algorithm, искусственно упорядочивает все граничные узлы конечно-элементной сетки. Для этой цели окаймляющий область решения параллелепипед делится на большое число маленьких "кирпичиков" со структурированной ijk нумерацией (вводится дополнительная равномерная регулярная ijk сетка). Каждому узлу конечно-элементной неструктурированной сетки присваивается ijk номер в зависимости от того, в какой из этих вспомогательных "кирпичиков" он попал. Такая дополнительная нумерация уже содержит информацию о расположении узлов, что позволяет использовать ее для введения кластеров (групп соседних узлов) и сокращения числа проверок и, тем самым, значительного ускорения процесса поиска зон контакта.

Глобальный алгоритм заполнения пространства кривыми предложен в работе (Diekman et al., 2000, [321]), сокращенно называется SFC - Space Filling Curve, иерархически разбивает область поиска на квадраты подобно тому как это делается в известной задаче о ловле льва в пустыне Сахара путем деления ее частей пополам с выбором той части, где находится лев, до тех пор пока этому льву некуда будет деваться. Такое деление только уже на четыре прямоугольных части (двумерный случай) проводится пока на каком-то уровне измельчения в ячейке не окажется

только один узел, которому и присваивается позиционный код, образованный цепочкой бинарных кодов (00-левый-нижний, 01-правый, нижний, 10-левый, верхний, 11-правый, верхний), указывающих путь к данному узлу. Для определения ближайших узлов к данному используются алгоритмы быстрого сравнения позиционных кодов основанные на XOR-операциях и комбинации бинарного и экспоненциального поиска.

Алгоритмы определения зоны контакта. Локальный поиск. К алгоритмам локального поиска относится уже рассмотренный алгоритм "узел-ячейка" (Goudreau, Hallquist, 1982, [368] Benson, Hallquist, 1990, [262]) и алгоритм "внутри/наружу" (Wang, Nakamachi, 1997 [640]). Последний метод эффективно разрешает проблему "мертвых зон", которая состоит в том, что в местах изломов границы появляются прилегающие к ее острым изломам внутренние "мертвые" зоны, из которых непонятно, куда "выпихивать" проникший "чужой" граничный узел. Алгоритм предлагает одно из самых простых возможных решений, которое заключается в "выпихивании" этого узла обратно с помощью сил реакции, направленных вдоль его лагранжевой траектории ("как пришел, так и ушел").

Локальный алгоритм функции зазора (GFA - Gap Function Algorithm) обсуждается в работах (Pandolfi et al., 2001, [539] ; Hirota et al., 2001, [392]) и, по замыслу авторов, должен позволить единообразно рассматривать все случаи контакта для задач очень сложной геометрии и очень высокой размерности. Алгоритм основан на введении в области решения скалярной функции зазора, которая для каждого узла вычисляется один раз для начального положения подвижной области решения и равна начальному расстоянию от этого узла до ближайшей границы. Вне пространственной области решения эта функция доопределяется нулем. Определение контактных узлов состоит в подсчете значения этой функции зазора для сдвинутых граничных узлов. При отсутствии налезания эти значения для граничных узлов равны нулю. Если же где-либо возникло налезание, то это зна-

чит, что какой-либо из граничных узлов находится внутри ячейки пространственной сетки и, следовательно, имеет два значения функции зазора: одно - свое собственное, равное нулю, другое отвечает его положению внутри упомянутой ячейки и отлично от нуля. Направление "выталкивания" или действия нормальных контактных усилий указывается антиградиентом функции зазора, а величины налезания и силы реакции пропорциональны значению функции зазора. Эффективность алгоритма локального поиска с использованием функции зазора определяется быстротой интерполяции функции зазора и требует достаточно гладких границ.

Локальный пинболл-алгоритм Для улавливания сложных случаев контакта разнородных элементов (стержневых, оболочечных и пространственных) между собой в работе (Belytschko, Neal, 1989, 1991, [256, 257]) предложен пинболл-метод (pinball - заколка, иголка с шариком). Этот метод рассматривает сферическую окрестность каждого элемента, независимо от его природы (трехмерный, оболочечный двумерный или стержневой/балочный одномерный) и проникание проверяется по пересечению этих окрестностей. Это простая проверка, поскольку требуется сравнить только текущие расстояния между пинболлами с суммой радиусов их окрестностей. В штрафной форме алгоритма, если перекрытие пинболлов обнаружено, равные и противоположно направленные, пропорциональные величине наложения, силы прилагаются к центрам пинболлов. Эти силы затем пересчитываются с этих фиктивных узлов (центров пинболлов) на узлы элементов, к которым эти пинболлы относятся. Поскольку пинболл-алгоритм основан на простейших проверках, он является очень быстрым контактным алгоритмом и потребляет порядка 15% времени, требуемого на расчет временного шага, в то время как другие алгоритмы потребляют иногда более 60-75.

Локальный иерархический пинболл-алгоритм В уже упомянутой работе (Belytschko, Neal, 1991, [257]) пинболл-метод был приложен к тонким оболочкам и в процессе использования

метода оказалось, что метод перестает работать, когда взаимодействующие элементы очень тонкие. Были найдены (Belytschko, Yeh, 1993, [258]) два пути преодоления этой трудности: "скоростной" пинболл алгоритм и "расщепленный" пинболл алгоритм. Как и в обычных пинболл-алгоритмах в расщепленном пинболл-методе пинболл ассоциирован с каждым элементом, хотя в этом новом методе радиус пинболла всегда выбран достаточно большим, чтобы окружить элемент. Этот большой пинболл назван родительским. Перекрытие родительских пинболлов теперь лишь показывает возможность проникания. Когда перекрытие родительских пинболлов обнаружено, меньшие пинболлы другого уровня выстраиваются, они имеют радиусы порядка толщины оболочки и покрывают, располагаясь на расстоянии этого радиуса друг от друга, поверхность оболочечного или длиннубалочного элемента. Если эти малые пинболлы перекрываются с чужими, то это означает проникание и тогда искомые контактные силы вычисляются по перекрытию малых пинболлов и, затем, перераспределяются на узлы соответствующих элементов.

1.6 Лагранжевы расчеты контактных границ

Пусть зона контакта обнаружена и контактные пары "узель-ячейка" построены. Рассмотрим алгоритмы определения нормальных контактных скоростей и усилий.

Алгоритмы скольжения были сформулированы в пионерских работах по контакту между деформируемыми телами в условиях переменной зоны контакта, выполненных Уилкинсом (1967) [200], (Wilkins, 1964, 1969, 1979, 1980) [645, 647, 648, 649]. Работы Уилкинса оказали большое влияние на развитие контактных алгоритмов в задачах о больших деформациях.

В алгоритмах скольжения на каждом шаге по времени попеременно (Киселев, 1984, 1988, 1989, [106, 107, 108]) одна из контактирующих поверхностей считается поверхностью скольжения (поверхностью абсолютно жесткого тела), а другая граница

следует движению первой. Хотя контактные условия при этом выполняются приближенно, интегрально метод дает правдоподобные результаты. Контактные скорости и усилия в численном решении осциллируют, что снижает точность расчета.

Обобщением метода Уилкинса на трехмерный случай занимались также Johnson (1977a, 1977b, 1990) [405, 406, 408], Гулидов (1980) [80], Корнеев с соавторами (1980, 1982) [125, 126], Баженов, Кибец, Садырин (1986) [13] и многие другие.

Алгоритмы фиктивных узлов в различных формах вводились в ряде работ. В уже упоминавшейся в связи с алгоритмами идеального контакта работе Баженова, Зефинова, Петрова (1984) [12] предложен двумерный алгоритм, использующий условия непроникания по нормали и свободного скольжения по касательной к поверхности. При рассогласовании сеток в зоне контакта алгоритм использует вспомогательную совмещенную сетку, состоящую из граничных узлов исходной сетки в одном теле и из парных фиктивных контактных узлов в другом теле. Значения решения в фиктивных узлах на старом временном слое определяются интерполяцией. На новом временном слое (итерации) на каждую пару смежных узлов ("граничный-фиктивный") накладывается кинематическое ограничение (равенство соответствующих компонентов скоростей) и статические условия (равенство с точностью до знака компонентов нормальных усилий). Используя эти равенства в каждом граничном узле основной сетки определяются величины контактных давлений и корректируются граничные узловых скорости. В последующих работах Баженова, Кибеца и Цветковой (1995) [18] алгоритм был обобщен на трехмерные контактные задачи.

Фиктивные узлы вводятся также во многих других контактных алгоритмах, в частности, в рассматриваемых далее алгоритмах метода характеристик (Заппаров и Кукуджанов, 1986, [96]) и в рассмотренном выше иерархическом пинболл-алгоритме (Hallquist, 1992, [377]).

Логическим завершением линии алгоритмов фиктивных узлов

являются так называемые адаптивные контактные алгоритмы, которые на каждом шаге по времени локально перестраивают сетки в контактирующих телах в окрестности зоны контакта так, чтобы согласовать их по принципу "узел в узел" (Mikolajczak et al., 2000, [491]).

Характеристические алгоритмы расчета контакта. Соотношения на характеристиках для гиперболических систем уравнений механики упругопластических сред были применены в двумерных задачах динамики для расчета контактных границ в работах Кондауров, Петров, Холодов (1984) [116], Петров, Холодов (1984) [166], Заппаров, Кукуджанов (1986) [96]. Системы характеристических соотношений выписывались для каждого граничного узла в одном теле и соответствующего фиктивного узла в другом теле. Из решения этих систем уравнений определялись контактные скорости и усилия. Область возможного применения характеристических алгоритмов ограничена нестационарными задачами. Наиболее свежий обзор характеристических алгоритмов можно найти в книге (Куликовский, Погорелов, Семенов, 2001, [439]).

Контактные алгоритмы, основанные на решениях задачи о распаде произвольного разрыва. Схема Годунова (1959) [61], использующая на предикторе решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, применена к расчету контактных взаимодействий в процессах сварки взрывом в работе Годунова с соавторами (1976), где можно найти описание контактного алгоритма и ссылки на другие работы этих авторов. Эта линия алгоритмов получила дальнейшее развитие в работах Addessio et al. (1988) [212], Annin et al. (1999) [217], Садовский (1991, 1997) [184, 185], Бычек (Садовская) (1998) [53] Аннин и др. (2000) [4, 5] Обзор семейства алгоритмов Годунова дан в обзоре (Benson, 1992, [263]) и в монографии Куликовского, Погорелова, Семенова (2001) [439].

Алгоритмы неупругого удара в различных вариантах применялись в работах: Садырин (1976, 1979) [186, 187], Гриднева, Корнеев, Трушков (1980) [77], Корнеев, Шугалев (1986) [127], Са-

жин, Симонов (1987) [189], Астанин, Галиев, Иващенко (1988) [7], Иващенко (1988, 1989) [101, 102]. В этих алгоритмах скорости лагранжевых узлов в зоне удара корректируются исходя из решения задачи неупругого удара для узловых масс составляющих контактные пары узел - поверхностная ячейка или узел - фиктивный узел.

Контактные алгоритмы метода множителей Лагранжа основаны на учете искомым контактных нормальных нагрузок в выражениях для контактных скоростей и их последующем определении из условий непроникания. Нормальные контактные нагрузки являются множителями Лагранжа для условий непроникания. Отличия различных модификаций состоят в способах учета условия непроникания (на дискретном или на непрерывном уровне), в способах решения системы алгебраических уравнений для контактного давления (прямые или итерационные методы), в трактовках алгоритмов (физико-механическая или математическая), в способах аппроксимации решения в зоне контакта и так далее. Однако при всех внешних различиях это варианты реализации одной и той же идеи. Отметим, что подавляющее большинство контактных алгоритмов, применяемых в явных схемах расчета, могут трактоваться как варианты метода множителей Лагранжа.

Алгоритмы метода множителей Лагранжа для случая малых деформаций строили Фукс (1976) [206], Hughes et al. (1976) [396], Hallquist (1976,..., 1998) [373, 379], Asano (1985) [226], Guerra, Browning (1983) [371], Bathe, Chaintary (1985, 1986, 1988) [240, 241, 242, 243]. Для случая больших деформаций такие алгоритмы разрабатывали Simo, Wriggers, Schweizerhof, Taylor (1985,1986) [593, 594], Simons, Bergan (1986) [598], Бураго (1986a, 1986b, 1987a) [38, 39, 41], Горельский и др. (1987, 1992) [67, 68], Гулидов, Шабалин (1987,1988) [83, 85], Zhong (1988) [679], Бураго, Кукуджанов (1988, 1991) [43, 45], Parish (1989) [547], Carpenter (1991) [289], Кошур и др. (1992) [128], Saleeb (1994) [579], Zhong, Nilsson (1994) [685], Korobeinikov et al. (1994) [433] Баженов, Ки-

бец, Цветкова (1995) [18], Быковских и др. (1995) [52], Baillet et al. (1999) [235] и многие другие.

Алгоритмы метода штрафных функций являются другим вариантом динамических контактных алгоритмов, применяемым чаще всего в неявных схемах решения контактных задач квазистатики и динамики. В этом методе величина нормальных контактных нагрузок принимается пропорциональной невязке условий непроникания с большим коэффициентом пропорциональности (коэффициентом штрафа).

Контактные алгоритмы метода штрафа для неявных схем разрабатывали и описывали Pifco, Winter (1981) [557], Kikuchi (1982) [417], Campos, Oden, Kikuchi (1982) [287], Guerra, Browning (1983) [371], Simo, Wriggers, Taylor (1985) [593], Kikuchi, Oden (1986) [419], Nour-Omid, Wriggers (1986) [502], Бураго, Кукуджанов (1988,1991) [43, 45], Kulak (1989) [438], Kanto, Yagawa (1990) [415], De La Fuente, Felippa (1991) [356], Nagtegaal et al. (1991) [498], Hunek (1993) [399], Zhong (1993) [682], Bathe Bouzinov (1997) [246], Ling (1997) [472], Parish (1997) [548], Коробейников (2000) [124], Xing (1998, 2000) [668, 669].

Предложены также гибридные алгоритмы, которые сочетают оба метода (и метод множителей Лагранжа, и метод штрафных функций), см. работы (Wriggers, Wagner, Stein (1987) [654] Simo, Laursen (1992) [595] Heegaard, Curnier (1993) [384], Laursen, Covindjeen (1994) [449] Bathe (1996) [245], Xing et al. (1998, 2000) [668, 669], Farahani, Mofid, Vafai (2000, 2001) [340, 341].

Лагранжевы алгоритмы улавливания контактных границ применяются для явного выделения внутренних контактных разрывов, отвечающих магистральным трещинам в задачах о разрушении деформируемых твердых тел.

Такое выделение производится по заранее введенной линии (поверхности), определенной сдвоенными узлами (Bertolf et al. (1975) [265] Chen, Wilkins (1976) [301], Е. Морозов, Никишков (1980) [155], Ingraffea, Heuze (1980) [401], Рузанов А.И. и др. (1984) [182], если положение поверхности разрушения предопределено.

В общем случае дополнительные узлы вводятся в процессе решения (Гриднева, Немирович-Данченко (1983) [78], Мержиковский, Ресиянский (1984) [153]. Обзор и описание алгоритмов перестройки сеток в окрестности контактных разрывов дано в работах: Ladevese (1998) [443], Гильманов (2000) [59].

Способ явного выделения вновь образующихся контактных разрывов, не требующий введения новых узлов и основанный на локальной перестройке сетки путем "схлопывания" разрушенной ячейки (путем сдвига ее узлов на поверхность разрушения), предложен в работе Гулидова, Фомина, Шабалина (1983) [82]. Описание этого способа можно найти также в работах (Киселев, Кабак (1990) [109], Фомин и др. (1999) [205].

Отметим ряд алгоритмов в которых нарушения сплошности типа трещин также моделируются на уровне элементов без перестройки сетки: (Sumi (1985) [607], Simo, Oliver, Armero (1993) [596], R. Larsson, Runesson (1993) [444]; с использованием техники подвижных сеток: Rashid (1998) [571], с использованием дополнительных степеней свободы в элементах, содержащих контактный разрыв, которые отвечают разрывным функциям формы: Fish (1989) [350], Fleming et al. (1997) [352], Moes et al. (1999) [493], Daux et al. (2000) [317], Dolbow et al. (2000,2001) [324, 325], Duarte et al. (2001) [330].

1.7 Эйлеравы расчеты контактных границ

Представим себе случай когда две или более областей, занятых одной фазой материала, объединяются. Описать такой процесс лагранжевыми методами с явным выделением межфазовых границ будет крайне трудно, особенно в трехмерном случае, поскольку объединение узлов в лагранжевы граничные ячейки определяется списками и в данном случае такие списки нужно было бы постоянно обновлять. Кроме того, возникли бы трудности, связанные с неприемлемыми ограничениями на шаг по времени из-за

возможного чрезмерного сближения лагранжевых узлов. Аналогичные трудности лагранжев подход встречает и при описании процессов фрагментации.

Один из способов преодоления указанных трудностей отслеживания межфазовых границ предоставляется эйлеровыми и эйлерово-лагранжевыми алгоритмами, которые в расширенной трактовке данного обзора также относятся к классу контактных алгоритмов.

Обзоры по эйлеровым алгоритмам отслеживания контактных границ. Эйлеровы методы, реализующие сквозной счет контактных разрывов, образуют свой богатый мир алгоритмов, который заслуживает специального обзора и здесь описывается предельно кратко. Другие подборки литературы по эйлеровым контактным алгоритмам можно найти в следующих работах: Ю. Давыдов (1978, 1981) [89, 90], Поттер (1975) [171], О. Белоцерковский, Ю. Давыдов (1982) [23], Human (1984) [400], Oran, Boris (1987) [519], Benson (1992) [263], Unverdi, Tryggvason (1992) [635], LaFaurie et al. (1994) [347], Kothe, Rider (1994) [430], Sethian (1996, 1998) [584, 586], Гильманов (2000) [59], Osher, Tryggvason (2001) [527].

Общими чертами рассматриваемой группы контактных алгоритмов является расчет на эйлеровой (неподвижной) часто равномерной и прямоугольной сетке, окаймляющей с запасом контактирующие материальные тела и среды, и отслеживание контактных границ (границы тел и сред между собой, свободные границы, межфазовые границы) с помощью лагранжевых дискретных или непрерывных маркеров. Иногда вместо эйлеровой сетки используется эйлерово-лагранжева произвольно подвижная (динамически адаптивная) сетка.

Рассчитанное на эйлеровой сетке поле скоростей используется для расчета движения лагранжевых дискретных или непрерывных маркеров с использованием лагранжевой (дискретные маркеры) или эйлеровой (непрерывные маркеры) форм уравнения переноса.

Алгоритмы дискретных лагранжевых маркеров образуют обширное семейство, которое представляют базисные алгоритмы метода частиц (Харлоу, 1967 [380]), метода граничных маркеров (Нох, 1967 [162]) и метода маркеров и ячеек (Welch et al., 1965 [641]; Николс, 1973 [161]). В таких алгоритмах частицы осуществляют перенос массы, импульса и энергии, а маркеры служат для идентификации межфазовых границ и движения фаз.

Для контакта упругопластических тел варианты метода маркеров и ячеек реализованы в работах (Калмыков, Кукуджанов, 1993 [104]; Фомин и др., 1999 [205]).

Для учета сложных граничных условий (трение, поверхностное натяжение, кинетика фазового перехода и т.д.) контактные (межфазные, свободные) границы в этих методах определяются граничными лагранжевыми ячейками, позволяющими вычислить нормаль, касательные и кривизны границы раздела, участвующие в задании граничных условий.

При объединении или разделении материальных подобластей лагранжево описание границ создает большие математические трудности при расчете исчезающих или рождающихся границ. Кроме того в методах частиц и маркеров имеются проблемы корректного описания движения маркеров на границах раздела и соблюдения законов сохранения (маркеры), а также проблемы с нехваткой маркеров или частиц в зонах разрежения и проблемы, связанные с генерацией и удалением маркеров, пересекающих открытые границы, через которые сплошная среда втекает или вытекает из области решения. Эти проблемы решаемы, но при этом число операций может достигать неприемлемых значений.

Методы непрерывных лагранжевых маркеров позволяют упростить учет сложных граничных условий и физических явлений на контактных границах и их определение, особенно в случаях переменной топологии подобластей, занятых разными средами (фазами), при их слиянии или разделении. Идентификация типа среды проводится по значениям функций, со-

храняющихся вдоль лагранжевых траекторий, играющих роль непрерывных лагранжевых маркеров и подчиняющихся эйлеровому уравнению переноса. Граница раздела служит изоповерхностью, отвечающей среднему от значений функции маркера в контактирующих средах. Такой способ определения границ принят, например, в картографии при описании береговых линий.

Варианты алгоритмов непрерывных лагранжевых маркеров описаны в следующих работах, реализующих идею непрерывных маркеров:

* **метод крупных частиц** применен к расчету границ раздела в работах (Ю. Давыдов (1978) [89]; Ю. Давыдов, Пантелеев, (1981) [90]; О. Белоцерковский, Ю. Давыдов, 1982 [23]), в которых границы между тяжелой и легкой средами определялись по изоповерхности плотности;

* **метод жидкости в ячейках** (Hirt, Nikols, 1981 [393]; Brackbill, Kothe, Ruppel, 1988 [282]) и *метод псевдоконцентрации* (Thompson, 1986 [629]), в которых за признак границы раздела принимаются объемные концентрации или функции "цвета" различных сред.

* **методы функций уровня** (level set methods) (Sussman et al. (1994, 1999) [609, 610]; Sethian (1996, 1998, 1999, 2001) [584, 585, 586, 587], Osher, Fedkiw (2001, 2002) [527, 528], Kunugi (2002) [440], Enright et al. (2002) [336], в которых индикатором границы служит функция уровня, указывающая расстояние до границы раздела.

Одной из трудностей большинства методов непрерывных маркеров является проблема диффузии границ раздела, обусловленной погрешностями численного решения эйлерова уравнения переноса. В методе функций уровня эта проблема снимается, так как в отличие от других методов непрерывного маркера, использующих функции Хевисайда (ступеньки) с резкой сменой значений на границе раздела, метод функций уровня использует медленно меняющуюся маркер-функцию, связанную с расстоянием до границы, которая рассчитывается путем численного решения

эйлерова уравнения переноса гораздо точнее, нежели функции Хевисайда.

Нарушения консервативности вблизи границы раздела имеют место в методах маркеров (дискретных и непрерывных) и требуют дополнительных приемов контроля и коррекции.

Идеи отслеживания границ по значениям концентрации или функции области описаны также в работах по сквозному счету границ (Ehrlich, 1958 [333]; Олейник, 1960 [163]; Самарский, Моисеенко 1965 [190]), по методу фиктивных областей (Бугров и др. 1974 [28]), по методу R-функций (Рвачев и др., 1989 [174]; Rvachev, Sheiko, 1995 [577]).

По сравнению с методами частиц и дискретных маркеров алгоритмы непрерывных маркеров дают возможность облегченного вычисления таких характеристик как нормаль, касательные и кривизны контактной поверхности через производные функции уровня в эйлеровых ячейках, содержащих границу раздела. Соответствующие математические формулы для геометрических характеристик используются при записи граничных условий на контактных и межфазовых границах, выражающих, например, закон Стефана, силовые условия для давления, трения, поверхностного натяжения и так далее.

Во многих случаях методы маркеров решают задачи, которые ставят в тупик методы, подразумевающие явное выделение контактных границ. Примерами могут служить случай множественного контакта, явления с переменной топологией материальных подобластей, например, опрокидывающиеся волны, фонтаны, фрагментация тел при разрушении, отрыв или воссоединение капель, заполнение водоемов, пузыри, кавитационные полости и т.п.

Отметим, что из-за накопления ошибок в граничных условиях точность решения, предоставляемая эйлеровыми методами сквозного счета часто недостаточна для удовлетворительного моделирования явлений контакта структурированных материалов с ярко выраженными гиперупругими свойствами сопротивления

деформации при медленных нагружениях малой интенсивности.

Эйлеровы методы сквозного счета контакта эффективны в классе задач о кратковременных процессах: задачи удара со скоростями порядка скорости звука, о детонации, взрыве, кумуляции, сварке взрывом и тому подобных процессах.

Алгоритмы улавливания скачков, разработанные для сквозного счета разрывных решений в эйлеровых алгоритмах гидродинамики, могут быть применены для повышения точности численного интегрирования уравнения переноса при отслеживании межфазных границ и контактных разрывов при совместном использовании с методами лагранжевых маркеров. С методами улавливания скачков можно ознакомиться по обзорам и описаниям, данным во многих современных трудах по численным методам расчета сжимаемых течений, например, в работах (Venson, 1992 [263]; Куликовский, Погорелов, Семенов, 2001 [439]).

Дальнейшее уточнение решения в зоне границ раздела сред может быть достигнуто путем применения адаптивных сеток.

Алгоритмы адаптивных сеток уменьшают ошибки аппроксимации сеточных методов в зонах больших градиентов путем локального уменьшения шага сетки, оптимизации формы ячеек, адаптации сеток к границам подобластей и к решению, в частности, к разрывам и пограничным слоям. Такой путь подсказан анализом ошибок сеточной аппроксимации, показывающим, что они пропорциональны норме производных, некоторой степени характерного шага сетки и возрастают при появлении острых углов и искажениях формы ячеек сетки (Самарский, 1971 [191]; Шокин, 1979 [211]; Стренг, Фикс, 1979 [197]).

Развитию подхода адаптивных подвижных сеток (moving adaptive grid method) посвящены работы (Годунов и др., 1976 [62]; Лисейкин, Яненко, 1977, 1999 [474]; Ковеня, Яненко, 1981 [110]; Гриднева, Меркулова, 1983 [78]; Бураго, 1984 [35]; Tompson, 1986 [629]; Li, Bettess, 1997 [468]; Carey, 1997 [288]; Иваненко 1997, 2001 [99, 100]; Гаранжа, 2000 [57]; Гильманов, 2000 [59]; Азаренок, 2001, 2002; [231, 232]), в которых можно найти более обстоя-

ятельный анализ и обзор исследований. Характерной особенностью таких алгоритмов является сохранение числа узлов сетки в процессе решения и повышение точности (адаптация) за счет оптимального расположения узлов.

История подхода к описанию подвижных контактных границ, основанного на локальном измельчении и перестройке сеток (adaptive mesh refinement method) описана в работе (Гильманов, 2000 [59]). В этом случае число узлов сетки, их объединение в ячейки и число ячеек являются переменными.

1.8 Расчеты методом граничных элементов

Стремление избежать трудностей построения сеток и получить численное решение более экономным и простым путем выразилось в двух крупных направлениях развития контактных алгоритмов связанных с методами граничных элементов (граничных интегральных уравнений) и обширным семейством бессеточных алгоритмов свободных точек.

Обзоры контактных алгоритмов метода граничных элементов можно найти в работах (Федоренко, 1979 [203]; Гольдштейн и др., 1979 [64]; Кравчук, 1982 [132]; Кравчук, Ахунджанов, 1983 [133]; Бенерджи, Баттерфилд, 1984 [26]; Гольдштейн, Спектор, 1986 [65]; Aliabadi, Brebbia, 1993 [214]; Aliabadi, 1997 [215]; Eck et al., 1999 [331, 332]).

В основе алгоритмов граничных элементов лежит идея сведения классических линейных уравнений механики сплошных сред к граничным интегральным уравнениям путем представления решений в виде суперпозиции фундаментальных решений отвечающих единичным возмущениям или с использованием функций влияния Грина. Для дискретизации объемная сетка не требуется и достаточно ввести сетку граничных элементов, то есть размерность задач уменьшается на единицу. Имеются варианты алгоритмов, в которых стадия вывода граничных интегральных

уравнений минуетея и уравнения дискретной задачи составляются непосредственно с использованием фундаментальных решений для единичных возмущений (Поттер, 1975 [171]; С. Белоцерковский, Ништ, 1978 [25]).

В нелинейных задачах приходится вводить внешние итерации по нелинейности, на каждой из которых решается линеаризованная задача с классическим линейным оператором и нелинейными членами, отнесенными в правые части и вычисляемыми по предыдущему приближению. Возникающие трудности связаны с необходимостью вычисления объемных интегралов и введения объемной сетки, а также с катастрофическим ухудшением сходимости внешних итераций с нарастанием влияния нелинейности.

1.9 Расчеты контакта бессеточными методами

Свободные лагранжевы дискретные алгоритмы представляют попытку избавиться от трудностей связанных с искажениями ячеек подвижных сеток при отслеживании границ раздела. Это делается либо путем пошаговой перестройки сеток с изменением соседства (Pasta, Ulam, 1959 [552]; Ulam, 1964 [201]; Дьяченко, 1967 [92]; Djachenko, 1973 [323]; Glagoleva et al., 1972 [60]; Anuchina et al., 1980m [9]; Monaghan, 1982 [494]), либо путем переинтерполяции на улучшенные сетки (Аганин, Кузнецов, 1985 [1]; Гильманов, 2000[59])

Бессеточные контактные алгоритмы представляют дальнейшую тенденцию к отказу от сеток в пользу свободных лагранжевых узлов. Эти алгоритмы реализуют метод Галеркина-Петрова с использованием специальных нефинитных, но быстро затухающих базисных функций, строящихся с учетом расположения лагранжевых узлов (частиц) без их объединения в ячейки. Эволюцию этих алгоритмов можно проследить по работам (Monaghan 1982[494]; Belytschko et al., 1994, 1996[259, 260]; Duarte, Oden, 1996[329]; Melenk, Babushka, 1996[488]; J. Chen et al., 1996, 2001[297, 299]; Li, Liu, 2002[469]).

Для вывода системы уравнений дискретизированной задачи в первых работах использовались Гауссовы процедуры численного интегрирования, что представляло определенные вычислительные трудности. Улучшенные алгоритмы численного интегрирования (SCNI - stabilized conforming nodal integration) представлены в работе (J. Chen et al., 2001[299])

В настоящее время бессеточные методы начинают успешно конкурировать с традиционными сеточными методами при численном моделировании контакта при больших деформациях и сложной реологии материала: Zhu, Atluri (1998) [686], J. Chen, Wang (1998) [298]).

1.10 Учет контактного трения

Во многих технологических проблемах учет контактного трения играет решающую роль. Ярким примером, где такой учет составляет суть проблемы, является моделирование работы автомобильных тормозов.

Обзоры по численно-аналитическим методам учета трения сделаны в работах: Александров, Мхитарян (1983) [2], Горячева, Добычин (1988) [71], Галахов, Усов (1990) [56], Bhushan (1996) [267] и рядом авторов в сборнике обзоров под редакцией Александра и Воровича (2001) [3].

Рассмотрим типичные **модели контактного трения**, применяемые в численно-дискретных алгоритмах. Во первых, следует отметить модификацию классической модели Кулонова трения (Michalowski, Mroz, 1978, [490]), в которой силы трения ограничены предельными величинами касательных напряжений, поддерживаемых контактирующими средами. По этой модели величина пограничного сдвигового контактного напряжения ограничена наименьшим из пределов текучести контактирующих материалов. Wriggers et al. (1990) [655] предложили детализацию этой модели разделяя тангенциальный скачок смещения на микросмещение, вызванное пограничными упругими деформациями

и макросмещение, вызванное пластическим (необратимым) сглаживанием шероховатостей. Вторым примером часто используемого закона трения может служить модель динамического трения, в которой контактные нагрузки трения зависят от скачка тангенциальной скорости (Oden, Martins, 1985 [510]). Подробный анализ законов трения для расчета больших деформаций имеется в работе (Cheng, Kikuchi, 1985 [302]).

Описание и обзоры контактных алгоритмов, учитывающих трение, имеются в работах: Кравчук, Васильев (1980) [129], Кравчук (1980, 1981, 1988) [129, 130, 131, 134], Chaudhary, Bathe (1986) [295], Chen, Tsai (1986) [300], Kikuchi (1986) [419], Bathe, Mijailovich (1988) [243], Ju, Taylor (1988) [411], Klarbring, Bjorkman (1988) [422], Zhong (1988, 1993) [679, 682], Brunet (1989) [285], Benson, Hallquist (1990) [262], Laursen, Simo (1991, 1992, 1993a, 1993b) [445, 447, 448, 455], Kwak (1991, 1997) [441, 442], Benson (1992) [263], Cescotto, Charlier (1993) [292], Lee, Oden (1993a, 1993b, 1994) [461, 462, 463], Jean (1995) [402], Kim, Kwak (1996) [420], Armero, Petocz (1996, 1998, 1999), [219, 220, 221], Ling, Stolarski (1997) [472], Christiansen et al. (1998) [306], Chawla, Laursen (1998) [296], Фомин и др. (1999) [205].

Следующие работы посвящены моделированию процессов контакта с учетом **трения качения**: Kalker и Paul (1972,1990) [412, 413], Batra (1980,1981) [247, 248], Endo et al. (1984) [335], Oden, Lin (1986) [511], Padovan et al. (1984,1987, 1994) [534, 535, 536], Bass (1987) [239], Stechschulte, Luchini (1987) [604], Chang et al. (1988) [304], Faria et al. (1989,1992) [342, 343]. Произвольный эйлерово-лагранжев подход в задачах качения представлен в работах: Nackenhorst (1993) [497], Lee, Oden (1994) [463].

1.11 Проблемно-ориентированные алгоритмы

Приведем ниже ссылки на обзоры и отдельные работы, содержащие описание специализированных контактных алгоритмов, адаптированных к определенным приложениям.

Контактные алгоритмы для мультипликации (для фильмов о динозаврах) используют простые безитерационные явные схемы, не предполагающие выполнения законов механики и удовлетворяющие условиям непроникания с помощью эвристических методов, обеспечивающих минимально необходимую правдоподобность результата. Основным требованием, отличающим анимационные контактные алгоритмы от применяемых в механике сплошных сред, является возможность вмешательства аниматора в сценарий движения контактирующих тел и сред в процессе создания фильма. В качестве примера отметим алгоритм кожно-скелетной деформации (Lewis, Cordner, Fong, 2000 [467]). Подробнее с такими алгоритмами можно ознакомиться по обзору (Vechmann, 1994 [252]).

Контактные алгоритмы для медико-биологических приложений. Дальнейшее приближение к реальности, необходимое в медицинских приложениях в связи с моделированием хирургических операций и построением обучающих программ-тренажеров, а также для компьютерного прогнозирования результатов пластических операций, достигается путем частичного учета законов механики деформируемого тела и придания математическим моделям свойств сопротивления деформации: (Gourret et al. (1989) [369], Donzelli (1995) [326], Koch et al. (1996) [426]).

Упомянутые выше упрощенные модели при повышении требований к соответствию результата численного моделирования поведению реальных объектов сменяются уже полноценными контактными алгоритмами, разрабатываемыми в рамках механики сплошных сред. Непрерывно возрастающая производительность компьютеров способствует активизации исследований по разработке алгоритмов моделирования движений живых тел с учетом их сложной внутренней структуры, хотя пока таких работ мало и они реализуют лишь очень простые механические модели. Механические свойства живых тел рассмотрены в книге (Fung, 1993 [357]). Попытки анимации контактных взаимодействий упругих

тел с приложениями к потребностям медицины делались в работах (Terzopoulos et al. (1987) [623], Baraff, Witkin (1992) [236] Miller, et al. (2000) [492], Zhuang (2000) [687]. Обзоры контактных алгоритмов, применяемых в медицине, сделаны в работах: Klisch (1999) [111], Hirota et al. (2001) [392].

Приведем **ССЫЛКИ**
ки на обзоры проблемно-ориентированных контактных алгоритмов: по геомеханике (Moresi et al., 2002 [495]), по расчету течений со свободными подвижными границами (Floryan, Rasmussen, 1989 [353]; Shyu et al., 2001 [590]; Gillow, Howison, 2002 [361]), по межфазным границам (Tarzia, 1988; Udaykumar et al. 1999 [619]), по кавитации (Wikstrom, 2000 [644]), по моделированию поведения одежды (Baraff, Witkin, 1998 [237]). Следует также обратить внимание на *удивительные по разнообразию приложений* работы по расчету границ раздела (Sethian, 1996, 1999 [584, 586]), которые основаны на методах функций уровня (level set function method).

1.12 Оптимизация контакта

Контактные нагрузки распределяются в общем случае неравномерно в зависимости от формы поверхностей контакта и могут иметь нежелательные пики, ухудшающие характеристики технологических процессов и сокращающие время жизни технических изделий.

Одна из первых попыток выравнивания контактных нагрузок путем оптимизации формы поверхности контакта была сделана в работе (Congru, Seireg, 1972 [310]) с использованием методов линейного программирования. Дальнейшее развитие на основе метода конечных элементов и линейного программирования эта тема получила в исследовании (Naug, Kwak, 1978 [383]), а с применением методов нелинейного программирования продолжена в работах (Cheng et al., 1988 [304]; Park and Anderson, 1995 [549]). В работах (Fancello et al., 1994, 1995 [338, 339]) предложены целевые

функции для оптимизации поверхностей контакта.

Упрощенная итерационная процедура для сглаживания пиков контактных нагрузок при постоянном объеме контактирующих тел предложена в работе (Tada, Nishihara, 1993 [613]). Дальнейшее упрощение оптимизация контакта получила в алгоритме ESO (evolutionary structural optimisation), предложенном в работах (Xie, Steven, 1993, 1997 [666, 667]) и пригодном для широкого класса контактных оптимизационных задач.

Все упомянутые оптимизационные задачи рассматриваются для случаев очень простой реологии (линейная изотропная упругость) и геометрии (пространственно двумерные статические задачи, два контактирующих тела) и носят модельный характер. То есть это направление пока находится в стадии становления.

1.13 Векторизация и распараллеливание

При анализе контактных взаимодействий в сложных конструкциях дискретные модели имеют очень высокую размерность и для получения решения в разумное время используются векторные и многопроцессорные компьютеры. Поэтому многие работы по контакту специально посвящены вопросам векторизации и распараллеливания имеющихся контактных алгоритмов. Вопросы векторизации контактных алгоритмов рассматривали (Hallquist 1976, 1983, 1993 [373, 375, 378]; Бураго, 1987b [42]; Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991 [43, 45]; Ginsberg, Katnik, 1989 [363]).

В 80-е и 90-е годы были разработаны и испытаны параллельные компьютеры различных типов и в настоящее время наиболее подходящими для распараллеливания алгоритмов решения задач математической физики являются многопроцессорные компьютеры с локально распределенной памятью в комбинации с MIMD (Multiple instruction, multiple data) технологией вычислений см. обзоры (Родрига, 1986 [177]; Oishi, 1999 [514]). Были испытаны способы распараллеливания, ориентированные на группы узлов

сетки, на группы элементов и на подобласти. Наиболее эффективным признан способ распараллеливания по подобластям (DDM - domain decomposition method), элементы которого применительно к контактными задачам можно найти в работах (Malone, 1988 [479]; Carter, 1989 [290]; Farhat, 1991, 1994, 1995 [344, 345, 346]; Oishi, 1999 [514]).

Фиктивные подобласти имеют перекрывающиеся границы, на которых обеспечивается непрерывность решения путем межпроцессорного обмена пограничными данными в процессе реализации итерационных методов. Одним из наиболее эффективных и удобных для распараллеливания и векторизации является итерационный метод сопряженных градиентов, вопросам реализации которого применительно к контактными алгоритмам посвящены работы (Бураго, 1987b [42]; Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991 [43, 45]; Yagawa, 1991, 1993 [670, 671, 672]; Oishi, 1999 [514]).

Рассматривавшиеся выше алгоритмы поиска зон контакта (в том числе глобальные LPOCA, НІТА и локальные (пинболл, господин-слуга и др.) в исходной форме плохо приспособлены к параллельным вычислениям и их подключение значительно снижает выигрыш от использования параллельных процессоров. При распараллеливании контактная поверхность разбивается на подобласти, для расчета которых подключаются дополнительные процессоры, отличные от тех, что задействованы для расчета внутренних подобластей контактирующих тел (см. работы Hoover, 1997 [395]; Oishi, 1999 [514]). Распараллеленные контактные алгоритмы представлены также в работах (Ginsberg, Johnson, 1988 [362]; Praskacz, 1995 [561]; Malone, Johnson, 1994 [480, 481]; Elsner et al, 1996 [334]; Attaway et al., 1997, 1998 [227, 228]).

Наивысшее в смысле быстродействия достижение в распараллеливании контактных задач о высокоскоростных соударениях за 2001 год принадлежит американской государственной исследовательской организации Sandia National Laboratories (SNL), достигнутое при использовании распараллеленного пакета про-

грамм PRONTO на компьютере Intel Teraflop Computer (3600 процессоров). Было достигнуто быстроедействие порядка 1/10 секунды на шаг по времени для задач размерностью более 10-15 миллионов трехмерных 8-узловых конечных элементов. Рассчитан ряд примеров от простых тестов до практически важной и еще недавно абсолютно безнадёжной для численного решения задачи о крушении самолета с учетом деформаций составной конструкции, гидродинамики топлива (метод частиц) и деформаций грунта. В данной задаче собраны все элементы явления контакта, обсуждавшиеся выше, и самоконтакт, и множественный контакт деформируемых тел, и элементы методов сквозного счета и т.д., и т.п. Описание этого уникального расчета приведено в отчете SNL (Attaway et al., 2001 [229]).

Учитывая интенсивное развитие параллельных компьютеров, сопровождающееся изменениями в их архитектуре и математическом обеспечении, их возможную экспансию в мир персональных компьютеров можно ожидать, что проблема адаптации контактных алгоритмов к параллельным компьютерам в ближайшее время будет весьма актуальной.

Не следует, однако, переоценивать значение данного направления. Дело в том, что параллельные компьютеры пока составляют весьма малую часть имеющегося компьютерного парка и используются, как правило, в режиме удаленного доступа. Это резко увеличивает время ожидания решения и создает парадоксальную ситуацию: формально время расчета резко сокращается, а фактически время ожидания решения увеличивается из-за малой скорости передачи данных по сети и из-за возможной конкуренции, поскольку параллельные машины являются компьютерами коллективного пользования. По сравнению с традиционным скалярным программированием распараллеливание программ требует значительно больших усилий и кардинального репрограммирования и ревизии обычных скалярных алгоритмов. Поэтому для успешного распараллеливания требуется очень хорошая материальная база и мощная финансовая поддержка, сильные по-

ка только большим исследовательским центрам, выполняющим крупные государственные заказы.

При планировании работ по распараллеливанию (контактных) алгоритмов необходимо учитывать и временные факторы, а именно время жизни параллельного компьютера и его математического обеспечения, время, требующееся на разработку параллельного варианта программы и время, в течение которого параллельный компьютер является суперкомпьютером. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что скалярные (в частности, персональные) компьютеры, также быстро прогрессируют, и нередко успешно конкурируют по всем статьям со многими параллельными еще недавно "суперкомпьютерами". Например, сравнение современного персонального Pentium/4 с 5-ти летней давности параллельным "8-головым" Parsytec'ом будет не в пользу Parsytec'a.

1.14 Оценки точности и сравнение методов

Практически все контактные алгоритмы дают лишь приближенные решения. Важное, но пока не очень развитое направление работ по контакту посвящено исследованию точности контактных алгоритмов и априорному/апостериорному анализу ошибок численных решений. Отметим работы по оценке точности лагранжевых алгоритмов (Lee, Oden, Ainsworth, 1991 [460]; Lee, Oden, 1993, 1994 [461, 462, 463]; Цветкова, 1995, 1996 [208, 209]; Twodzydlo et al., 1997 [633]; Sharif, Wiberg, 2001 [589]).

Сравнительный анализ различных подходов осложняется тем, что значительное влияние на успех применения того или иного контактного алгоритма оказывает качество программной реализации и недокументируемые особенности алгоритмов. К сожалению, пока очень мало имеется работ, в которых сравнение различных подходов проводится одними и теми же авторами. Сравнения, которые выполняются в условиях одной и той же "кухни", дают более ясные и определенные результаты. Дело в том,

что нередко незначительная, на первый взгляд, деталь алгоритма, не упоминаемая в статьях и отчетах, может играть решающую роль в успехе/неуспехе алгоритма в целом. Это происходит не по злому умыслу авторов, скрывающих "секрет", а чаще всего из-за обилия составляющих алгоритма и неоднозначности его возможных формулировок. Классическим образцом сравнительного анализа контактных алгоритмов может служить работа (Rider, Kothe, 1995 [572]), в которой качество численного моделирования контактных разрывов различными методами сквозного счета оценивалось на четырех тестовых задачах переноса некоторой специальным образом распределенной скалярной субстанции в заданных постоянных во времени полях скорости, описывающих простую трансляцию, вращение жесткого тела, отдельный вихрь и поле сложной деформации. Испытывались следующие четыре метода: 1) наиболее свежая версия алгоритма маркеров и ячеек, 2) метод жидкости в ячейках, 3) метод функций уровня и 4) методы улавливания скачков типа TVD и ENO.

По качеству результата от лучшего к худшему методы распределились в порядке приведенного перечисления. Результаты по методу непрерывного маркера были улучшены в работе (Enright et al., 2002 [336]) с помощью нового метода HPLS (Hybrid Particle Level Set method), который воплощает технику дискретных и непрерывных лагранжевых маркеров в едином алгоритме.

Среди опубликованных работ, имеющих отношение к критическому анализу контактных алгоритмов, имеется очень любопытный доклад (N. Johnson, 1996 [410]), в котором приведена ироническая коллекция типичных образцов авторской необъективности в оценках реальных достоинств имеющихся численных методов и компьютерных программ вычислительной механики:

* Программа решит Вашу проблему без модификаций.

* Руководство содержит все, что нужно, чтобы запустить программу.

* Стандартный графический вывод, совместимый с любыми постпроцессорами.

- * Легко используемая программа.
- * Исполняемая на всех компьютерах без изменений.
- * Универсальная и точная.
- * Покрывающая всю физику.
- * Имеющая дружелюбный интерфейс.
- * Не содержащая ошибок, а только недокументированные особенности.
- * Вы сможете запустить программу без руководства.
- * Метод был впервые разработан здесь."

Уже сам тот факт, что одновременно сосуществует великое множество контактных алгоритмов, говорит о том, что они не идеальны. Приводимые в статьях самооценки предлагаемых алгоритмов и результатов надо воспринимать очень осторожно.

1.15 Заключительные замечания

К настоящему времени мировая литература по численным методам расчета контактных взаимодействий деформируемых тел насчитывает уже сотни наименований работ, опубликованных за последние 3-4 десятилетия. Для обзора были отобраны только характерные работы, посвященные именно разработке алгоритмов. Если бы в обзор были включены еще и исследования, посвященные изучению физики контакта и решению отдельных задач, то счет работ пошел бы уже на тысячи, а объем обзора превысил бы разумные рамки.

Представленный обзор рисует впечатляющую картину исследований по численному моделированию контактных взаимодействий, позволяет получить представление о возможностях, предоставляемых контактными алгоритмами для исследований явления контакта. Обзор может быть использован как путеводитель по контактными алгоритмам и облегчить выбор подходящего алгоритма, оценку новизны и подбор литературы для изучения и цитирования.

Несмотря на обилие предложенных контактных алгоритмов, их основные идеи вполне обозримы и поддаются классификации. Одна из возможных классификаций была представлена в данном обзоре. Она не оптимальна, но продиктована сортируемым материалом. Данный обзор опубликован в сокращенном варианте (250 работ) в работе Bourago, 2002 [280] (на английском языке).

Глава 2

Основные уравнения

В настоящей главе рассматривается постановка общей задачи механики сплошной среды для безмоментных сплошных сред дифференциального типа, лежащая в основе настоящей работы. Движение и эволюция термомеханического состояния газа, жидкости и твердых деформируемых тел описываются с единых позиций на основе произвольного эйлерово-лагранжева подхода, законов сохранения и общих законов термодинамики. Применяется термодинамический метод построения определяющих соотношений, основанный на неравенстве для свободной энергии и концепции параметров состояния. Формулируется модификация этого метода, не требующая, в отличие от традиционной, дополнительных экстремальных принципов для скорости диссипации. С использованием термодинамического метода единообразно выведены определяющие соотношения для известных моделей газообразных, жидких и твердых деформируемых сред, а также соотношения для описания процессов разрушения и консолидации упруговязкопластических сред.

2.1 Состояние вопроса

Главным мотивом для построения новых определяющих соотношений является желание теоретически воспроизвести результаты физических экспериментов, которые не описываются вообще или описываются, но не достаточно хорошо имеющимися соотношениями. Новые соотношения должны быть в согласии с имеющимися в области параметров, где существующие соотношения дают хорошие результаты. Наконец, новые соотношения должны быть физически и математически корректны. Это означает,

что они должны удовлетворять фундаментальным законам термодинамики, теории размерности, принципам инвариантности и объективности.

Математически и физически ясный подход к построению определяющих соотношений основан на концепции параметров состояния и термодинамическом неравенстве для свободной энергии (см. например, Ziegler, 1966; Malvern, 1969; Седов, 1970; Ильюшин, 1971; Christensen, 1971; Astarita, Marrucci, 1978; Коларов, Балтов, Бончева, 1979; Кондауров, 1982; Кукуджанов, 1985; Simo, 1986; Левитас, 1986; Трусов, 1986). Ввиду того, что число опубликованных работ, в которых данный подход развивался очень велико и дать здесь ссылки на все работы невозможно, ссылки даны только на те работы, которые непосредственно способствовали выработке предлагаемого метода. В цитированных работах имеются дополнительные ссылки.

Хотя рассматриваемый подход развит во множестве исследований, начиная с пятидесятих годов 20 века и уже может считаться традиционным, имеет смысл воспроизвести основные его положения здесь. Дело в том, что в литературе отсутствует последовательное изложение этого подхода. Предлагаемая схема термодинамического вывода определяющих соотношений (Бураго, 1984; Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991; Бураго, 1995; Бураго, 1999; Бураго, Глушко, Ковшов, 2000) отличается от традиционной и получена путем анализа большого числа работ, чтобы выделить общее, устранить противоречия и восполнить пробелы. Как нам представляется, последовательное применение этого подхода позволяет прояснить физические и математические основы как уже известных, так и новых определяющих соотношений.

Термодинамический анализ показывает, что реологические свойства сплошной среды определяются набором внутренних параметров состояния бесконечно малого объема среды и зависимостью функций свободной энергии и скорости диссипации от этих параметров. Определяющие соотношения для энтропии, напряжений и тепловых потоков, а также кинетические уравнения для

структурных параметров состояния являются при этом следствиями.

2.2 Закон движения

Закон движения материальной сплошной среды примем в параметрическом виде (Бураго, 1984)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t), \quad \overset{o}{\dot{\mathbf{x}}} = \overset{o}{\dot{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) \quad (2.1)$$

где \mathbf{x} - радиус вектор материальной точки при $t \geq 0$, $\overset{o}{\dot{\mathbf{x}}}$ - радиус вектор материальной точки при $t = 0$ и справедливо начальное условие

$$t = 0 : \quad \mathbf{x} = \overset{o}{\mathbf{x}}$$

Независимые криволинейные координаты $\tilde{\mathbf{x}}$ могут быть сопряжены с начальной конфигурацией $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\overset{o}{\mathbf{x}})$, с актуальной конфигурацией $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ или, в общем случае, характеризовать произвольную подвижную промежуточную конфигурацию.

Так, случай $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ отвечает Эйлеровому представлению движения, случай $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\overset{o}{\mathbf{x}})$ отвечает Лагранжевому представлению движения, а в общем случае имеем произвольное эйлерово-лагранжево представление.

Скорость точки с координатами $\tilde{\mathbf{x}}$, называемых подвижными, обозначим

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (2.2)$$

где временное дифференцирование выполняется при $\tilde{\mathbf{x}} = \text{const}$, то есть вдоль траекторий подвижных координат.

Скорость материальной точки $\overset{o}{\dot{\mathbf{x}}}$ по определению равна

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.3)$$

где временное дифференцирование выполняется при $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \text{const}$, то есть вдоль траекторий материальных частиц и оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla$$

обозначает материальную временную производную, а ∇ есть оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации. Выписанное выражение материальной временной производной является следствием соотношений (2.1)-(2.3) и правила дифференцирования сложной функции. Оно выводится так: по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} \cdot \tilde{\nabla}$$

тогда, учитывая связь $\tilde{\nabla} = (\nabla\tilde{\mathbf{x}})^{-1} \cdot \nabla$, получаем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} + \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} \cdot \tilde{\nabla}\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} + \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} \cdot (\nabla\tilde{\mathbf{x}})^{-1}$$

откуда с учетом определений скоростей \mathbf{u} и \mathbf{w} получаем

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla\tilde{\mathbf{x}}$$

что и приводит к искомому выражению для d/dt .

2.3 Деформации

Для единообразной формулировки задач наиболее удобны пространственные параметры состояния элементарного объема сплошной среды. Пространственный тензор деформации (Альманси) ε и соответствующий тензор скоростей деформаций (Эйлер) определяются следующими соотношениями:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}, \quad d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} - d\overset{\circ}{\mathbf{x}}^T \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}^T \cdot 2\varepsilon \cdot d\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} - d\overset{\circ}{\mathbf{x}}^T \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}} \right) = d\mathbf{x}^T \cdot 2\mathbf{e} \cdot d\mathbf{x}$$

где \mathbf{F} - тензор градиента деформации, \mathbf{L} тензор градиентов скоростей, ε - пространственный тензор деформации Альманси и \mathbf{e} - пространственный (Эйлеров) тензор скорости деформации.

Соотношения между \mathbf{F} , \mathbf{L} , ε и \mathbf{e} являются следствиями определений этих величин:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}), \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{-T} + \mathbf{L}), \quad \mathbf{e} = \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^{-T} \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (2.4)$$

где \mathbf{I} - единичный тензор.

2.4 Плотность, напряжения и тепловые потоки

Плотность ρ , пространственный тензор напряжений Коши σ и пространственный вектор диффузионного потока тепла \mathbf{q} определяются следующими соотношениями

$$dm = \rho dV, \quad d\mathbf{P} = \sigma \cdot \mathbf{n} dS, \quad dQ = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$$

где dm - масса бесконечно малого объема dV в актуальной конфигурации, $d\mathbf{P}$ - сила, действующая на бесконечно малой площадке dS с единичной нормалью \mathbf{n} , dQ - количество тепла диффундировавшего через площадку dS в единицу времени. Если в определении теплового потока в правой части равенства поставить знак минус, то вектор \mathbf{q} будет указывать направление, обратное градиенту температуры, совпадающее с направлением диффузии тепла. Плотность подчинена закону сохранения массы (уравнению неразрывности):

$$\frac{\overset{o}{\rho}}{\rho} = \det(\mathbf{F}^{-1})$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

где $\overset{o}{\rho}$ - начальная плотность.

2.5 Материальные и пространственные меры

Для вывода определяющих соотношений, то есть связей между параметрами, характеризующими состояние бесконечно малого объема сплошной среды, будем использовать материальные тензоры деформаций $\overset{o}{\varepsilon}$ (тензор Грина) и скоростей деформаций $\overset{o}{\mathbf{e}}$, которые определяются так

$$d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} - d\overset{o}{\mathbf{x}}^T \cdot d\overset{o}{\mathbf{x}} = d\overset{o}{\mathbf{x}}^T \cdot 2\overset{o}{\varepsilon} \cdot d\overset{o}{\mathbf{x}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} - d\overset{o}{\mathbf{x}}^T \cdot d\overset{o}{\mathbf{x}} \right) = d\overset{o}{\mathbf{x}}^T \cdot 2\overset{o}{\mathbf{e}} \cdot d\overset{o}{\mathbf{x}}$$

Следствием этих определений являются связи:

$$\overset{o}{\varepsilon} = \mathbf{F}^T \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{F} \quad , \quad \overset{o}{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad , \quad \frac{d\overset{o}{\varepsilon}}{dt} = \overset{o}{\mathbf{e}} \quad (2.6)$$

Материальный тензор напряжений определяется через мощность напряжений

$$\overset{o}{\sigma} : \overset{o}{\mathbf{e}} = \sigma : \mathbf{e}$$

откуда следует формула, связывающая его с пространственным тензором:

$$\overset{o}{\sigma} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.7)$$

Скорость изменения во времени пространственных тензоров характеризуется объективными тензорными временными производными, учитывающими деформацию и поворот элементарного объема. Примером может быть связь пространственных тензоров деформации и скорости деформации (последнее из соотношений (2.4)), представляющая временную производную Ривлина. Скорости материальных тензоров определяются более просто - с помощью обычного оператора материальной временной производной, поэтому именно материальные тензоры используются при выкладках по выводу определяющих соотношений.

Замена переменных "материальные меры" на "пространственные меры" и обратно делается достаточно просто, поэтому совсем не обязательно при записи формул использовать исключительно материальные или исключительно пространственные меры. Если это удобно, то вполне допустимо использовать сознательно и смешанные формы записи. Чтобы отличить материальные тензора, над ними ставится "нулик".

2.6. Замечание о нотациях и о выборе тензоров напряжений и деформаций.

Отметим, что используемый здесь "энергетический" материальный тензор напряжений связан с симметричным тензором напряжений Пиолы-Кирхгофа σ_π так

$$\sigma_\pi = \frac{\overset{o}{\rho}}{\rho} \overset{o}{\sigma}$$

Набор возможных различных тензоров напряжений и деформаций бесконечен и какие из них использовать в расчетах и при формулировке задач - это вопрос удобства. Вполне допустимо использование одновременно нескольких различных тензоров, как это делается здесь. Важно, чтобы при этом соблюдались их связи с объективными физическими характеристиками, не зависящими от выбора этих мер. Например, тензор напряжений должен быть определен либо через мощность напряжений в единице объема/массы, либо через вектор сил на элементе поверхности, либо через какой либо другой тензор напряжений, для которого связи с мощностью напряжений или с вектором поверхностных сил известны. В зависимости от того, каковы эти связи, можно судить о том, что это за тензор напряжений.

Аналогично, для тензора деформации должна быть определена его связь с деформацией бесконечно малого материального вектора в сплошной среде, либо его связь с другим известным тензором деформаций.

Искательство "наилучших" или "единственно правильных" тензоров, а также поиск векторных характеристик напряжения и деформации (реперы, тривекторы), получило некоторое распространение в последние две декады 20-го века в связи с развитием теории больших (упруго-пластических) деформаций и стремлением упростить или сделать более наглядным математический аппарат МСС. По мнению автора, удач на этом пути пока не наблюдалось и нет показаний для их ожидания. В конечном счете важны не формы записи, а физическое содержание уравнений, которые можно записывать разными способами, не изменяя их смысла. Важно, чтобы разные формы записи были бы согласованы между собой и не противоречили бы друг другу.

В настоящей работе предпочтение отдано традиционным тензорам. Кроме того, предпочтение отдано абстрактной тензорной нотации, не привязанной к какой-либо системе координат в отличие, скажем, от компонентной, индексной, матричной или реперно-тривекторной нотаций. Переход к компонентной форме уравнений, используемой при численном решении конкретных задач, делается в соответствии с выбором системы координат путем скалярного умножения тензорных соотношений на базисные векторы.

2.6 Определяющие соотношения

Законы термодинамики для необратимых термомеханических процессов имеют вид:

$$\rho \frac{dU}{dt} = \sigma : \mathbf{e} + \nabla \mathbf{q} + \rho r = 0$$

$$\rho \frac{d\eta}{dt} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0,$$

где внутренняя энергия U , внешние источники тепла r и энтропия η отнесены к единице массы; T - температура. Исключая внешние источники тепла r и вводя свободную энергию

$\varphi = U - T\eta$ можно получить следствие законов термодинамики - неравенство свободной энергии:

$$-\rho \frac{d\varphi}{dt} - \rho\eta \frac{dT}{dt} + \overset{\circ}{\sigma} : \frac{d\overset{\circ}{\varepsilon}}{dt} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (2.8)$$

Это неравенство содержит только параметры, характеризующие внутреннее термомеханическое состояние бесконечно малого объема сплошной среды и должно выполняться в любом термомеханическом процессе. Для его выполнения параметры состояния элементарного объема, а именно, температура, плотность, деформация, энтропия, напряжение, тепловой поток, скорости изменения свободной энергии, температуры и деформации, а также градиент температуры должны быть подчинены соотношениям, называемым определяющими соотношениями.

Минимальный набор параметров состояния содержит параметры, изменения которых взаимно независимы. Выбор таких параметров определяет класс рассматриваемых сплошных сред. В общем случае число параметров состояния может быть бесконечным, например в случае вязко-упругих сред интегрального типа (Christensen, 1971). Здесь рассматривается более простой случай сред с конечным числом параметров состояния, а именно, случай безмоментных сред дифференциального типа.

Рассматривается следующий набор параметров состояния:

$$\pi = (T, \overset{\circ}{\varepsilon}, \overset{\circ}{\chi}, \frac{dT}{dt}, \overset{\circ}{\mathbf{e}}, \frac{d\overset{\circ}{\chi}}{dt}, \nabla T) \quad (2.9)$$

где χ - структурные параметры состояния, отвечающие за процессы перестройки внутренней структуры среды такие, как пластическое течение, разрушение или спекание. Поскольку они не фигурируют явно в неравенстве свободной энергии, они также называются неявными или скрытыми параметрами состояния.

В дальнейшем будем предполагать, что набор параметров минимален. Это означает, что все остальные внутренние переменные (энтропия, напряжения, тепловые потоки и т.д.) являются

функциями этих параметров и, в частности, это относится и к свободной энергии:

$$\varphi = \varphi(\pi) \quad (2.10)$$

Используя (2.9-2.10) можно переписать неравенство (2.8):

$$\begin{aligned} & -\rho\left(\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt} + \left(\overset{\circ}{\sigma} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}}\right) : \overset{\circ}{\mathbf{e}} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\chi}} : \frac{d\overset{\circ}{\chi}}{dt} + \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \nabla\mathbf{T} - \\ & -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial T_t}\frac{dT_t}{dt} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{e}}_t} : \frac{d\overset{\circ}{\mathbf{e}}_t}{dt} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\chi}_t} : \frac{d\overset{\circ}{\chi}_t}{dt} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial \nabla T} \cdot \frac{d\nabla T}{dt} \geq 0 \quad (2.11) \end{aligned}$$

Производные $\frac{dT_t}{dt}$, $\frac{d\overset{\circ}{\mathbf{e}}_t}{dt}$, $\frac{d\overset{\circ}{\chi}_t}{dt}$, $\frac{d\nabla T}{dt}$ не принадлежат набору параметров состояния (2.8), в то время как множители при этих производных являются функциями определяющих параметров, поэтому присутствие содержащих эти производные членов нарушает неравенство (2.11) и законы термодинамики. Поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial T_t} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{e}}_t} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\chi}_t} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \nabla T} = 0$$

и функция свободной энергии зависит только от части набора параметров состояния

$$\varphi = \varphi(\pi_1), \quad \pi_1 = (T, \overset{\circ}{\varepsilon}, \overset{\circ}{\chi})$$

Неравенство свободной энергии принимает форму, называемую неравенством скорости диссипации:

$$D = -\rho\left(\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt} + \left(\overset{\circ}{\sigma} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}}\right) : \overset{\circ}{\mathbf{e}} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\chi}} : \overset{\circ}{\chi}_t + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0$$

где четыре группы слагаемых представляют основные диссипативные процессы: необратимый рост энтропии, диффузию импульса, структурную перестройку сплошной среды и диффузию тепла.

Общим решением неравенства скорости диссипации являются искомые определяющие соотношения, имеющие следующий общий вид:

$$\begin{aligned}
-\rho\left(\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\right) &= -\rho\eta_D(T, \overset{\circ}{\varepsilon}, \overset{\circ}{\chi}, \left[\frac{dT}{dt}\right], \overset{\circ}{\mathbf{e}}, \frac{d\overset{\circ}{\chi}}{dt}, \nabla T) \\
\overset{\circ}{\sigma} - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}} &= \overset{\circ}{\sigma}_D(T, \overset{\circ}{\varepsilon}, \overset{\circ}{\chi}, \frac{dT}{dt}, [\overset{\circ}{\mathbf{e}}], \frac{d\overset{\circ}{\chi}}{dt}, \nabla T) \\
-\rho \frac{\partial\varphi}{\partial \overset{\circ}{\chi}} &= \mathbf{X}_D(T, \overset{\circ}{\varepsilon}, \overset{\circ}{\chi}, \frac{dT}{dt}, \overset{\circ}{\mathbf{e}}, \left[\frac{d\overset{\circ}{\chi}}{dt}\right], \nabla T) \\
\frac{1}{T}\mathbf{q} &= \frac{1}{T}\mathbf{q}_D(T, \overset{\circ}{\varepsilon}, \overset{\circ}{\chi}, \frac{dT}{dt}, \overset{\circ}{\mathbf{e}}, \frac{d\overset{\circ}{\chi}}{dt}, [\nabla T])
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где квадратные скобки при некоторых аргументах не означают каких-либо математических операций и используются далее. Функции $Z_1 = \rho\eta_D$, $Z_2 = \sigma_D$, $Z_3 = \mathbf{X}_D$, $Z_4 = \mathbf{q}_D/T$ называются диссипативными потоками или обобщенными диссипативными силами и должны обеспечивать выполнение неравенства скорости диссипации, которое удобно записать теперь в таком виде

$$D = \sum_{i=1}^4 D_i \geq 0, \quad D_i = Z_i \pi_i^{(2)} \tag{2.13}$$

где $\pi_1^{(2)} = \frac{dT}{dt}$, $\pi_2^{(2)} = \mathbf{e}$, $\pi_3^{(2)} = \frac{d\chi}{dt}$, $\pi_4^{(2)} = \nabla T$ - обобщенные скорости. В частном случае обратимых процессов функции η_D , σ_D , \mathbf{X}_D , \mathbf{q}_D равны нулю и неравенство (2.13) становится равенством.

Поясним логику вывода общей формы определяющих соотношений (2.12) на простом "школьном" примере. Неравенство $ab > 0$ имеет решение: $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$. Если рассматривать b как аргумент, меняющийся независимо от $-\infty$ до $+\infty$, то из решения неравенства следует, что a есть некоторая функция от b : $a = a(b)$. Ясно, что существует бесчисленное множество функций $a(b)$, удовлетворяющих такому неравенству.

Если же задать $ab = d(b) > 0$ (аналог диссипации), то функция $a(b)$ определится однозначно $a(b) = d(b)b^{-1}$. Вот такое простое соображение лежит в основе вывода.

Таким образом, для получения определяющих соотношений необходимо конкретизировать набор параметров состояния и построить две функции: функцию свободной энергии $\varphi = \varphi(\pi^{(1)})$ и функцию скорости диссипации $D = D(\pi^{(1)}, \pi^{(2)})$, руководствуясь при этом физическими представлениями о свойствах рассматриваемой среды.

Диссипативные потоки или "силы": η_D , σ_D , \mathbf{X}_D , \mathbf{q}_D строятся одновременно и согласованно с функцией скорости диссипации так, чтобы удовлетворить неравенству скорости диссипации. Тем самым задача построения определяющих соотношений замыкается. Для выполнения требований принципов инвариантности и объективности достаточно убедиться, что выражения функций свободной энергии и скорости диссипации не зависят от ортогональных преобразований начальной и текущей (актуальной) конфигураций и от выбора инерциальной системы отсчета. Эти требования заведомо будут выполнены, если функции φ и D зависят только от тензорных инвариантов определяющих параметров.

Можно искать решения неравенства скорости диссипации и в более узких классах функций, описывающих основные диссипативные процессы. Например, если потребовать, чтобы каждая из составляющих скорости диссипации D_i была бы однородной функцией соответствующей обобщенной скорости: $\pi_i^{(2)}$. В общих определяющих соотношениях (2.12) однородные параметры выделены квадратными скобками. Тогда в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях выражения для диссипативных потоков принимают следующий вид:

$$Z_i = \kappa_i \frac{\partial D_i}{\partial \pi_i^{(2)}}, \quad \kappa_i = - \frac{D_i}{\left(\frac{\partial D_i}{\partial \pi_i^{(2)}}\right) \pi_i^{(2)}} \quad (2.14)$$

Этот же класс решений выделяется дополнительными экстре-

мальными принципами для скорости диссипации, предложенными Циглером и Онзагером (см. Ziegler, 1966; Седов, 1970). Нижеследующий анализ определяющих соотношений не использует упомянутые принципы, не требует однородности диссипативных функций и не использует частные соотношения (2.14), а основывается непосредственно на общих соотношениях (2.12).

2.7 Примеры определяющих соотношений

Покажем на характерных примерах моделей сплошных сред как описанная выше схема позволяет выводить определяющие соотношения.

Для получения определяющих соотношений надо:

- 1) указать процессы, которые существенны для данной среды и ввести соответствующие параметры состояния (2.9),
 - 2) построить выражения для свободной энергии и скорости диссипации,
- и
- 3) воспользоваться формулами (2.12).

Процедура построения определяющих соотношений, как можно усмотреть в разбираемых ниже примерах, очень напоминает игру: что заложишь, то и получишь. Описанная схема устанавливает правила такой игры, которые ограничивают полет фантазии и гарантируют результат, находящийся в согласии с основными законами и принципами термомеханики.

Перед рассмотрением примеров сделаем несколько существенных замечаний:

- 1) Отметим, что для принятого набора параметров состояния, включающего явно тензор деформации, плотность не является независимым параметром состояния, так как скорость ее изменения определяется одним из основных параметров состояния - тензором скоростей деформаций в соответствии с уравнением неразрывности (2.5).

2) Помимо принятого здесь, безусловно, можно использовать и другие наборы параметров состояния. Например, вместо полной и пластической деформации можно было бы использовать упругую и пластическую деформации или напряжение и деформацию, как это и делается иногда при конструировании моделей упругопластических сред (см., например, Коларов, Балтов, Бончева, 1979). Или можно было бы рассмотреть в качестве параметров состояния плотность и температуру, давление и температуру, плотность и энтальпию и так далее. К сожалению, не все такие наборы параметров подходят к широкому классу сред.

При неудачном выборе набора параметров состояния его состав приходится корректировать при изменении или расширении класса рассматриваемых процессов, поскольку не все характеристики годятся на роль независимого параметра состояния во множестве рассматриваемых процессов и не все характеристики состояния сохраняют смысл в широком классе сплошных сред. Например, бессмысленно пытаться оперировать понятиями упругая и пластическая деформации при рассмотрении вязкого теплопроводного газа. Оперировать же полной и пластической деформацией рассматривая и газ, и жидкость, и упруго-пластическую среду вполне возможно. Используемый здесь набор параметров состояния (2.9) наилучшим образом отвечает целям настоящей работы.

3) Подчеркнем особо необходимость перехода к материальным мерам тензорных параметров при проведении выкладок по выводу определяющих соотношений. Такой переход необременителен и упрощая выкладки, избавляет от возможных ошибок.

Для материальных мер операция дифференцирования по времени выражается обычными материальными производными, в то время как для пространственных тензоров та же зависимость содержит дополнительные члены, учитывающие деформацию и поворот элементарного объема.

Обратный переход к пространственным тензорам можно сделать после вывода определяющих соотношений. Пространствен-

ные тензоры часто оказываются более удобными для решения задач (задачи аэрогидромеханики, аэроупругости, высокоскоростного удара твердых деформируемых тел, взрыва и т.п.).

4) При математических операциях с определяющими соотношениями принятая здесь абстрактная тензорная нотация (см. например Астарита и Марруччи, 1978 или Коларов, Балтов и Бончева, 1979) также более удобна и позволяет избежать многих недоразумений, случающихся порой, если рассуждения проводятся с компонентами тензоров относительно систем базисных векторов, отнесенных к различным конфигурациям. Внешне соотношения, выписанные в компонентах тензоров, могут выглядеть также, как приводимые здесь абстрактные тензорные соотношения, однако в зависимости от используемого векторного базиса они могут выражать совершенно другие закономерности. Поэтому сравнение определяющих соотношений надо проводить в условиях какой-либо одной и той же системы записи.

2.7.1 Вязкие газ и жидкость

Рассмотрим модель вязкой теплопроводной среды Навье-Стокса. Она может быть определена как среда, которая накапливает тепло (свободная энергия зависит от температуры), сопротивляется объемному сжатию (свободная энергия зависит от плотности), не помнит начального состояния (нет зависимости от начальной плотности) и обладает свойством диффузии количества движения и тепла (скорость диссипации зависит от скорости деформации и градиента температуры). Сказанное можно записать так:

$$\varphi = \varphi_1(\rho, T), \quad D = \lambda_v(\mathbf{e} : \mathbf{I})^2 + 2\mu_v(\mathbf{e}' : \mathbf{e}') + \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T$$

где \mathbf{I} - единичный тензор, μ_v , λ_v - коэффициенты вязкости, k_T - коэффициент теплопроводности. Заметим, что скорость диссипации записана с использованием инвариантов пространственного тензора скорости деформации. Если перейти к материальным

тензорам, та же формула примет вид

$$D = (\lambda_v(\mathbf{G}^{-1} : \overset{\circ}{\mathbf{e}})\mathbf{G}^{-1} + \mu_v\mathbf{G}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}' \cdot \mathbf{G}^{-1}) : \overset{\circ}{\mathbf{e}}' + \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$. Аналогичный переход к материальным тензорам делается и далее, но после выкладок окончательный результат записывается опять с использованием пространственных тензоров. Промежуточные выкладки опускаются.

Определяющие уравнения для сжимаемого вязкого газа получаются в обычном виде, не зависящем от начальной конфигурации сплошной среды:

$$\eta = \eta_C = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial T}, \quad \sigma = \sigma_C + \sigma_D, \quad \sigma_C = -p\mathbf{I}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}$$

$$\sigma_D = \lambda_v(\mathbf{e} : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu_v\mathbf{e}, \quad \mathbf{q} = k_T \nabla T, \quad U = U_C = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T} \quad (2.15)$$

Здесь и далее индекс "С" выделяет консервативные составляющие, которые определяются свободной энергией, а индекс "D" отмечает диссипативные составляющие, определяемые скоростью диссипации. В частном случае идеального газа для свободной энергии имеем:

$$\varphi_1(\rho, T) = c_v T \left((\gamma - 1) \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \ln \frac{T}{T_0} \right)$$

где c_v - теплоемкость при постоянном объеме, γ - отношение теплоемкостей, ρ_0 и T_0 характерные значения плотности и температуры, при которых составляющая свободной энергии φ_1 , определяемая с точностью до константы, обращается в нуль. Соотношения для энтропии, давления и внутренней энергии имеют известный вид:

$$\eta = \eta_C = c_v \left(1 - (\gamma - 1) \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \ln \frac{T}{T_0} \right), \quad p = (\gamma - 1)\rho U, \quad U = c_v T$$

В частном случае несжимаемой среды свободная энергия не зависит от плотности и давление определяется условием несжимаемости.

2.7.2 Термо-упругая среда

Рассмотрим нелинейную термоупругую изотропную теплопроводную среду. Она может быть определена как среда, которая накапливает тепло и помнит начальное недеформированное состояние (свободная энергия зависит от температуры и деформации и ее минимум по деформациям достигается в недеформированном состоянии при нулевом значении деформации), а также рассеивает тепло (скорость диссипации зависит от градиента температуры). В первом приближении могут быть построены следующие выражения для свободной энергии и скорости диссипации:

$$\varphi = \varphi_1(\rho, T) + h_1 \frac{\mu(\rho, T)}{\rho} \varepsilon' : \varepsilon' , \quad D = \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T$$

где $\varepsilon' = \varepsilon - (\varepsilon : \mathbf{I})\mathbf{I}/3$ - девиатор деформаций, μ - модуль упругости на сдвиг и $h_1 = (1 - \frac{2}{3}(\varepsilon : \mathbf{I}))^{-1}$.

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\eta = \eta_C = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial T} - h_1 \frac{\partial \mu}{\partial T} \varepsilon' : \varepsilon' , \quad \sigma = \sigma_C = -p\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon' , \quad p = \rho^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}$$

$$U = U_C = \varphi - T \frac{\partial \varphi_1}{\partial T} + \frac{h_1}{\rho} (\mu - T \frac{\partial \mu}{\partial T}) \varepsilon' : \varepsilon' , \quad \mathbf{q} = k_T \nabla T \quad (2.16)$$

В частном случае, если функция φ_1 имеет вид:

$$\varphi_1(\rho, T) = \frac{K}{2\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 - K\beta(T - T_0) \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

тогда для давления получается простое выражение:

$$p = K \frac{\rho}{\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} - \beta(T - T_0) \right)$$

где K - объемный модуль упругости, β - коэффициент температурного расширения, ρ_0 и T_0 - характерные (нормальные) значения плотности и температуры, при которых составляющая свободной энергии φ_1 , определяемая с точностью до константы, обращается в нуль.

2.7.3 Термо-упруго-вязко-пластическая среда

Перейдем к анализу сред со структурными параметрами состояния. Сначала рассмотрим пример термоупруговязкопластической среды. Она определяется следующими свойствами: она накапливает тепло и, в отличие от упругой среды, имеет разгруженное состояние (состояние с нулевым консервативным напряжением), которое отвечает ненулевой (пластической) деформации: $\varepsilon = \varepsilon_p$.

Тензор "пластических деформаций" ε_p характеризует структурную перестройку сплошной среды благодаря появлению, росту и движению дислокаций. Тензор "пластических деформаций" является одним из внутренних структурных параметров состояния χ и, строго говоря, не связан с каким-либо полем перемещений и определяется не кинематикой, а, как и положено структурному параметру, специальным кинетическим уравнением (законом пластического течения).

Понятие "разгруженная конфигурация" имеет смысл условно только локально в применении к окрестности материальной точки (см. работы Ли, 1969; и Седова, 1970). Поэтому никакой кинематики (то есть связей между полями перемещений и деформаций или отображений "разгруженной конфигурации" на другие) для пластических деформаций нет и единственный способ определения пластической деформации состоит в постулировании или выводе специального определяющего кинетического уравнения. Правильнее поэтому говорить не о разгруженной конфигурации, а о разгруженном состоянии.

Тензор пластической деформации $\overset{o}{\varepsilon}_p$ определяет подвижную точку в шестимерном пространстве тензора деформаций, отмечающую это разгруженное состояние, или, что то же самое, точку минимума свободной энергии по деформациям. В разгруженном состоянии консервативные составляющие напряжений (определяемые свободной энергией) обращаются в нуль.

Материальный тензор скоростей пластических деформаций $\overset{o}{\dot{\varepsilon}}_p$

вводится как материальная производная от материального тензора пластических деформаций:

$$\mathbf{e}_p = \frac{d \overset{o}{\varepsilon}_p}{dt}$$

Связь соответствующих пространственных тензоров

$$\varepsilon_p = \mathbf{F}^{-T} \cdot \overset{o}{\varepsilon}_p \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{e}_p = \mathbf{F}^{-T} \cdot \overset{o}{\mathbf{e}}_p \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

при этом получается, как и в случае тензора полной деформации, в форме временной тензорной производной Ривлина:

$$\mathbf{e}_p = \frac{d\varepsilon_p}{dt} + \varepsilon_p \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^{-T} \cdot \varepsilon_p$$

Пластическая деформация изменяется при выполнении условия активного нагружения

$$\Phi_p(T, \overset{o}{\varepsilon}, \overset{o}{\varepsilon}_p, \mathbf{e}) \geq 0$$

Кинетическое уравнение для пластической деформации, называемое законом пластического течения выводится ниже. В записываемом частном варианте теории полагается также, что материал пластически несжимаем (скорость диссипации зависит только от девиатора скорости пластической деформации, что обычно хорошо выполняется для металлов).

С учетом сделанного описания упруго-вязко-пластической среды простейшие выражения для свободной энергии и скорости диссипации могут быть записаны в следующем виде:

$$\varphi = \frac{K}{2\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \beta(T - T_0) \right)^2 + h_1 \frac{\mu}{\rho} \varepsilon'_e : \varepsilon'_e$$

$$D = H(\Phi_p) k_p f_p + \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T$$

где $\varepsilon'_e = \varepsilon' - \varepsilon'_p$ - девиатор упругой деформации, который считается малым по сравнению с единицей, k_T - коэффициент теплопроводности, H - функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице в противном случае,

$k_p = k_p(T, \varepsilon, \chi)$ - функция, определяющая статический предел текучести, f_p - функция, определяющая зависимость предела текучести от скорости пластической деформации:

$$f_p = f_p(\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p)$$

Эффект температурного расширения учитывается членом с коэффициентом β .

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad U = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad \mathbf{q} = k_T \nabla T, \quad \sigma = -p \mathbf{I} + \sigma', \quad \sigma' = 2\mu(\varepsilon' - \varepsilon'_p),$$

$$p = K \frac{\rho}{\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \beta(T - T_0) \right), \quad \mathbf{e}'_p = H(\Phi_p) \left(\frac{\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p}{k_p f_p} \right) \sigma' \quad (2.17)$$

Динамические условия пластичности, учитывающие зависимость предела текучести от скорости (пластической) деформации, являются при этом следствиями:

$$\Phi_p \geq 0, \quad \sigma' : \sigma' = \left(\frac{k_p f_p}{\sqrt{\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p}} \right)^2$$

Упруго-пластическая среда является частным случаем рассмотренной упруго-вязко-пластической среды. Она характеризуется функциями скорости диссипации с показателями однородности по скорости пластической деформации равными единице. Например, такими

$$f_p = \sqrt{\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p}$$

При этом динамические условия пластичности не зависят от скорости пластической деформации и совпадают со статическими.

Данная упруго-вязко-пластическая модель является лишь одной из большого числа возможных.

2.8 Задачи разрушения и консолидации

Континуальное разрушение сплошной среды подробно обсуждалось во многих работах (см. например Кукуджанов, 1985; Аптуков, 1986; Глушко, 1988; Кондауров, 1988, 1991, 2001; Кондауров, Л. Никитин, 1989; Lemaitre, 1992; Ottosen, 1993; Кукуджанов, Бураго и др., 1995, 2002; Фомин, Гулидов, Сапожников и др. 1999; Бураго, Глушко, Ковшов, 2000, 2001 и так далее).

Обзоры работ по консолидации (отверждению) сплошной среды и описание имеющихся теорий консолидации можно найти в следующих работах: German, 1985; Chenot, 1990; Mehrabadi, 1992; Riedel 1992, Фортов, Кондауров, 2002).

Ниже предлагается очень простая теория процессов разрушения и консолидации, которая может рассматриваться как попытка истолковать имеющиеся теории с позиций термодинамики.

2.8.1 Пористость как определяющий параметр

Рассмотрим пластически сжимаемые пористые среды. Плотность пор определяется как отношение объема, занятого порами к полному объему занятому сплошной средой. Остаточная плотность ρ_p отвечает разгруженному состоянию, то есть состоянию с нулевым уровнем консервативных напряжений и может быть вычислена как с помощью пористости ω , так и с помощью пластической деформации:

$$\rho_p = \rho_{max}(1 - \omega), \quad \frac{d\rho_p}{dt} + \rho_p \mathbf{e}_p : \mathbf{I} = 0$$

где ρ_{max} - плотность разгруженного состояния материала при отсутствии пор.

Соотношение между пористостью и объемной пластической деформацией имеет вид

$$\mathbf{e}_p : \mathbf{I} = \frac{1}{1 - \omega} \frac{d\omega}{dt}$$

Из определения пористости следует, что $0 \leq \omega \leq \omega_{max} < 1$, где ω_{max} - максимально возможная величина пористости сплошной

среды, при достижении которой среда распадается на отдельные материальные частицы. Равенство $\omega = \omega_{\max}$ имеет место, например в случае начального состояния порошкового композита, когда он представлен как порошок, засыпанный в форму-контейнер. Величина ω_{\max} может быть легко подсчитана через плотности компонентов композита, их процентное содержание и начальный объем. При нагревании легкоплавкая составляющая композита плавится и обволакивает частицы тугоплавкой составляющей. Заполненные воздухом (газом) поры при этом граничат по части поверхности с твердыми частицами, а по другой части поверхности с жидкой расплавленной легкоплавкой составляющей. На поверхности таких пор, называемых активными, действуют поверхностные капиллярные силы, которые при условии смачивания и вызывают эффект уплотнения среды, называемый спеканием или консолидацией.

Для описания эффекта спекания свободная энергия активных пор должна быть учтена как часть свободной энергии композитной сплошной среды : $\varphi_{\omega}(T, \omega)$. Изменение пористости является необратимым процессом, поэтому скорость изменения пористости должна стать аргументом функции скорости диссипации.

Учитывая наличие связи между скоростью изменения пористости и скоростью объемной пластической деформации, можно сказать, что теория спекания является вариантом теории упруго-вязкопластичности, при котором свободная энергия имеет дополнительный член, зависящий от объемной пластической деформации. Отметим, что такой член в выражении свободной энергии, правда вне связи с процессами консолидации, был представлен в работе Кондаурова и Кукуджанова, 1978. Но тогда не было ясно для описания каких эффектов он мог бы быть использован.

2.8.2 Параметр разрушения (поврежденность)

Процесс разрушения можно трактовать как возникновение и рост микротрещин, вызывающих ослабление способности среды к сопротивлению деформации. Определим параметр разрушения -

поврежденность θ как плотность микротрещин. Предполагается, что поврежденность начинает расти при выполнении некоторого критерия разрушения

$$\Phi_d(T, \varepsilon, \varepsilon_p, \omega, \theta) \geq 0$$

и что при этом с ростом поврежденности сопротивление среды падает за счет стремления величин коэффициентов упругости и предела текучести к нулю.

Таким образом приходим к выводу, что свободная энергия зависит от поврежденности через зависимость от поврежденности θ модулей упругости, а скорость диссипации содержит член, зависящий от скорости поврежденности $d\theta/dt$ и отвечающий за необратимый процесс разрушения.

2.8.3 Зависимость упругости от пористости и поврежденности

Зависимость модулей упругости и предела текучести от пористости и поврежденности запишем в следующей общей форме:

$$\mu = \mu(T, \varepsilon, \varepsilon_p, \omega, \theta) , \quad K = K(T, \varepsilon, \varepsilon_p, \omega, \theta) ,$$

$$k_p = k_p(T, \varepsilon, \varepsilon_p, \omega, \theta)$$

где при $\theta = 0$ и $\omega = 0$ модули упругости и предел текучести принимают значения для плотной (неповрежденной и непористой) сплошной среды. С ростом пористости и поврежденности сопротивляемость среды падает:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \leq 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} \leq 0 , \quad \frac{\partial k_p}{\partial \theta} \leq 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \omega} \leq 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial \omega} \leq 0 , \quad \frac{\partial k_p}{\partial \omega} \leq 0$$

В данном изложении процессы разрушения и консолидации рассматриваются отдельно: для каждого из них введен свой параметр. Не исключено, что имеет большой смысл объединение теорий в единую, использующую общий параметр (например,

пористость). Рассматривая формулы этих теорий, выписываемые ниже, можно углядеть, что такое объединение вполне возможно. Тем самым можно было бы показать богатый потенциал, заключенный в тензоре пластической деформации (или, в более общей трактовке, необратимой деформации), позволяющий единообразно описать широкий спектр процессов: и пластическое течение, и разрушение, и консолидацию (... и ползучесть,...). Это здесь не реализовано.

2.8.4 Свободная энергия и скорость диссипации

Простейшие выражения для свободной энергии и скорости диссипации имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{K}{2\rho_p} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right)^2 + h_1 \frac{\mu}{\rho} \varepsilon'_e : \varepsilon'_e + H(T - T_m) \varphi_\omega(T - T_m, \omega) \\ D &= H(\Phi_p) k_p f_p + \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T + \\ &+ H(\Phi_d) k_d \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + H(\omega) k_c \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

где k_p, k_d, k_c и k_T - неотрицательные функции от $T, \varepsilon, \varepsilon_p, \omega, \theta$. Величина T_m отмечает пороговое значение температуры, при которой поры становятся активными, Величины ρ_p, ω являются зависимыми определяющими параметрами, поскольку их скорости изменения определяются скоростью пластической деформации, что не мешает их применять одновременно при записи выражений для свободной энергии и скорости диссипации.

2.8.5 Определяющие соотношения для теории разрушения и консолидации

Используя общие соотношения (2.10), выражения (2.15) и пренебрегая членами высших порядков малости, проходим к сле-

дующим определяющим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma &= -p\mathbf{I} + \sigma' , \quad \sigma' = 2\mu(\varepsilon' - \varepsilon'_p) , \quad \mathbf{e}'_p = \lambda_p \sigma' \\ p &= K \frac{\rho}{\rho_p} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right) , \quad s_\omega = \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \omega} (1 - \omega) , \\ \eta &= -\frac{\partial \varphi}{\partial T} , \quad U = \varphi - T\eta , \quad \mathbf{q} = k_T \nabla T \\ \frac{d\omega}{dt} &= -H(\omega) k_\omega^{-1} (p + s_\omega) , \quad \frac{d\theta}{dt} = -H(\Phi_d) k_d^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.18)$$

где s_ω - "напряжение спекания" (German, 1985).

Напряжение спекания и свободная энергия пор должны быть неотрицательными. Тогда напряжение спекания будет обеспечивать уплотнение материала при спекании. Напряжение спекания не подчинено условиям равновесия и не является реальным напряжением. Оно представляет нетермомеханические капиллярные силы, действующие на поверхности пор и вызывающие необратимое сжатие среды за счет "схлопывания" пор, что и именуется спеканием.

Соотношения (2.18) представляют модифицированные определяющие соотношения для упругопластической среды, которые могут быть использованы для моделирования континуального разрушения и спекания. Предел текучести и модули упругости при этом являются функциями поврежденности и пористости, которые стремятся к нулю, если $\theta \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \omega_{max}$ и к их значениям для плотного материала при $\theta = 0$, $\omega = 0$.

Оба структурных параметра: и поврежденность, и пористость подчинены эволюционным определяющим уравнениям. Пористость непосредственно связана с объемной пластической деформацией и меняется под влиянием внешнего давления ("холодное прессование") или под действием внутреннего "напряжения" спекания ("горячее спекание").

Поврежденность изменяется при условии, что критерий разрушения $\Phi_d(\pi^{(1)}) \geq 0$ выполнен.

Выведенные соотношения для спекания согласуются с вариантами соотношений из работ (German, 1985; Mehrabadi, 1992), постулированными на основании экспериментальных данных. Здесь получен общий вид этих соотношений, предсказываемый термодинамикой. Если вспомнить, что законы термодинамики как раз и обобщают опыт наблюдений за природными процессами, то хорошее согласование уравнений, полученных упомянутыми разными путями, является закономерным.

2.9 Подвижные адаптивные координаты

Рассмотрим уравнения для подвижных адаптивных координат или, в другой терминологии, уравнения для генерации адаптивных сеток методом отображений.

Различают адаптацию к переменной геометрии области решения (геометрическая адаптация) и к поведению решения для минимизации ошибок сеточной аппроксимации (динамическая адаптация). Уравнения генерации сеток и управления (координатной) сеткой описывают взаимно однозначные отображения между образцами области решения в подвижной и актуальной конфигурациях.

Эволюция сеточных уравнений и соответствующих алгоритмов подробно рассматривается в свежих монографиях Гильманова (2001), Иваненко (1997), Лисейкина (2001), в справочнике по генерации сеток (Tompson & Soni, eds., 1998), из которых видно, что разработка сеточных алгоритмов направляется желанием обеспечить хорошее качество расчетных сеток в областях сложной формы. Первые алгоритмы построения сеток с помощью отображений стартовали в шестидесятые годы 20-го века с преобразований, описываемых уравнениями Лапласа (гармонические, конформные отображения), затем стали опираться на обращенные нелинейные уравнения Лапласа (квазиконформные отображения) и в настоящее время уравнения генерации сеток (геометрической адаптации) все больше начинают напоминать уравне-

ния нелинейной теории упругости. И это естественно, поскольку в число требований к сеточным отображениям стали влючаться не только минимальные требования существования и единственности, но также обеспечение положительности якобиана отображения, инвариантность уравнений по отношению к ортогональным преобразованиям (поворотам) конфигураций, восстановление начальной сетки при восстановлении формы границ (обратимость деформаций сетки), контроль формы ячеек сетки. Дополнительное требование адаптации сеток к решению подразумевает сгущение сетки в зонах больших градиентов решения для уменьшения ошибок аппроксимации, которые пропорциональны (для методов первого порядка точности) произведению нормы градиентов на характерный размер ячейки сетки.

В работах 70-80 годов, из которых отметим работы Лисейкина (1977), Ковени и Яненко (1981), было выработано представление о координатной среде как о сплошной, обратимо деформируемой, сопротивляющейся сдвигу и объемной деформации, сгущающейся в области больших градиентов решения. Специалист по теории упругости заметит, что приведенный выше набор свойств координатной среды в точности соответствует описанию нелинейной термоупругой среды. Поэтому в нашей работе (Бураго, 1984) и было предложено применять уравнения теории термоупругости в качестве уравнений генерации адаптивных сеток. Было показано, что использующиеся для этих целей уравнения других авторов являются частными случаями уравнений теории термоупругости. Наши уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\sigma}$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\varepsilon}} \tilde{\Psi}$$

где $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\nabla} \mathbf{y})$ - энергия деформаций координатной среды, являющаяся инвариантной положительной функцией от деформаций координатной среды $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\nabla} \mathbf{x}^T \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{x} - \mathbf{I})/2$ и градиентов

решения $\tilde{\nabla} \mathbf{y}$, $\tilde{\nabla}$ - оператор пространственного дифференцирования в подвижной конфигурации $\{\tilde{x}\}$. В отличие от уравнений динамической термоупругости в левой части уравнений генерации адаптивных сеток записаны не вторые временные производные координат (ускорения), а первые (скорости). Тем самым изменен тип уравнений: вместо гиперболического в случае реальной термоупругости уравнения получили параболический тип, чтобы избежать нежелательных волновых процессов в координатной среде. Запаздывание в адаптации будет тем меньше, чем выше энергия координатной среды $\tilde{\Psi}$ (с усилением эллиптического оператора правой части) и меньше влияние нестационарного члена левой части.

Отметим, что недавно были предложены уравнения, в которых управление адаптацией осуществляется через метрику отображения и адаптационная функция (здесь, "антитемпература") является тензором второго ранга. Описание таких уравнений и алгоритмов дано в работах Иваненко (2000) и Гаранжи (2000).

В нашей работе за управление подвижными координатами отвечает дополнительный дифференциальный член, с помощью которого нелинейная термоупругость описывает эффект температурной объемной деформации. В расчетах применялась модель изотропной подвижно-координатной среды, определяемая следующей функцией энергии деформаций, полностью аналогичной функции свободной энергии из раздела про термоупругие среды 2.8.2:

$$\tilde{\Psi} = K_*(\tilde{\varepsilon} : \mathbf{I})^2/2 + K_* \det(\tilde{\nabla} \mathbf{x}) N(\tilde{\nabla} \mathbf{y} : \tilde{\nabla} \mathbf{y}) + \mu_* \tilde{\varepsilon} : \tilde{\varepsilon}$$

где N - некоторая положительная функция. Хорошие результаты получаются при выборе в качестве N корня 4-й или 8-й степени. Коэффициенты K_* и μ_* играют роль коэффициентов упругости для координатной среды, а полунорма решения N - роль "антитемпературы": координатная среда сжимается с ростом N .

Наличие множителя - якобиана в члене с "антитемпературой", фигурирующего и в исходных соотношениях термоупру-

гости 2.8.2, обеспечивает положительность якобиана (невыврожденность ячеек сетки). Это свойство относится к числу важнейших в списке ожидаемых свойств сеточных уравнений. При стремлении объема ячейки к нулю влияние члена с антитемпературой, вызывающего сжатие, также исчезает. Более того, если в квазиньютоновских итерациях по нелинейности стартовать с некорректной сетки, содержащей вырожденные ячейки отрицательного объема, то член с антитемпературой быстро исправит такую сетку, поскольку будет обеспечивать всестороннее расширение в таких ячейках (из-за отрицательности якобиана он также поменяет знак и вместо сжатия будет работать на расширение). К преимуществам предложенных уравнений можно также отнести то, что уравнения термоупругости не нуждаются в регуляризации, поскольку не содержат якобиана в знаменателе, а соответствующие алгоритмы генерации адаптивных сеток имеют ясный термомеханический смысл.

2.10 Постановка начально-краевой задачи

Система уравнений термомеханики, применяемая в настоящей работе,

имеет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (2.20)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = D_* + \rho r + \nabla \cdot (k_T \nabla T) \quad (2.21)$$

$$\frac{d\varepsilon'_{\mathbf{p}}}{dt} = \lambda_p \sigma' - \varepsilon'_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \cdot \varepsilon'_{\mathbf{p}} \quad (2.22)$$

$$\frac{da_p}{dt} = \lambda_p \sigma' : \sigma' \quad (2.23)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = H(\theta) \lambda_\theta \quad (2.24)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = H(\omega)\lambda_\omega \quad (2.25)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt} = \nabla \cdot (k_{c\alpha} \nabla C_\alpha) \quad (2.26)$$

$$\frac{d\mathbf{x}^o}{dt} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} \quad (2.28)$$

где последовательно записаны: уравнение неразрывности (2.19), уравнения движения (2.20), уравнение энергии (2.21), уравнения пластического течения (2.22), уравнение пластической работы (2.23), уравнение поврежденности (2.24), уравнение спекания (2.25), уравнение диффузии примесей (2.26), уравнение непрерывного маркера (2.27), уравнение подвижных координат (2.28).

Замечание 1: Вывод уравнения диффузии примесей специально не рассматривался, поскольку никаких особенностей оно не содержит. Каждая примесь характеризуется своей концентрацией C_α , $\alpha = 1, 2, \dots$, определяемой как отношение плотности примеси к плотности основной среды, и своим законом сохранения, имеющим вид стандартного уравнения конвекции-диффузии (возможно с источниковым членом). Концентрации и их градиенты вводятся в набор параметров состояния, а описывающие диффузию примеси члены с градиентами концентрации вводятся в выражение для скорости диссипации. В результате выражения для диффузионных потоков примеси получаются точно так же, как выражения для потоков тепла, поэтому выкладки опущены.

Замечание 2: Уравнение сохранения энергии (2.21), выражающее первый закон термодинамики, записано здесь в форме уравнения для температуры путем исключения внутренней энергии с помощью соответствующего определяющего соотношения. В уравнении (2.21) введены следующие величины: $c_v = -T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2}$ - теплоемкость при постоянном объеме и D_* - приток тепла,

вычисляемый по формуле

$$D_* = (\sigma' - \mathbf{T} \frac{\partial \sigma'}{\partial \mathbf{T}}) : \mathbf{e}'_p + \rho (\mathbf{T} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \mathbf{T}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{T} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{T}} : \mathbf{e}$$

Материальные временные производные имеют вид $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla$, где \mathbf{w} - скорость подвижных координат, равная \mathbf{u} для лагранжева случая и нулю для эйлерава случая. В соответствии с этим выражением соотношение $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}$ является результатом материального дифференцирования актуального радиус-вектора.

В области решения

$$\{\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{V}, t \geq 0\}$$

требуется решить систему уравнений (2.19)-(2.28), дополненную недифференциальными по времени кинематическими соотношениями (2.4), соотношениями связи (2.6) и определяющими соотношениями из разделов 2.7-2.10, отвечающими заданному типу сплошной среды. Решение должно удовлетворять начальным условиям

$$t = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{V} : \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (2.29)$$

и граничным условиям:

$$t \geq 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_A \subset \tilde{S} : \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) \quad (2.30)$$

$$t \geq 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}_B = \tilde{S} \setminus \tilde{S}_A, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_n^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) \quad (2.31)$$

В выражениях (2.30)-(2.31) функции правых частей помечены звездочками и являются заданными. Набор основных искомым функций

$$A = (\rho, \mathbf{u}, T, \varepsilon_p, a_p, \theta, \omega, C_\alpha, \overset{o}{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$$

содержит те искомые функции, которые необходимы для вычисления всех остальных искомым функций в данный момент времени, не привлекая операции дифференцирования по времени. Плотность включена в число основных переменных для единообразия описания задач независимо от того, фигурирует ли

начальная конфигурация в постановке задач (структурированные среды) или нет (классическая гидрогазодинамика).

Величины характеризуют потоки величин \mathbf{A} , обусловленные диффузией и межмолекулярными силами:

$$\mathbf{B} = (0, \sigma, k_T \nabla T, 0, 0, 0, 0, k_{c\alpha} \nabla C_\alpha, 0, \tilde{\sigma})$$

Заметим, что при численном решении диффузионные потоки \mathbf{B} появляются во всех уравнениях за счет схемной или искусственной вязкости.

Для корректности начально-краевой задачи (2.19)-(2.31) определяющие соотношения и начально-краевые условия должны удовлетворять дополнительным ограничениям, которые зависят от класса задач:

1) определяющие соотношения должны обеспечивать эллиптичность пространственных дифференциальных операторов правых частей при наличии потоковых членов \mathbf{B} . Это требование согласуется с законами термодинамики и отражает необходимое условие устойчивости задачи по Адамару. В нестационарных задачах это ограничение обеспечивает параболичность уравнений для вязких сред и гиперболичность уравнений для упругопластических сред и невязкого газа;

2) для стационарных задач ($\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$) граничные условия для уравнений с ненулевыми потоковыми членами \mathbf{B} должны быть консервативными ("самоуравновешенными"). Это ограничение выражает соответствующий данному уравнению закон сохранения. В случае уравнений равновесия деформируемых тел для корректности квазистатической задачи необходим налагаемый граничными условиями запрет смещений и поворотов тела как жесткого целого.

3) на входных границах, ($(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} < 0$), через которые сплошная среда втекает в область решения, должны быть заданы значения всех основных искомым величин для случая сверхзвукового потока и "смягченные" граничные условия в случае дозвукового потока (Роуч, 1980; Федорченко, 1982), то есть, например, в этом

случае одновременное задание давления и нормальной скорости на одной и той же границе переопределяет краевую задачу.

4) на выходных или "жидких" границах, $((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} > 0)$, должны ставится "мягкие" условия, то есть условия продолжения (экстраполяции) решения за границы области решения (например, равенство нулю первых или вторых нормальных производных от основных искомым функций). Родственный случай граничных условий представляют неотражающие граничные условия в задачах о распространении возмущений.

Важные случаи граничных условий, такие как контактные граничные условия, условия на межфазных границах и условия на подвижных свободных границах, а также другие особенности постановок задач, обсуждаются далее при рассмотрении методов решения конкретных типов задач.

Глава 3

Численные алгоритмы

В настоящей главе дано описание математических методов решения нелинейных задач МСС, реализованных в пакете программ АСТРА. Описаны применяемые алгоритмы построения сеток и алгоритмы управления адаптивными эйлерово-лагранжевыми сетками. Рассмотрены варианты эйлерово-лагранжевых явных и неявных схем для сжимаемых и несжимаемых сред. Описаны используемые приемы расчета узких зон больших градиентов решения типа ударных волн, пограничных слоев, контактных разрывов, свободных и межфазных границ.

Для расчета сложных движений сплошных сред при наличии возникающих и исчезающих множественных свободных границ в областях решения переменной связности описаны алгоритмы методов непрерывных и дискретных маркеров, представляющие обобщение метода фиктивных областей.

3.1 Алгоритмы генерации сеток.

Первое, что требуется для того, чтобы приступить к численному решению сформулированной в главе 1 общей задачи МСС сеточными методами, это сетка. Алгоритм построения сетки должен сгенерировать в области решения узловые точки, отделить граничные точки от внутренних и установить отношения соседства (определить топологию сетки) путем определения шаблонов (указания соседей для каждого узла) или путем определения номеров узлов в ячейках (элементах). После этого можно вводить аппроксимации решения в соответствии с каким-либо сеточным методом.

Ниже приводится сводка алгоритмов, применяемых в программе АСТРА для построения сеток и управления их движением. Безусловно этот набор алгоритмов не дает полного решения всех проблем генерации сеток и даже далеко не исчерпывает их многообразия. Однако для многих практических задач он вполне эффективен.

2D алгоритм построения нерегулярных треугольных сеток при заданном расположении узлов сетки. Этот алгоритм применяется в тех случаях, когда по каким-либо причинам важно, чтобы все узлы были бы на predetermined местах. Такая необходимость возникает, во-первых, при проведении тестов и, во-вторых, при перестройке сетки. Исходная информация о сетке содержит координаты узлов. Выходная информация содержит номера узлов в граничных и внутренних ячейках.

2D алгоритм квадратичных отображений. Этот алгоритм строит криволинейную сетку в подобласти, отображаемой на квадрат и имеющей границы в виде парабол. Исходная информация состоит из координат восьми граничных точек криволинейного "квадрата" (по три на каждую сторону- параболу). На выходе определяются координаты узлов и номера узлов в граничных и внутренних ячейках. Алгоритм описан во многих учебниках по методу конечных элементов (см. Сегерлинд, 1979).

2D алгоритм нарезания пирога. Этот алгоритм предназначен для построения нерегулярных треугольных сеток. Он автоматически генерирует узлы, и ячейки в 2D областях произвольной формы и связности. Исходной информацией служит табличное задание граничных контуров и желаемый размер ячеек сетки. На выходе - координаты узлов и номера узлов в граничных и внутренних ячейках.

2D алгоритм квазигармонических барьерных отображений. Этот алгоритм (Иваненко, 1997) применяется для генерации регулярных криволинейных сеток в областях сложной формы. Исходная информация содержит табличное задание четырех граничных контуров подобласти, отображаемой на параметриче-

ский квадрат, а также желаемое число ячеек по двум координатным направлениям. На выходе определяются координаты узлов и номера узлов в граничных и внутренних ячейках.

2D алгоритм измельчения и сшивания подсеток. Этот алгоритм используется после того, как предыдущие алгоритмы построили сетки в подобластях, мельчит ячейки до заданного размера и объединяет их в единую сетку. Согласованность сеток на границах подобластей не требуется и достигается автоматически при объединении подсеток за счет локальной перестройки сетки у границ.

3D алгоритм "трансляции" для построения нерегулярных сеток. Этот алгоритм преобразует плоские двумерные сетки в трехмерные путем пошагового перемещения с поворотом ("трансляции") плоской подобласти вдоль заданной направляющей.

3D алгоритм для квазирегулярных ijk -сеток. Этот алгоритм применяется для многосвязных трехмерных подобластей общего вида. Исходной является равномерная окаймляющая сетка, из которой удаляются не принадлежащие области решения ячейки путем введения массива-признака рабочей (1) или нерабочей (0) ячейки. Адаптация сетки к области решения в этом способе описания геометрии реализуется грубо (граница-лесенка). Однако, для многих задач, в которых пограничные эффекты не очень важны, такой подход вполне оправдан (например, для задач о распространении загрязнений в окружающей среде). Кроме того такие сетки служат основой для реализации методов дискретных и непрерывных маркеров.

Алгоритмы для расчета подвижных геометрически адаптивных сеток. Эти алгоритмы служат для расчета сеток при наличии подвижных лагранжевых внутренних и внешних границ. Внутренние узлы таких эйлерово-лагранжевых сеток движутся независимо от движения среды так, чтобы не допустить больших искажений ячеек и обеспечить равномерное распределение узлов. Такие сетки позволяют избежать появления

слишком малых ячеек, вызывающих катастрофическое для явных схем уменьшение временного шага, и обеспечить расчет на больших временах при разумных затратах вычислений. В первом таком алгоритме сетка рассчитывается по неявной схеме методом квазигармонических отображений (Иваненко, 1997), а во втором, более простом алгоритме каждый внутренний узел смещается в геометрический центр по отношению к его соседям.

Алгоритм адаптации подвижных сеток к решению. Этот алгоритм смещает узлы сетки так, чтобы сгустить их в зонах больших градиентов решения в окрестности ударных волн и пограничных слоев для уменьшения погрешности аппроксимации и ускорения сходимости численного решения. Этот алгоритм реализован в варианте, предложенном в работах (Catherall, 1991) и (Marchent, Weatherill, 1993) и, более эффективно, в варианте работы (Бураго, 1984) с помощью уравнений термоупругости.

3.2 Лагранжевы схемы МКЭ

Ниже рассматриваются явные и неявные лагранжевы схемы МКЭ для расчета квазистатических или динамических процессов деформации упругопластических тел.

3.2.1 Лагранжева формулировка.

Основные уравнения в переменных Эйлера имеют вид:

$$\int_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} m \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} dV = \int_{S_p} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \nabla \overset{o}{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}), \quad \varepsilon_1 = (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I})/3,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_1 \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p), \quad \rho = \rho_0 \det(\mathbf{F}^{-1}), \quad p = p_1(\rho, T),$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}', \quad \mathbf{L} = \nabla \mathbf{u}, \quad \mathbf{e} = 0.5(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{e}_p = \lambda_p \boldsymbol{\sigma}',$$

(3.1)

$$\rho \frac{dU}{dt} = \sigma : \mathbf{e} , \quad \lambda_p = H(\sigma' : \sigma' - k_p^2) H(\sigma' : \mathbf{e}) \sigma' : \mathbf{e} k_p^{-2}$$

Система уравнений (3.1) содержит: вариационное уравнение движения, уравнение лагранжевых траекторий, определение дисторсии \mathbf{F} , тензора конечных деформаций Альманси, средней деформации, девиатора деформаций и, далее, закон упругости для девиаторных составляющих тензора напряжений Коши, закон сохранения массы, закон сжимаемости, разложение тензора напряжений Коши на шаровую и девиаторную части, определение тензора градиентов скоростей, тензора скоростей деформаций, закон пластического течения и уравнение для внутренней энергии в адиабатическом приближении. Обозначения традиционны и пояснены ранее в разд. 2. Отметим, что ∇ - оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации, χ - функция Хевисайда, k_p - предел текучести, μ - модуль упругости сдвига.

При постановке начально-краевых задач система уравнений (3.1) дополняется начальными и граничными условиями. Начальные условия имеют вид

$$t = 0 : \quad \mathbf{x} = \overset{o}{\mathbf{x}} , \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 , \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{p0} , \quad U = U_0 \quad (3.2)$$

Кинематические граничные условия имеют вид

$$\mathbf{x} \in S_u \subset S : \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_* \quad (3.3)$$

Отметим, что силовые граничные условия

$$\mathbf{x} \in S_p = S \setminus S_u : \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}_* \quad (3.4)$$

являются следствиями вариационных уравнений движения (3.1) и называются поэтому естественными граничными условиями.

Область решения V в общем случае состоит из нескольких, возможно разнесенных в пространстве, подобластей, представляющих взаимодействующие тела. На части поверхности $S_p^* \subset S_p$ заданы поверхностные нагрузки \mathbf{P}_* , характеризующие взаимодействие с теми внешними телами, которые не фигурируют в условиях задачи.

На остальной, заранее неизвестной, части поверхности $S_c = S_p \setminus S_p^*$, называемой поверхностью контакта, нагрузки P_* обусловлены взаимодействием рассматриваемых тел между собой. Эта поверхность контакта $\overset{o}{S}_c$ определяется как множество всех точек $\overset{o}{\mathbf{x}} \in \overset{o}{S}$ таких, что

$$\forall \overset{o}{\mathbf{x}}^+ \in \overset{o}{S}_c \exists \overset{o}{\mathbf{x}}^- \in \overset{o}{S}_c \mid \overset{o}{\mathbf{x}}^+ \neq \overset{o}{\mathbf{x}}^- \wedge \mathbf{x}(\overset{o}{\mathbf{x}}^+, t) = \mathbf{x}(\overset{o}{\mathbf{x}}^-, t)$$

и

$$\overset{o}{S}_c = \overset{o}{S}_c^+ \cup \overset{o}{S}_c^- , \quad \overset{o}{S}_c^+ \cap \overset{o}{S}_c^- = \emptyset$$

Попросту говоря, контактная граница образована теми различными материальными точками, актуальные положения которых совпадают в данный момент времени.

Нагрузки \mathbf{P} и скорости \mathbf{u} на поверхности контакта $\overset{o}{S}_c$ определяются условиями

$$(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = 0 , \quad \mathbf{P}^+ = -\mathbf{P}^- ,$$

$$P_{\tau\alpha} = \mathbf{P}^+ \cdot \tau_\alpha^+ = \tilde{f}(P_n, (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \tau_\alpha , \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.5)$$

выражающими непрерывность нормальной составляющей скорости, третий закон Ньютона и закон трения, в которых надо принимать во внимание следующие соотношения для характеристик контактирующих границ:

$$\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^- , \quad \tau_\alpha^+ = -\tau_\alpha^- , \quad \alpha = 1, 2 , \quad P_n = \mathbf{P}^+ \cdot \mathbf{n}^+$$

Здесь \mathbf{n} и τ_α - орты нормали и касательных к поверхности S в актуальной конфигурации.

Задача состоит в том, чтобы в области

$$\{(\overset{o}{\mathbf{x}}, t) : \overset{o}{\mathbf{x}} \text{ in } \overset{o}{V} , \quad t \geq 0\}$$

решить систему уравнений (3.1) при условиях (3.2)-(3.5).

3.2.2 Пространственные КЭ-аппроксимации.

В области V введем сетку элементов, состоящую из тетраэдров, призм или параллелепипедов в трехмерном случае и из треугольников и четырехугольников в двумерном случае. Пусть \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, N_v$) - координаты узлов; $C(k, l)$ ($k = 1, 2, \dots, N_c; l = 1, 2, \dots, M_c$) - номера узлов в объемных элементах, $B(k, l)$ ($k = 1, 2, \dots, N_b; l = 1, 2, \dots, M_b$) - номера узлов в граничных (поверхностных) элементах. Пусть обход границ поверхностных элементов совершается по часовой стрелке для внешнего наблюдателя. На временном слое n введем обозначения: \mathbf{u}_i^n , \mathbf{x}_i^n - скорости и координаты узлов, $[\varepsilon]_{pk}^n$, $[U]_k^n$ - значения пластических деформаций и внутренней энергии в центрах ячеек. Обозначим через ω множество номеров узлов сетки, через ω_u - множество номеров граничных узлов, в которых заданы кинематические условия, через Ω - множество номеров элементов. Используем обычную линейную и билинейную аппроксимацию координат и скоростей на сетке (см., например, Сегерлинд [193]). Термодинамические параметры состояния типа деформаций и внутренней энергии аппроксимируем кусочно постоянными функциями со значениями в центрах элементов. Интегралы в вариационных уравнениях (3.1) вычислим с помощью квадратурных формул прямоугольников. Точки численного интегрирования для интегралов по области V от виртуальной работы сил инерции будем брать в узлах сетки, для интеграла виртуальной работы напряжений - в центрах элементов. Для интегралов по поверхности точки численного интегрирования возьмем в центрах граничных элементов.

3.2.3 Схема крест

Сначала рассмотрим применение явной консервативной схемы типа "крест" для интегрирования по времени. Описание сходных схем для газовой динамики имеется в книге Самарского и Попова [192] и для задач упругопластичности в статье Уилкинса [200]. Настоящая схема отличается многими мелкими деталями,

которые улучшили такие важные свойства схемы как точность и робастность (эффективность в широком диапазоне входных данных).

В эйлеровых переменных в рамках лагранжева подхода алгоритм имеет вид:

$$\begin{aligned}
M_i(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \gamma_i^n - (1 - \gamma_i^n) \tilde{\mathbf{u}}_i^n) &= \mathbf{F}_i^n \Delta t_n, \quad i \in \omega \setminus \omega_u \\
\mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_{*i}^{n+1}, \quad i \in \omega_u \\
[\varepsilon_p]_k^{n+1} &= [\varepsilon_p]_k^n + (\lambda_k^{n+1} [\sigma']_k^n - [\varepsilon_p]_k^n \cdot [\mathbf{L}]_k^{n+1} - \\
&\quad - [\mathbf{L}^T]_k^{n+1} \cdot [\varepsilon_p]_k^n) \Delta t_n, \quad k \in \Omega \\
[U]_k^{n+1} &= [U]_k^n + [\sigma']_k^n : [\mathbf{L}]_k^{n+1} \Delta t_n / [\rho]_k^n, \quad k \in \Omega \\
[a_p]_k^{n+1} &= [a_p]_k^n + \lambda_k^{n+1} [\sigma']_k^n : [\sigma']_k^{n+1} \Delta t_n, \quad k \in \Omega \\
\mathbf{x}_i^{n+1} &= \mathbf{x}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1} \Delta t_n, \quad i \in \omega
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где записаны дискретные аналоги уравнений движения, граничных условий для скоростей, закона пластического течения, уравнений лагранжевых траекторий, уравнения внутренней энергии и уравнения пластической работы.

Используемая в уравнении движения осредненная скорость на старом временном слое n вычисляется так:

$$i \in \omega, j \in \omega_i : \tilde{\mathbf{u}}_i^n = 0.5(\max_{j \in \omega_i} \mathbf{u}_j^n + \min_{j \in \omega_i} \mathbf{u}_j^n) \tag{3.8}$$

где ω_i - номера узлов соседей узла i . Испытывались и другие способы осреднения, при которых осредненная величина скорости $\tilde{\mathbf{u}}_i^n$ определялась как среднее арифметическое среди скоростей соседних узлов или как среднее с весом (осреднение "по площадям"). Принятый способ в меньшей степени зависит от конкретного шаблона в окрестности узла и от того, является ли узел внутренним или граничным.

Параметр гибридности задается в виде

$$\gamma_i^n = \min\{1, \gamma_0 + \kappa_0 |\tilde{\mathbf{u}}_i^n - \mathbf{u}_i^n|\} \tag{3.9}$$

где модуль разности $|\tilde{\mathbf{u}}_i^n - \mathbf{u}_i^n|$ дает оценку второй производной от скоростей по пространственным переменным в окрестности узла i , коэффициенты γ_0 и κ_0 принимались равными $\gamma_0 = u_s/c$ и $\kappa_0 = (0.2u_s)^{-1}$, где $u_s = \max_{i \in \omega} \mathbf{u}_i^n - \min_{i \in \omega} \mathbf{u}_i^n$ - максимум относительной скорости удара, $c = \sqrt{dP/d\rho + 4/3\mu/\rho}$ - скорость звука. Параметр γ_k^n включает лавсову вязкость в окрестности ударных волн и увеличивает ее (не свыше единицы) с ростом скорости удара.

Узловые массы M_i вычисляются один раз перед началом расчета:

$$M_i = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{l=1}^{M_c} [V_k^o] [\rho_k^o] M_c^{-1} \tilde{H}(i - C(k, l)), \quad i \in \omega \quad (3.7)$$

где V_k^o - начальный объем элемента, M_c - число узлов в элементе, N_c - число элементов, функция \tilde{H} , равная единице для нулевого значения аргумента и нулю в противном случае, указывает адрес рассылки вкладов от массы элемента в приузловые массы.

Для определения пластических деформаций, пластической работы и внутренней энергии на новом временном слое в каждом конечном элементе k делается следующее:

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}^{-1}]_k^n &= \sum_{l=1}^{M_c} \nabla_{kl}^n \mathbf{x}_{C(k,l)}^o, \quad [\varepsilon]_k^n = 0.5(\mathbf{I} - [\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}]_k^n \cdot [\mathbf{F}^{-1}]_k^n) \\ [\varepsilon_1]_k^n &= \mathbf{I} : [\varepsilon]_k^n / 3, \quad [\varepsilon']_k^n = [\varepsilon]_k^n - [\varepsilon_1]_k^n \mathbf{I} \\ [\sigma']_k^n &= 2\mu([\varepsilon']_k^n - [\varepsilon_p]_k^n), \quad [\mathbf{L}]_k^{n+1} = \sum_{l=1}^{M_c} \nabla_{kl}^n \mathbf{u}_{C(k,l)}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\lambda_k^{n+1} = H([\sigma']_k^n : [\sigma']_k^n - [k_p^2]_k^n) H([\sigma']_k^n : [\mathbf{L}]_k^{n+1}) [\sigma']_k^n : [\mathbf{L}]_k^{n+1} [k_p^{-2}]_k^n$$

а далее применяются соответствующие формулы (3.6). Здесь векторы ∇_{kl}^n представляют дискретный оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации. Его определение для центров симплекс-элементов по методу конечных элементов (Сегерлинд [193]) совпадает с естественной аппроксимацией

производных (Уилкинс [200]). В случае пространственно двумерных задач имеем (\mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 - декартовы орты, x_1 и x_2 - соответствующие координаты):

$$\nabla_{kl}^n \cdot \mathbf{e}_1 = 0.5((x_2)_{C(k,l+1)}^n - (x_2)_{C(k,l-1)}^n)[V^{-1}]_k^n$$

$$\nabla_{kl}^n \cdot \mathbf{e}_2 = 0.5((x_1)_{C(k,l-1)}^n - (x_1)_{C(k,l+1)}^n)[V^{-1}]_k^n \quad (3.11)$$

где при $l = M_c$ полагаем $C(k, l + 1) = C(k, 1)$, а при $l = 1$ принимаем $C(k, l - 1) = C(k, M_c)$; $[V]_k^n$ - площадь k -й ячейки в актуальной конфигурации:

$$[V]_k^n = 0.5 \sum_{l=1}^{M_c} (x_1)_{C(k,l)}^n ((x_2)_{C(k,l-1)}^n - (x_2)_{C(k,l+1)}^n) \quad (3.12)$$

Рассмотрим вычисление узловых сил \mathbf{F}_i^n . Их составляющие без учета контактных усилий $\mathbf{F}^{(0)}_i^n$ определяются путем следующих операций:

$$\mathbf{F}^{(0)}_i^n = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{l=1}^{M_c} [\mathbf{g}_1]_{kl}^n \tilde{H}(i - C(k, l)) + \sum_{k=1}^{N_b} \sum_{l=1}^{M_b} [\mathbf{g}_2]_{kl}^n \tilde{H}(i - B(k, l)) \quad (3.13)$$

где вклады \mathbf{g}_1 в узловых силы от напряжений в элементах определяются так:

$$[\mathbf{F}^{-1}]_k^n = \sum_{l=1}^{M_c} \nabla_{kl}^n \overset{o}{\mathbf{x}}_{C(k,l)}^n, \quad [\varepsilon]_k^n = 0.5(\mathbf{I} - [\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}]_k^n \cdot [\mathbf{F}^{-1}]_k^n)$$

$$[\varepsilon_1]_k^n = \mathbf{I} : [\varepsilon]_k^n / 3, \quad [\varepsilon']_k^n = [\varepsilon]_k^n - [\varepsilon_1]_k^n \mathbf{I}$$

$$[\tilde{\sigma}']_k^n = 2\mu([\varepsilon']_k^n - [\varepsilon_p]_k^n), \quad [\sigma']_k^n = [k_p]_k^n ([\tilde{\sigma}']_k^n : [\tilde{\sigma}']_k^n)^{-1/2} \quad (3.14)$$

$$[\varepsilon_p]_k^n = [\varepsilon']_k^n - [\sigma']_k^n / (2\mu), \quad [\rho]_k^n = [\rho]_k^0 \det([\mathbf{F}^{-1}]_k^n), \quad [p]_k^n = p([\rho]_k^n, [U]_k^n)$$

$$[\sigma]_k^n = -[p]_k^n \mathbf{I} + [\sigma']_k^n, \quad [V]_k^n = [V]_k^0 [\rho]_k^0 / [\rho]_k^n, \quad [\mathbf{g}_1]_{kl}^n = -[V]_k^n [\sigma]_k^n \cdot \nabla_{kl}^n$$

шестая и седьмая формулы здесь производят коррекцию напряжений и пластических деформаций по Уилкинсу [200]. Вклады \mathbf{g}_2

в узловые силы от внешних поверхностных нагрузок определяются так:

$$[\mathbf{g}_2]_{kl}^n = M_b^{-1} [P]_k^n S_k^n, \quad (l = 1, 2, \dots, M_b) \quad (3.15)$$

где S_k^n - площадь граничного элемента k , определяемого узлами $V(k,l)$.

Порядок расчета по рассмотренной схеме типа "крест" таков. На первом этапе (предиктор уравнений движения) проводится без учета контакта. На втором этапе (корректор уравнений движения) с помощью контактного алгоритма (см. следующую главу) определяются зона контакта, контактные усилия и новые значения скоростей и координат на слое $n+1$. На третьем этапе определяются новые значения пластических деформаций, практической работы и температуры.

Здесь схема Уилкинса [200] распространена на нерегулярные сетки. Изменен выбор основных переменных (пластические деформации вместо напряжений). Учтены эффекты упрочнения и термоэффекты. Изменен регуляризатор решения в окрестности ударных волн (лаксонская вязкость вместо комбинации линейной и квадратичной тензорной явной искусственной вязкости). Построен более точный алгоритм расчета контактных границ, описываемый далее.

Применение пластических деформаций вместо напряжений в качестве основных искомым функций дает лучшее описание эффектов упругости материала. Причина этого в том, что при чисто упругих деформациях в алгоритме, изложенном здесь, используется гиперупругое описание свойств среды (недифференциальное по времени), что обеспечивает запоминание средой своей начальной конфигурации. При использовании же напряжений как основных переменных среда является гипопругой (продифференцированные по времени законы упругости). В последнем случае из-за накопления погрешностей численного интегрирования по времени расчет упругих соударений содержит дефекты: численная модель упругого тела не восстанавливает своей формы после

упругого удара и колеблется возле новой искаженной конфигурации (из-за счетных ошибок возникают остаточные деформации). Такие ошибки искажают решение и для неупругого удара.

Применение лаксовой вязкости в окрестности ударных волн позволило повысить надежность алгоритма, исключить полностью такие неприятные счетные эффекты, как выворачивание лагранжевых ячеек, пилообразное поведение графиков решения, мелкомасштабную "шумовую" неустойчивость, а также позволило избавиться от необходимости в каждом новом расчете заново подбирать подходящие значения коэффициентов искусственной вязкости, что приходилось делать при использовании искусственной вязкости метода М. Уилкинса.

Учет эффектов упрочнения и термоэффектов не связан с какой-либо принципиальной переделкой алгоритма, а лишь является его пополнением, отвечающим потребности лучшего описания поведения сплошной среды.

Отметим, что в задачах динамики упругопластической среды диффузионные члены в уравнении притока тепла пренебрежимо малы, так как на коротких интервалах времени динамического процесса они не успевают проявить себя и процесс весьма близок к адиабатическому.

Используемые в методе элементарные операции обмена импульсом (3.13) консервативны, так как сумма обменных вкладов импульса на границах равна нулю:

$$\sum_{l=1}^{M_c} g_{kl}^n = 0$$

в силу аналогичного свойства дискретного оператора пространственного дифференцирования.

Наличие в методе неконсервативных операций осреднения скоростей (3.11), необходимых для подавления коротковолновых возмущений, делает необходимым контроль точности решения по импульсу. Кроме того, как обычно в схемах типа "крест" (Самарский, Попов [192], Уилкинс [200]), необходим

контроль балансных энергетических интегральных соотношений (контроль по энергии).

Сложность нелинейной системы уравнений подразд. 3.1 и нерегулярный характер шаблонов сетки не позволяют провести априорное исследование сходимости метода. Для одномерных задач в газодинамическом приближении схемы типа "крест" исследованы Самарским и Поповым [192]. Аналогичное исследование с использованием первых дифференциальных приближений по Хирту [181] и Шокину [211]) показывает, что метод устойчив при обычном ограничении по числу Куранта

$$\Delta t_n = \min_{k \in \Omega} \left(\frac{1}{c_k^n (\max_l (|\nabla_{kl}^n \cdot \mathbf{e}_1|, |\nabla_{kl}^n \cdot \mathbf{e}_2|))^{-1}} \right) \quad (3.16)$$

При больших скоростях удара (порядка скорости звука) вводилось дополнительное ограничение "по точности" на шаг во времени, выражающее требование достаточной малости приращений деформации

$$\Delta t_n \leq \Delta \varepsilon_{max} \left(\max_{k \in \Omega} ([\mathbf{e}]_k^n : [\mathbf{e}]_k^n)^{1/2} \right)^{-1} \quad (3.17)$$

где $\Delta \varepsilon_{max} = 0.1 \varepsilon_s$ - максимально допустимое приращение деформации на шаге по времени, ε_s - деформация, отвечающая пределу текучести.

3.2.4 Схема квазивторого порядка точности.

Данная схема для гиперболического уравнения переноса описана в книге Поттера [171]. В нашем случае схема имеет вид:

$$M_i(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) = ((1 + \epsilon_*)\mathbf{F}_i^n - \epsilon_*\mathbf{F}_i^n)\Delta t_n, \quad i \in \omega \setminus \omega_u$$

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_{*i}^{n+1}, \quad i \in \omega_u$$

$$[\varepsilon_p]_k^{n+1} = [\varepsilon_p]_k^n + (\lambda_k^{n+1}[\sigma']_k^n - [\varepsilon_p]_k^n \cdot [\mathbf{L}]_k^{n+1} - [\mathbf{L}^T]_k^{n+1} \cdot [\varepsilon_p]_k^n)\Delta t_n, \quad k \in \Omega$$

$$\begin{aligned}
[U]_k^{n+1} &= [U]_k^n + [\sigma']_k^n : [\mathbf{L}]_k^{n+1} \Delta t_n / [\rho]_k^n, \quad k \in \Omega & (3.18) \\
[a_p]_k^{n+1} &= [a_p]_k^n + \lambda_k^{n+1} [\sigma']_k^n : [\sigma']_k^{n+1} \Delta t_n, \quad k \in \Omega \\
\mathbf{x}_i^{n+1} &= \mathbf{x}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1} \Delta t_n, \quad i \in \omega
\end{aligned}$$

где $0.1 < \epsilon_* < 0.5$ - малое положительное число. Аналогом этой схемы интегрирования по времени для случая задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений является схема Адамса-Башфорта (трехслойная схема). Условия устойчивости для этой схемы, как показывает анализ Фурье для модельной задачи с уравнением переноса, являются вдвое более ограниченными, нежели условия Куранта (3.16). Для задач динамики упругопластической среды схема (3.18) впервые применена в настоящей работе.

3.2.5 Полностью консервативная схема.

Эта схема подробно обсуждается в книге Самарского и Попова [192] применительно к задачам газовой динамики в лагранжевых переменных (в случае подхода Лагранжа). В нашем случае она может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
M_i(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) &= \mathbf{F}_i^n \Delta t_n, \quad i \in \omega \setminus \omega_u \\
\mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_{*i}^{n+1}, \quad i \in \omega_u \\
[\varepsilon_p]_k^{n+1} &= [\varepsilon_p]_k^n + (\lambda_k^{n+1/2} [\sigma']_k^n - [\varepsilon_p]_k^n \cdot [\mathbf{L}]_k^{n+1/2} - \\
&\quad - [\mathbf{L}^T]_k^{n+1/2} \cdot [\varepsilon_p]_k^n) \Delta t_n, \quad k \in \Omega \\
[U]_k^{n+1} &= [U]_k^n + [\sigma']_k^n : [\mathbf{L}]_k^{n+1/2} \Delta t_n / [\rho]_k^n, \quad k \in \Omega & (3.19) \\
[a_p]_k^{n+1} &= [a_p]_k^n + \lambda_k^{n+1/2} [\sigma']_k^n : [\sigma']_k^{n+1} \Delta t_n, \quad k \in \Omega \\
\mathbf{x}_i^{n+1} &= \mathbf{x}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1/2} \Delta t_n, \quad i \in \omega
\end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$L_k^{n+1/2} = 0.5(L_k^n + L_k^{n+1}), \quad \mathbf{u}_i^{n+1/2} = 0.5(\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1}) \quad (3.20)$$

$$\lambda_k^{n+1/2} = 0.5(\lambda_k^n + \lambda_k^{n+1}) \quad (3.21)$$

Отметим, что в исходной форме схема (3.19) слабо неустойчива (см. Самарский и Попов [192]). Для устранения этого недостатка в расчете использовалась малая искусственная вязкость в виде тензора вязких напряжений:

$$\sigma_v = -p_v \mathbf{I} + \sigma'_v, \quad p_v = -K \nabla \cdot \mathbf{u} \Delta t / 2, \quad \sigma' = 2\mu \mathbf{e}' \Delta t / 2 \quad (3.22)$$

Устойчивость схемы при наличии вязкостных членов легко устанавливается из анализа первого дифференциального приближения, который и подсказывает вид членов (3.22).

Отметим, что при больших скоростях удара в схемы (3.18), (3.19) приходится вводить регуляризатор Лакса [458] (см. (3.6), первая строка, (3.8), (3.9)) для устранения осцилляций в зоне сильных ударных волн.

Схема (3.19) была получена в работах Самарского, Попова [192] с помощью интегро-интерполционного метода и в работах Тишкина [198] с помощью метода, основанного на прямой аппроксимации Гамильтониана. Хотя разностные уравнения в этих двух случаях во многом совпадают с рассмотренной здесь галеркинской вариационной версией, алгоритмы отличаются порядком проведения вычислений: вариационная версия экономнее, так как каждая ячейка сетки обрабатывается только один раз на шаге по времени. Это замечание об экономичности используемого подхода относится и к схемам (3.6), (3.18).

3.2.6 Квазиньютоновская неявная схема.

Простейшая неявная схема для задач упругопластичности, основанная на квазилинеаризации исходных нелинейных уравнений и использующая на каждом шаге по времени одну итерацию по методу Ньютона, имеет вид (обозначения, принятые для явных схем, здесь сохраняются):

$$M_i(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) / \Delta t_n = \mathbf{F}_i^n + (\mathbf{F}_t)_i^{n+1} \Delta t_n / 2, \quad i \in \omega \setminus \omega_u$$

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_{*i}^{n+1}, \quad i \in \omega_u$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_p)_k^{n+1} &= (\varepsilon_p)_k^n + ((\lambda)_k^{n+1}(\sigma')_k^n - (\varepsilon_p)_k^n \cdot (\mathbf{L})_k^{n+1} - \\
&\quad - (\mathbf{L}^T)_k^{n+1} \cdot (\varepsilon_p)_k^n) \Delta t_n, \quad k \in \Omega \\
(U)_k^{n+1} &= (U)_k^n + (\sigma')_k^n : (\mathbf{L})_k^{n+1} / (\rho)_k^n, \quad k \in \Omega \\
(a_p)_k^{n+1} &= (a_p)_k^n + \lambda_k^{n+1}(\sigma')_k^n : (\sigma')_k^{n+1} \Delta t_n, \quad k \in \Omega \\
\mathbf{x}_i^{n+1} &= \mathbf{x}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1} \Delta t_n, \quad i \in \omega
\end{aligned} \tag{3.23}$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathbf{L})_k^{n+1} &= \sum_{j=1}^{M_c} \nabla_{kj}^n \mathbf{u}_{C(k,j)}^{n+1} \\
\lambda_k^{n+1} &= H((\sigma')_k^n : (\sigma')_k^n - (k_p^2)_k^n) H((\sigma')_k^n : (\mathbf{L})_k^n) (\sigma')_k^n : (\mathbf{L})_k^{n+1} \\
(\mathbf{F}_t)_i^{n+1} &= \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{M_c} (\mathbf{g})_{kj}^{n+1} \tilde{H}(i - C(k, j)) + \sum_{k=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{M_b} (\mathbf{b})_{kj}^{n+1} \tilde{H}(i - B(k, j)) \\
\mathbf{g}_{kj}^{n+1} &= \Delta t_n V_k^n \nabla_{kj}^n \cdot (\mu((\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)_k^{n+1} - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I}(\mathbf{I} : \mathbf{L}_k^{n+1}) - 2\mu(\lambda)_k^{n+1}(\sigma')_k^n + \\
&\quad + I(\frac{dp}{d\rho})_k^n (\mathbf{I} : \mathbf{L}_k^{n+1}))
\end{aligned}$$

Схема (3.23) имеет почти второй порядок точности и безусловно устойчива. Шаг по времени, тем не менее, ограничен условием точности

$$\Delta t_n \leq \Delta \varepsilon_{max} \left(\max_{k \in \Omega} ([\mathbf{e}]_k^n : [\mathbf{e}]_k^n)^{1/2} \right)^{-1} \tag{3.24}$$

где $\Delta \varepsilon_{max}$ максимально допустимое приращение деформаций на шаге по времени. В практических расчетах - $\Delta \varepsilon_{max} \approx 0.1 \varepsilon_s$, (ε_s - деформация, отвечающая пределу текучести).

Порядок вычислений по схеме (3.22)-(3.23) почти таков же, как и для явных схем. В случае невной схемы приращения координат $\Delta \mathbf{x}_i^{n+1}$ (или скорости $\Delta \mathbf{u}_i^{n+1}$) определяются из решения

вспомогательной линеаризованной краевой задачи, которая в соответствии с принятыми аппроксимациями представлена *линейной системой алгебраических уравнений (СЛАУ)*:

$$M_i \frac{1}{\Delta t_n} \left(\frac{\Delta \mathbf{x}_i^{n+1}}{\Delta t_n} - \mathbf{u}_i^n \right) = \mathbf{F}_i^n + (\mathbf{F}_t)_i^{n+1} \Delta t_n / 2, \quad i \in \omega \setminus \omega_u$$

$$\Delta \mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{u}_{i*}^{n+1} \Delta t_n, \quad i \in \omega_u \quad (3.25)$$

где приращения узловых сил $\mathbf{F}_t^{n+1} \Delta t_n$, как видно из формул (3.22)-(3.23), являются линейными функциями приращений координат $\Delta \mathbf{x}_i^{n+1}$,

Разрешающая система уравнений (3.25) может быть записана кратко в стандартной форме

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (3.26)$$

где $\mathbf{y} = \{\Delta \mathbf{x}_i^{n+1}\}_{i=1}^{N_v}$, A - матрица "жесткости", \mathbf{b} - известный вектор правых частей; число неизвестных равно числу узловых компонентов перемещения или скорости (mN_v , где m - размерность исходной дифференциальной задачи). Традиционный МКЭ подразумевает явное формирование СЛАУ (3.26), а именно определение матрицы СЛАУ ("конденсация матрицы жесткости") с последующей борьбой с известными проблемами минимизации памяти, требуемой для хранения этой матрицы, оптимизации ее заполнения с целью получения ленточной структуры матрицы путем оптимальной перенумерации узлов сетки, далее следуют проблема построения алгоритма обращения матрицы, оптимизации обменов с внешней памятью и так далее.

Значительно более простой и эффективный способ решения задачи (3.25), не связанный с указанными выше "заморочками", основан на безматричной форме метода конечных элементов, предложенной Бураго и Кукуджановым [34, 43, 45] и рассматривается ниже.

3.2.7 Решение вспомогательных задач методом сопряженных градиентов.

Матрицу жесткости A специально формировать и запоминать не потребуется, если воспользоваться каким-либо итерационным методом решения, использующим невязки уравнений (3.26):

$$\mathbf{g} = A\mathbf{y} - \mathbf{b} = \left[M_i \frac{1}{\Delta t_n} \left(\frac{\Delta \mathbf{x}_i^{n+1}}{\Delta t_n} - \mathbf{u}_i^n \right) - \mathbf{F}_i^n - (\mathbf{F}_t)_i^{n+1} \Delta t_n / 2 \right]_{i=1}^{N_v} \quad (3.27)$$

Действительно, вычисление невязок \mathbf{g} для любого заданного "приближенного решения" \mathbf{y} можно выполнить, не используя явно матрицу жесткости. Пусть вектор приближенного решения $\mathbf{y} = (\Delta \mathbf{x}_i^{n+1})_{i=1}^{N_v}$ задан. Тогда по формулам (3.22) -(3.23) последовательно вычисляем величины:

$$\mathbf{L}_k^{n+1}, \lambda_k^{n+1}, \dots, \mathbf{F}_i^n, \mathbf{F}_t_i^{n+1}$$

Окончательно вектор невязки определяется непосредственно соотношениями (3.27).

Столь же просто определяется и однородная часть невязки ($\tilde{\mathbf{g}} = A\mathbf{y}$):

$$\mathbf{g} = A\mathbf{y} = \left[M_i \frac{1}{\Delta t_n} \left(\frac{\Delta \mathbf{x}_i^{n+1}}{\Delta t_n} \right) - (\mathbf{F}_t)_i^{n+1} \Delta t_n / 2 \right]_{i=1}^{N_v} \quad (3.28)$$

Ясно, что среди множества итерационных методов желательно выбрать наиболее эффективный и простой в реализации. На наш взгляд таким методом является метод сопряженных градиентов Хестенса и Штифеля [389]. Этот итерационный алгоритм стар-тует с некоторого начального приближения к искомому решению \mathbf{y}_0 :

$$\mathbf{g}_0 = A\mathbf{y}_0 - \mathbf{b}, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{g}_0 \quad (3.29)$$

и далее подразумевает следующие вычисления для итераций $s = 1, \dots$:

$$\alpha_s = (\mathbf{g}_{s-1} \cdot \mathbf{g}_{s-1}) / (A\mathbf{p}_{s-1} \cdot \mathbf{p}_{s-1})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_s &= \mathbf{y}_{s-1} - \alpha_s \mathbf{p}_{s-1} \\
\mathbf{g}_s &= \mathbf{g}_{s-1} - \alpha_s A \mathbf{p}_{s-1} \\
\beta_s &= (\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}_s) / (\mathbf{g}_{s-1} \cdot \mathbf{g}_{s-1}) \\
\mathbf{p}_s &= \mathbf{g}_s + \beta_s \mathbf{p}_{s-1}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где \mathbf{g} и \mathbf{p} - векторы градиента и сопряженного "направления поиска". Метод сопряженных градиентов вырабатывает базис \mathbf{p}_s , $s = 0, 1, \dots$, в конечномерном арифметическом пространстве векторов \mathbf{y} , поэтому теоретически число итераций, необходимых для отыскания решения, не превышает числа искомых компонентов вектора \mathbf{y} .

К сожалению, процесс (3.29)-(3.30) является весьма чувствительным к ошибкам округления и, поэтому, может быть неустойчивым.

Чтобы уменьшить влияния ошибок округления, неизбежных при вычислениях на ЭВМ, в работе Еремина и Марьяшкина [94] (там же дальнейшие ссылки) было предложено перед решением системы уравнений предварительно преобусловить ее путем домножения на приближенную обратную матрицу. Для преобусловленной системы уравнений интервал изменения значений собственных чисел матрицы уменьшается, число обусловленности (отношение максимального собственного числа матрицы к минимальному) приближается к единице, влияние ошибок округления становится пренебрежимо малым и сходимость итераций восстанавливается.

Пусть B^{-1} - приближенная обратная к A матрица. Обобщенный метод сопряженных градиентов имеет следующий вид: для $s = 0$ полагаются:

$$\mathbf{g}_0 = A\mathbf{y}_0 - \mathbf{b}, \quad \mathbf{h}_0 = B^{-1}\mathbf{g}_0, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{h}_0$$

и далее для $s = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\alpha_s = (\mathbf{g}_{s-1} \cdot \mathbf{h}_{s-1}) / (A\mathbf{p}_{s-1} \cdot \mathbf{p}_{s-1})$$

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{y}_{s-1} - \alpha_s \mathbf{p}_{s-1}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_s &= \mathbf{g}_{s-1} - \alpha_s A \mathbf{p}_{s-1} \\
\mathbf{h}_s &= B^{-1} \mathbf{g}_s \\
\beta_s &= (\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{h}_s) / (\mathbf{g}_{s-1} \cdot \mathbf{h}_{s-1}) \\
\mathbf{p}_s &= \mathbf{h}_s + \beta_s \mathbf{p}_{s-1}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

В качестве матрицы в настоящей работе использовалась диагональная матрица, составленная из диагональных элементов "упругой матрицы жесткости". Такая матрица B обращается тривиально один раз перед началом процесса (3.31). Операция $B^{-1} \mathbf{g}$ сводится к покомпонентному умножению двух векторов.

Критерием останова итерационного процесса (3.31) является следующий:

$$(\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{h}_s) < \varepsilon_*^2 \vee (\mathbf{p}_{s-1} \cdot \mathbf{p}_{s-1}) \alpha_s^2 < \varepsilon_*^2 \tag{3.32}$$

где ε_* - "машинное эpsilon" (Меткалф [154]), приблизительно равное 10^{-6} для четырехбайтовой арифметики.

В случае $(A \mathbf{p}_{s-1} \cdot \mathbf{p}_{s-1}) < \varepsilon_*^2$ полагалось, что метод дает отказ из-за того, что задача вырождена, а при невыполнении условий (3.32) для $i > 2N$ (N - число неизвестных) полагалось, что "задача плохо обусловлена". В этих случаях метод (3.31) не позволяет определить решение либо в силу неединственности решения (точка ветвления), либо в силу очень плохой обусловленности задачи. Практически же в таких редких ситуациях причины отказа заключались в ошибках в задании входных данных либо для свойств среды, либо для краевых условий.

3.2.8 Векторизация вычислительного процесса.

Описанные выше схемы хорошо поддаются векторизации, т.е. представляются в виде цепочки операций сложения, вычитания, умножения компонент векторов высокой размерности (работы Бураго и Кукуджанова [42, 43, 45]). Такие операции на многих современных ЭВМ выполняются на порядок быстрее обычных скалярных операций за счет конвейерной обработки данных, организуемой с помощью так называемых "векторных ускорителей

вычислений" (Родрига, 1986). В настоящей работе использовалась ЭВМ ЕС 1055М и система ускорения вычислений МАМО, описанная в работе Горбунова и Грязнова [66].

Имеются два "узких места*" в алгоритме вычислений, которые пришлось реализовать в скалярном варианте. Первое "узкое место" связано с вычислением градиентов скоростей или приращений перемещений:

$$\mathbf{L}_k^n \Delta t_n = \sum_{j=1}^{M_c} \nabla_{kj}^n \Delta \mathbf{x}_{C(k,j)}^n$$

Наличие сложного индекса $C(k, j)$ подразумевает выборку величин по списку, которая и производилась в скалярном цикле.

Второе "узкое место" связано с разностью вкладов в невязку \mathbf{g} или, что то же самое, в вектора \mathbf{F} и \mathbf{F}_t от элементов (разность невязок от элементов на узлы). Формула (3.23), реализующая эту операцию, также связана с работой со списком (k, j) (номера узлов в элементах) и реализована в скалярном цикле. Все остальные операции проводились с использованием векторных операций системы МАМО с векторами размерности N_2 (N_2 - число точек численного интегрирования) для вычисления невязок и с векторами размерности mN (число искоемых компонентов вектора \mathbf{g} , N - число узлов, m - число независимых пространственных переменных) для вычислений по методу сопряженных градиентов.

В результате использования системы МАМО затраты процессорного времени на задачах упругопластичности сократились в 3-4 раза. К сожалению срок использования данной (векторизованной) версии алгоритма решения был недолгим: через два года в 1989 компьютер ЕС 55М был демонтирован как устаревший.

По прошествии времени (около 15 лет) с тех пор как эти расчеты были выполнены, целесообразность описанной деятельности по ускорению вычислений представляется весьма спорной. Уже давно нет того компьютера (ЕС 55М) и векторного ускорителя (МАМО) и программы, составленные с большим трудом,

превратились в ненужный хлам. Выигрыш в быстродействии (в 3-4 раза) не стоил, как теперь кажется, затрат труда на его получение.

3.2.9 Применение итераций на вложенных сетках.

Использование последовательности вложенных сеток в итерационных алгоритмах решения служит еще одним путем к повышению эффективности алгоритмов и ускорения процесса решения. Различные аспекты приложения этой идеи к эллиптическим краевым задачам можно найти в работах Федоренко, Брандта, Марчука [202, 27, 149] (там же - дальнейшие ссылки). Основными привлекательными чертами такого подхода являются:

во-первых, ускорение сходимости итерационных процессов (Федоренко [202]) за счет того, что итерации на грубой начальной сетке сходятся быстро (дают длинноволновую составляющую решения). Это решение используется затем на более мелкой сетке в качестве хорошего начального приближения, ускоряющего сходимость итераций;

во-вторых, применение решений на вложенных сетках позволяет использовать априорную информацию об асимптотической скорости убывания погрешности для уточнения решения (Марчук [149]); Этот прием позволяет вычислять "точное" решение путем экстраполяции решений, полученных на вложенных сетках на сетку с "нулевым" шагом. В настоящей работе он нередко применяется для оценки точности получаемых решений;

в третьих, возможность повышения точности решения связана с "фиктивной интерполяцией" решения на локальную измельченную сетку и с использованием невязок на измельченных шаблонах для определения уточняющих поправок к решению (Брандт [27]). Этот прием был реализован и его эффективность подтвердилась. Выгода его применения проявляется в условиях нехватки памяти компьютера, когда отсутствует возможность организовать применение вложенных сеток.

В настоящей работе были реализованы все три упомянутых выше способа применения вложенных сеток и все они были отвергнуты как регулярные составляющие применяемых алгоритмов, поскольку мешали вольному обращению с программой. Беда не в том, что применение вложенных сеток усложняет алгоритм решения, а в том, что оно лишает алгоритм необходимой для исследовательской программы гибкости.

Алгоритмы вложенных сеток хороши для устоявшейся программы расчетов, не предполагающей экспериментов с алгоритмами решения и постановками решаемых задач. В нашем случае потребность в быстрой адаптации программы к разнообразным практическим приложениям поставила на первое место свойство гибкости и простоты алгоритма решения по сравнению с быстродействием.

3.3 Эйлерово-лагранжевы схемы МКЭ

3.3.1 Учет конвекции

Необходимость учета конвективных членов возникает при использовании нелагранжевых сеток. В частности, она возникает при использовании эйлеровых и эйлерово-лагранжевых сеток. Особенности применяемых схем удобно рассмотреть на примере стандартной начально-краевой задачи для типичного уравнения конвекции-диффузии. Вариационная формулировка такой задачи имеет вид:

$$\int_V ((dA/dt - C)\delta A + (\mathbf{k}\nabla A) \cdot \nabla\delta A) dV = \int_{S_1} B_N\delta A dS$$

где A - величина, для которой записано данное балансное соотношение; $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla$ - материальная производная; k - коэффициент физической диффузии; B_n - поток величины

A через площадку $\mathbf{n}dS$. Частная производная по времени берется вдоль траекторий подвижных координат, скорость движения которых обозначена символом \mathbf{w} , \mathbf{u} - материальная скорость.

Бесхитростная явная схема для конвективных членов (членов, содержащих конвективную скорость $\mathbf{u} - \mathbf{w}$), к которой приводит формальное применение конечно-элементной аппроксимации решения, в одномерном случае на равномерной сетке имеет вид:

$$\frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t_n} + (u - w)_i^n \frac{A_{i+1}^n - A_{i-1}^n}{2h} = k \frac{A_{i+1}^n - 2A_i^n + A_{i-1}^n}{h^2} + C_i^n$$

Такая схема отвечает явной центрально-разностной схеме метода конечных разностей и является неустойчивой при отсутствии физической вязкости. Это ясно видно из первого дифференциального приближения такой схемы (примеры такого анализа можно найти в работах (Hirt; Шокин; Давыдов; Роуч, 1980) и др.):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (u - w) \frac{\partial A}{\partial x} = (k - 0.5|u - w|^2 \Delta t_n) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + C$$

Помимо ограничения Куранта на шаг по времени для явных схем, требующего, чтобы область влияния возмущений на шаге по времени не выходила бы за пределы окрестности узла сетки:

$$\Delta t_n \leq \frac{h}{|u - w|}$$

имеется еще требование корректности первого дифференциального приближения, то есть положительность эффективного коэффициента вязкости

$$k_{eff} = k - 0.5|u - w|^2 \Delta t_n$$

что приводит к дополнительному необходимому условию устойчивости

$$\Delta t_n < k/|u - w|^2$$

которое в случае малой физической вязкости определяет неприемлемо малые значения временного шага. То есть требует слишком много вычислительной работы. Такое требование можно исключить путем введения явной (искусственной) или неявной (аппроксимационной) вязкости, "убивающей" аппроксимационный негативный добавок в эффективной вязкости.

Среди множества рецептов обеспечения дополнительной искусственной или аппроксимационной вязкости, регуляризирующих явные аппроксимации конвективных членов, после множества численных экспериментов в настоящей работе был отобран следующий. Критерием отбора являлись соображения простоты численной реализации и эффективности в условиях неравномерных и нерегулярных сеток. Была выбрана схема, похожая на схему экспоненциальной подгонки А.А. Самарского:

$$\int_{V^n} \left(\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t_n} - C^{n+1} + (\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \nabla A^n \right) \delta A dV + \\ + \int_{V^n} \tilde{\mathbf{k}}^n \nabla A^{n+1} \cdot \nabla \delta A dV = \int_{S_1^n} B_N^{n+1} \delta A dS$$

В соответствии с данной схемой конвективные члены аппроксимированы по явной схеме, переходящей в случае равномерной сетки в центрально-разностную, а вместо исходной физической вязкости используется исправленная вязкость следующего вида:

$$\tilde{k}^n = k^n \frac{1}{1 + \nu/k^n} + \nu, \quad \nu = 0.5 \max(|u - w|h, |u - w|^2 \Delta t_n)$$

где слагаемое ν имитирует аппроксимационную вязкость, которая возникает в оригинальной схеме Самарского из-за применения разностей против потока. Диффузионные члены в разных модификациях аппроксимировались по явной или по неявной схеме. Вспомогательные алгебраические задачи в случае неявных схем решались методом сопряженных градиентов аналогично уже описанному выше.

Отметим, что в нелагранжевых схемах функции состояния (пластические деформации, пластическая работа, внутренняя энергия, плотность и т. д.) аппроксимированы с использованием их значений в узлах, а не в элементах или гауссовых точках интегрирования, как это было в случае лагранжевых схем. Это упрощает пространственное дифференцирование этих величин при реализации рассмотренных выше схем расчета конвекции-диффузии.

3.3.2 Расчет сильных ударных волн и зон разрежения

Рассмотрим особенности алгоритмов, связанные с расчетом ударных волн в сжимаемых средах. Целесообразность введения искусственной "ударной" вязкости обосновывается анализом первых дифференциальных приближений используемых явных двухслойных разностных схем. Этот анализ показывает, что явные сеточные аппроксимации приводят к возникновению добавочных дестабилизирующих членов с отрицательными значениями коэффициентов вязкости. В нелинейных и многомерных задачах определение таких добавочных членов дифференциальных приближений затруднено получающимися громоздкими выражениями. Кроме того, истолкование возможного воздействия добавочных членов, которые не обязательно имеют вид эллиптических операторов, не всегда очевидно. Регуляризаторы типа искусственной или аппроксимационной вязкости лишь приближенно воспроизводят вид упомянутых добавочных членов и парируют их негативное влияние далеко не полностью. Кроме того эффект от введения дополнительных регуляризирующих вязкостей сильно зависит от соотношения шагов по пространству и времени, что снижает надежность алгоритмов. В сильно нелинейных задачах для обеспечения устойчивого счета приходится использовать избыточные значения дополнительной вязкости в ущерб точности решения.

Эксперименты с различными вязкостями как искусственными, так и с аппроксимационными показывают, что получающиеся

ся устойчиво работающие схемы обладают сильной диффузией и очень грубо описывают поведение решения в окрестности ударных волн. Уменьшение вязких членов улучшает описание ударных переходов, но схема может локально терять устойчивость за ударными волнами в областях сильного разрежения, показывая осциллирующие и даже неограниченно возрастающие решения. Удачный подбор коэффициентов искусственной вязкости для отдельной задачи не означает пригодности этих значений для удовлетворительного расчета других случаев. Указанные трудности преодолевались следующим образом.

В задачах с ударными волнами в зонах сжатия вводилось искусственное вязкостное давление:

$$p_v = -(\gamma(\gamma - 1)\rho U + \lambda + 4/3K)\nabla \cdot \mathbf{u}\Delta t_n$$

представляющее приращение физического давления на шаге по времени. Отметим, что приведенное выражение вязкостного давления удовлетворительно работает (обеспечивает устойчивый расчет) лишь в случае слабых ударных волн и при этом сильно их "размазывает". В случае сильных ударных волн для обеспечения устойчивости приходится вводить сглаживание решения, например, в соответствии с формулами (3.6), (3.8), (3.9).

Улучшенное описание ударных волн достигалось применением схем типа предиктор-корректор с дополнительным "антидиффузионным" шагом по времени (корректором), отличающимся тем, что в узких зонах ударных переходов, отвечающих условию:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} * h_{min} < -0.01(c + |\mathbf{u}|)$$

члены искусственной вязкости брались на корректоре со знаком минус. Такое локальное нарушение условий устойчивости не приводит к нарушению устойчивости схемы в целом, поскольку запаса устойчивости за счет монотонного предиктора хватает. "Антидиффузия" делает фронты ударных волн значительно более крутыми. Для обеспечения пригодности схемы в предельном случае холодной среды с нулевой скоростью звука при нулевой внутренней энергии (при нулевой абсолютной температуре) вместо

указанного выше выражения для вязкостного давления лучше использовать следующее:

$$p_v = -(\gamma(\gamma - 1)\rho U + \rho|\mathbf{u}|^2 + \lambda + 4/3K)\nabla \cdot \mathbf{u}\Delta t_n$$

Отметим, что "антидиффузия" вводится во многих схемах. Упомянем схему Мак-Кормака, в которой на предикторе и корректоре потоковые члены вычисляются альтернирующими направленными разностями, что вносит "антидиффузию" не в узких зонах ударных переходов, как в настоящей работе, но по всей области решения. Отметим, что и вид вязкостей в нашей схеме и схеме Мак-Кормака различен. Другими примерами служат схема коррекции потоков (Boris, Book, 1977) и ее многочисленные улучшенные модификации типа схем TVD, ENO (см. обзоры Benson, 1992; Куликовский, Погорелов, Семенов, 2001). Популярной основой для реализации идеи коррекции потоков является схема Годунова и ее модификации. В настоящей работе за основу взята простейшая схема "вперед по времени и центральная по пространству", сделанная почти эквивалентной по дифференциальному приближению схеме Годунова первого порядка путем введения явной искусственной вязкости. Как выясняется, и так делать можно, и таким, более простым в смысле реализации, образом можно получить вполне приличные по точности численные решения.

3.3.3 Схема коррекции давления для несжимаемых течений

Расчеты течений несжимаемой среды проводились методом коррекции давления, описание которого сделаем на примере несжимаемой среды Навье-Стокса:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p / \rho_0 + k_v \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

Эта схема применяется в MAC методе (Harlow, Welch, 1965),

методе расщепления по физическим процессам (О. Белоцерковский, 1984) и др.). В вариационной интерпретации настоящей работы схема коррекции давления имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{V^n} \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t_n} - \mathbf{g}^{n+1} + (\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \\ & \quad + \tilde{\mathbf{k}}^n \nabla \mathbf{u}^n \cdot \nabla \delta \mathbf{u} dV = 0 \\ & \int_{V^n} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} / \Delta t_n \delta p + \nabla p^{n+1} / \rho_0 \cdot \nabla \delta p) dV = \int_{S^n} \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \delta p dS \\ & \int_{V^n} ((\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) / \Delta t_n + \nabla p^{n+1} / \rho_0) \delta \mathbf{u} dV = 0 \end{aligned}$$

Эту схему можно трактовать как реализацию метода множителей Лагранжа, если рассматривать давление как множитель Лагранжа для условия несжимаемости.

3.3.4 Схема метода штрафа для несжимаемых течений

Метод штрафных функций для учета условия несжимаемости (Ладыженская, 1970) также используется в настоящей работе. Для этого в вариационное уравнение баланса импульса добавляются штрафные члены за нарушение условия несжимаемости:

$$\begin{aligned} & p^{n+1} = -\lambda \max(\rho_0 |\mathbf{u}|^2) \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \Delta t_n \\ & \int_{V^n} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t_n} - \mathbf{g}^{n+1} + (\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \\ & \quad + \int_{V^n} \left(\tilde{\mathbf{k}}^n \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} - p^{n+1} / \rho_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \right) dV = 0 \end{aligned}$$

где $\lambda \gg 1$ безразмерный коэффициент штрафа.

Для двумерных задач реализована также схема в переменных "функция тока- завихренность", которая построена аналогично рассмотренному выше.

3.3.5 Управление произвольно подвижными сетками

Геометрически адаптивные сетки. В задачах формования, а также в задачах об ударных взаимодействиях деформируемых тел, характеризующихся особенно заметными изменениями геометрии тел, в подвижных лагранжевых сетках появляются ячейки, уменьшившиеся до очень малых размеров. Из-за этого шаг по времени в явных схемах становится неприемлемо малым и дальнейшее по времени определение решения становится практически невозможным. Выход из этого затруднения предоставляют произвольно подвижные сетки, если управлять их движением так, чтобы каждый узел сетки занимал бы положение, по возможности наиболее близкое к геометрическому центру относительно его соседей. То есть, такая произвольно подвижная сетка адаптируется к подвижным лагранжевым границам, обеспечивая почти равномерное расположение внутренних узлов. Для коррекции положения узлов и определения скоростей их движения на каждом шаге проводилось сглаживание положений внутренних узлов (их сдвиг в сторону геометрического центра относительно соседей). Положение граничных узлов также корректировалось путем их смещения в касательной плоскости к границе опять-таки к геометрическому центру соседей. Граничные точки на ребрах (в углах), в которых нормаль к границе меняется скачком, принимались лагранжевыми во избежание грубых искажений формы тел.

Динамически адаптивные сетки. Для лучшего описания ударных волн и пограничных слоев были реализованы простейшие варианты управления динамически адаптивными сетками, обеспечивающие их сгущение в зонах больших градиентов решения. Идея применяемого алгоритма адаптации сетки непосредственно заимствована из работ (Бураго, 1984; Catherall, 1991; Marchant, Weatherill, 1993). Истоки идеи можно уловить и в более ранних описаниях алгоритмов построения сеток, данных в работах (Годунов, Прокопов, 1972; Лисейкин, 1977; Ковеня, Яненко, 1981).

В применяемом алгоритме для каждого узла сетки определяется значение некоторой адаптационной функции, характеризующей пространственный рост решения физической задачи и являющейся некоторой полунормой его пространственных производных. Для адаптации обычный алгоритм сглаживания сетки, упомянутый в предшествующем разделе, подправляется так, чтобы узел смещался более в сторону того соседа, у которого адаптационная функция имеет большее значение.

Чтобы предотвратить аварию из-за выворачивания ячеек при движении узлов сетки, в алгоритм введено ограничение сдвига узла: сдвиг узла должен быть мал по сравнению с радиусом окрестности узла и прекращаться при уменьшении этого радиуса до некоторой предельной величины, определяющей минимальный разрешенный размер ячейки. Проще говоря, используемая в алгоритме интерполяция координат узлов не должна переходить в экстраполяцию.

При трактовке данного алгоритма с помощью представлений о дифференциальных приближениях разностных схем легко показывается, что данный алгоритм реализует решение параболического уравнения с эллиптическим оператором второго порядка в правой части, имеющим коэффициенты диффузии, зависящие от адаптационной функции. В работах (Иваненко, 2000; Гаранжа, 2000) построены стационарные аналоги этих уравнений, в которых коэффициенты эллиптических операторов трактуются как метрика сеточной среды, управляемая адаптационной функцией. В упомянутых работах подчеркнута роль требования положительности якобиана преобразования начальной сетки в актуальную и необходимость его обеспечения на дискретном уровне.

Применяемый алгоритм имеет следующий простой вид:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \alpha_i^n d_i^n \Delta t_n$$

$$d_i^n = \left(\sum_{k \in N_i} (1 + \phi_k^n) \right)^{-1} \sum_{k \in N_i} x_k^n (1 + \phi_k^n) - x_i^n$$

где N_i - радиус-вектор узла i на n -м временном слое, N_i - множество номеров соседних узлов для узла i , $\phi_i^n \geq 0$ - узловые значения адаптационной функции, $0 < \alpha_i^n < 1$ - параметр релаксации. Если адаптационная функция равна нулю (решение не зависит от координат), то алгоритм реализует обычное сгущивание сетки, делая ее более равномерной и сдвигая каждый узел в сторону центра относительно его соседей. В противном случае узел получает дополнительное смещение в сторону возрастания адаптационной функции. Коэффициент α_i^n выбирается из условий устойчивости явного интегрирования параболического уравнения управления сеткой, которое можно получить как дифференциальное приближение, рассматривая адаптационный алгоритм как разностную схему. В одномерном случае это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial x}{\partial x^0} \right) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial x}{\partial x^0} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} + O((\Delta x^0)^4, \Delta t^2)$$

Явная двухслойная схема устойчива при $\alpha_i^n \Delta t_n \leq (\Delta x^0)^2$. Заметим, что в расчетных формулах алгоритма адаптации шаг сетки прообраза x^0 равен единице, поэтому условие устойчивости имеет вид: $\alpha_i^n \Delta t_n \leq 1$.

В расчета принималось $\alpha_i^n = 0.5$. При этом даже в предельном случае, когда в одном узле значение адаптационной функции устремлялось к бесконечности, а значения в остальных узлах полагались нулями, соседи за шаг по времени сдвинутся к этому узлу не более чем на половину расстояния между ними и не ближе, чем минимально допустимый размер ячейки.

Новые узловые значения искомым функций задачи \mathbf{y}_i^n определяются из решения уравнений "сеточной конвекции"

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{y} = 0$$

где оператор градиента относится к актуальной конфигурации, а

$\mathbf{w} = \partial \mathbf{x} / \partial t$ - скорость подвижной сетки. Знак минус при конвективном члене правильный. Уравнения сеточной конвекции интегрируются по явной схеме. Альтернативно для определения узловых значений решения можно использовать переинтерполяцию решения на адаптированную сетку. Этого не делалось, поскольку на нерегулярных сетках процедура интерполяции требует значительно большего объема вычислений из-за поиска интерполяционных ячеек.

Для стационарных задач данный алгоритм можно интерпретировать как итерационный процесс.

Успешность адаптации (уменьшение ошибок аппроксимации в зонах больших градиентов) определяется выбором адаптационной функции. Этот выбор подсказывается локальными оценками ошибок сеточного метода и зависит от класса решаемых задач. Во многих случаях из-за нелинейности и многомерности задач такие оценки отсутствуют и адаптационная функция задается интуитивно по аналогии с одномерным линейным случаем. Например, в качестве адаптационной функции применялись значения модуля дивергенции скорости, градиентов плотности, завихренности.

О расчете подвижных координат с помощью уравнений нелинейной термоупругости. Алгоритм работы (Бураго, 1984), опирающийся на уравнения раздела 2.10, долгое время оставался нереализованным. Дело в том, что имеется своего рода предрассудок против применения уравнений нелинейной термоупругости: представляется расточительным применять неявную схему решения нелинейной задачи термоупругости в паре с явной схемой интегрирования уравнений движения физической сплошной среды. Поэтому автор попытался вначале решать "термоупругие" сеточные уравнения по явной схеме, что оказалось крайне неудачным: поскольку эти сеточные уравнения принадлежат параболическому типу, то при явном интегрировании адаптация не поспевает за решением и рассогласование зон сгущения сетки и зон больших градиентов решения приводит только к потере точности. Поэтому сначала были реализованы описан-

ные выше алгоритмы по рецептам других авторов. Ситуация с применением уравнений термоупругости к сеточной среде радикально изменилась после реализации алгоритма интегрирования этих уравнений по неявной схеме "ньютоновская квазилинеаризация плюс сопряженные градиенты", аналогично тому, как это описано выше для уравнений упругопластичности. Неявное интегрирование приводит не только к ожидаемым отличным результатам (см. примеры раздела 4.7), но благодаря эффективности неявной схемы почти не замедляет основную (явную) схему решения термомеханической задачи, значительно повышая точность решений.

3.4 Расчет выделенной контактной границы

Ниже на основе работ Бураго и Кукуджанова [38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 272]. приведено описание контактных алгоритмов метода множителей Лагранжа (для явных схем) и штрафных функций (для неявных схем).

Воспроизведем здесь определения раздела 3.1, касающиеся поверхности контакта и контактных условий (3.5). Поверхность контакта $\overset{o}{S}_c$ определяется как множество всех граничных точек, для каждой из которых существует другая граничная точка с тем же значением актуального радиус-вектора

$$\overset{o}{S}_c = \{ \overset{o}{\mathbf{x}}^+ : \forall \overset{o}{\mathbf{x}}^+ \in \overset{o}{S} \exists \overset{o}{\mathbf{x}}^- \in \overset{o}{S} \mid \overset{o}{\mathbf{x}}^+ \neq \overset{o}{\mathbf{x}}^- \wedge \mathbf{x}(\overset{o}{\mathbf{x}}^+, t) = \mathbf{x}(\overset{o}{\mathbf{x}}^-, t) \}$$

Контактные граничные условия выражают непрерывность нормальной составляющей скорости:

$$(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = 0 \quad (3.33)$$

равенство действия и противодействия (третий закон Ньютона):

$$\mathbf{P}^+ = -\mathbf{P}^- \quad (3.34)$$

и закон трения:

$$P_{\tau\alpha} = \mathbf{P}^+ \cdot \tau_\alpha^+ = \tilde{f}(P_n, (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \tau_\alpha) , \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.35)$$

где контактная нагрузка \mathbf{P} представлена нормальной P_n и касательными $P_{\tau\alpha}$, ($\alpha = 1, 2$) составляющими, \mathbf{n} и τ_α - орты нормали и касательных к поверхности S в актуальной конфигурации, для которых выполнено

$$\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-, \quad \tau_\alpha^+ = -\tau_\alpha^-, \quad \alpha = 1, 2, \quad P_n = \mathbf{P}^+ \cdot \mathbf{n}^+$$

Контактная нагрузка трения зависит от нормальной контактной нагрузки и от скачка касательной скорости (скорости скольжения).

3.4.1 Метод множителей Лагранжа

Условия контакта можно ввести в уравнение виртуальных работ с помощью метода множителей Лагранжа (см. описание общих методов учета ограничений в задачах оптимизации, данное, например, в монографии Пшеничного и Данилина [172]). В результате это уравнение примет такой вид:

$$\int_V [\rho(d\mathbf{u}/dt - \mathbf{f}) \cdot \delta\mathbf{u} + \sigma \nabla \delta\mathbf{u}] dV = \int_{S_p} \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u} dS - \int_{S_c} \left[\delta(P_n(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{n}^+) + \sum_{\alpha=1}^2 P_{\tau\alpha} \delta(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \tau_\alpha^+ \right] dS \quad (3.36)$$

Роль множителя Лагранжа для кинематического ограничения (3.33) играет нормальная нагрузка контактного взаимодействия P_n , подлежащая определению. Касательные контактные нагрузки $P_{\tau\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) определяются законом трения (3.35).

Рассмотрим **алгоритм контактных пар**. Пусть поверхность тел представлена граничными ячейками: отрезками в двумерном случае и треугольниками в трехмерном случае.

Пусть локальная нумерация узлов в граничных ячейках в трехмерном случае принята по часовой стрелке, если смотреть снаружи тела, а в двумерном случае локальная нумерация соответствует обходу границы по часовой стрелке. Это нужно для

однозначного определения направления внешней нормали к границе.

В начале каждого шага по времени производится предварительный расчет нового положения границы без учета контакта. Затем среди пар "граничная ячейка - граничный узел" отбираются контактные, то есть такие, что 1) нормаль, опущенная из граничного узла на плоскость граничной ячейки, пересекает эту граничную ячейку, и 2) имеет место счетное проникание. При наличии для данного граничного узла нескольких кандидатов из граничных элементов на роль партнера по контактной паре, однозначно отбирается тот граничный элемент, который пересекается траекторией данного граничного узла. Математическая запись этих условий отбора приводится далее.

Для ускорения процесса отбора контактных пар отсева слишком далеко отстоящих друг от друга потенциальных партнеров по контактной паре проводится сначала по разности координат (более экономная проверка), затем по расстоянию и только потом по проекции. Никакой необходимости наглядной трактовки такого алгоритма определения зоны контакта путем рассуждений о конструкциях типа, например, "пинболлов" или "иерархических пинболлов" нет, хотя по сути конструкции пинболлов подразумевают ту же последовательность проверок и отсева. Отметим, что в работах автора этот алгоритм определения зоны контакта был реализован намного раньше, чем в работах других авторов.

Контактная пара образует треугольник в двумерных задачах и тетраэдр в трехмерном случае. То есть, число узлов в ней M_c равно 3 или 4, соответственно. Номера этих узлов хранятся в информационном массиве контактных пар $K(r, l)$, ($r = 1, \dots, N - c$; $l = 1, \dots, M_c$). Для каждой контактной пары k первые $M_c - 1$ элементы информационного массива $K(r, l)$ отвечают граничной ячейке, а последний (M_c -й) элемент содержит номер граничного узла, с которым эта граничная ячейка контактирует.

Алгоритм расчета контактной нагрузки реализуется итерационно. В каждой контактной паре контактная нагрузка, нормаль-

ная к граничной ячейке, определяется из условия обращения объема контактной пары в нуль. В процессе последовательного обхода контактных пар контактная нагрузка и координаты узлов поправляются до тех пор, пока все контактные пары не "схлопнутся". В явных схемах при реализации метода множителей Лагранжа это достигается, как правило, за два обхода границы (второй обход делается для контроля). В неявных схемах при реализации метода штрафа (см. конец раздела) итерируется до сходимости поле скоростей во всей области решения.

Определение зоны контакта. В данном подразделе описываются условия, по которым можно проверить является ли отдельная пара "граничный узел - граничный элемент" контактной. Для упрощения записи используем здесь локальную нумерацию узлов $i = 1, \dots, M_c$ (первые $M_c - 1$ номера отвечают граничному элементу, а номер M_c - граничному узлу, участвующим в проверке).

Пусть \mathbf{x}_i^n - актуальные радиус-векторы узлов контактной пары на "старом" временном слое, а \mathbf{u}_i^{n+1} и $(\mathbf{x}_i^{n+1})_s = \mathbf{x}_i^n + (\mathbf{u}_i^{n+1})_s \Delta t_n$ - искомые узловые значения скоростей и радиус-векторов на новом временном слое, $s = 0, 1, 2, \dots$ - номер итерации. Величина $(\mathbf{u}_i^{n+1})_0$ отвечает предварительному расчету нового временного слоя без учета контакта.

В трехмерном случае внешняя нормаль к граничной ячейке определяется соотношением

$$(\mathbf{n})_s = ((\mathbf{x}_3^{n+1})_s - (\mathbf{x}_1^{n+1})_s) \times (((\mathbf{x}_2^{n+1})_s - ((\mathbf{x}_1^{n+1})_s) / L$$

где $L = |((\mathbf{x}_3^{n+1})_s - (\mathbf{x}_1^{n+1})_s) \times (((\mathbf{x}_2^{n+1})_s - ((\mathbf{x}_1^{n+1})_s)|$. Пара граничный узел - граничная ячейка является контактной, если нормальная проекция узла на плоскость ячейки принадлежит ячейке:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3.37)$$

$$d = \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{x}_4^{n+1})_s - (\mathbf{x}_1^{n+1})_s) \leq 0 \quad (3.38)$$

где L_i , ($i = 1, 2, 3$) - L -координаты проекции $(\mathbf{x}_c^{n+1})_s = (\mathbf{x}_4^{n+1})_s - d(\mathbf{n})_s$ граничного узла M_c на плоскость, определяемую граничной ячейкой 1-2-3:

$$(L_1)_s = ((\mathbf{x}_3^{n+1})_s - (\mathbf{x}_c^{n+1})_s) \times (((\mathbf{x}_2^{n+1})_s - ((\mathbf{x}_c^{n+1})_s)/L$$

$$(L_2)_s = ((\mathbf{x}_3^{n+1})_s - (\mathbf{x}_1^{n+1})_s) \times (((\mathbf{x}_c^{n+1})_s - ((\mathbf{x}_1^{n+1})_s)/L$$

$$(L_3)_s = ((\mathbf{x}_c^{n+1})_s - (\mathbf{x}_1^{n+1})_s) \times (((\mathbf{x}_2^{n+1})_s - ((\mathbf{x}_1^{n+1})_s)/L$$

Аппроксимация контактных интегралов. Контактные интегралы в правой части уравнения виртуальных работ представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta \int_{S_c^n} (P_n)^n (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^n dS &= \sum_{r=1}^{N_c} (P_n)_r^n \sum_{i=1}^{M_c} (L_i)_r^n \delta \mathbf{u}_{K(r,i)} \cdot \mathbf{n}_r^n S_r^n + \\ &\sum_{r=1}^{N_c} \delta (P_n)_r \sum_{i=1}^{M_c} (L_i)_r^n \mathbf{u}_{K(r,i)}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_r^n S_r^n \end{aligned} \quad (3.39)$$

и

$$\begin{aligned} &\int_{S_c^n} \sum_{\alpha=1}^2 (P_{\tau\alpha})^n (\delta \mathbf{u}^+ - \delta \mathbf{u}^-) \cdot \tau_\alpha^n dS = \\ &= \sum_{r=1}^{N_c} \sum_{\alpha=1}^2 (P_{\tau\alpha})_r^n \sum_{i=1}^{M_c} (L_i)_r^n \delta \mathbf{u}_{K(r,i)} \cdot (\tau_\alpha)_r^n S_r^n \end{aligned}$$

Явная схема "крест" для скоростей с учетом контакта. С учетом этих интегралов соотношения для скоростей переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} M_i(\mathbf{u}_i^{n+1} - \gamma_i^n \tilde{\mathbf{u}}_i^n - (1 - \gamma_i^n) \mathbf{u}_i^n) &= \mathbf{f}_i^n \Delta t_n, \quad i \in \omega \setminus \omega_u \omega_c^n \\ \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^{n+1,*}, \quad i \in \omega_u \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$M_i(\mathbf{u}_i^{n+1} - \gamma_i^n \tilde{\mathbf{u}}_i^n - (1 - \gamma_i^n) \mathbf{u}_i^n) = (\mathbf{f} + \mathbf{f}_{c_i}^n)_i^n \Delta t_n, \quad i \in \omega_c^n$$

Остальные уравнения явной схемы раздела 3.3 не изменятся. Через ω_c^n обозначено множество номеров узлов, участвующих в

образовании контактных пар. Для контактных узлов в выражениях уравнений движения появились подлежащие определению добавки $\mathbf{f}_{c_i}^n$ (контактные нагрузки).

В соответствии с аппроксимациями (3.39) векторы контактных нагрузок определяются так:

$$(\mathbf{f}_{c_i})^n = \sum_{r=1}^{N_c} \sum_{l=1}^{M_c} \left((P_n)_r^n \mathbf{n}_r^n + \sum_{\alpha=1}^2 (P_{\tau\alpha})_r^n (\tau_\alpha)_r^n \right) S_r^n L_{rl}^n \tilde{H}(i - K(r, l)) \quad (3.41)$$

Следствием модифицированного уравнения виртуальных работ является также соотношение

$$\sum_{i=1}^{M_c} (L_i)_r^n \mathbf{u}_{K(r,i)}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_r^n = 0 \quad (3.42)$$

обеспечивающее непрерывность нормальных скоростей на контактной границе.

Учет контактного взаимодействия приводит к появлению новой группы искомым величин - множителей Лагранжа $(P_n)_r^n$ ($r = 1, \dots, N_c$) и добавились N_c дополнительных алгебраических соотношений (3.42), ограничивающих возможные движения контактных узлов и характеризующиеся недиагональной матрицей и вносящих в явные схемы элемент неявности. Поскольку зона контакта зависит от контактных нагрузок и определяется совместно с ними, необходимы внешние итерации по нелинейности (пересчет временного шага с уточнением зоны контакта). Нормальные контактные нагрузки должны быть сжимающими:

$$(P_n)_r^n \leq 0, \quad r = 1, \dots, N_c \quad (3.43)$$

то есть действовать против направления внешней нормали к границе. При нарушении этого условия соответствующая контактная пара исключается из числа контактных, и производится пересчет.

Итерационный процесс решения контактных уравнений Для решения системы уравнений на контактной границе применен следующий простой итерационный процесс типа Гаусса-Зейделя:

Шаг 0. Для получения начального приближения проводится расчет всех величин на новом временном слое $n + 1$ по явной схеме "крест" (3.6) без учета контактного взаимодействия.

Шаг 1. Путем проверки условий (3.37)-(3.38) определяется зона контакта, т.е. формируется информационный массив контактных пар $K(r, l)$. Если по сравнению с предыдущей итерацией он изменился, то переходим к выполнению шага 2, иначе процесс окончен.

Шаг 2. Последовательно для каждой контактной пары $K(k, l)$, $k = 1, \dots, N_c$ подправляется величина нормальной контактной нагрузки $(P_n)_k^n$ при постоянных $(P_n)_r^n$, $r = 1, \dots, N_c, r \neq k$. Новые значения $(P_n)_r^n$, $\mathbf{u}_{K(r,l)}^{n+1}$, $\mathbf{x}_{K(r,i)}^{n+1}$, $i = 1, \dots, M_c$ в соответствии с формулами (3.40)-(3.41) равны

$$((P_n)_r^n)^{s+1} = ((P_n)_r^n)^s + \Delta(P_n)_k^n$$

$$(\mathbf{u}_{K(r,i)}^{n+1})^{s+1} \cdot (\mathbf{n})_k^n = (\mathbf{u}_{K(r,i)}^{n+1})^s \cdot (\mathbf{n})_k^n - \Delta(P_n)_k^n (L_i)_k^n / m_i \Delta t_n, \quad i = 1, \dots, M_c$$

Поправка $\Delta(P_n)_k^n$ определяется из соотношения (4.9), записанного для поправленных скоростей:

$$\Delta(P_n)_k^n = \left[\sum_{i=1}^{M_c} \mathbf{u}_{K(r,i)}^n \cdot (\mathbf{n})_k^n (L_i)_k^n \right] \left[\Delta t_n \sum_{i=1}^{M_c} ((L_i)_k^n)^2 / m_{K(k,i)} \right]$$

Итерационный процесс оканчивается, если для всех контактных пар условие (3.41) выполнено с заданной точностью. Далее переходим к шагу 1.

Описанный выше алгоритм используется как дополнение к явным схемам расчета процессов деформации и, таким образом, реализует идею расщепления по физическим процессам применительно к контактным задачам динамики сплошных сред. Отметим, что контактный алгоритм не зависит от выбора конкретной явной схемы.

Как уже говорилось, на каждом шаге по времени делается только два обхода границы (второй - для контроля). Подчеркнем, что все участки границы равноправны. Контакт одних участков границы тела с другими участками границы того же тела рассчитывается так же, как и контакт с другими телами.

Для улучшения свойства схемы сохранять симметрию и обеспечения независимости результата от порядка обхода контактных пар, откорректированные значения контактных нагрузок и скоростей накапливаются в отдельном массиве и обновление основных массивов координат и скоростей производится по окончании расчета контактных пар.

3.4.2 Метод штрафа

В случае неявных схем учет контактного взаимодействия проводится методом штрафных функций. Используется модифицированное уравнение виртуальных работ (3.36), в котором полагается

$$P_n = \tilde{\lambda}(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{n}^+, \quad \tilde{\lambda} \gg 1$$

где $\tilde{\lambda}$ - коэффициент штрафа. В практических расчетах величина коэффициента штрафа принимается равной обратной величине "машинного эпсилон" (для четырехбайтовой арифметики это примерно 10^6). Аппроксимация контактных дополнительных членов в уравнении (3.36) проводится так же, как и в подразд. 3.3.2, их влияние учитывается при вычислении невязок в итерационном процессе метода сопряженных градиентов. Перед расчетом нового временного слоя определяется зона контакта по условиям (3.37)-(3.38), но условие (3.38) ослабляется и заменяется на условие достаточной близости границ

$$d = \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{x}_4^{n+1})_s - (\mathbf{x}_1^{n+1})_s) \leq 0.1h_{min} \quad (3.43)$$

где h_{min} - минимальная длина граничного отрезка сетки. Учет контактных взаимодействий и в случае неявной схемы не усложнил процесса решения задач и был реализован просто как дополнительная подпрограмма, определяющая зону контакта на

каждом шаге и вычисляющая контактные поправки к невязкам уравнений движения в итерациях по методу сопряженных градиентов.

При использовании квазиньютоновской неявной схемы в расчетах с большим шагом по времени или по параметру нагружения возникает необходимость во внешних дополнительных итерациях по нелинейности. Однако, если выдерживать условие точности путем выбора величины шага по времени, обеспечивающей достаточную малость приращений деформации, то таких дополнительных итераций по нелинейности, вызванных сложной реологией среды, геометрической нелинейностью и погрешностями в определении зоны контакта, не потребуется.

3.5 Сквозной расчет границ раздела

3.5.1 Метод фиктивных областей

Имеется достаточно обширный класс задач, в которых точное описание границ имеет второстепенное значение по сравнению с необходимостью получения картины явления в целом. Это, например, задачи экологических приложений о распространении загрязнений в окружающей среде при взаимодействии потоков с множественными препятствиями (под землей, в воде или воздухе), задачи множественного контакта по определению реакции композита, содержащего множественные инородные включения и тому подобные.

Для решения таких задач реализованы алгоритмы, которые используют описанные выше схемы на эйлеровых (неподвижных) равномерных сетках, ячейки которых представляют собой "кирпичики" (параллелепипеды). Адаптация к геометрии подразумевает введение сеточной функции-признака типа среды, которая указывает для каждого кирпичика его принадлежность к среде определенного типа (в частности, к жесткой, непроницаемой среде и т.д.).

Внешние и внутренние границы области решения могут иметь различную природу (открытые границы или границы-стенки), на них можно задать значения искомых функций или их потоки. Грубость постановки задачи заключается в приближенном описании формы границ, которые представляются набором прямоугольных ячеек, параллельных декартовым координатным плоскостям. Отметим работы, в которых данный подход предлагался и исследовался ранее (Бугров, Коновалов, Щербак, 1974; Рвачев, 1982). Следует отметить, что описание данного подхода можно найти и в более ранних руководствах по методу сеток (см. например, Демидович, Марон, Шувалова, 1967).

3.5.2 Метод дискретных маркеров

Упомянутые в разделе 3.5 алгоритмы послужили основой для реализации варианта метода маркеров и ячеек (метод МАС, Harlow, Welch, 1965; Nicols, 1973). Дискретным маркером называется свободная лагранжева точка, единственным свойством которой является ее способность двигаться вместе с материальной средой в соответствии с уравнением:

$$\frac{d\mathbf{x}_i^n}{dt} = \mathbf{u}_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N_m$$

где N_m - число маркеров. Занятость расчетной ячейки средой определенного типа определяется по наличию в ней соответствующих маркеров.

Отличие от оригинального алгоритма метода МАС заключается только в том, что расчет поведения среды осуществляется с помощью описанных выше алгоритмов метода конечных элементов на равномерной сетке "кирпичиков" раздела 3.5. Алгоритм применен к решению задач о течениях тяжелой несжимаемой жидкости со свободными поверхностями (поверхностные волны, водопады, фонтаны, струи и так далее, см. примеры в главе 4).

Количество требующихся маркеров зависит от задачи или от типа описываемого движения сплошной среды и составляет в

среднем примерно $4 \times 4 \times 4$ маркеров на ячейку для их начального положения. При наличии открытых входных/выходных границ на таких границах реализован алгоритм автоматизированной генерации (на входе) и уничтожения (на выходе) дискретных маркеров.

3.5.3 Метод непрерывных маркеров

Для получения более экономного (как по памяти, так и по быстродействию) алгоритма, воплощающего идею маркеров, был реализован также метод непрерывного маркера в форме метода концентрации или метода функции цвета (описание истории смотри в главе 1 настоящей работы, а также в монографиях: Sethian, 1996, 1999).

Опять конечноэлементный алгоритм на равномерной сетке "кирпичиков" раздела 3.5 был взят за основу и дополнен уравнением непрерывного маркера:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0$$

где маркер-функция C принимает значения 0 для пустого пространства и 1 для пространства, занятого материальной средой. Подвижная свободная граница определяется изолинией $C = 0.5$. Для уменьшения численной диффузии при интерпретировании уравнения переноса применялась локальная "антидиффузионная" коррекция функции C , поддерживающая кроме того консервативность, т. е. обеспечивающая выполнение интегрального соотношения

$$\int_V \frac{\partial \rho C}{\partial t} + \int_S \rho C \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS = 0$$

Для обеспечения консервативности полученное в неконсервативном расчете шага по времени приращение концентрации умножалось на поправочный коэффициент, обеспечивающий выписанное выше интегральное балансное соотношение.

Поясним сказанное. Расчет новых давлений и скоростей в материальной среде на n -ном шаге по времени проводится путем решения начально-краевой задачи в области $V_C^n \subset V$, занятой материальной сплошной средой и определяемой приближенно как подобласть, в которой $C^n \geq 0.5$. Далее из уравнения переноса рассчитываются предварительные новые узловые значения маркер-функции \tilde{C}_i^{n+1} . В таком расчете скорости $[u]_k^n$ в ячейках определяются по значениям скорости в узлах, в которых $C_i^n \geq 0.5$. Далее применяется антидиффузионная кооррекция значений маркер-функции, состоящая в следующем:

$$\tilde{C}_i^{n+1} \geq 0.5 \wedge \tilde{C}_i^{n+1} > C_i^n : C_{i(1)}^{n+1} = (1 - (\tilde{C}_i^{n+1})^2)/4$$

$$\tilde{C}_i^{n+1} \geq 0.5 \wedge \tilde{C}_1^{n+1} \leq C_i^n : C_{i(1)}^{n+1} = \tilde{C}_i^{n+1}$$

$$\tilde{C}_i^{n+1} \leq 0.5 \wedge \tilde{C}_i^{n+1} < C_i^n : C_{i(1)}^{n+1} = (\tilde{C}_i^{n+1})^2/4$$

$$\tilde{C}_i^{n+1} \leq 0.5 \wedge \tilde{C}_i^{n+1} \geq C_i^n : C_{i(1)}^{n+1} = \tilde{C}_i^{n+1}$$

Попросту говоря значения концентрации близкие к единице и растущие делаются еще более близкими к ней, а убывающие значения концентрации близкие к нулю делаются еще меньше. При этом ниоткуда не следует, что закон сохранения массы материальной сплошной среды выполняется. Даже если убрать явно неконсервативную антидиффузионную стадию расчета, все равно сохранение массы не гарантируется. Восстановление консервативности делается так: определяется ΔM_C^n - приращение количества субстанции C на n -м шаге по времени из-за заданных источников/стоков r_C и из-за конвективных потоков $C\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ на открытых границах; затем определяется ее фактическое приращение $\Delta M_{C(1)}^n$ как интеграл по области V от функции $C_{(1)}^{n+1} - C^n$. После чего производится коррекция:

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \alpha_1(C_{i(1)}^{n+1} - C_i^n), \quad \alpha_1 = \Delta M_C^n / \Delta M_{C(1)}^n$$

Процедура антидиффузии реализовывалась с вариациями: подбирался степенной закон, пробовалось ее включение не на

каждом шаге, а через каждые несколько шагов и так далее. Будучи неформальными элементами алгоритма, процедуры антидиффузии и коррекции закона сохранения массы чрезвычайно уязвимы для критики. В качестве оправдания заметим, что пристальный анализ опубликованных результатов по методу непрерывного маркера показывает, что проблемы соблюдения закона сохранения массы и размыва контактной границы имеют место. Дефекты решений часто видны невооруженным глазом. Поэтому если будут придуманы более корректные способы решения этих проблем, автор с удовольствием ими воспользуется. Пока же описанные способы коррекции альтернативы не имеют и работают вполне удовлетворительно (см. следующую главу). Конечно, ошибки в балансах импульса и энергии также имеют место в алгоритмах непрерывного маркера, но они не так бросаются в глаза как ошибки по массе или размыв границ. В самом деле, если проводится расчет падения дождевой капли, неловко наблюдать, как она без видимых причин в процессе падения вдруг начинает исчезать или наоборот увеличиваться в объеме, а возможно и просто туманно расплываться.

3.5.4 Расчет межфазных границ

Рассматриваются фазовые переходы жидкость-твердое тело (расплав-кристалл, вода-лед) при наличии примеси, описываемые условиями Стефана:

$$\Phi = T - T_m - T_c C = 0 \quad \mathbf{u}_S = \mathbf{u}_L, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial t} = ((k_q \nabla T)_S - (k_q \nabla T)_L) \cdot \nabla T$$

$$(C)_L (1 - k_*) \frac{\partial T}{\partial t} = ((k_c \nabla C)_S - (k_c \nabla C)_L) \cdot \nabla T, \quad (C)_S = k_* (C)_L$$

где $u_n = \partial T / \partial t |\nabla T|^{-1}$ - проекция скорости распространения фронта кристаллизации на нормаль $\nabla T / |\nabla T|^{-1}$, k_q - коэффициент теплопроводности, k_c - коэффициент диффузии примеси, λ - удельная энтальпия фазового перехода (величина выделяемого/поглощаемого тепла при фазовом переходе). В приведенных

формулах индексы "S" и "L" отмечают твердую и жидкую фазы соответственно, T_c коэффициент зависимости температуры T отвердения/плавления от концентрации примеси C в расплаве, k_* - коэффициент сегрегации (отторжения) примеси.

Было реализовано два типа алгоритмов:

В первом алгоритме проводилось **явное выделение фазовой границы**, подвижные эйлерово-лагранжевы сетки в подобластях строились методом квазигармонических отображений (С.А.Иваненко, 1997), а решения в подобластях сшивались с учетом выписанных выше условий Стефана.

Во втором алгоритме применена **схема сквозного счета** А.А. Самарского и Б.Д. Моисеенко (1965). Использовалась неподвижная эйлерова сетка. Положение межфазовой границы определялось из условия

$$\Phi = T - T_m - T_c C = 0$$

Выделение или поглощение тепла при фазовом переходе учитывалось в уравнении баланса тепла

$$c_V \frac{dT}{dt} = \nabla k_q \nabla T - L \delta(\Phi) \frac{dT}{dt}$$

При численной реализации дельта-функция аппроксимировалась выражением

$$\delta(\Phi) = H(1 - |(\Phi)_i|/\Delta T_m)/(2.0\Delta T_m)$$

где ΔT_m - подбираемая в расчете величина, определяющая ширину зоны размазывания межфазной границы в сквозном расчете, обычно равная примерно

$$\Delta T_m = 0.05(\max_V T - \min_V T)$$

Глава 4

Примеры расчетов

4.1 Проверка методов на тестовых примерах

Представленные в разд. 3 методы реализованы в интерактивном пакете программ АСТРА. Описание пакета программ и более подробную коллекцию результатов его применения можно найти в Интернете на сайте автора:

<http://www.ipmnet.ru/~burago>

Правильность работы алгоритмов проверена путем решения известных задач, среди которых упомянем следующие:

Задачи упругопластичности, квазистатика:

- Квазистатические задачи об осевом сжатии цилиндра и кубика при свободных и стесненных гладкой обоймой боковых границах.

- Задача Лямэ о цилиндре под действием внутреннего и внешнего давлений.

- Задача Кирша о растяжении пластины с круглой дыркой

- Задача Нейбера о растяжении цилиндра с эллиптической выточкой

- Задача изгиба упругопластических круглых пластин и цилиндрических оболочек.

Задачи упругопластичности, динамика:

- Задачи о распространении плоских упругопластических волн в слоях конечной толщины, в стержнях конечной длины.

- Задача об ударе упругопластическим цилиндром в жесткую стенку.

- Задачи о распространении цилиндрических волн в бесконечной круглой трубе под действием импульса внутреннего давления.

Газовая динамика и течения мелкой воды

- Одномерная и двумерная нестационарные задачи о распространении ударной волны при натекании холодного идеального газа на жесткую стенку и пластинку при $M = \infty$.

- Двумерные задачи о сверхзвуковых внутренних течениях в каналах с препятствиями.

Течения вязкой несжимаемой жидкости

- течения Куэтта, Пуазейля;

- задача о погранслое на пластинке, параллельной потоку;

- двумерные тесты для задач конвекции-диффузии: течение в каверне с движущейся крышкой, тесты Валь-Девиса и Вилера для термо-гравитационной конвекции расплавов во вращающихся тиглях;

- сравнения с известными численными решениями для течения расплава в методе погруженного нагревателя А. Острогоского.

- нестационарная задача Кармана о вихревой дорожке за плохо обтекаемым телом;

- проведены сравнения решений, получаемых различными методами в переменных вихрь-функция тока и скорость-давление;

- задача Лана о таянии/намерзании льда.

Задачи диффузии/фильтрации

- Проводились нестационарные тесты на аналитических решениях для 1-3D геометрии для различных функций правых частей уравнений диффузии и граничных условий.

Во всех классах задач решение новых задач контролировалось также путем сравнения решений, полученных различными явными и неявными методами, описанными в разд. 3, при последовательном дроблении шагов по пространственным переменным и времени.

Для представленных решений установлено, что применяемые алгоритмы обеспечивают хорошее согласование результатов, полученных по разным методам, между собой и с упомянутыми известными решениями, что дает определенную уверенность в том,

что приближенные решения задач, полученные с помощью пакета программ АСТРА, достаточно близки к соответствующим точным решениям.

Следует отметить, что в процессе использования пакета программ АСТРА упомянутый набор тестов просчитывался регулярно на протяжении более чем 20 лет при модификациях программы или при ее переносах на новые компьютерные платформы (смена компьютера, операционной системы, компилятора и так далее). Помимо автора тестирование проводилось заинтересованными коллегами, соавторами и представителями заказчиков проектов.

4.2 Квазистатика, упругопластичность

4.2.1 Расчет гребенчатых соединений

Решение осесимметричной квазистатической задачи о контакте гребенчатых соединений упругопластических элементов конструкций опубликовано в работах (Бураго, 1978, 1979; Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991)

На рис. 4.2.1а показана конфигурация типичного гребенчатого соединения осесимметричных упругопластических тел. Поверхности внешнего тела вращения при $r = 0.5$ и при $z = 0$ соприкасаются с жесткими стенками обоймы. Трение на стенках полагалось равным нулю. На поверхности внутреннего тела вращения при $z = 1$ действует внешняя сжимающая равномерно распределенная нагрузка. На контактных поверхностях между взаимодействующими телами проскальзывание и отлипание не допускались. Задавались следующие свойства упругопластических тел:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= 560, & \mu^{(1)} &= 375, & \sigma_s^{(1)} &= 1, & \{d\sigma_s^{(1)}/da_p &= 100, \\ \lambda^{(2)} &= 560, & \mu^{(2)} &= 375, & \sigma_s^{(2)} &= 2, & \{d\sigma_s^{(2)}/da_p &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

На рис. 4.2.1б показано распределение напряжений вдоль оси симметрии и на внешней поверхности при $r = 0,5$. Графики

соответствуют значению внешней нагрузки $\lambda = -1.2$. На оси симметрии напряжения σ_r , σ_z и σ_{rz} имеют ярко выраженные максимумы в местах утоньшения вкладыша.

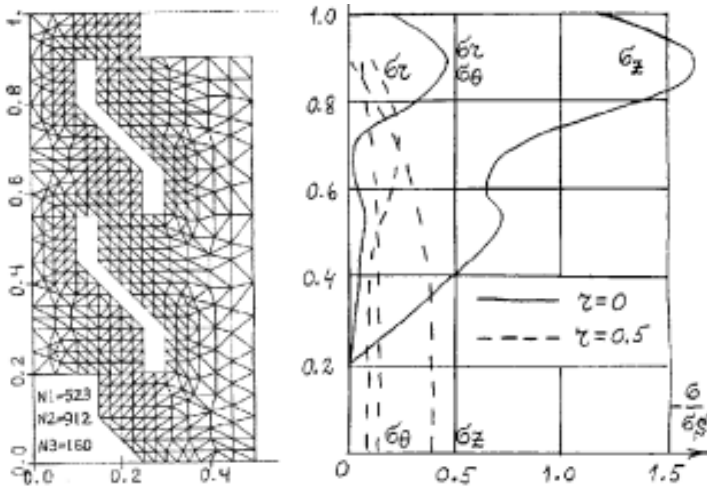


Рис. 4.2.1. Сжатие гребенчатого соединения двух разнородных упругопластических тел вращения а) расчетная сетка; б) распределение напряжений вдоль оси z на внешней поверхности ($r = 0,5$).

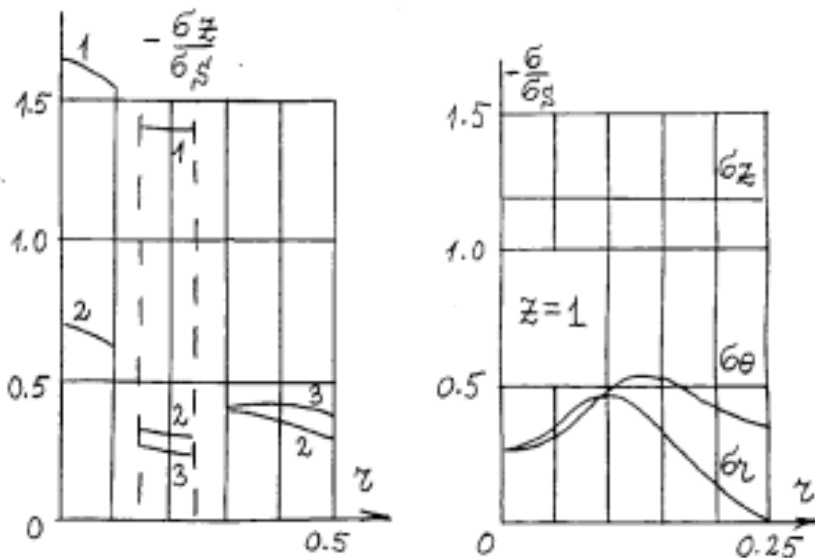


Рис. 4.2.2. Сжатие гребенчатого соединения двух разнородных упругопластических тел вращения а) - нормальные контактные напряжения (сечения $z = 0,9$, $z = 0,55$, $z = 0,2$); б) - распределение напряжений в сечении $z = 1$

Распределение контактных напряжений на зубьях, пронумерованных в порядке убывания координаты z , показано на рис. 4.2.1с. Цифры на этом рисунке соответствуют сечениям $z = 0,9, 0,55, 0,2$. Видно, что работает в основном первый зуб. На рис. 4.2.1d показано распределение напряжений в сечении $z = 1$. Отметим, что сходные задачи рассматривались раньше в рабо-

те (Подгорный, Гонтаровский, Марченко, 1976).

На рисунке 4.2.1 показана сетка нулевого уровня, расчет проводился на дважды измельченной сетке (на сетке второго уровня), содержащей в 16 раз больше ячеек.

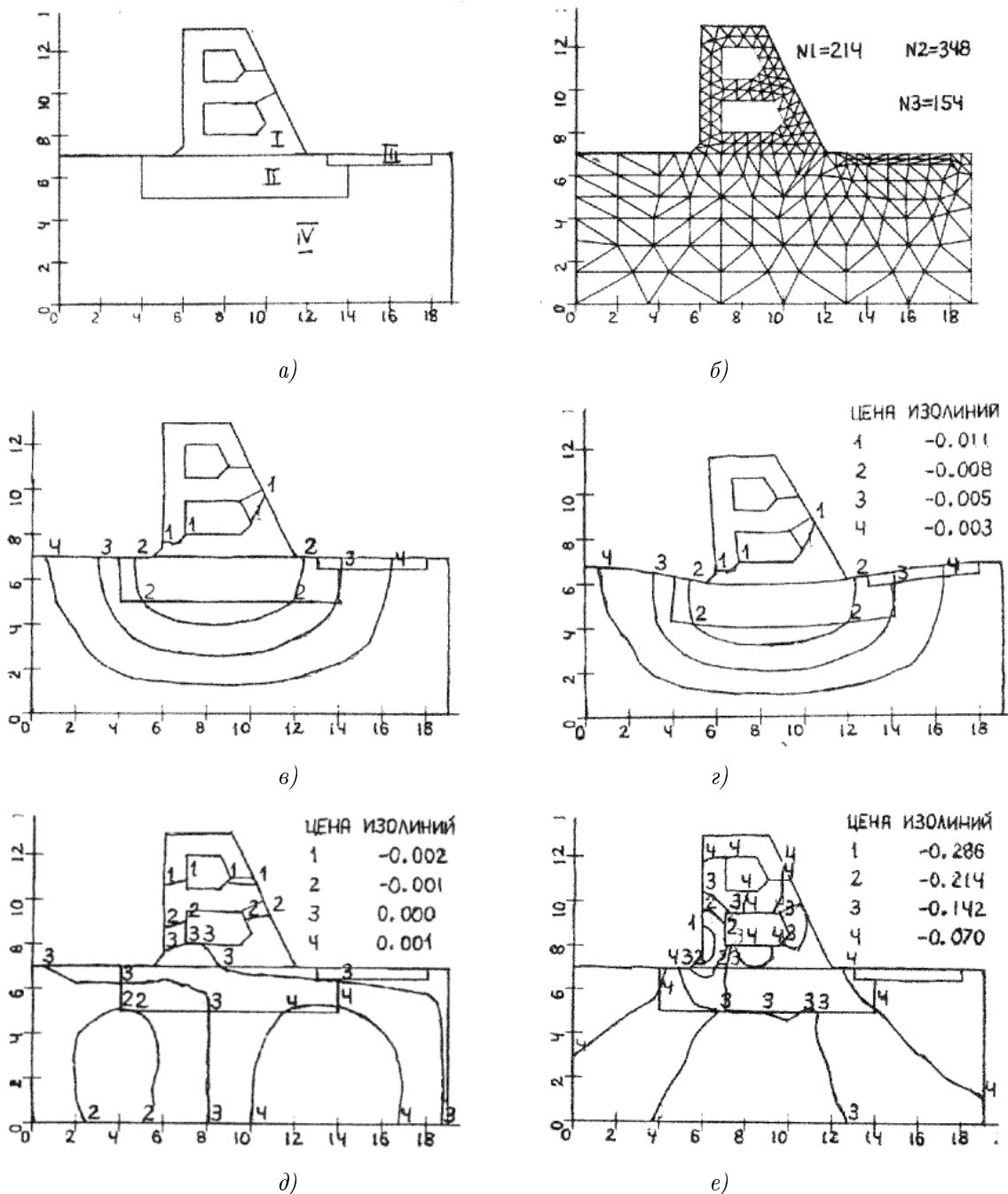


Рис. 4.2.3. Плотина, нагруженная силами тяжести. а) - конфигурация взаимодействующих тел (I - бетонная плотина. II - бетонное основание. III - скальное основание, IV - грунт); б) расчетная сетка; в) изолинии вертикальных смещений (1:-0.011, 2:-0.008, 3:-0.005, 4:-0.003); д) изолинии вертикальных смещений (актуальная конфигурация); е) изолинии горизонтальных смещений (1:-0.002, 2:-0.001, 3:0.000, 4:-0.001); ф) изолинии среднего напряжения (1:-0.286, 2:-0.214, 3:-0.142, 4:-0.070)

4.2.2 Расчет плотины в поле сил тяжести.

В условиях плоской деформации на основе уравнений теории упругости была решена задача для следующей системы четырех деформируемых тел: бетонной плотины, бетонного основания, скального основания, грунта (см. рис. 4.2.3а). Расчетная сетка показана на рис. 4.2.3б.

Свойства упругих тел задавались так:

$$\lambda^{(1)} = 150, \quad \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 125, \quad c^{(1)} = c^{(2)} = 1, \quad c^{(3)} = 1, \quad c^{(4)} = 2, \\ \lambda^{(3)} = 500, \quad \mu^{(3)} = 250, \quad \lambda^{(4)} = 50, \quad \mu^{(4)} = 25 \quad (4.2.2)$$

ускорение силы тяжести равно $g = 10^3 \text{ cm/sec}^2$.

На рис. 4.2.3д в показана деформированная конфигурация системы и построены изолинии вертикальных смещений. Смещения границ на этом рисунке увеличены в 10^2 раз для наглядности. Та же картинка в реальных смещениях приведена на Рис. 4.2.3с.

Изолинии горизонтальных смещений приведены на рис. 4.2.3е. Грунт раздается в стороны под действием плотины. Максимум напряжений наблюдается в левой нижней части тела плотины, что ясно видно из рис. 4.2.3ф, на котором показаны изолинии среднего напряжения.

4.2.3 Задачи формования

Задачи формования моделируют процессы изготовления деталей заданной формы путем действия на упругопластические материалы жесткими штампами. В процессах формования тела подвергаются большим деформациям и сильно меняют свою форму. Зона контакта является переменной. Ниже приводятся решения двух характерных задач этого класса. Первая задача возникает при моделировании изготовления алюминиевой чашки из круглой пластинки. Пластинка кладется на жесткую форму и формируется в чашку жестким штампом, расчет показан на рис. 4.2.4.

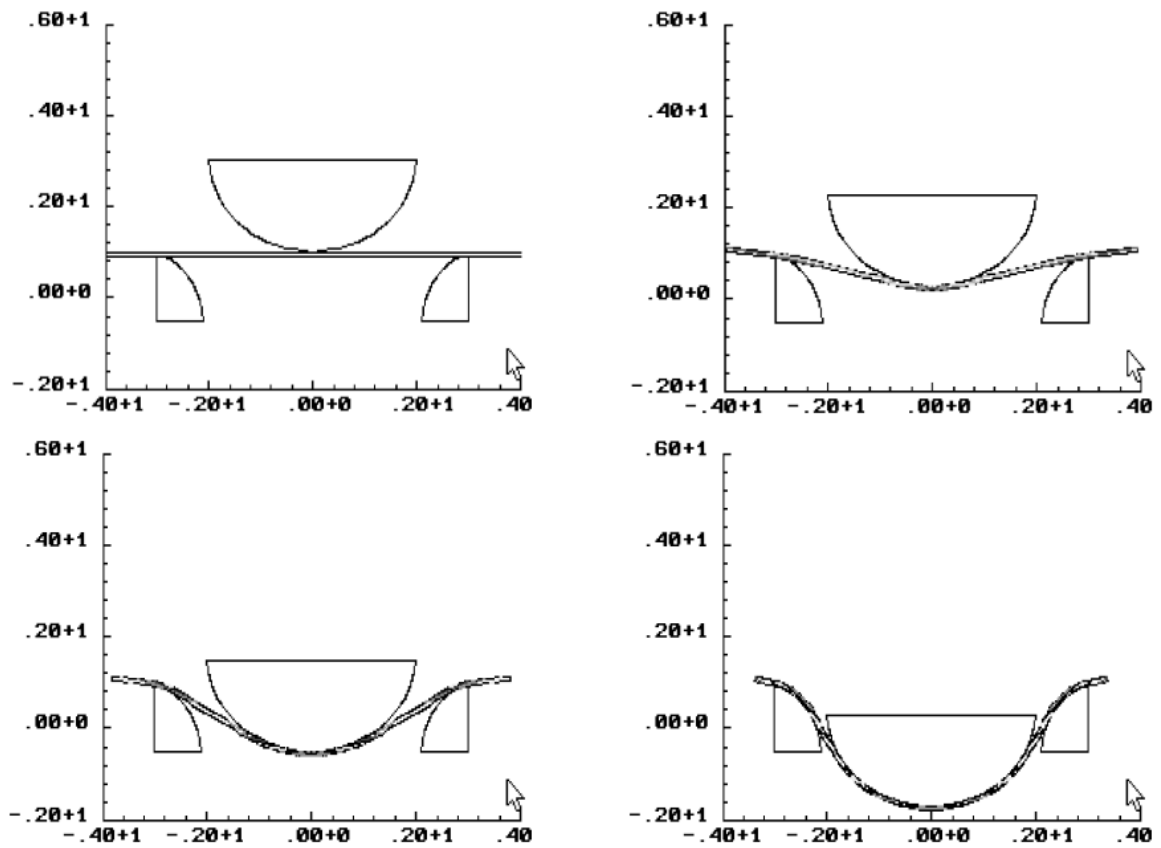


Рис. 4.2.4. Формование упругопластической алюминиевой чашки

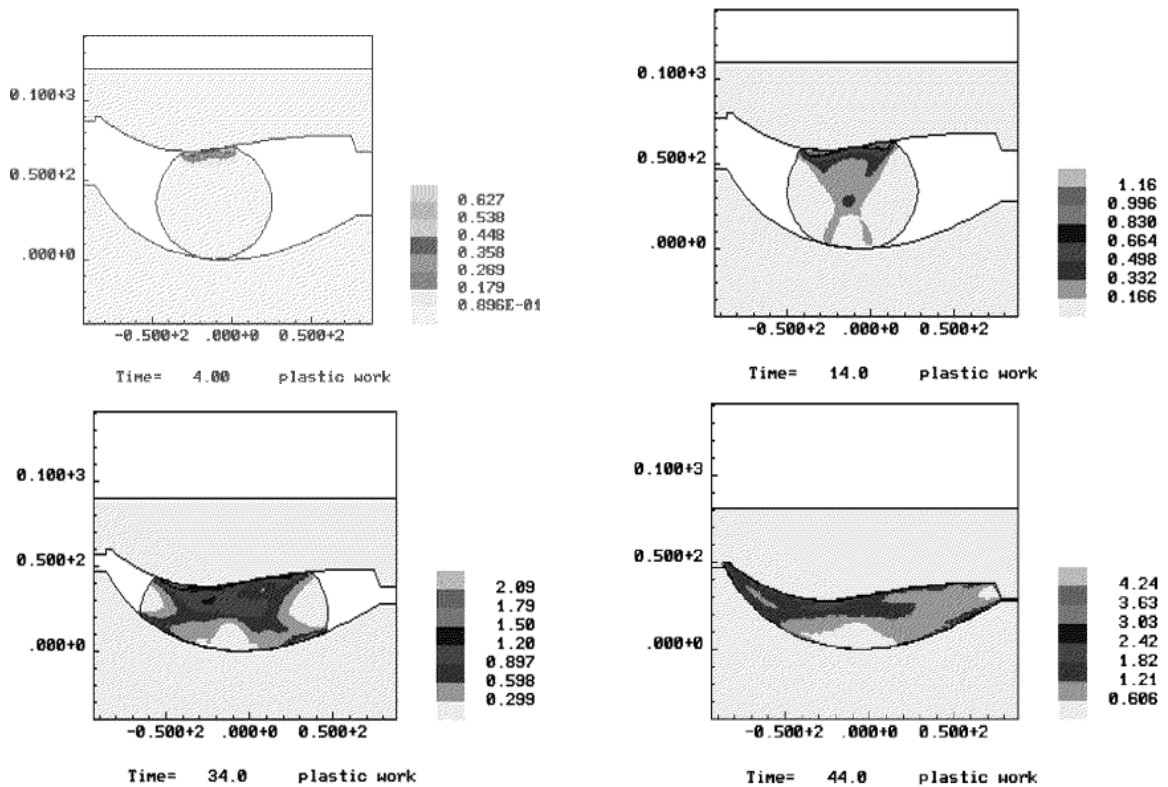


Рис. 4.2.5. Формование лопатки турбины.

В задаче имеются следующие трудности:

- 1) Пластинка рассчитывается по полным уравнениям трехмерной теории, возникающие алгебраические задачи плохо обусловлены из-за разницы в размерах области решения по радиусу и по толщине.
- 2) В переменной зоне контакта взаимодействуют разномасштабные элементы, имеющие удлинение 1 для штампов и удлинение $1/50$ для пластинки.

Вторая задача формования представляет процесс изготовления лопатки турбины. Исходная заготовка имеет круговую цилиндрическую форму и помещается между двумя жесткими фигурными штампами (см. Рис. 4.2.5), которые сближаясь придают заготовке характерную для лопаток форму "рыбки". Решение такой задачи на лагранжевой сетке невозможно. Поэтому здесь применен подход произвольно подвижных сеток. Управление движением узлов осуществлялось так, что граничные точки двигались как лагранжевы по направлению нормали к границе, а движение внутренних узлов и касательные к границе движения граничных узлов осуществлялось так, чтобы сетка в процессе расчета оставалась бы по возможности равномерной. Для этого на каждом шаге по времени такие узлы смещались в сторону геометрического центра по отношению к соседним узлам. Эта задача также имеет ярко выраженную переменную зону контакта. На рис. 4.2.5 показана эволюция формы тела и пластической работы.

На Рис. 4.2.6 показана сетка в исходном и в конечном состоянии. В увеличении показаны фрагменты сетки в голове и хвосте "рыбки". Заполнение фигурных полостей жесткого штампа деформируемым материалом в численной модели будет тем лучше, чем выше сеточное разрешение. Решалось множество вариантов данной задачи, в которых определялись нагрузки на штамп, напряженно-деформированное состояние материала лопатки, варьировалась форма штампов, скорости нагружения с целью оптимизации технологического процесса.

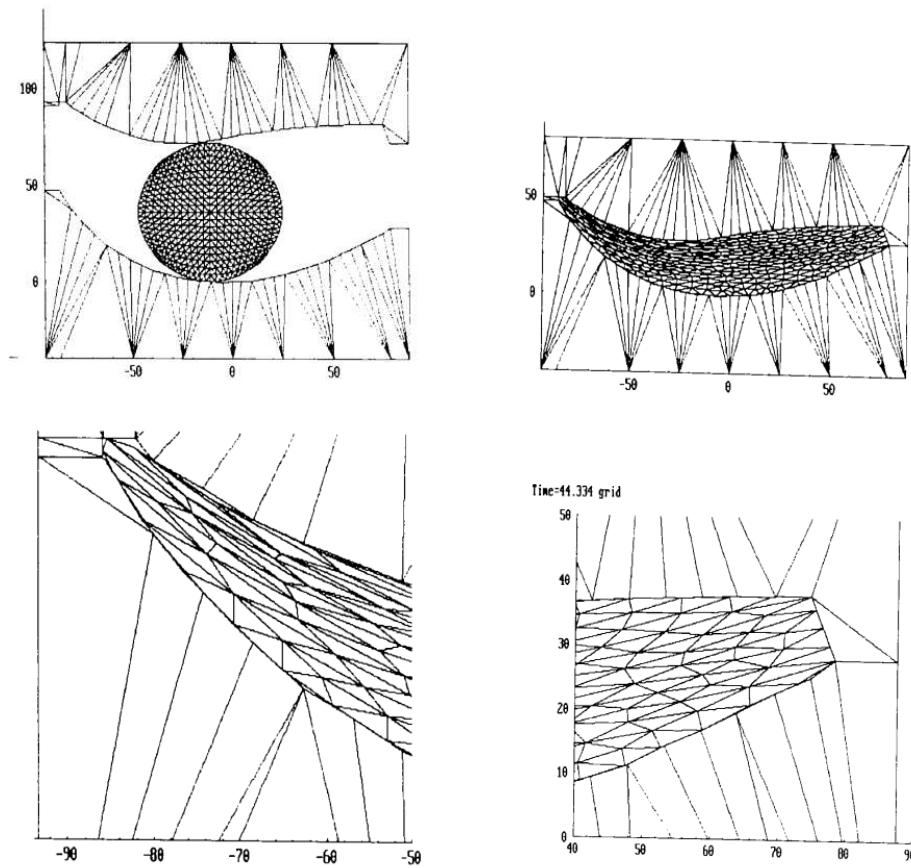


Рис. 4.2.6. Формование лопатки турбины. Поведение подвижной неагранжевой сетки.

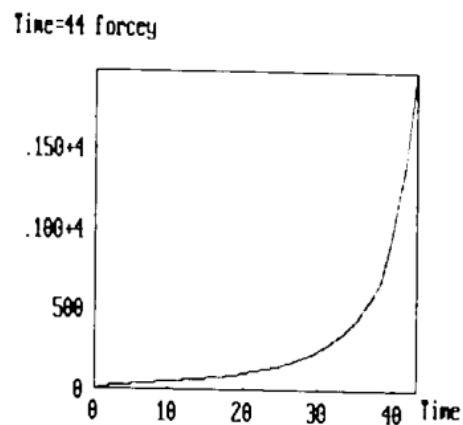


Рис. 4.2.7. Формование лопатки турбины. Зависимость силы давления штампа от времени.

На Рис. 4.2.7 показан типичный график зависимости нагрузки от времени (или от смещения штампа, которое линейно зависит от времени).

4.3 Динамика, упругопластичность

Рассмотрим примеры решения задач о соударениях деформируемых тел. Решение получено по явным лагранжевым схемам с использованием метода множителей Лагранжа для расчета контакта и опубликовано в работах (Бураго, 1986а, 1986b, 1987; Бураго, Кукуджанов, 1986с, 1988, 1991; Kukudzhanov, Bourago и др., 1995). Отметим, что описанные в главе 3 неявные схемы также могут быть использованы для решения динамических задач, такие расчеты также делались.

4.3.1 Удар стальным шаром в алюминиевую преграду

Указанная в заголовке задача решалась для двух случаев: стальной шар ударяет в алюминиевую пластинку и алюминиевый шар ударяет в стальную пластинку. В обоих случаях скорость удара равнялась скорости звука в материале ударника. Тепловыми эффектами этой задаче мы пренебрегали. Единицей времени служило время пробега продольных волн сжатия по радиусу ударника. Свойства материалов задавались такие:

сталь:

$$\lambda^{(1)} = 729, \quad \mu^{(1)} = 369, \quad \sigma_s^{(1)} = 1, \quad \{d\sigma_s^{(1)}/da_p = 0, \quad c^{(1)} = 2 \quad (4.3.1)$$

алюминий:

$$\lambda^{(2)} = 182, \quad \mu^{(2)} = 92, \quad \sigma_s^{(2)} = 0.25, \quad \{d\sigma_s^{(2)}/da_p = 0, \quad c^{(2)} = 1 \quad (4.3.2)$$

На рис. 4.3.1а и 4.3.1в показаны конфигурации лагранжевых сеток для соударяющихся тел в моменты времени 0.5 и 1.0. На рис. 4.3.1б показаны изолинии напряжения σ_z для момента времени 0.5. Ясно видны фронты ударных волн в материалах ударника и преграды. На рис. 4.3.1г показаны изолинии среднего напряжения для момента времени 1.0. Для этого момента времени на

рис. 4.3.1д показано поле скоростей, а на рис. 4.3.1е - изолинии пластической работы.

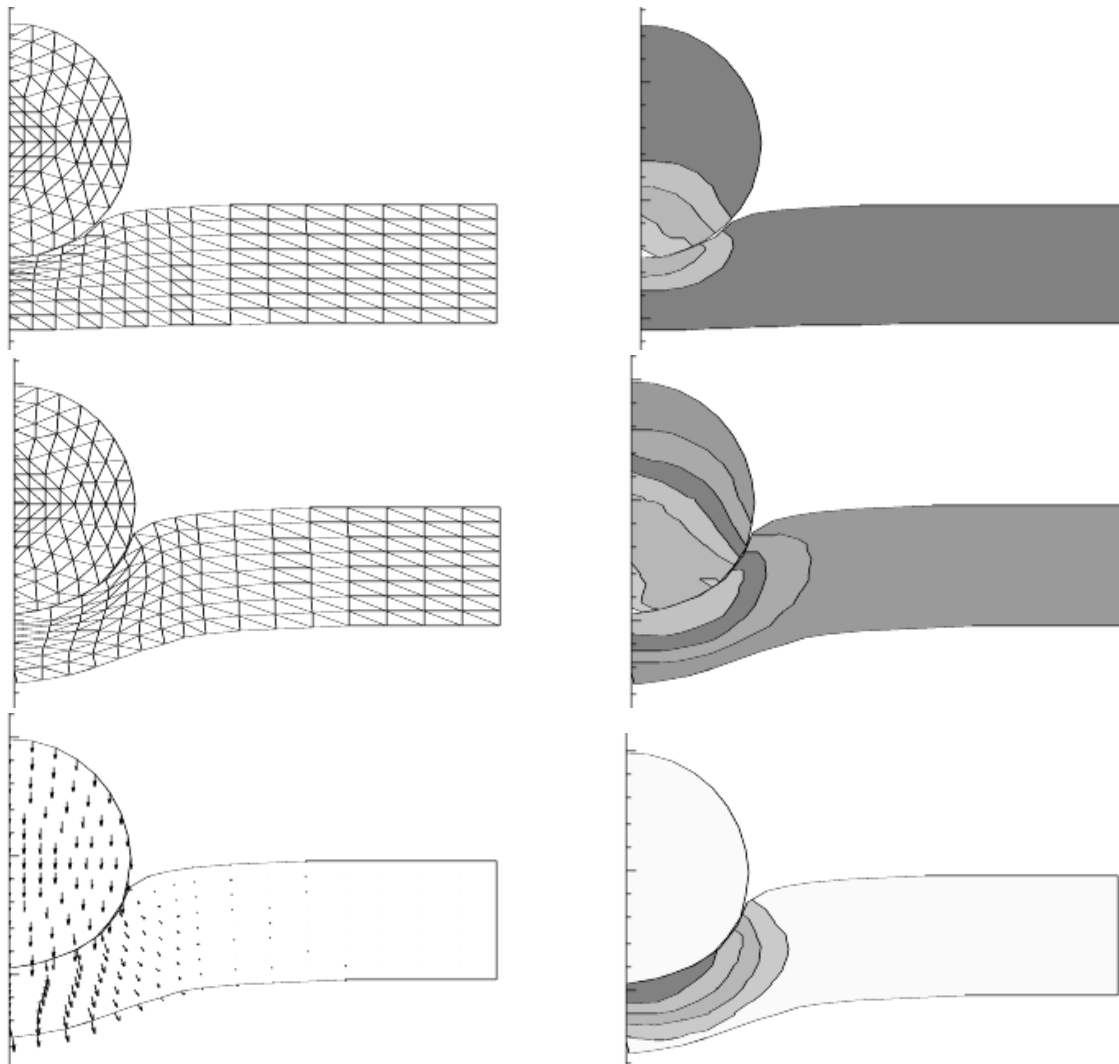


Рис. 4.3.1 Удар стальным шаром в алюминиевую преграду. а), в) деформированная конфигурация сетки ($t = 0.5, 1.0$); б) изолинии напряжения σ_{zz} для $t = 0.5$; (1: - 152, 2: - 114, 3: - 75.2, 4: - 36.5); в) изолинии среднего напряжения для $t = 1.0$ (1: - 120, 2: - 85.9, 3: - 51.4, 4: - 16.8); д) поле скоростей ($t = 1.0$); е) изолинии удельной пластической работы для $t = 1.0$ (1: 0.4, 2: 0.8, 3: 1.2, 4: 1.6)

4.3.2 Удар алюминиевым шаром в стальную преграду

Рисунки 4.3.2 содержат кинограмму процесса соударения алюминиевого шара с упругой стальной пластинкой и показывает конфигурацию соударяющихся тел на протяжении всего процесса удара вплоть до отскока ударника от преграды.

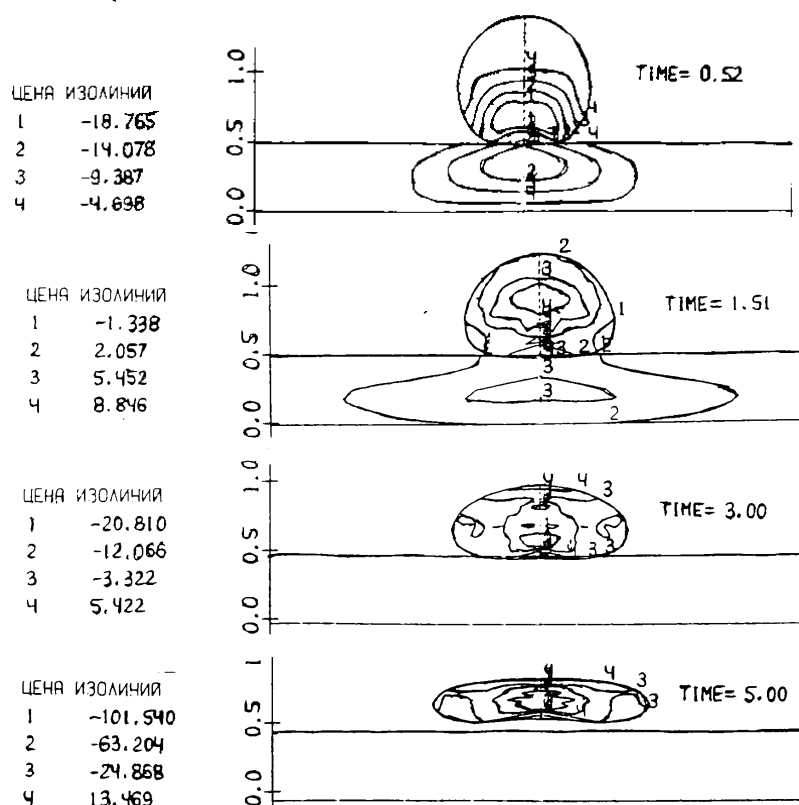


Рис. 4.3.2. Удар алюминиевым шаром в стальную преграду.

В результате удара шар расплющивается в "лепешку". При $t = 5$ уже после отскока периферийные области "лепешки" продолжают интенсивное движение от оси симметрии. В центральной области шара при этом наблюдается зона всестороннего растяжения, что указывает на возможность разрушения ударника. На контакте выполнялись условия скольжения.

4.3.3 Соударение алюминиевых шара и преграды

Рисунки 4.3.3 содержат кинограмму процесса околосвукового соударения алюминиевого шара с алюминиевой пластинкой, на которой видно образование "усов всплеска", подобного наблюдающегося при падении капли в жидкость.

Отметим, что скорость удара является околосвуковой и в зоне удара материал ведет себя как жидкость, поскольку девиатор напряжений мал по сравнению с давлением. С увеличением вязкости встречные струи материала ("усы") исчезают.

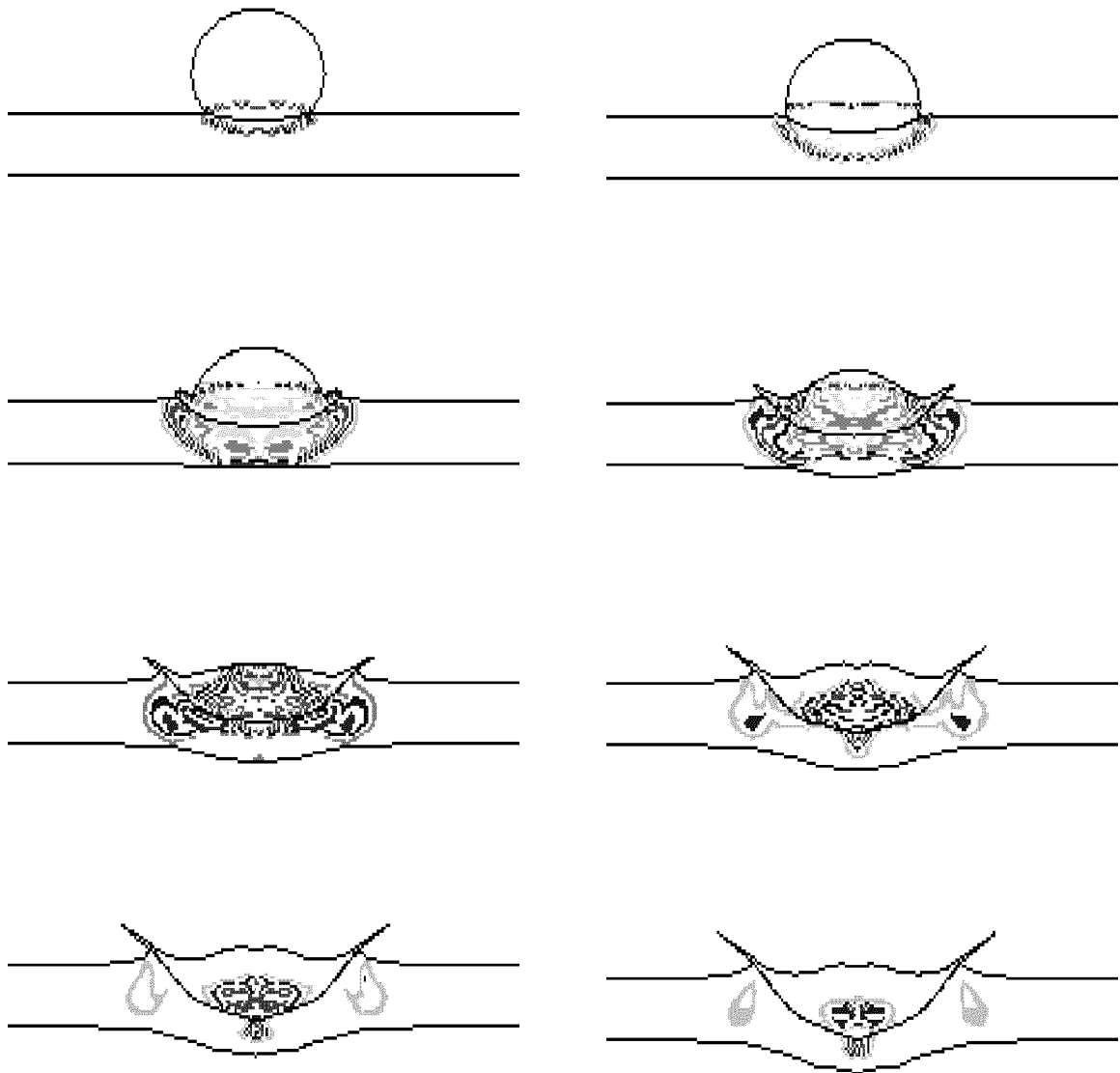


Рис. 4.3.3. Удар алюминиевым шаром в алюминиевую преграду.

4.3.4 Трехмерные задачи удара

Алгоритмы для расчета динамики упругопластических сред были реализованы и для трехмерного случая. На рис. 4.3.4 и 4.3.5 показаны результаты расчета соударения двух упругопластических тел (прямое и под углом). Свойства материалов стального ударника и алюминиевой преграды принимались такими же как и в приведенных выше расчетах пространственно двумерных задач.

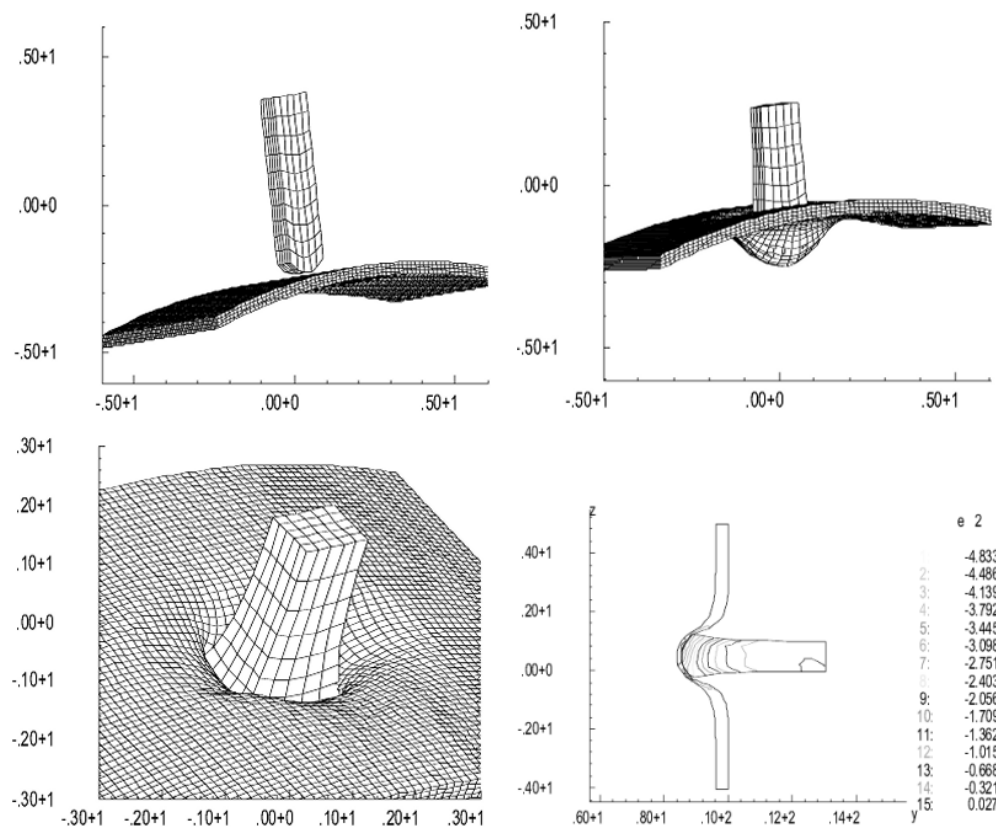


Рис. 4.3.5. Прямой удар двух тел

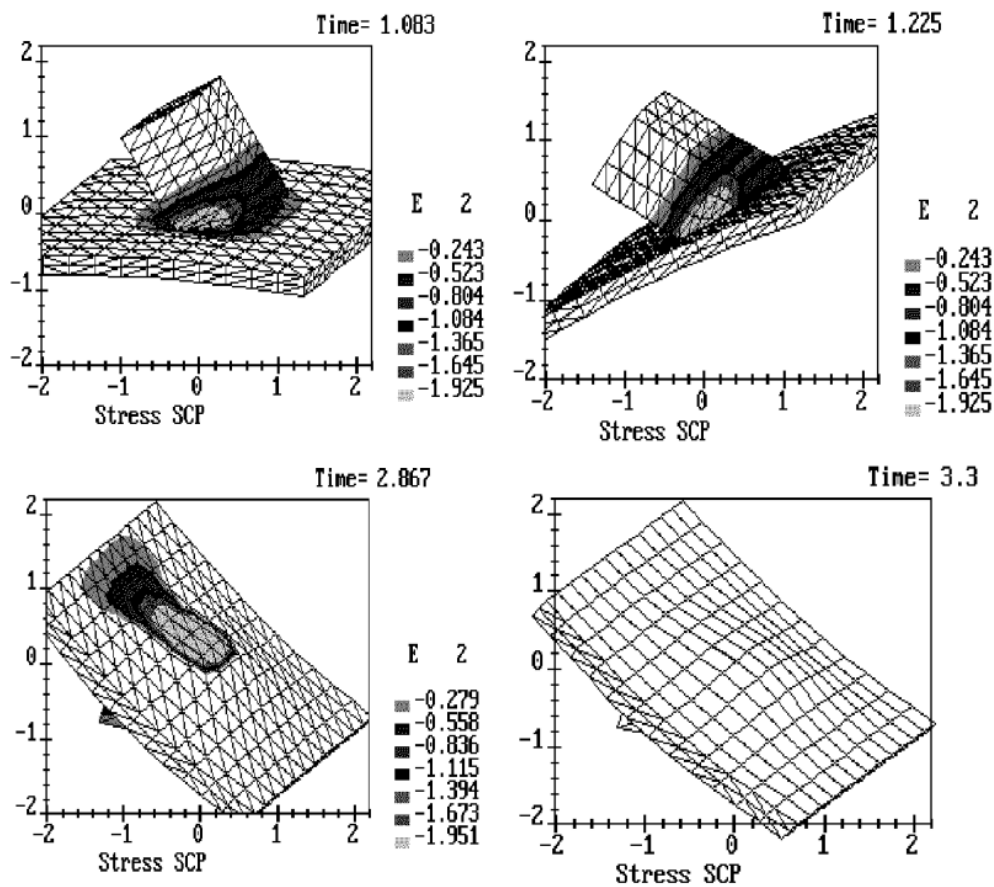


Рис. 4.3.6. Удар двух тел под углом

4.3.5 Расчет образования воронки при взрыве

Рассмотрим задачу о взрыве зарядов в грунте, опубликованную в работах Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991; Бураго, 1989. Расчетная схема и сетка показаны на рис. 4.3.6а. В начальный момент времени в материале имеется небольшой прямоугольный вырез, в который помещен заряд взрывчатого вещества. Фрагмент области решения, показанный на рис. 4.3.7, позволяет рассмотреть сетку в материале ВВ.

Предполагалось что в начальный момент времени в заряде ВВ происходит мгновенная детонация, превращающая его в газ с высокой температурой и давлением:

$$\gamma = 1.4, \quad U_0 = 5, \quad \rho_0 = 100, \quad p = (\gamma - 1)\rho U \quad (4.3.3)$$

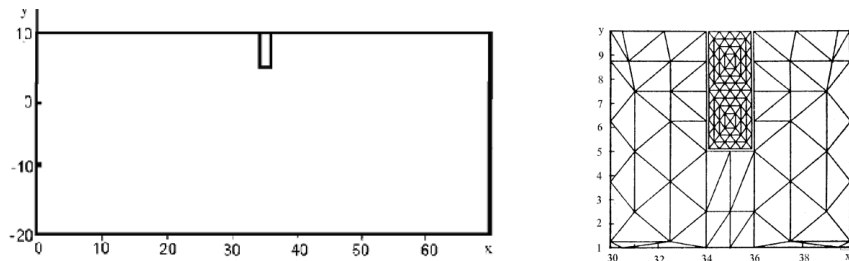


Рис. 4.3.6. Образование воронки при взрыве. а - конфигурация деформируемых тел ($t=0$), б - расчетная сетка

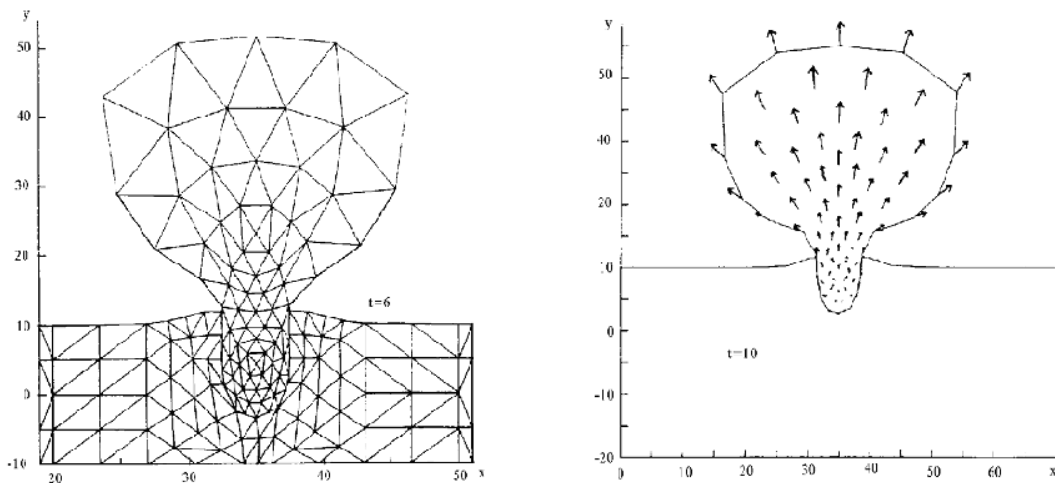


Рис. 4.3.7. Деформированная конфигурация лагранжевой сетки ($t = 6.0$) и поле скоростей ($t = 10.0$)

Материал грунта имел следующие свойства:

$$K^{(2)} = 243, \quad \mu^{(2)} = 92, \quad \sigma_s^{(2)} = 0.25, \quad d\sigma_s^{(2)}/da_p = 0, \quad c^{(2)} = 1$$

$$k_\omega^{(2)} = 0.0, \quad k_\theta^{(2)} = 10^6, \quad F = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{lim}^{(2)}, \quad \varepsilon_{lim}^{(2)} = 0.01$$

На рис. 4.3.6 показана область решения и исходная расчетная сетка. Крупным планом отдельно показана сетка части области решения в окрестности заряда. Мелкая квазиравномерная сетка покрывает заряд. Более крупные ячейки покрывают область грунта. Между грунтом и зарядом вначале имеется небольшой зазор.

Единицей времени служило время пробега продольных волн сжатия характерного расстояния в материале. Для на рис. 4.3.7 показана деформированная сетка (при $t = 6.0$) и поле скоростей (для $t = 10.0$), которые демонстрируют разлет продуктов взрыва и образование воронки с валом.

На периферии газового облака скорости имеют величину порядка четырех скоростей звука в материале. К моменту времени $t=15$ давление в нижней части газового облака спадает от первоначальных 200 пределов текучести до величин порядка единицы и активный процесс разрастания воронки прекращается. Воронка далее сохраняет конфигурацию, показанную на рис. 4.3.7.

Форма газового облака сильно зависит от схемной вязкости. По постановке задачи газ является идеальным (невязким). С уменьшением вязкости схемы облако начинает напоминать развесистое дерево и его "крона" по мере распространения входит в контакт с дневной поверхностью грунта на некотором расстоянии от воронки. Соответственно и форма воронки также весьма чувствительна к схемной вязкости. Эти замечания говорят о том, что данная задача еще далека от окончательного решения и достигнутая здесь точность решения позволяет выявлять лишь качественные особенности решения.

4.4 Задачи о локализации деформаций

Ниже рассматриваются расчеты процессов разрушения типовых растягиваемых образцов, испытаны ряд критериев разрушения и ряд режимов кинетики повреждаемости, исследовано влияние пластических деформаций и локального интенсивного нагрева (охлаждения) на разрушение, прослежено развитие зон локализации деформаций. Выработаны рекомендации по реализации моделей континуального разрушения, которые могут повысить эффективность существующих моделей.

4.4.1 Растяжение стандартного образца

Рассмотрим типичное решение о растяжении плоского стандартного образца, расчетная область показана на Рис. 4.4.1. Начальная длина расчетной области равна 3.0, высота - 2.0. Левая и нижняя границы представляют оси симметрии, правая граница движется вправо с постоянной скоростью V_0 , верхние границы свободны.

Безразмерные входные данные приведены ниже:

$$K_0 = 975, \quad \mu_0 = 369, \quad k_{p0} = 1, \quad c_0 = \frac{3K_0 + 4\mu_0}{3\rho_0} = 1000, \quad k_\theta = 10^3,$$

$$\Phi_p = \sigma' : \sigma' - k_p^2, \quad \Phi_\theta = \varepsilon_{max} - 10^{-2}, \quad g_K = g_\mu = g_p = e^{-1000\theta}$$

$$U \approx c_V T, \quad c_V = 1, \quad k_q = 1, \quad \beta = 10^{-4}, \quad V_0 = 10^{-4}$$

где ε_{max} - максимальная главная деформация, c_0 - безразмерная скорость звука. В начальный момент времени образец находится в недеформированном состоянии с нулевыми значениями скоростей, перемещений, пластических деформаций и поврежденности при безразмерной температуре $T_0 = 100$. Безразмерный массовый источник/сток тепла $r = 1$ действовал в прямоугольной зоне (1.9, 0, 2.1, 1). Тепловые потоки на границах занулялись. Использовались лагранжевы подвижные конечноэлементные сетки, состоящие из первоначально одинаковых квадратных

или (лево/право)- ориентированных треугольных ячеек с шагом $1/15$, $1/30$ и $1/60$ в разных вариантах.

Решение для начала процесса можно видеть на рис. 4.4.1. Здесь и далее сравниваются решения для трех случаев постановки задачи: 1) растяжение образца из упругого разрушающегося материала, 2) растяжение образца из упругопластического разрушающегося материала и 3) растяжение образца из упругопластического материала при дополнительном воздействии локального нагрева предполагаемой зоны разрушения вблизи концентратора. Концентратором служит место излома под прямым углом образующей поверхности растягиваемого образца. Концентрация напряжений и деформаций около угла заметна уже в начале процесса.

Развитие узких зон локализации деформаций можно видеть на рис. 4.4.2 для трех случаев процесса: разрушение упругого материала (а), упругопластического материала (б), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в). Видно, что пластичность навязывает свое предпочтительное направление распространения зоны локализации деформаций.

При достаточно интенсивном нагреве разрушение упругопластического материала происходит как в упругом материале, а в режиме умеренного нагрева развиваются две "трещины": сначала косая, которая затем останавливается, а завершает разрушение вертикальная "трещина", развивающаяся в зоне интенсивного нагрева.

На рис. 4.4.2 показаны графики горизонтального смещения, среднего напряжения и максимальной главной деформации вдоль горизонтальной линии, пересекающей узкие зоны разрушения. Поведение этих характеристик типично для внутренних контактных границ и имитирует макротрещину в рамках континуального подхода.

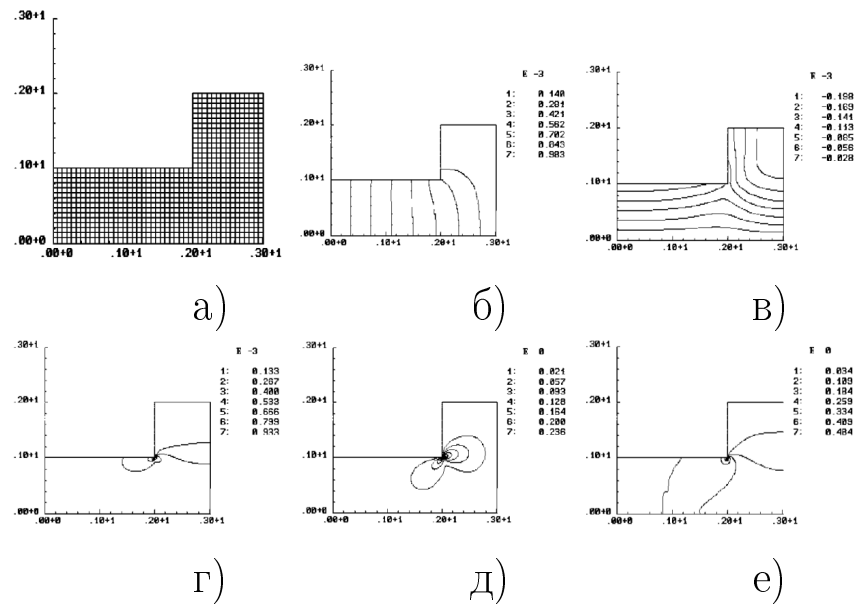


Рис. 4.4.1. Растяжение стандартного образца, начало процесса. Изолинии среднего напряжения σ_m и горизонтального перемещения u_x для случаев упругого материала (а,г), упругопластического материала (б,д), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в,е).

На рис. 4.4.3 показаны графики горизонтального смещения, среднего напряжения и максимальной главной деформации вдоль горизонтальной линии, пересекающей узкие зоны разрушения.

Поврежденность и деформация в зоне разрушения имеют очень большой всплеск типа дельта-функции, напряжения падают до нуля, а смещения претерпевают резкий скачок. Поведение этих характеристик процесса типично для внутренних контактных границ и зона больших градиентов имитирует магистральную трещину в рамках континуального подхода.

Интенсивный нагрев ускоряет процесс разрушения, в то время как локальное охлаждение зоны предполагаемого разрушения замедляет ее развитие. Временной шаг при появлении зоны разрушения резко уменьшается из-за ограничения приращения деформации на шаге по времени в связи с требованиями точности расчета. Процесс развития зон разрушения становится динамическим, это видно из графиков эволюции шага по времени, показанных на Рис. 4.4.4.

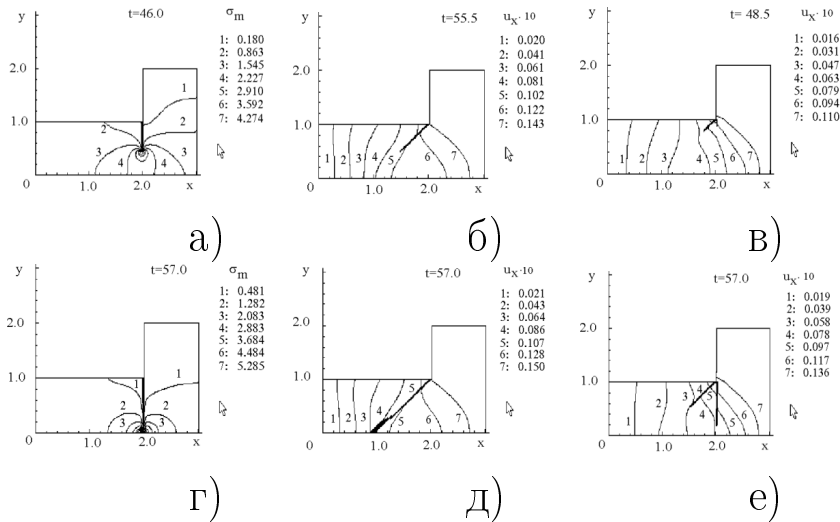


Рис. 4.4.2. Моды процесса разрушения, изолинии среднего напряжения σ_m и горизонтального перемещения u_x для случаев упругого материала (а,г), упругопластического материала (б,д), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в,е). Показаны средняя (а,б,в) и финальная (г,д,е) стадии процесса.

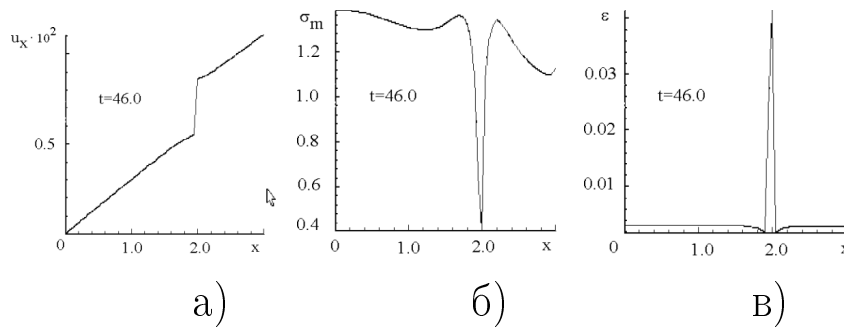


Рис. 4.4.3. Графики горизонтального смещения (а), среднего напряжения (б) и максимальной деформации (в) вдоль горизонтальной линии $y = 0.6$ для случая разрушения упругого материала, показанного на Рис. 4.8.1.2а. В остальных случаях качественное поведение такое же.

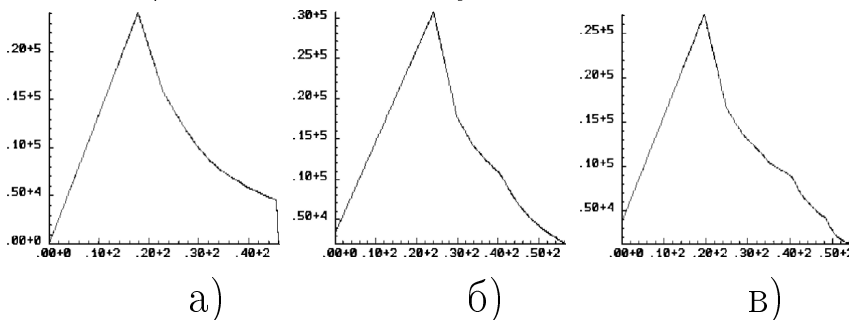


Рис. 4.4.4. Изменение безразмерного шага по времени, отнесенного к величине шага Куранта для явных схем и выбираемого из условий точности, от величин 10^4 для квазистатики в начале процесса до величин порядка 1 при распространении зон разрушения.

Моды разрушения сохраняются при измельчении шага сетки и смене формы ячеек. Зависимость решения от количества узлов можно проследить по результатам, представленным на Рис. 4.4.5.

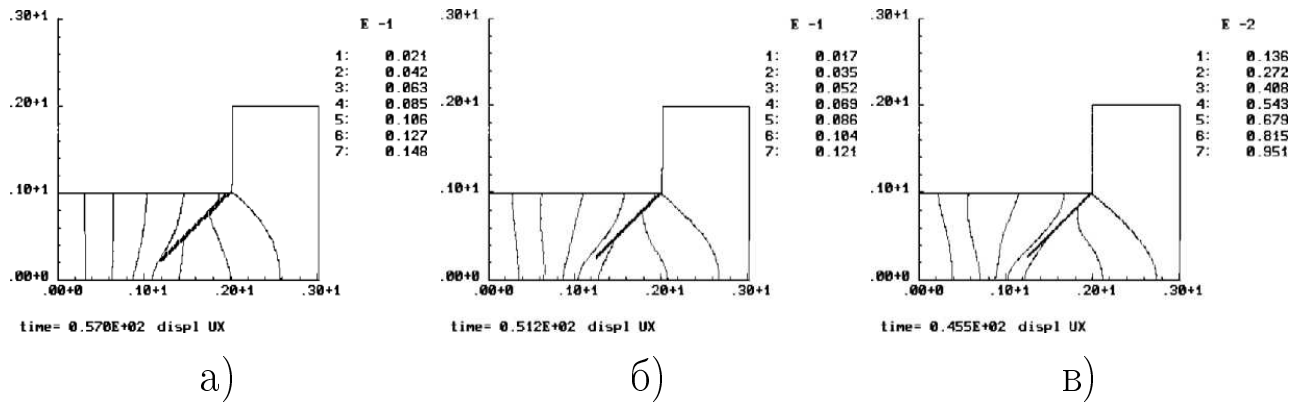


Рис. 4.4.5. Зависимость решения от шага пространственной сетки.

4.4.2 Резка металлического листа

Рассмотрим задачу о разрезании листа двумя жесткими штампами, один из которых (нижний) неподвижен, а второй (верхний) равномерно движется вниз. Горизонтальный зазор между штампами равен нулю. Расчетная схема показана на Рис. 4.4.6. На контакте реализованы условия свободного скольжения. На левом краю листа поставлены условия симметрии и правый край листа закреплен.

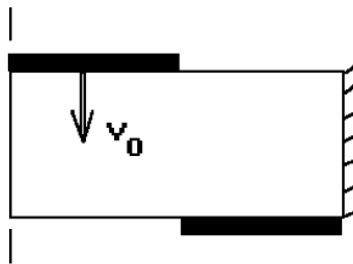


Рис. 4.4.6. Процесс резки металлического листа. Расчетная схема.

На рис. 4.4.7 показано распределение смещений, интенсивности напряжений, касательного и среднего напряжений для начала процесса. На финальной стадии процесса наблюдается сильная локализация деформаций вдоль узкой зоны намечающегося среза, которую можно видеть на Рис. 4.4.8, где показаны распределения смещений, интенсивности напряжений, касательного напряжения и пластической работы.

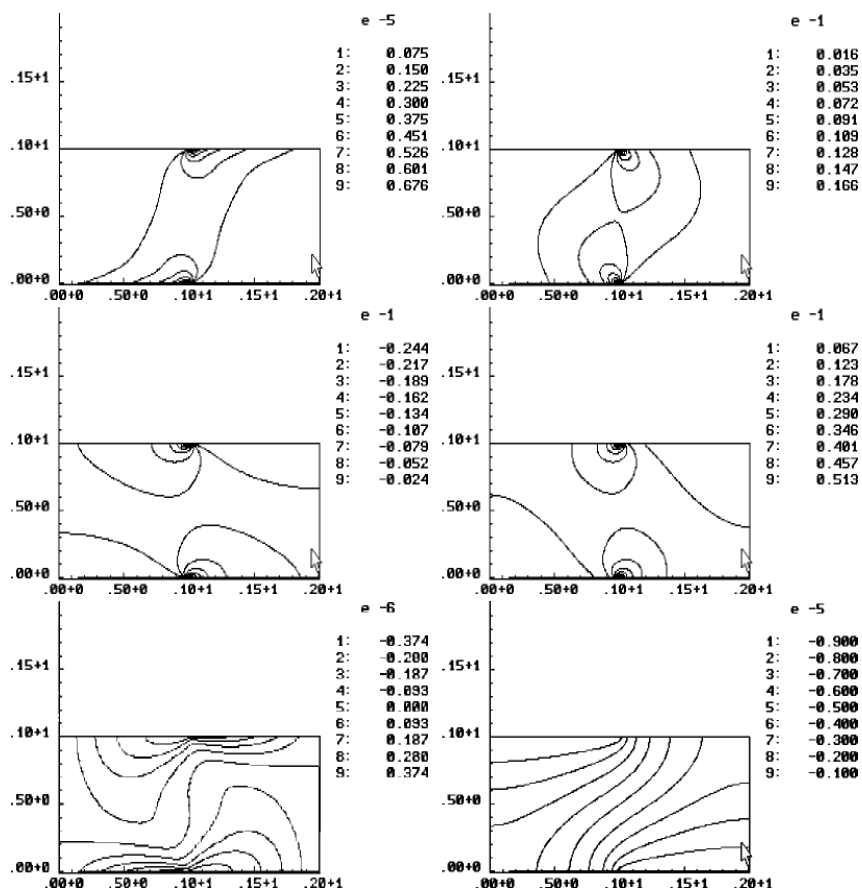


Рис. 4.4.7. Процесс резки металлического листа.

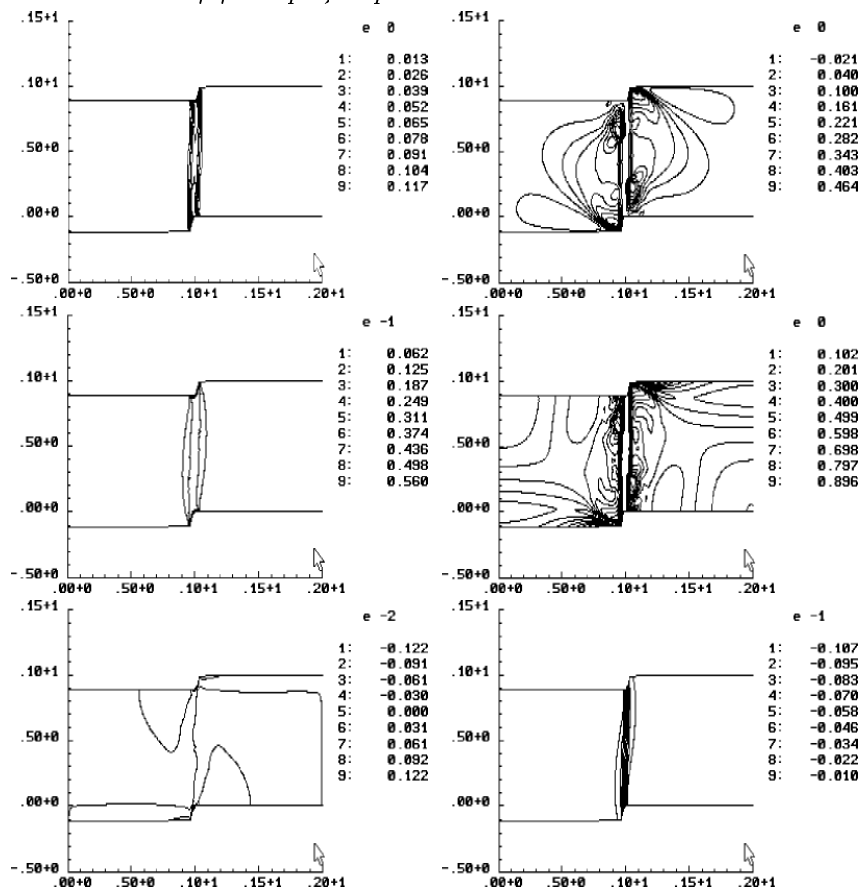


Рис. 4.4.8. Процесс резки металлического листа (продолжение).

4.4.3 Оползень склона

Еще один пример расчета выполнен для задачи об обрушении склона под действием веса сооружения. Результаты показаны на Рис. 4.4.9 и они имеют то же качественное поведение, что и в рассмотренных ранее случаях. Левая и часть верхней границы $x > 0.8$ свободны, штамп-сооружение занимает часть верхней границы $0 \leq x \leq 0.8$, на нижней и правой неподвижных границах поставлены условия свободного скольжения.

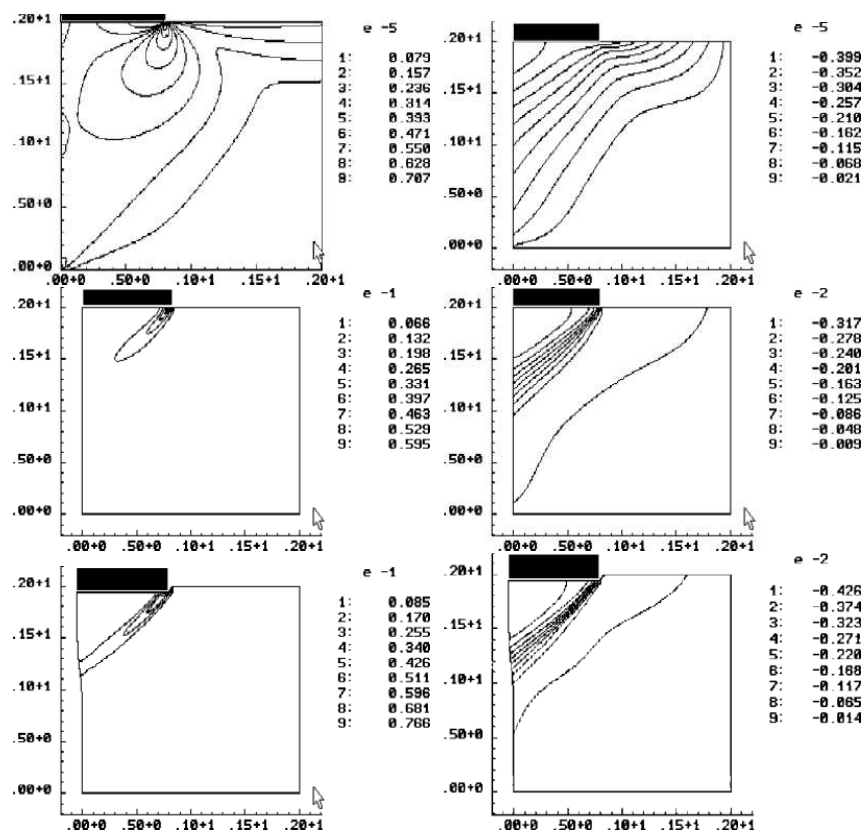


Рис. 4.4.9. Оползень. Локализация деформаций и разрушение на склоне под действием веса построенного на нем сооружения. Показано развитие максимальной деформации и горизонтального смещения.

4.4.4 Удар двух тел под углом с учетом разрушения.

Пластина-ударник ударяет пластину-преграду со скоростью $u_0/c^{(1)} = 0.2$, где $c^{(1)}$ - скорость звука в материале ударника. Ударник (1) и преграда (2) имели следующие свойства:

$$K^{(1)} = 975, \quad \mu^{(1)} = 369, \quad \sigma_s^{(1)} = 1.0, \quad d\sigma_s^{(1)}/da_p = 0.0, \quad c^{(1)} = 1$$

$$k_{\omega}^{(1)} = 0.0, \quad k_{\theta}^{(1)} = 10^3, \quad F = \varepsilon_{max} - \varepsilon(1)_{lim}, \quad \varepsilon_{lim}^{(1)} = 0.01$$

$$K^{(2)} = 243, \quad \mu^{(2)} = 92, \quad \sigma_s^{(2)} = 0.25, \quad d\sigma_s^{(2)}/da_p = 0, \quad c^{(2)} = 1$$

$$k_{\omega}^{(2)} = 0.0, \quad k_{\theta}^{(2)} = 10^6, \quad F = \varepsilon_{max} - \varepsilon(2)_{lim}, \quad \varepsilon_{lim}^{(2)} = 0.01$$

где ε_{max} - максимальная главная деформация.

Начальная сетка видна на Рис. 4.4.10а. Последующие картинки Рис. 4.4.10 b-f демонстрируют вычисленную эволюцию зон разрушения (узкие черные зоны). Окончательно преграда раскалывается на три части,двигающиеся независимо. Ударник рикошетирует и полностью разрушается.

Необходимо подчеркнуть, что попытки использовать пластическую работу и интенсивность касательных напряжений в качестве аргументов функции критерия разрушения F не позволили получить локализацию зон разрушения, подобную показанной на рисунке 4.4.10.

Рассматривались и многие другие задачи о разрушении частей конструкций при квазистатических и динамических разрушениях. Общий вывод таков: критерии максимальной деформации сдвига работают удовлетворительно в подавляющем числе различных случаев напряжено-деформированного состояния. Узкие зоны разрушения образуются в условиях квазихрупкого разрушения, когда предельная деформация достигается ранее, чем зоны пластичности охватывают значительную часть конструкции. Во многих случаях первоначально квазистатический режим деформации сменяется быстрым динамическим процессом деформации и ростом узких зон разрушения. Алгоритмы расчета, реализующие модели континуального разрушения, должны иметь контроль точности по максимальному приращению деформации на шаге по времени, иначе сходимость решений теряется. Размывание зон разрушения и искажение решений может происходить также в схемах с повышенной вязкостью. Схемная вязкость должна быть минимизирована в окрестности зон разрушения.

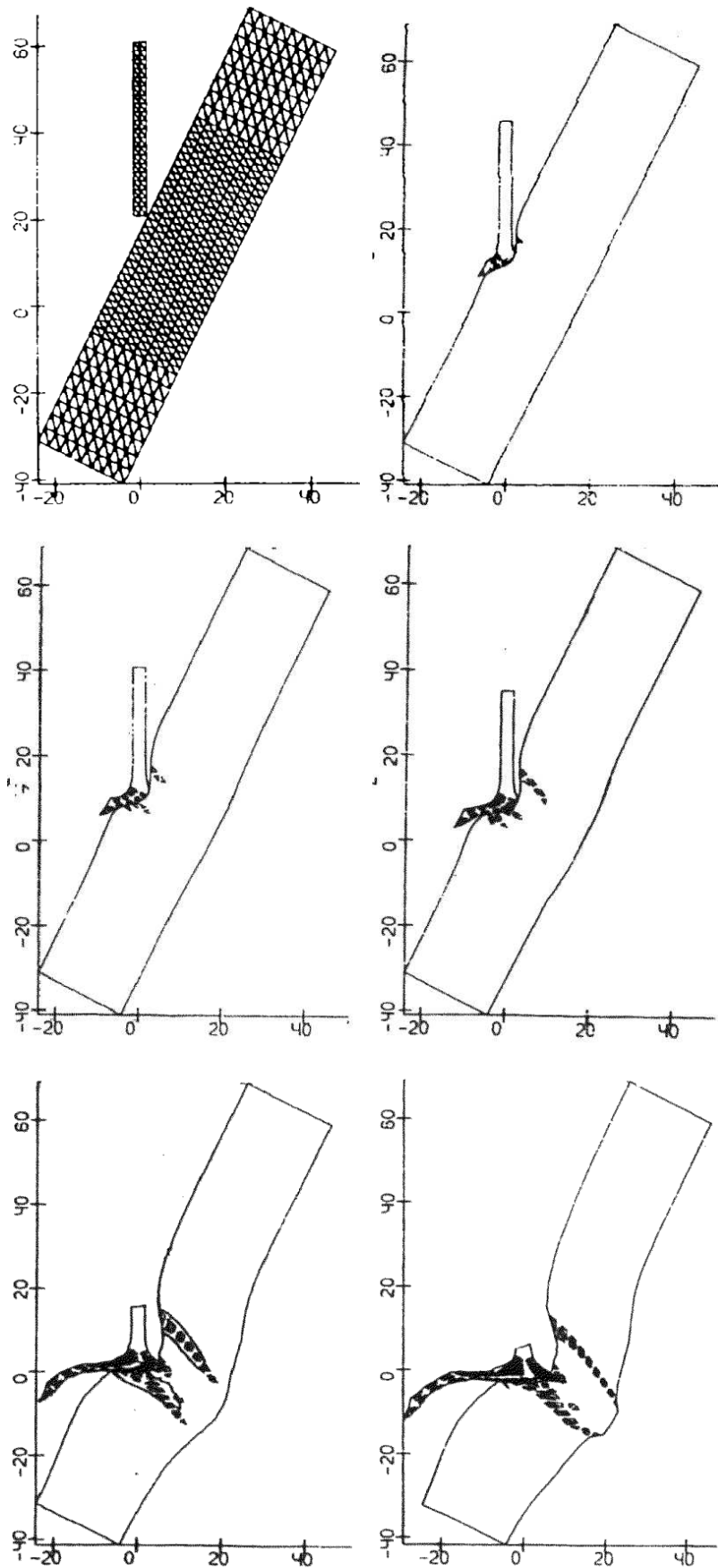


Рис. 4.4.10. Соударение пластин под углом с учетом разрушения. Эволюция зон разрушения.

Окончательно пластина раскололась на три части. Ударник разрушен полностью.

Резкая потеря способности сопротивления деформации является необходимым условием возникновения узких зон локализации деформаций. Для обеспечения сходимости результатов при дроблении временных и пространственных шагов критерий разрушения должен содержать масштабный множитель, вид которого подсказывается теорией трещин и механикой хрупкого разрушения. Известно, что в кончике трещины теория упругости предсказывает коренную особенность решения и неограниченный рост напряжений и деформаций. Поэтому критерий разрушения должен формулироваться в терминах коэффициентов концентрации напряжений и деформаций. Удовлетворительные результаты для сходимости предельных значений средней деформации разрушения растягиваемых образцов были получены с помощью критерия разрушения следующего вида:

$$\varepsilon_1 \sqrt{\min(h_x, h_y) / \max(x_{max} - x_{min}, y_{max} - y_{min})} \leq \varepsilon_{max}$$

где множитель с корнем как раз и учитывает асимптотику, подсказываемую теорией упругости.

4.5 Спекание порошковых композитов.

Рассмотрим примеры расчетов процессов спекания порошковых композитов на основе теории, описанной в главе 2.

4.5.1 Холодное прессование

Сначала проверим как теория описывает процесс уплотнения порошка засыпанного в форму под действием внешнего давления в идеализированных условиях однородного напряженно-деформированного состояния. Расчетная схема показана на Рис. 4.5.1а Левая и нижняя границы квадратного образца представляют оси симметрии. Верхняя и правая границы нагружены равномерным давлением, которое в течение периода времени $0 < t <$

50 поддерживается постоянным и равным единице. Зависимость внешнего давления от времени показана на правой картинке Рис. 4.5.1b. Материал имел следующие свойства:

$$K = 975/(1-\omega), \quad \mu = 369/(1-\omega), \quad k_y = 1, \quad dk_y/da_p = 0, \quad c = 1, \\ k_\omega = 0.1, \quad s_0 = 0, \quad k_\theta = 0 \quad (4.5.1)$$

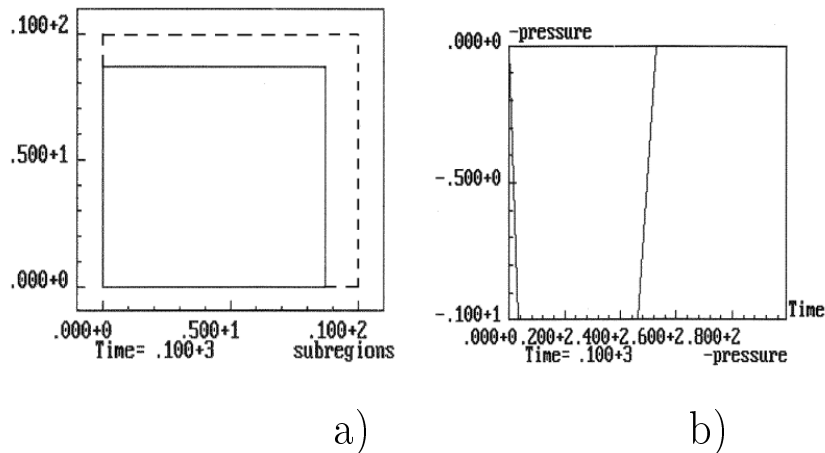


Рис. 4.5.1. Холодное прессование. Иллюстрация исходных данных.

Рассчитанные зависимости пористости и граничной скорости показаны на Рис. 4.5.2 согласно с аналитическим решением. Пунктиром показано начальное положение границы, сплошной линией - конечное.

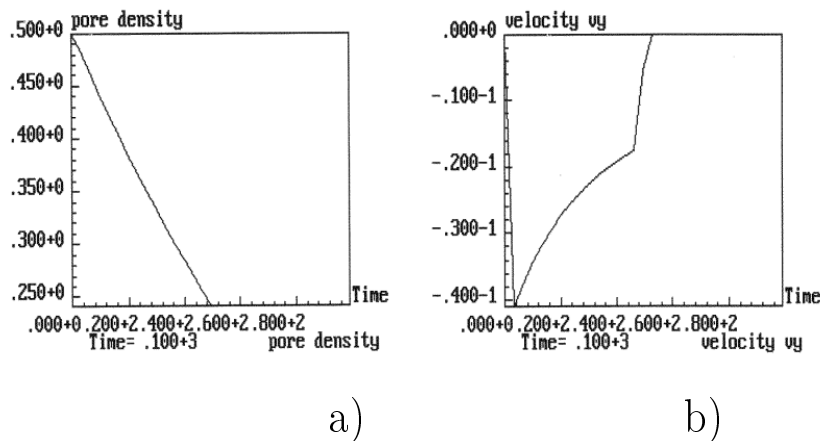


Рис. 4.5.2. Холодное прессование. Результаты проверочного расчета соответствуют аналитическому решению и представлениям о физике процесса.

4.5.2 Горячее спекание

Теперь проверим как работает теория при описании спекания в условиях однородного процесса. В начальный момент времени пористость равна 0.5, квадратный образец ("green body") равномерно разогрет, легкоплавкая составляющая расплавлена и капиллярные силы на поверхности пор, смачивающих твердо-сплавные частицы, обеспечивают сжимающее "напряжение спекания", благодаря которому порошковый материал уплотняется, поры съеживаются, а упругие и пластические свойства материала повышаются.

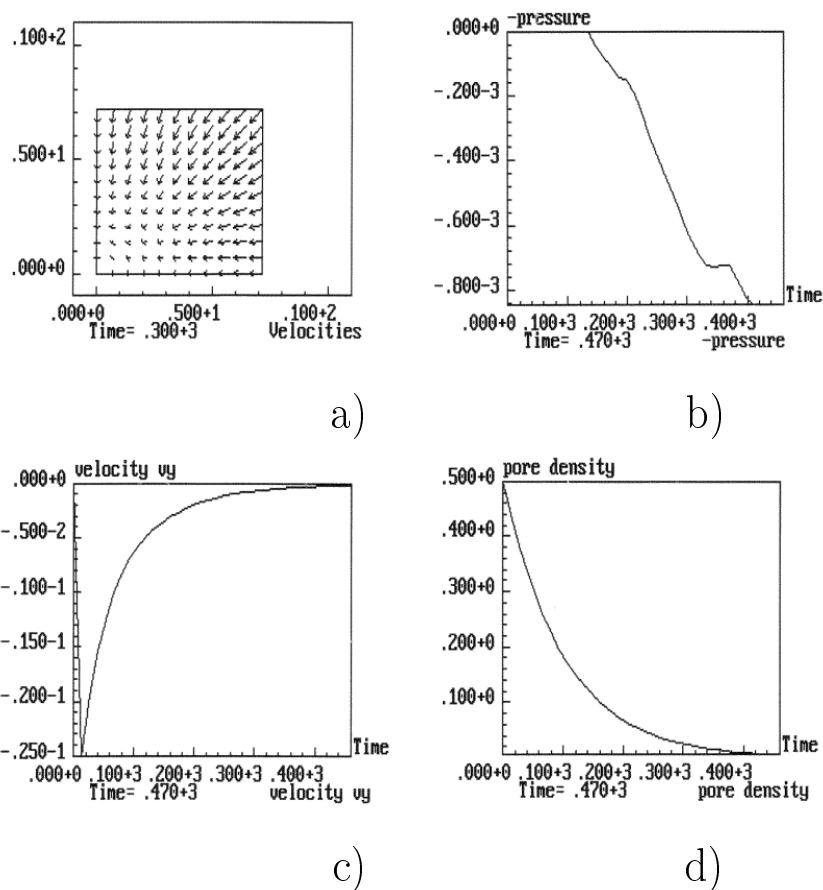


Рис. 4.5.3. Спекание (однородный процесс). Рассчитанные поле скоростей (a), истории давления (b), граничной скорости (c) и пористости (d).

Процесс спекания сопровождается всесторонней сжимающей деформацией, не вызывающей среднего напряжения (однородное состояние). Эта необратимая деформация обусловлена изменением "начальной" или естественной конфигурации. Для неоднородного состояния из-за несовместности пластической деформации

возникли бы поля начальных напряжений и упругих деформаций.

Начальная пористость принималась равной 0.5. Свойства материала были те же, что и предыдущем примере (формулы 4.5.1), кроме того, что теперь $s_0 = \omega$. Поле скоростей в течение процесса показано на Рис. 4.5.3а. Вычисленные истории давления, граничной скорости в точке (0,10) и пористости показаны на Рис. 4.5.3b-d.

4.5.3 Прессование и спекание

Рассмотрим пример расчета процесса спекания для случая неоднородного термо-механического состояния. История внешних воздействий показана на Рис. 4.5.4, расчетная схема и начальная сетка показана на Рис. 4.5.5. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в печь цилиндрической формы насыпан композитный порошок и утрамбован сначала плоским штампом до пористости $\omega = 0.5$. Это начальное состояние. Затем рассчитывается холодное прессование с помощью сферического штампа-крышки до неоднородного состояния, показанного на нижнем Рисунке 4.5.5 для $t = 30$. Далее штамп убирается, а тело ("green body") выдерживается до $t=40$. Далее печь нагревается до температуры T_0 , которая сохраняется постоянной до $t = 140$ и поддерживает напряжение спекания, зависимость которого от пористости принималась в виде:

$$s_0 = s_*(T_0)\omega$$

где $s_*(T_0) = 5$. Свойства материала, образующего композит, были приняты такими же, как и в предыдущих примерах.

Распределение пористости и пластической работы после холодного прессования показано на рис. 4.5.6. Вначале материал композита не имеет способности сопротивления деформации, его модули упругости и предел текучести зависят от пористости по

закону:

$$K = K_0 * (1 - \omega/\omega_0) , \quad \mu = \mu_0 * (1 - \omega/\omega_0) , \quad \sigma_p = \sigma_{p0} * (1 - \omega/\omega_0)$$

При холодном прессовании пористость, как было видно из рассмотренного выше модельного примера, убывает и материал начинает обретать способность к сопротивлению деформации. Из-за неоднородности состояния и нагружения (переменный контакт) график зависимости пористости от времени для этой стадии в отличие от модельного примера нелинеен (Рис. 4.5.9). На втором из рисунков 4.5.9 показано распределение контактной нормальной нагрузки под штампом. Трением между штампом, стенками печи и композитом пренебрегалось, хотя в программе возможность учета сил трения на контакте предусмотрена.

В процессе холодного прессования, являющегося необратимым процессом, композит нагревается, распределение температуры показано на Рис. 4.5.7. Полагаем, что этого тепла недостаточно для расплавления легкоплавкого компонента. Достигнув предельного положения, сферический штамп начинает обратное движение и до момента времени $t = 50$ напряжения и малые упругие деформации в композите немного релаксируют, но не исчезают из-за неоднородности состояния. Распределение интенсивности остаточных напряжений показано на втором из рисунков 4.5.7.

Далее в момент времени $t = 50$ начинается спекание и заканчивается при $t = 140$. Окончательная форма испеченного тела, распределение пористости и интенсивность остаточных напряжений показаны на Рис. 4.5.8.

Представленные расчеты показывают принципиальную возможность описания процессов спекания с помощью сформулированной в главе 2 теории. Для определенных порошковых композитов применяемая феноменологическая модель должна быть протарирована с помощью физических экспериментов по спеканию стандартных образцов простой формы, после чего численные алгоритмы главы 3 можно применить для предсказания формы

тел после прессования и спекания, распределения остаточной пористости, определяющей свойства композита, а также полей остаточных напряжений и деформаций.

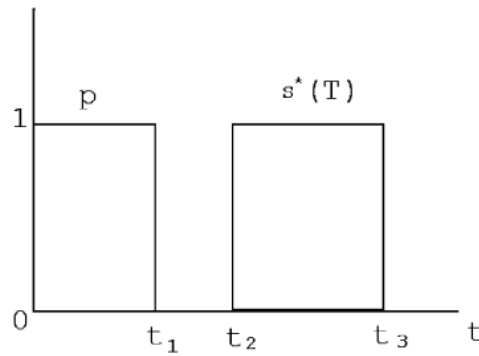


Рис. 4.5.4. История внешних воздействий: стадия холодного прессования $0 \leq t \leq t_1$, стадия релаксации $t_1 \leq t \leq t_2$, стадия спекания $t_2 \leq t \leq t_3$, релаксация $t > t_3$.

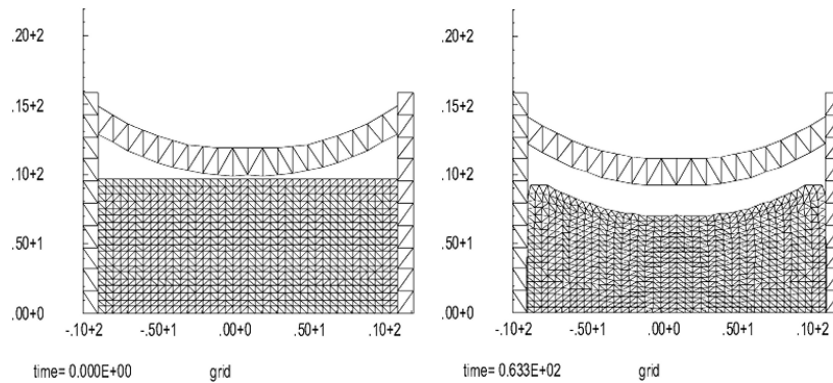
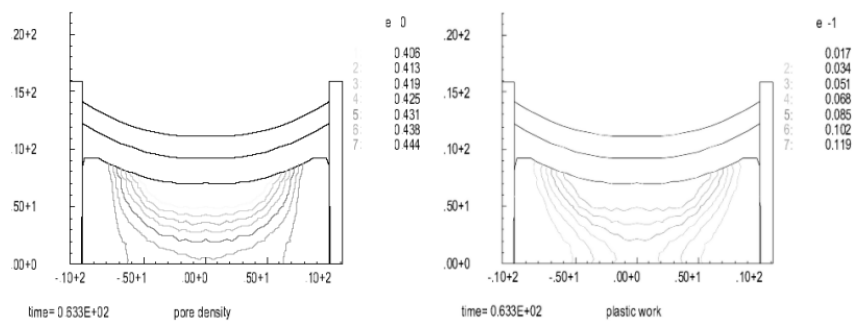


Рис. 4.5.5. Стадия холодного прессования порошка в цилиндрической форме подвижным сферическим штампом.



a)

b)

Рис. 4.5.6. Распределение пористости (a) и пластической работы (b) в конце стадии холодного прессования.

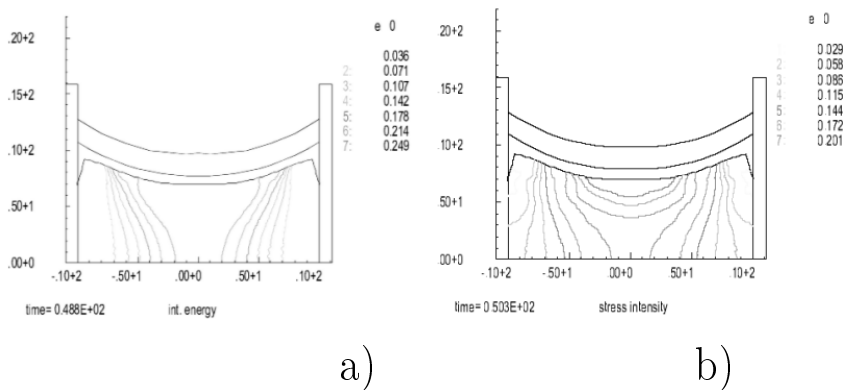


Рис. 4.5.7. Распределение температуры (a) и интенсивности напряжений (b) перед началом спекания (нагрев за счет пластической деформации).

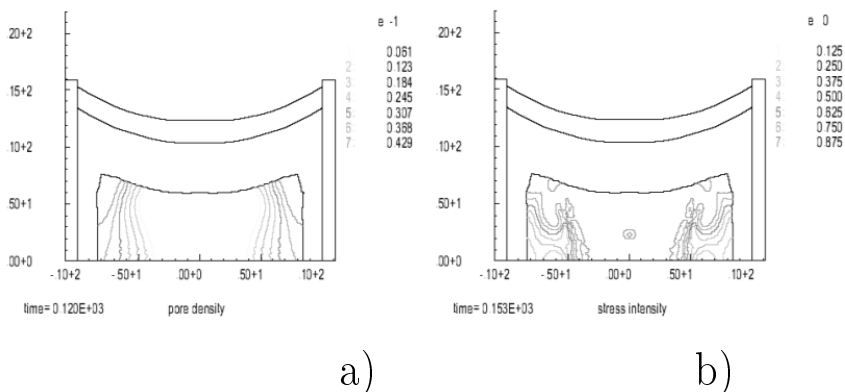


Рис. 4.5.8. Форма тела, распределение пористости (a) и интенсивности остаточных напряжений (b) после спекания.

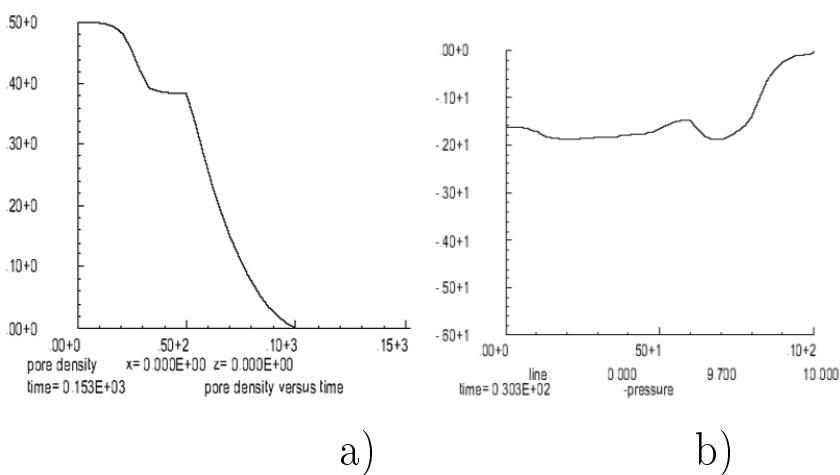


Рис. 4.5.9. История пористости в центре тела (a) и распределение контактной нагрузки под штампом для максимального сжатия (b).

4.6 Жидкость с границами раздела

4.6.1 Задачи о росте кристаллов из расплавов

Задачи о росте кристаллов из расплавов решались с помощью алгоритмов пакета программ АСТРА в серии работ, выполненных автором при участии А.И.Федюшкина и В.И.Полежаева. Автором построены алгоритмы решения и решены базовые задачи, соавторы выполнили параметрические расчеты и дали их физическую интерпретацию.

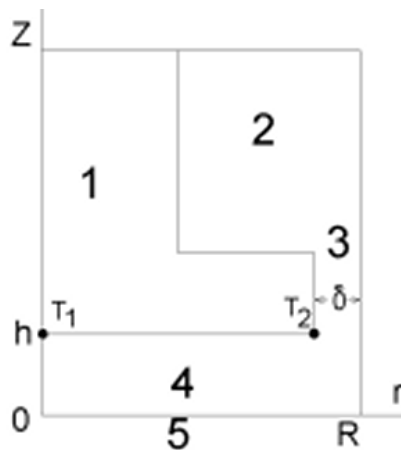


Рис. 4.6.5. Схема кристаллизатора метода ОТФ: 1 - нагреватель, T_1 и T_2 характерные температуры нагревателя, 2 - зона расплава над нагревателем, 3 - зазор между нагревателем и стенками тигля, 4 - рабочая зона между кристаллом и нагревателем, 5 - поверхность кристалла ($z=0$), R - радиус тигля, δ - величина зазора, h - высота рабочей зоны, Oz - ось симметрии.

Для иллюстрации этой части настоящей работы ограничимся кратким описанием полученных результатов расчета процессов роста кристаллов в вертикальных цилиндрических печах с погруженным нагревателем (технология Острогорского (1994) и Голышева (1995)). Процесс считается осесимметричным. Сечение печи показано рис. 4.6.5. Левая граница является осью симметрии. Нижняя граница (5) является подвижным фронтом кристаллизации, который для существенного упрощения расчета полагался плоским и движущимся с заданной постоянной скоростью V_0 .

Температура на фронте кристаллизации равна температуре фазового перехода. На внешней вертикальной стенке (правая граница) температура задана линейной функцией от z . Верхняя граница является открытой и на ней ставились условия продолжения решения (равенство нулю нормальных производных от решения). Расплав германия с примесью галлия занимает область рабочей зоны (2) между нагревателем (1) и растущим кристаллом (5), куда он поступает из зоны (4) над нагревателем через зазор (3).

На нижней поверхности нагревателя температура полагалась заданной и распределенной по линейному закону. На поверхности нагревателя и на стенках печи ставились условия прилипания.

Система уравнений и начально-краевая задача являются частными случаями общей формулировки раздела 2.11, отвечающими модели несжимаемой вязкой жидкости. Таким образом, математическая модель течения расплава основана на полных нестационарных уравнениях Навье-Стокса. Была учтена слабая сжимаемость в соответствии с приближением Буссинеска: во всех уравнениях задачи плотность полагалась постоянной, а ее слабая линейная зависимость от примеси и температуры учитывалась только при записи сил тяжести. Эти силы (силы плавучести), вызывают гравитационные конвективные течения.

В начале при $t = 0$ примесь считалась равномерно распределенной по расплаву. При кристаллизации в кристалл переходит только часть примеси, определяемая условием сегрегации $s = kC$, где C - концентрация примеси в расплаве, C_s - концентрация примеси в кристалле, $k \ll 1$ - коэффициент сегрегации (отторжения). Поэтому по мере роста кристалла происходит обогащение расплава примесью, а конвекция вызывает ее перемешивание. Соответственно на фронте кристаллизации распределение примеси все время меняется, а сам кристалл запоминает историю распределения примеси подобно тому, как растущие деревья запоминают историю климата в годовых кольцах, видимых на срезах стволов. В кристаллах хорошего качества примесь должна распределяться по возможности равномерно (особенно по радиусу),

иначе они направляются в переплавку. Распределение примеси зависит от многих условий, обсуждаемых далее, и оптимизация этих условий составляла смысл проведенного исследования.

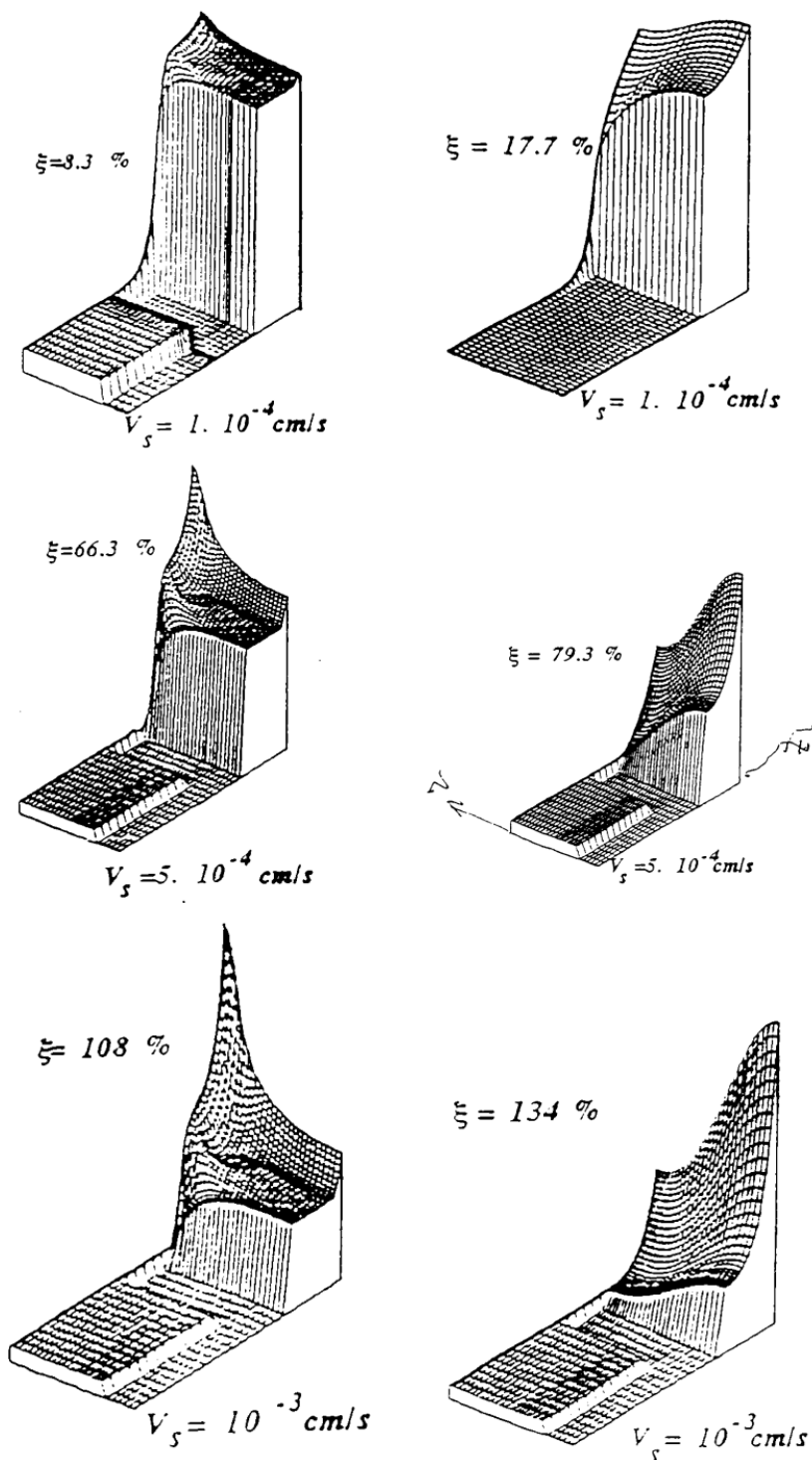


Рис. 4.6.6. Распределение примеси в расплаве в методе погруженного нагревателя (результат А. Острогорского).

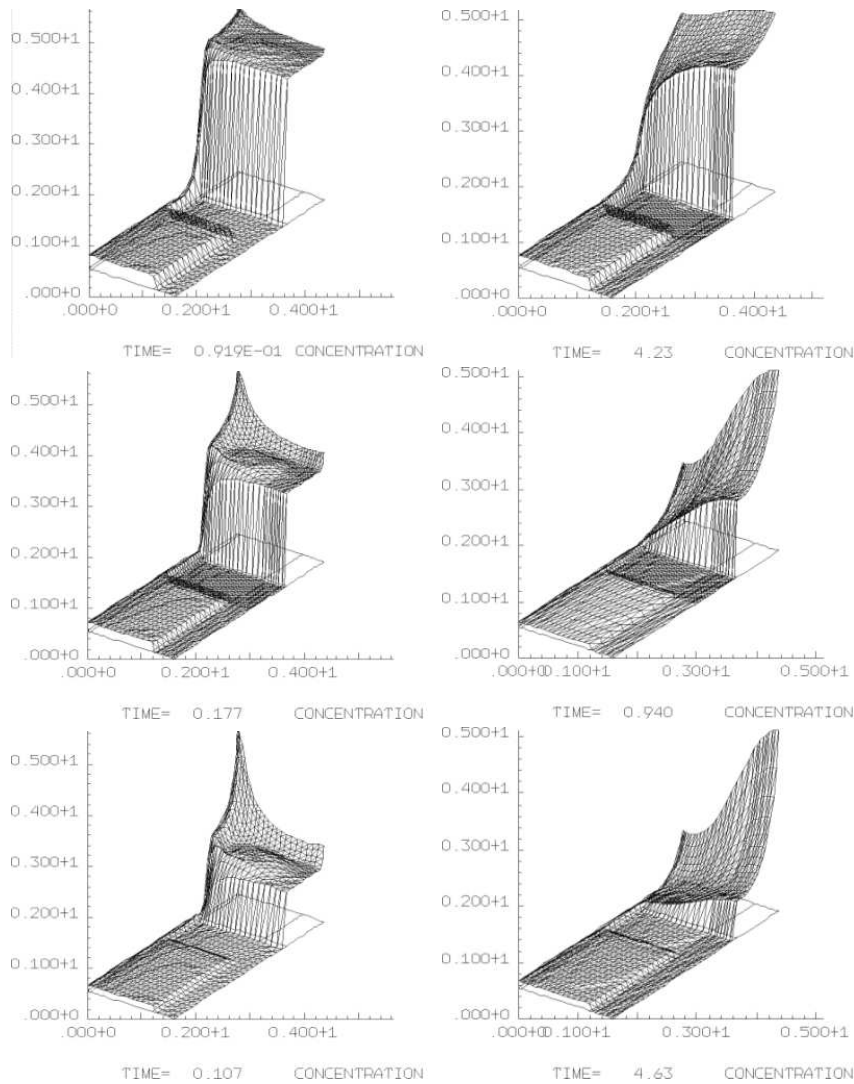


Рис. 4.6.7. Распределение примеси. Скорость роста: 0.0001 см/сек - верхний ряд, 0.0005 см/сек - средний ряд, 0.001 см/сек - нижний ряд; ускорение силы тяжести: наземное g_0 - левый столбец, орбитальное $0.001g_0$ - правый столбец.

Были выполнены все возможные тесты для проверки численных алгоритмов, реализующих методы решения разделов 3.3.1-3.3.4. В качестве иллюстрации на рис. 4.6.6 и 4.6.7 показано сравнение вычисленных распределений примеси в расплаве по результатам работ Острогорского (1995) и нашей (1997), достигаемое при установлении. Результаты, отвечающие различным гравитационным условиям (от земных до микрогравитации) и различным скоростям роста, полученные в работе Острогорского и в настоящей работе, прекрасно согласуются. В отличие от работы Острогорского, который использовал стационарную формулировку, в наших

работах решена нестационарная задача, что и позволило предсказывать распределение примеси в растущих кристаллах.

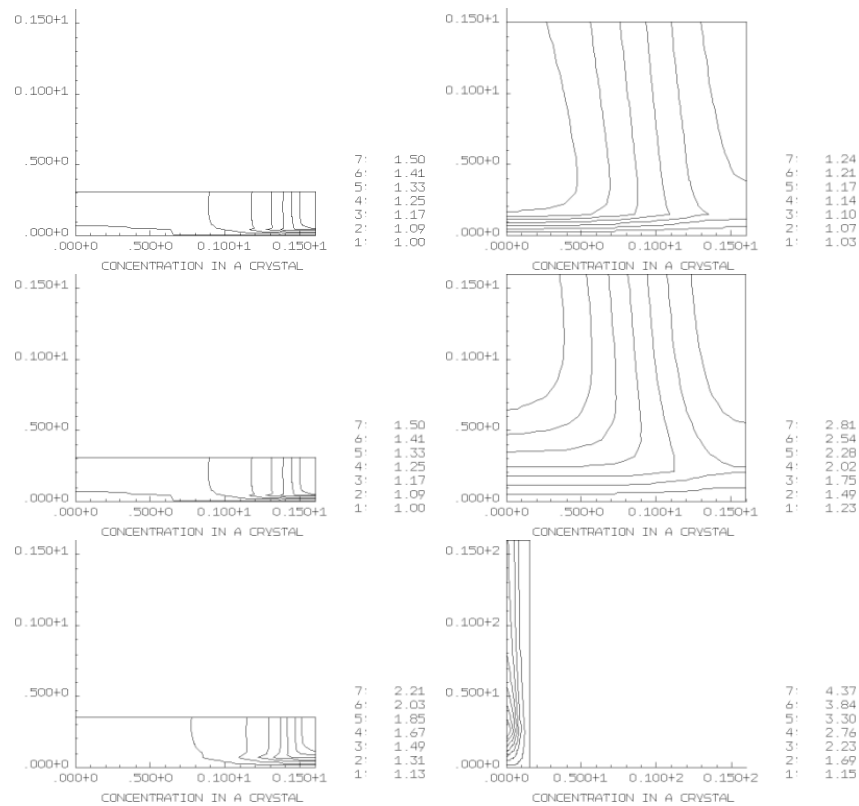


Рис. 4.6.8. Распределение концентрации Ga в кристалле Ge для 6 случаев процесса роста кристалла из

работы Острогорского. Левая колонка (сверху вниз): $g = g_0$,

$V_s = 0.0001 \text{ cm/sec}, 0.0005 \text{ cm/sec}, 0.001 \text{ cm/sec}$; правая колонка: $g = 0.001g_0$.

Примеры насчитанных распределений примеси в кристаллах для рассмотренных тестовых примеров показаны на Рис. 4.6.8.

Течение расплава в рабочей зоне около растущего кристалла и над нагревателем может меняться очень сильно в зависимости от геометрии печи, от величины зазора, от скорости роста, от силы тяжести, от вращения печи и нагревателя, от внешнего магнитного поля, тепловой схемы, вибрации и так далее. Подробный анализ влияния этих условий имеется в наших публикациях по результатам расчетов, выполненных А.И.Федюшкиным по программе АСТРА. Такой анализ проделан не только для метода погруженного нагревателя, но также для процессов Чохральского и Бриджмена.

Отметим, что печи и материалы в технологиях роста кристаллов непрозрачны, работают при очень высоких температурах (примерно полторы тысячи градусов) и эксперимент дает очень скудную информацию. Подбор режимов роста кристаллов в эксперименте сводится к анализу свойств выращенных кристаллов и поиску их соответствия с условиями выращивания. Длительность процесса (несколько часов), уникальность оборудования, дороговизна материалов (германий, арсенид галлия и т.п.), ограниченность получаемой в экспериментах информации о процессе делают численный эксперимент безальтернативным методом оптимизации подобных технологий.

4.6.2 Расчет течений со свободными границами, непрерывные маркеры

Для расчета движений тяжелой жидкости со свободными границами на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса были реализованы методы коррекции давления и штрафных функций с использованием техники непрерывных и дискретных маркеров (описание дано в главе 3). Результаты моделирования падения капли в бассейн, заполненный водой, показаны на Рис. 4.6.9, а задача о стекании воды с этажа на этаж через дыру показана на Рис. 4.6.10.

Амплитуда всплеска и скорость затухания колебаний уровня жидкости в этих задачах зависят от вязкости и от сеточного разрешения. В данном исследовании преследовалась цель построения алгоритмов, способных выдавать разумные решения задач на грубых сетках, поскольку решения практических задач проводится на пределе возможностей вычислительной техники и сетки являются вынужденно весьма грубыми. Обсуждаемые задачи решены на сетках $12 \times 12 \times 12$ и $24 \times 24 \times 24$ на однопроцессорном ноутбуке с частотой процессора 100 МГц (в свое время этот компьютер считался очень даже быстродействующим). Хорошим примером применения описанных алгоритмов является задача об обрушении столба жидкости в замкнутом бассейне, решение которой по-

казано на Рис. 4.6.11.

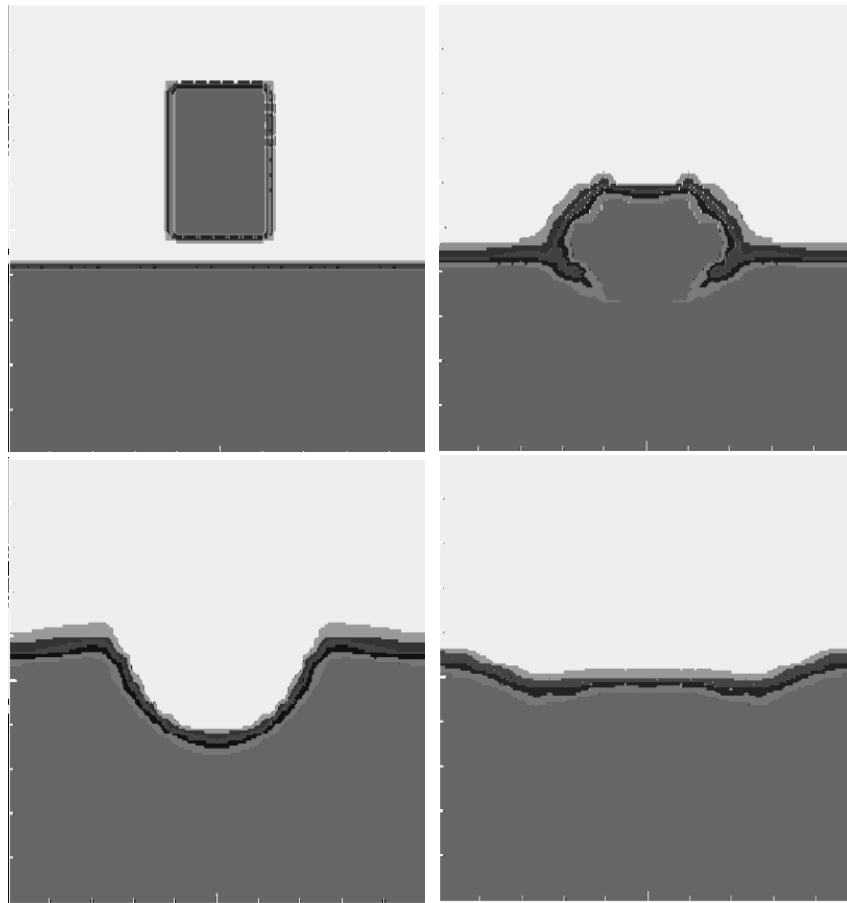


Рис. 4.6.9. Падение капли в бассейн, вязкая несжимаемая жидкость, уравнения Навье-Стокса-Буссинеска, метод непрерывного маркера.

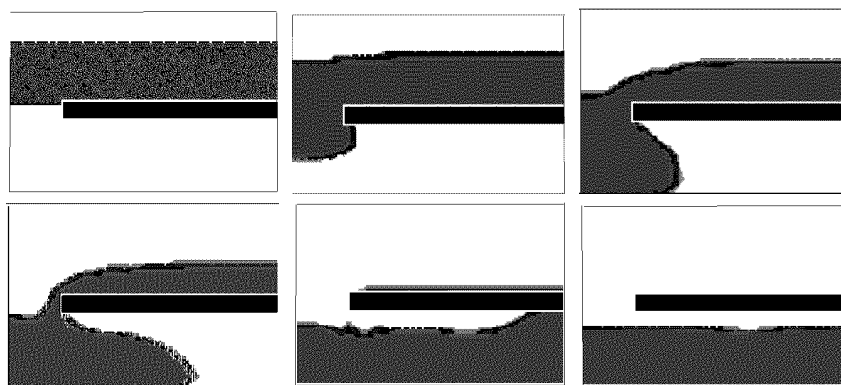


Рис. 4.6.10. Стеkanie воды с этажа на этаж через дыру. Вязкая несжимаемая жидкость, метод непрерывного маркера.

Основные трудности реализации связаны с расчетом транспортного уравнения для непрерывного маркера и с использованием функции непрерывного маркера для реализации граничных

условий на подвижных свободных границах. Функция непрерывного маркера равна единице в области, заполненной жидкостью, и нулю в пустом пространстве. Изоповерхность $C = 0.5$ представляет свободную подвижную границу. При решении транспортного уравнения для непрерывного маркера скорость конвекции определяется по значениям скорости в узлах со значением маркера $C > 0.5$. Поскольку в условиях переменной области решения граничные условия для давления и скоростей на свободных границах реализуются приближенно, консервативность неизбежно нарушается и для ее восстановления в алгоритм введена процедура корректировки функции непрерывного маркера, которая одновременно предотвращает размывание границ. Целью этой процедуры является поддержание интеграла от функции C по области решения постоянным (сохранение массы), обеспечение изменения функции C в пределах от 0 до 1 и предотвращение размывания границ (малость ширины перехода C от 0 к 1 в окрестности свободных границ).

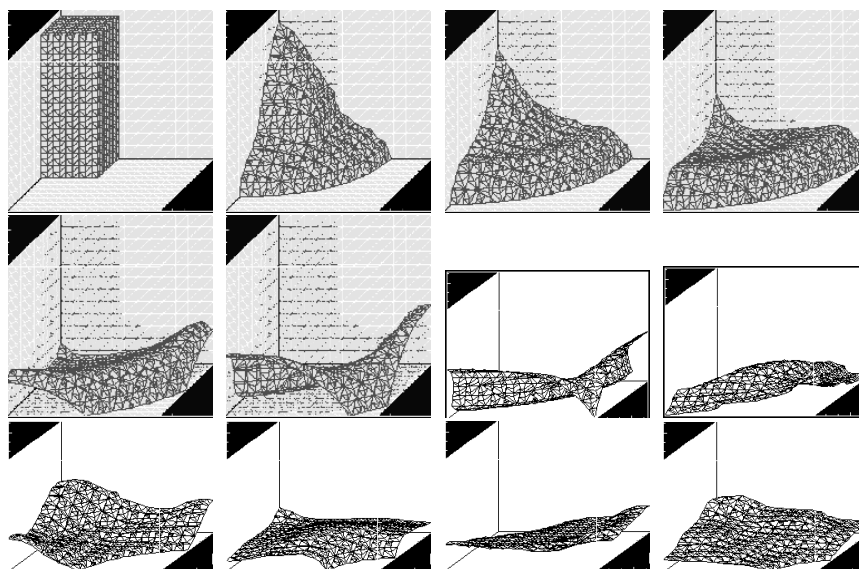


Рис. 4.6.11. Обрушение водяной колонны в замкнутом бассейне.

4.6.3 Фонтаны и струи

Рассмотрим результаты применения метода дискретных маркеров к расчету течений со свободными границами.

На Рис. 4.6.12 приведено решение задачи о падении горизонтальной струи в водоем. Нижняя граница является дном, на котором заданы условия скольжения. Левая и правая границы являются открытыми, на них заданы условия продолжения решения. В начальный момент над водной поверхностью через левую границу начинает бить струя воды с постоянной горизонтальной скоростью. Под действием силы тяжести она падает в водоем, принимая форму параболы. Возникающее течение можно разглядеть по движению маркеров.



Рис. 4.6.12. Падение в водоем горизонтальной струи.

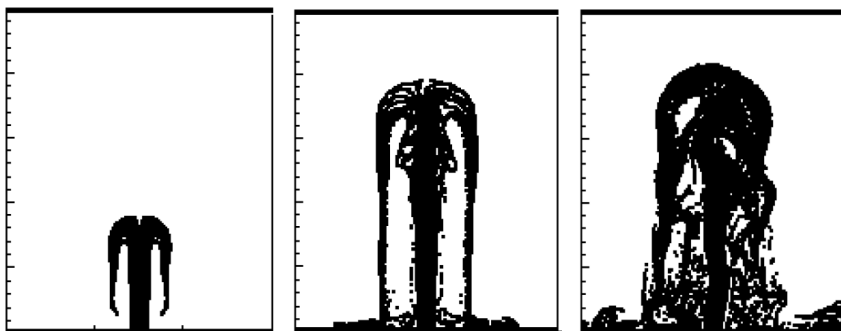


Рис. 4.6.13. Фонтан и лужа от вертикальной струи.

На рис. 4.6.13 показан результат расчета для случая вертикальной струи воды. Рассчитан процесс образования фонтана и лужи. Нижняя граница является непротекаемой, на ней заданы условия скольжения. Боковые и верхняя границы являются открытыми, на них ставятся условия продолжения.

Как и в случае непрерывных маркеров алгоритм проверялся не только на стандартных тестах для задач термогравитационной конвекции, но также на специфических тестовых задачах для течений с подвижными свободными границами. Например, дополнительно проверялась правильность расчета гидростатики в условиях частично заполненной тяжелой жидкостью области решения, сохранение массы во времени в покоящейся и в свободно

падающей жидкости со свободными границами (капли). Эти тесты нетривиальны и позволяют эффективно отсеять неверные варианты алгоритмов. Напомним, что еще во введении отмечалось, что при численной реализации число вариантов алгоритма может быть очень большим: вспомним, например, сколько вариантов имеет алгоритм гауссова исключения и что не все они устойчивы.

Метод дискретных маркеров потребляет больше ресурсов вычислительной машины по сравнению с методом непрерывного маркера, но дает более живые картины течений. В настоящей работе эти методы реализованы на конве метода конечных элементов. Отличительной чертой разработанных алгоритмов этого метода является рассмотрение открытых входных и выходных границ, через которые в область решения поступают новые маркеры или, наоборот, покидают ее. Алгоритм в пределах доступной памяти на открытых границах создает новые входящие маркеры и уничтожает уходящие маркеры. Проблемы с нехваткой дискретных маркеров возникают в зонах интенсивного разрежения, наблюдающихся к примеру в стоках воды через плотины. Расстояние между маркерами в падающих струях возрастает и может превзойти размер счетных ячеек. В струях при этом могут появляться разрывы нефизической природы.

В задаче о горизонтальной струе, пока струя не встретила поверхность водоема, можно заметить, что конец струи "лохматится" из-за погрешностей расчета скорости движения маркеров на свободных границах. Алгоритм такого расчета неоднозначен, имеются варианты алгоритма, в которых этот недостаток устранен. Для этого скорости движения граничных маркеров должны определяться экстраполяцией на границу значений скорости из узлов, окруженных маркерами. "Лохмотья" образуются при тупой реализации сквозного счета с интерполяцией без должного анализа типа узлов вблизи подвижной свободной границы.

4.7 Адаптивные сетки

Приведем результаты применения уравнений нелинейной теории термоупругости к задаче управления адаптивной сеткой. Это удобно сделать на примере нестационарного сверхзвукового течения идеального газа в канале со ступенчатым сужением, поскольку эта задача является одним из наиболее распространенных тестов для численных методов и ее решение хорошо известно.

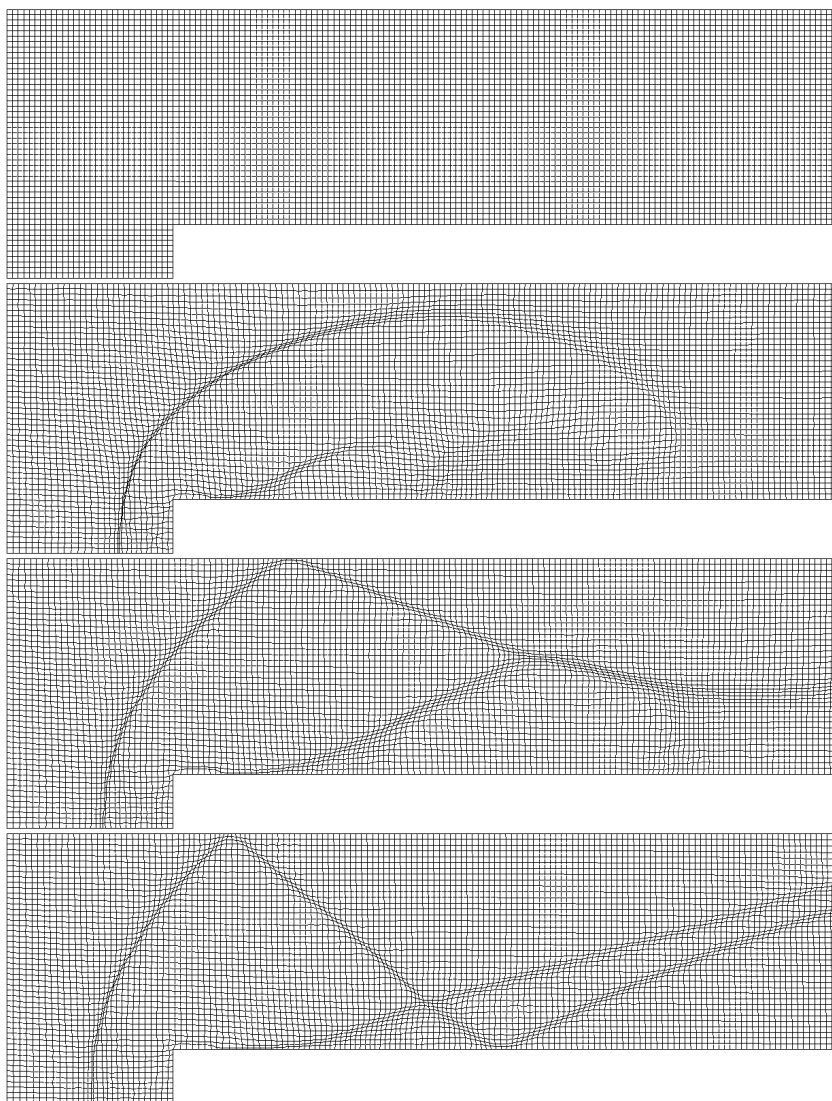


Рис. 4.7.1. Применение уравнений нелинейной термоупругости для управления адаптивной сеткой в задаче о сверхзвуковом течении в канале со ступенчатым сужением для числа Маха $M=3$. Картинки соответствуют моментам времени $0,0$, $0,5$, $1,0$, $2,0$.

Результаты, полученные по программе АСТРА, показаны на Рис. 4.7.1-4.7.2. Положение ударных волн и параметры течения хорошо согласуются и с известными данными

[309](Colella, Woodward, 1984) и недавно уточненными решениями [231](Azarenok, 2001), [230](Azarenok, Ivanenko, 2001).

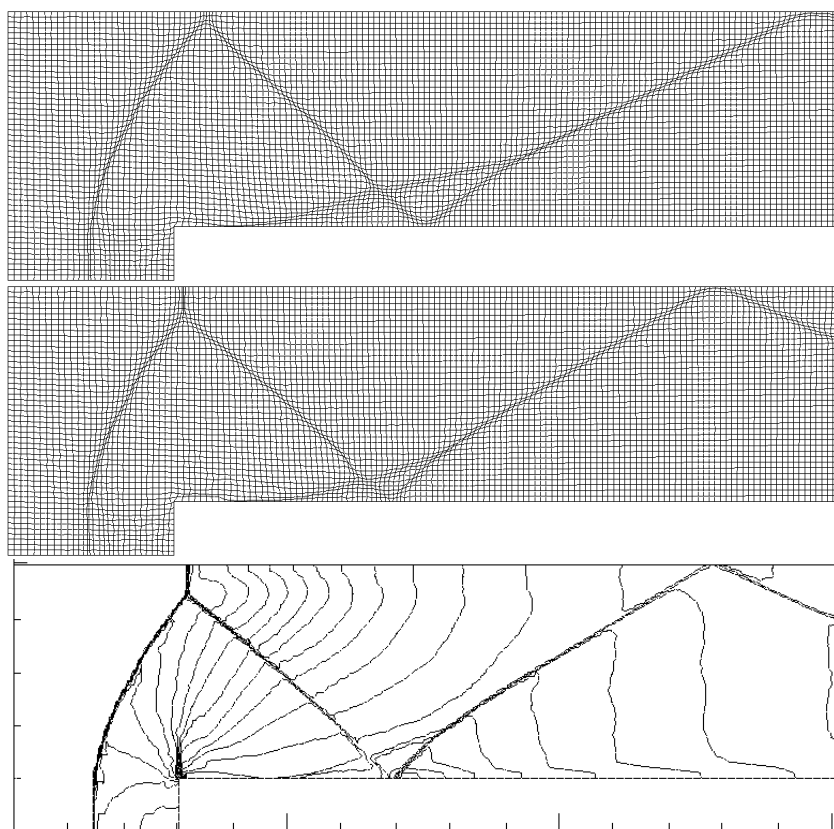


Рис. 4.7.2. Применение уравнений нелинейной термоупругости для управления адаптивной сеткой в задаче о сверхзвуковом течении в канале со ступенчатым сужением для числа Маха $M=3$. Адаптивная сетка показана для моментов времени 3.0, 4.0. Изолинии плотности для момента времени 4.0 отвечают значениям $0.079+ix0.424$, $i=1,\dots,14$.

Начальная равномерная сетка и конфигурация области решения показаны на Рис. 4.7.1. Газ течет слева направо. На верхней и нижней границах заданы условия непротекания. На левой границе заданы параметры невозмущенного потока ($\rho = 1$, $v_x = 1$, $v_y = 0$, $U = 0.44$). Показатель адиабаты γ и число Маха M равны: $\gamma = 1.4$, $M = 3$. На выходной границе поток сверхзвуковой и граничных условий не требуется. Высота области решения 1.0, длина - 3.0, высота ступеньчатого препятствия 0.2, расстояние от входа до препятствия - 0.6. В начальный момент времени $t = 0$ поток невозмущен, стационарная структура потока развивается к значению времени $t = 4.0$ и окончательно устанавливается к $t = 12$. Расчет проводился на сетках: 30x10, 60x20, 120x40,

240x80. Показываемые результаты дала простейшая двухслойная центрально-разностная явная схема, примененная к дивергентной форме уравнений и регуляризованная экстраполяцией давления на новый временной слой плюс монотонизирующее нелинейное сглаживание основных искомым функций в соответствии с описанием главы 3. Отметим, что расчеты проводились и с использованием других, описанных в главе 3 конечно-элементных схем, отличие результатов по различным схемам заметно на грубых сетках и быстро исчезают при их измельчении. Даже на самой грубой сетке (30x10) при этом основные скачки и отражения ухватываются правильно.

На рис. 4.7.3 показано поведение адаптивной сетки, управляемой уравнениями нелинейной термоупругости, в задаче о термогравитационной конвекции. Эта задача служит стандартным тестом для алгоритмов расчета несжимаемых вязких течений.

В случае выбора нормы градиента функции тока в качестве адаптационной функции (левая колонка Рис. 4.7.3) сетка сгущается в зоне максимальных скоростей, так как градиенты функции тока при этом максимальны по модулю. В центральной части области решения скорости малы и там сетка разрежена. В правой колонке на Рис. 4.7.3 приведено решение для случая, когда роль адаптационной функции отведена норме градиента завихренности. Сетка при этом сгущается у стенок. Отсюда видно, что поведение адаптивных сеток существенно зависит от выбора адаптационной функции и могут возникать противоречия в требованиях наилучшего описания компонентов решения. Хорошая сетка для одних компонентов может быть неудачной для других.

Расчеты тестовых задач, предложенных в работах de Vahl-Davis (1983) и Wheeler (1990) для термогравитационных конвективных течений вязкой жидкости, выполненные по программе АСТРА, показали существенное уменьшение погрешности численных решений при использовании адаптивных сеток: точность результатов на адаптивной сетке 20x20 и на равномерной сетке

80x80 примерно одинакова (сопоставима).

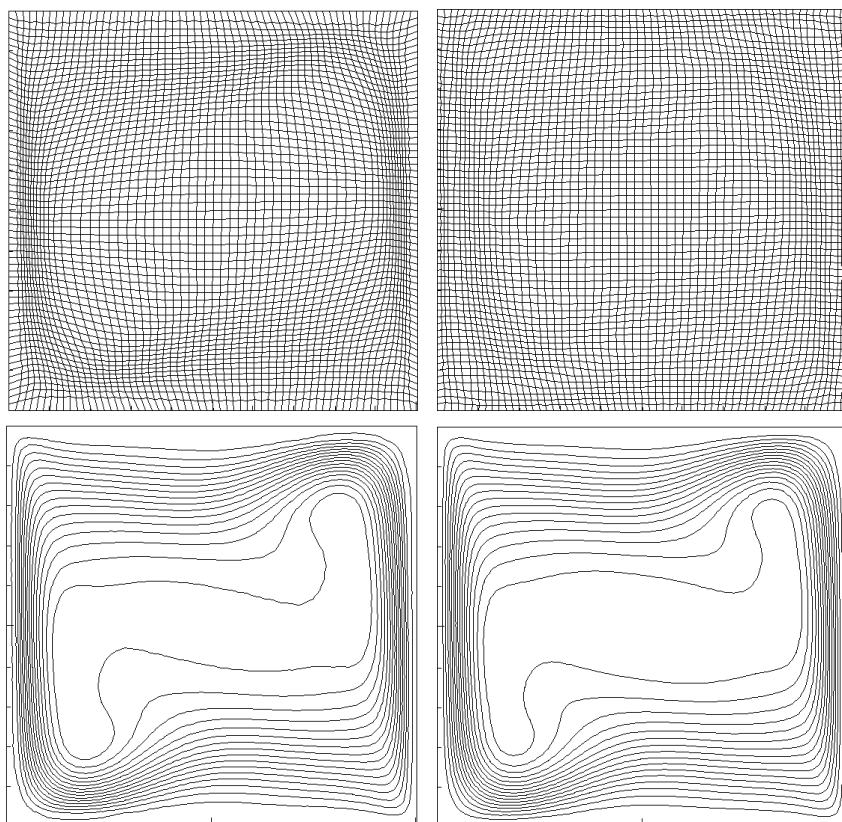


Рис. 4.7.3. Поведение адаптивной сетки, управляемой уравнениями нелинейной термоупругости, и функции тока в задаче о термогравитационной конвекции вязкой несжимаемой жидкости при числе Грасгофа $Gr =_{10} 7$ для двух случаев выбора адаптационной функции: функция тока (левая колонка) и завихренность (правая колонка).

В настоящей работе при расчете больших деформаций упругопластических тел (формование, высокоскоростные соударения) предпочтение было отдано геометрической адаптации сетки к подвижным границам, поскольку геометрическая и динамическая разновидности сеточной адаптации могут отражать противоречивые тенденции: геометрическая адаптация сохраняет сетку по возможности равномерной в условиях переменной области решения, а динамическая сгущает ее в зонах больших градиентов. Наличие больших градиентов решения в зоне контакта соударяющихся тел требует от алгоритма динамической адаптации сгустить сетку, а нежелательность малых размеров ячеек, из-за которых временной шаг явных схем устремляется к нулю, требует отдать предпочтение алгоритму геометрической адаптации, выравнивающему размеры ячеек.

Отметим, что алгоритм сеточной адаптации на основе уравнений термоупругости был предложен и детально описан автором в работе (Бураго, 1984). К сожалению наша работа осталась незамеченной. Тем не менее, развитие алгоритмов адаптации, история которого освещена в работах (Иваненко, 1997, 2000; Ball, 2002), показывает, что развиваемые в сеточных методах уравнения построения сеток и управления ими становятся все более похожими на уравнения термоупругости. После старта с отображений на основе оператора Лапласа в 60-е годы 20-го века развитие методов построения сеток целенаправленно идет в сторону теории упругости: через квазиконформные отображения на основе обращенного оператора Лапласа (Winslow, Годунов, Прокопов, Tompson, Лисейкин, Иваненко и др.), через осознание важности требований инвариантности отображений по отношению к ортогональным преобразованиям систем координат, обратимости деформаций сеточной среды, положительности якобиана отображения, необходимости контроля формы ячеек и управления их деформацией. Можно ожидать, что в будущем алгоритмы, подобные примененному в настоящей работе, учитывающему упомянутые требования, станут популярными.

Следует отметить, что задача построения алгоритмов управления адаптацией сеток еще далека от окончательного разрешения. Представленный алгоритм, как и его имеющиеся в литературе аналоги, пока обеспечивают лишь уменьшение ошибок аппроксимации, но не их минимизацию в условиях заданного числа дискретных элементов (узлов, ячеек). Весьма вероятно, что в дальнейшем алгоритмы управления адаптивными сетками станут более определенными и разумными за счет вариационных трактовок алгоритмов как алгоритмов минимизации ошибок.

Заключение

В книге собрана, систематизирована и прокомментирована литература по численным методам решения задач механики с подвижными границами раздела сред при больших деформациях.

Получены новые результаты по теории механики сплошной среды. А именно, дано последовательное обоснование основных уравнений механики сплошных сред в подвижных адаптивных координатах. Показано, что модель сплошной среды полностью определяется заданием набора независимых параметров состояния, ответственных за происходящие процессы, и двух функций, свободной энергии и диссипации, а определяющие соотношения получаются как решения неравенства диссипации без привлечения каких-либо дополнительных принципов. Даны примеры вывода определяющих уравнений для типичных сред дифференциального типа: вязких/невязких жидких и газообразных, нелинейных термо-упругих, упругопластических и упруговязкопластических. Найдена термодинамически корректная форма уравнений повреждающейся упругопластической среды и построены уравнения для описания процессов спекания порошковых композитов.

Построен набор конечно-элементных алгоритмов, позволяющих единообразно решать трехмерные квазистатические и динамические задачи с подвижными границами раздела в рамках произвольного Эйлера-Лагранжева подхода для сплошных сред дифференциального типа. По сравнению с традиционными матричными предложенные алгоритмы неявных схем очень просты и кратки, так как не содержат никаких матричных операций и основаны на ньютоновской квазилинеаризации (внешние итерации по нелинейности) и методе сопряженных градиентов (внутренние итерации для решения вспомогательных линеаризованных задач). Помимо простоты реализации и гибкости предложенные алгоритмы имеют значительное преимущество в быстродействии

и требуют меньше машинной памяти по сравнению со стандартными матричными конечно-элементными алгоритмами. При решении задач динамики по эффективности данные неявные схемы вполне сравнимы с явными схемами. Явные схемы для нестационарных задач также разработаны и представляют различные варианты двухслойных схем с нелинейной искусственной вязкостью, обеспечивающей квазивторой порядок точности.

Для расчета подвижных границ раздела упомянутые выше конечно-элементные схемы снабжены рядом новых вспомогательных алгоритмов:

* для расчета контактных взаимодействий с учетом переменной зоны контакта реализованы алгоритмы явного выделения контактных границ, а именно метод множителей Лагранжа и метод штрафных функций;

* для улавливания зарождающихся и развивающихся контактных границ при разрушении тел с фрагментацией разработаны алгоритмы сквозного счета;

* для отслеживания подвижных свободных границ и границ раздела сред при экстремально больших деформациях развиты алгоритмы методов непрерывного и дискретных маркеров;

* для адаптации произвольно подвижных сеток к решению и к подвижным границам успешно применены обычные уравнения термоупругости.

Исследован ряд природных и технологических процессов, а именно:

* контактные взаимодействия,

* формование,

* высокоскоростные соударения тел и взрывы,

* разрушение с фрагментацией,

* спекание порошковых композитов,

* выращивание полупроводниковых кристаллов,

* сжимаемые и несжимаемые течения со свободными границами, ударными волнами и пограничными слоями.

Список литературы

1. Аганин А.А., Кузнецов В.Б. Метод консервативной интерполяции интегральных параметров ячеек произвольных сеток. Динамика оболочек в потоке. // Труды семинара. Казань: Казанский физ.-тех. инст. 1985, Вып. 18, С. 144-160.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками // М.: Наука, 1983. 488 с.
3. Механика контактных взаимодействий // под ред. В.М. Александрова и И.И. Воровича, Москва, Физматгиз, 2001.
4. Аннин Б.Д., Садовская О.В., Садовский В.М. Численное моделирование косоугольного соударения пластин в упругопластической постановке // Физ. мезомеханика, 2000. Т. 3. N. 4. С. 23-28.
5. Аннин Б.Д., Садовская О.В., Садовский В.М. Численное моделирование волнообразования при сварке взрывом в упругопластической постановке // Материалы Междунар. конф. "Синергетика 2000". Комсомольск-на-Амуре, 2000. С. 52-54.
6. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел, М.: Наука, 1991. 175 с.
7. Астанин В.В., Галиев Ш.У., Иващенко К.В. Особенности деформирования и разрушения алюминиевых преград при взаимодействии по нормали со стальным ударником // Проблемы прочности. 1988. N. 12. С. 52-58.
8. Анучина Н.Н. О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями // Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1970. Т. 1. N. 4. С. 3-84.

9. Анучина Н.Н., Бабенко К.И., Годунов С.К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1979. 295 с.
10. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей // М.: Мир, 1978. С. 309.
11. Ахмадеев Н.Х. Исследование откольного разрушения при ударном деформировании. Модель поврежденной среды // ПМТФ, 1983, N. 1, с. 158-167.
12. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Петров М.В. Численное решение задач нестационарного контактного взаимодействия упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1984. Вып. 28. С. 54-59.
13. Баженов В.Г., Кибец А.Г., Садырин А.И. О модификации схемы Уилкинса численного решения трехмерных динамических задач // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и программное обеспечение задач прочности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1986. Вып. 34. С. 14-19.
14. Баженов В.Г., Прокопенко М.Б. Численное решение осесимметричных нелинейных нестационарных задач динамики составных упругопластических конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб., Нижний Новгород, Изд-во Нижегородского ун-та, 1991. С. 55-63.
15. Баженов В.Г., Кибец А.Г. Численное моделирование нестационарного деформирования упругопластических кон-

- струкций методом конечных элементов // Изв. РАН. МТТ. 1994. N. 1. С. 52-57.
16. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. N. 2. С. 20-26.
 17. Баженов В.Г., Кибец А.И., Кибец Ю.И., Цветкова, И.Н. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия узлов составных конструкций в трехмерных задачах динамики // Тезисы докл. всерос. симп. "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". М.: МАИ, 1995. С. 8.
 18. Баженов В.Г., Зефирин С.В., Цветкова, И.Н. Численное решение задач нестационарного контактного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Численное моделирование физико-механических процессов: М.: Изд-во "Товарищество научных изданий КМК". 1995. Вып. 53. С. 154-160.
 19. Баничук Н.В. Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями // Инж. ж. МТТ. 1967. N. 4. С. 138-142.
 20. Баничук Н.В., Картвелишвили В.М., Черноусько Ф.Л. Численное решение осесимметричной задачи о вдавливании штампа в упругопластическую среду // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. N. 1. С. 50-57.
 21. Баничук Н.В., Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления М.: Наука, 1973. 236 с.
 22. Белоцерковский О.М. (Ред.) Численные методы в механике жидкостей, М., Мир, 1973, 304 с.

23. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике // М., Наука, 1982.
24. Белоцерковский О.М. Численные методы в механике сплошных сред // М., Наука, 1984, 519 с.
25. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.; Наука, 1978. 351 с.
26. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
27. Брандт, А. Расчеты многосеточным адаптивным методом в гидродинамике // Ракетная техника и космонавтика. 1980. Т. 18, N 10. С 38-43
28. Бугров А.Н., Коновалов А.Н., Щербак В.А. Метод фиктивных областей в плоских статических задачах теории упругости. // Численные методы в механике сплошной среды, 1974, т. 5, N. 1, с. 20-30.
29. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. О влиянии задержки текучести материала на распространение упругопластических волн // Тез.докл. 5-го Всес.симп. по распространению упругих и упругопластических волн, Алма-Ата: Наука, 1971. С. 93.
30. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Распространение упруговязкопластических волн в средах с зараздыванием текучести // В книге "Распространение упругих и упругопластических волн", Труды 5-го Всес. симпозиума, Алма-Ата, 1973. С. 101-107.
31. Бураго Н.Г. Квазистатическое выпучивание и закритические деформации упругопластических оболочек при осевой симметрии // Дисс. канд. физ.-мат. наук, М., Мех.-мат. ф-т, МГУ, 1977. С. 1-104.

32. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Выпучивание и закритические деформации упругопластических оболочек вращения в условиях осевой симметрии // Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1978. С. 47-68.
33. Бураго Н.Г. Численный метод решения физически и геометрически нелинейных задач деформирования тел сложной формы // VII Всес. конф. по прочности и пластичности, Тез. докл., Горький, 1978, С. 24-25.
34. Бураго Н.Г. Численный метод расчета статических и динамических процессов деформирования упруго-пластических конструкций // Матер. Всес. конф. "Современные методы и алгоритмы расчета строительных конструкций", Таллин, с. 107-108.
35. Бураго Н.Г. Формулировка уравнений механики сплошной среды в подвижных адаптивных координатах // Числ. методы в меха тв. деф. тела, М., ВЦ АН СССР, 1984, С. 32-49.
36. Бураго Н.Г. Уравнения для расчета больших деформаций упругопластических оболочек // В книге "Численные методы в механике деформируемого твердого тела" (под редакцией Г.И. Пшеничнова), ВЦ АН СССР, Москва, с. 50-59.
37. Бураго Н.Г. Численное решение задач нелинейной теории упругости // Труды 2-й Всес. конф. по нелинейной теории упругости, Фрунзе, ИЛИМ, 1985. С. 138.
38. Бураго Н.Г. Ударные взаимодействия упругопластических тел // Современные вопросы механики и технологии машиностроения, Всесоюзная конф. (Москва, 20-22 апреля 1986 г.). Тезисы докладов. М.: ВИНТИ АН СССР и ГКНТ, 1986. Часть 2. с. 39.

39. Бураго Н.Г. Моделирование контакта упругопластических тел // Материалы VI Всероссийского Съезда по теоретической и прикладной механике, Ташкент, 1986, с. 142-143
40. Бураго Н.Г. и Кукуджанов В.Н. Численное моделирование нестационарных процессов в упругопластической среде // Методы расчета высокоупругих материалов, Рига, 1986, с. 112
41. Бураго Н.Г. Конечноэлементные методы расчета контактных взаимодействий упругопластических тел при околозвуковых скоростях удара // Теория распространения волн в упругих и упругопластических средах, - Новосибирск, ИГД СО АН СССР, 1987. С. 74-79.
42. Бураго Н.Г. О векторном варианте метода конечных элементов на вложенных сетках и векторизации КЭ-алгоритмов решения задач теории упругости и пластичности // Численная реализация физико-механических задач прочности: 2 Всесоюз. конф., Горький, с. 18-19.
43. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ АСТРА // Препринт Института проблем механики АН СССР, N.326, 1988, с. 1-63.
44. Бураго Н.Г. Численное моделирование взрывов в геоматериале // Труды Всероссийской конф. "Деформации и разрушение горных пород", Фрунзе, ИЛИМ, 1990, с. 49-56.
45. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов // Вычислительная механика деформируемого твердого тела, М.: Наука, 1991, вып. 2, стр. 78-122.

46. Бураго Н.Г., Федюшкин А.И., Голышев В.Д., Гоник М.А., Полежаев В.И., Цветовский В.Б. Моды вынужденной и естественной конвекции и их влияние на распределение примеси в кристаллах, выращенных по методу АТФ1а, Труды III-й Межд. конф. "Кристаллы, рост, свойства, структура, приложения", том. 1, ВНИИСИМС, Александров, 1997, с. 239-259.
47. Бураго Н.Г., Ковшов А.Н. Напряженно-деформированное состояние горной породы в окрестности скважин, Известия РАН, МТТ, 1999, N. 1, с. 139-143.
48. Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н. Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН, МТТ, 2000, N.6, с. 4-15.
49. Бураго Н.Г. и Ковшов А.Н. Модель дилатирующей разрушающейся среды // Изв. РАН, МТТ, 2001, N. 5, С. 112-117.
50. Бураго, Н.Г., Глушко, А.И., Ковшов, А.Н. Метод получения определяющих соотношений для моделей сплошных сред на основе законов термодинамики // Тезисы VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001.
51. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Расчет процессов континуального разрушения термоупругопластических тел // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Нижний Новгород: Нижегородский ун-т, 2001, вып. 63, С. 41-48.
52. Быковских А.М., Кошур В.Д., Мартьянов В.А., Филимо-ненко И.В. Моделирование динамических процессов удара и проникания // Числ. методы реш. задач теории упруг. и пластич., Тр. 13 межресп. конф., Новосибирск, 1995, С. 30-35.
53. Бычек (Садовкая) О.В., Садовский В.М. К исследованию динамического контактного взаимодействия деформируемых тел // ПМТФ, 1998, Т. 39, N. 4, С. 167-173.

54. Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел // Прикладная механика, 1972, 8, N. 8, с. 4-27.
55. Вовкушевский А.В. Вариационная постановка и методы решения контактной задачи с трением при учете шероховатости поверхности // Известия РАН, МТТ, 1991, N. 3.
56. Галахов М.А., Усов П.П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения, М., Наука, 1990, 280 с.
57. Гаранжа В.А. Вариационный барьерный метод построения квазизометрических сеток. ЖВМиМФ, 2000. Том 40. N. 11. С. 1617-1637.
58. Гарсон А.Л. Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор. Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теор. осн. инж. расчетов, 1977, N. 1, с. 182-201
59. Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Физматгиз, 2000, 248 с.
60. Глаголева Ю.П., Жогов В.М., Кирьянов Ю.Ф. и др. Основы методики "Медуза". // Числ. методы МСС, Новосибирск, 1972, т. 3, N. 2.
61. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Мат. сборник, 1959, 47 (89), No. 3, 271-306.
62. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики, Москва, Наука, 1976.
63. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды // М., Наука, 1978. 303 с.

64. Гольдштейн Р.В., Зазовский А.Ф., Спектор А.А., Федоренко Р.П. Решение пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением вариационным методом // Препринт No. 134, Ин-т проблем механики АН СССР, М., 1979.
65. Гольдштейн Р.В., Спектор А.А. Вариационные методы решения и исследования пространственных контактных и смешанных задач с трением // Механика деформируемого тела, М., Наука, 1986. С. 52-73.
66. Горбунов А.А., Грязнов В.Л. Применение матричного модуля ЭВМ ЕС-1055М для численного решения задач конвекции // Проблемы динамики вязкой жидкости. Новосибирск: ИТПМ АН СССР, 1985, с. 100-103.
67. Горельский В.А., Хорев И.Е., Югов Н.Т. Численное моделирование трехмерных задач внедрения и разрушения цилиндров при несимметричном нагружении // Физика горения и взрыва, 1987, N. 1, С. 71-74.
68. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Сидоров В.Н. Численное исследование трехмерной задачи взаимодействия с высокопрочной преградой профилированного ударника с наполнителем // Проблемы прочности, 1992, N.1, с.47-50.
69. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами, М., Наука, Физматлит, 1995, 352 с.
70. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарные динамические контактные задачи, в кн. "Механика контактных взаимодействий", под ред. В.М. Александрова и И.И. Воровича, Москва, Физматгиз, 2001. с. 349-416.
71. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии, М., Машиностроение, 1988, 256 С.

72. Горячева И.Г., Чекина О.Г. Механика дискретного контакта // Механика контактных взаимодействий, под ред. В.М. Александрова и И.И. Воровича, Москва, Физматгиз, 2001, с. 418-437.
73. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение, 1976, 200 с.
74. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек, М., Машиностроение, 1980, 416 с.
75. Григорян С.С. (ред.) Динамика удара. М.: Мир, 1985, 296 с.
76. Григорьев В.В. Метод конечных элементов в решениях задач динамики упругопластических сред // Дисс. канд. тех. наук, Институт сейсмологии АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1986.
77. Гриднева В.А., Корнеев А.И., Трушков В.Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы // Изв. АН СССР, МТТ, 1980, N. 1, с. 146-157.
78. Гриднева В.А., Немирович-Данченко М.М. Метод разделения точек сетки для численного расчета разрушения твердых тел // Томский Государственный Ун-т, Томск, 1983, Рук. депонирована в ВИНТИ, N. 3258-83деп.
79. Гулидов А.И., Фомин В.М. Модификация метода Уилкинса для решения задач соударения тел // Препринт ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.
80. Гулидов А.И. Проникание твердого ударника в деформируемую преграду. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности // Материалы VI Всес. конф., Новосибирск, 1980. с. 59-69.
81. Гулидов А.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. Алгоритм перестройки разностной сетки при численном решении задач

- соударения с образованием трещин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Матер. VII Всес. конф., Новосибирск, 1982, с. 182-192.
82. Гулидов А.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. Численное моделирование задачи удара двух тел с учетом разрушения // Численная реализация физико-механических задач прочности, Тез. докл. - Горький, 1983, с. 60.
83. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах // Препринт ИТПМ СО АН СССР N. 12-87, 1987, 37 с.
84. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности // Материалы IX Всес. конф., Новосибирск, 1988, с. 70-75.
85. Гулидов А.И., Киселев В.В., Шабалин И.И. Численные и экспериментальные исследования процесса отскока при соударении пластин, Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Материалы X Всес. конф., ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1988. С. 65-69.
86. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Метод свободных элементов // Препринт ИТПМ СО РАН N. 9-94, Новосибирск, 1994, 32 с.
87. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численное моделирование процесса проникания стержней в массивные мишени методом свободных элементов // Числ. методы реш. задач теории упруг. и пластич., Тр. 13 межресп. конф., Новосибирск, 1995, с. 68-76.
88. Давыдов В.С., Чумаченко Е.Н. Метод реализации модели контактного взаимодействия в МКЭ при решении задач о

- формоизменении сплошных сред // Известия РАН, Механика твердого тела, N. 4, с. 53-63.
89. Давыдов Ю.М. Численное исследование тейлоровской неустойчивости в нелинейном приближении // Числ. методы механ. сплошной среды, Новосибирск, Наука, 1978, 9, N. 3, с. 67-69.
90. Давыдов Ю.М., Пантелеев М.С. Развитие трехмерных возмущений при релей-тейлоровской неустойчивости // ПМТФ, 1981, N. 1, с. 117-122.
91. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.:Наука, 1967. 368 с.
92. Дьяченко В.Ф. Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными // ЖВМ и МФ, 1965, 5, N. 4, с. 680-688.
93. Дюво Ж., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике, М., Наука, 1980, 383 с.
94. Еремин А.Ю., Марьяшкин Н.Я. Метод сопряженных градиентов с неполным разложением Холецкого для решения систем линейных алгебраических уравнений, // М., Препринт ВЦ АН СССР, 1978, б/н, с. 1-14.
95. Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Решение нестационарных задач динамики упругопластической среды методом подвижных сеток // Численные методы в механике твердого деформируемого тела // М., ВЦ АН СССР, 1984, с. 65-86
96. Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Математическое моделирование задач импульсного взаимодействия и разрушения упругопластических тел. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1986. Препринт No. 280. 67 с.

97. Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, М., Мир, 1975, 541 с.
98. Зернин М.В., Морозов Е.М. Механика разрушения тел при контактном взаимодействии // В кн.: Александров, В.М. и Ворович, И.И. (Редакторы) (2001) Механика контактных взаимодействий, М., Наука, 2001, с. 624-639.
99. Иваненко С.А. Адаптивно-гармонические сетки // М.: ВЦ РАН, 1997, 181 с.
100. Иваненко С.А. Барьерный метод построения квазигармонических сеток. ЖВМиМФ, 2000. Том 40. N. 11. С. 1600-1616.
101. Иващенко К.Б. Расчет контактных границ в задачах взаимодействия деформируемых тел // Динамические задачи механики сплошной среды, Тез. докл. регион. конф., Дивноморск, 1988, КубГУ, Краснодар, 1988, с. 59-61.
102. Иващенко К.Б. Алгоритм расчета контактных границ при взаимодействии деформируемых твердых тел // Проблемы прочности, 1989, N.2, с. 79-82.
103. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды // М.: МГУ, 1971, 247 с.
104. Калмыков С.Г., Кукуджанов В.Н. Метод потоков и корректирующих маркеров (пикм - метод) для численного моделирования высокоскоростных соударений твердых тел // М.: ИПМех РАН, Препринт 529, 1993, с. 1-37.
105. Квитка А.Л., Ворошко П.П., Бобрицкая С.Д. Напряженно-деформированное состояние тел вращения, Киев, Наукова думка, 1977, 208 с.

106. Киселев А.Б. Развитие метода Уилкинса для решения трехмерных задач соударения деформируемых тел // Взаимодействие волн в деформируемых средах, М., МГУ, 1984, с. 87-100.
107. Киселев А.Б. К расчету трехмерного соударения упруго-пластического стержня с жесткой преградой // Вест. МГУ, Математика, механика, 1988, N. 2, с. 30-36.
108. Киселев А.Б. Численное моделирование в трехмерной постановке наклонного пробивания тонких преград, Численное решение задач волновой динамики, // Мат. исследования, 1989, вып. 108, Кишинев, Штиинца, с. 19-26.
109. Киселев А.Б., Кабак Н.Е. Метод построения расчетных сеток с выделением внутренних контактных границ // Моделирование в механике, 1990, Т. 4, N. 5, с. 96-110.
110. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
111. Klisch S.M. and Lotz J.C. Application of a fiber-reinforced continuum theory to multiple deformations of the annulus fibrosus // J. Biomechanics, 1999, v. 32, p. 1027-1036.
112. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред // Москва, Мир, 1979, 302 с.
113. Кондауров В.И. и Кукуджанов В.Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластической среды с конечными деформациями // Сб. по численным методам в механике деформируемого твердого тела, М., ВЦ АН СССР, 1978.
114. Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Соударение жесткого цилиндра со слоистой упруго-пластической преградой //

- Численные методы решения задач теории упругости и пластичности, Материалы VI Всес. конф., Новосибирск, 1980, с. 105-120.
115. Кондауров В. И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ, 1982, N. 4, С. 133-139.
116. Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую среду // ПМТФ, 1984, No. 4, с. 132-139.
117. Кондауров В.И., Петров И.Б. Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуального разрушения, ДАН СССР, 1985, с. 1344-1347.
118. Кондауров В.И. Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел, ПММ, т.52, вып.2, 1988. С. 302-310.
119. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Модель континуального разрушения вязкоупругих сред // Изв. АН СССР, МТТ, 1989. No. 3. С. 131-139.
120. Кондауров В.И. О реологической неустойчивости упругой повреждающейся среды // ПММ, 1991, т.55, вып.1, с. 109-117
121. Кондауров В.И., Кутлярова Н.В., Фортон В.Е. Повреждаемость и разрушение хрупких начально-пористых материалов // ДАН, 1997 г. т.355, N. 3, с. 342-345.
122. Кондауров В.И., Кутлярова Н.В. Повреждаемость и разрушение хрупких начально-пористых материалов // МТТ, 2000, N. 4, с. 99-109.
123. Кондауров В.И. Тензорная модель континуального разрушения и длительной прочности упругих тел // Изв. РАН, МТТ, 2001, N. ???

124. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел, Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2000, 261 с.
125. Корнеев А.И. и Николаев А.П. Расчет упругопластического течения при ударе методом конечных элементов // Томский Гос. Ун-т, 1980, С. 1-10. Деп. в ВИНТИ N. 2137-80.
126. Корнеев А.И. и Николаев А.П., Шиповский И.Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VII Всес. конференции, Новосибирск, 1982, с. 122-129.
127. Корнеев А.И. и Шугалев, В.Б. Численный расчет трехмерного напряженного состояния стержня при ударе частью боковой поверхности // Изв. АН СССР, МТТ, 1986, N. 1, с. 189-192.
128. Кошур В.Д. и Мартьянов С.А. Однородный, сквозной, симметричный алгоритм численного моделирования динамических контакт-ных взаимодействий деформируемых тел // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. XII Всесоюз. конф. Новосибирск, ИТПМ СО РАН, 1992, с. 142-147.
129. Кравчук А.С. и Васильев В.А. Численные методы решения контактной задачи для линейных и нелинейно упругих тел конечных размеров // Прикл. мех., 1980, Т. 16, N. 6, С. 9-15.
130. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ, 1980, Т. 44, Вып. 1, С. 122-129.
131. Кравчук А.С. Решение некоторых пространственных контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Трение и износ, 1981, Т. 2, N. 4, С. 589-595.

132. Кравчук А.С. Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ, 1982, Т. 43, Вып. 2, С. 283-288.
133. Кравчук А.С., Ахунджанов Е.П. Численная реализация вариационного подхода к решению контактных задач теории упругости методом потенциалов // Расчеты на прочность, М.: Машиностроение, 1983, Вып. 25, С. 12-18.
134. Кравчук А.С. Решение нелинейных контактных задач с учетом трения вариационными методами // Механика и научно-технический прогресс, Т. 3, - Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С. 154-169.
135. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М., Моск. гос. акад. приборостроения и информатики, 1997, 339 с.
136. Кравчук А.С. Метод вариационных неравенств в контактных задачах // В кн. "Механика контактных взаимодействий", под ред. В.М. Александрова и И.И. Воровича, Москва, Физматгиз, 2001, с. 93-115.
137. Кроули У. FLAG - свободно-лагранжев метод для численного моделирования гидродинамических течений в двух измерениях // В кн.: Численные методы в механике жидкостей. М., Мир, 1973, С. 135-145.
138. Кубенко В.Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев, Наукова Думка, 1981, 159 с.
139. Кубенко В.Д. Ударное взаимодействие тел со средой (Обзор) // Прикладная механика, 1997, т. 33, N. 12, с. 3-29.
140. Кузьменко А.Г. Основные уравнения теории упругости и пластичности и метод конечного элемента // Тула: Тульский политехнический ин-т, 1980, 100 с.

141. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики, Т. 8, N. 4, с. 25-65.
142. Кукуджанов В.Н., Иванов В.Л., Ковшов А.Н., Шнейдерман Д.И. Локализация деформаций и устойчивость склонов. М.: Институт проблем механики РАН, 1994. Препринт No. 472. С. 1-72.
143. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений, М., Физматгиз, 2001, 608 с.
144. Левитас В.И. Теория больших упругопластических деформаций при высоком давлении // Пробл. прочности, 1996. N. 8, С. 86-94.
145. Львов Г.И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно-упругих и физически нелинейных пологих оболочек // ПММ, 1982. Т. 46, Вып. 5, С. 841-846.
146. Майнчен Д., Сак С. Метод расчета "Тензор" // Вычислительные методы в гидродинамике, Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг (Ред.), М., Мир, 1967: с. 185-211.
147. Манжиров А.В. Контактные задачи для неоднородных стареющих тел // В кн.: Александров В.М., Ворович И.И. (Редакторы) Механика контактных взаимодействий, М., Наука, 2001, с. 549-565.
148. Манжиров А.В. (2001b) Контактные задачи механики наращиваемых тел // В кн.: Александров, В.М. и Ворович, И.И. (Редакторы) (2001) Механика контактных взаимодействий, М. Наука, с. 607-621.
149. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979, 320 с.

150. Мейдер Ч. Численное моделирование детонации, М., Мир, 1985, 384 с.
151. Мелещенко Н.Г. К вопросу расчетной оценки условий работы стыковых соединений двигателей // Тр. Центрального научно-исслед. дизельного ин-та, 1978, Вып. 73, с. 31-36.
152. Меньшиков Г.П., Одинцов В.А., Чудов Л.А. Внедрение цилиндрического ударника в конечную плиту, Известия АН СССР, МТТ, 1976, N. 1, с. 125-130.
153. Мержиевский Л.А., Ресиянский А.Д. Численное моделирование пробивания преград цилиндрическим ударником, Механика быстропротекающих процессов, - Новосибирск, 1984, с. 86-91.
154. Меткалф М. Оптимизация в фортране. М.: Мир, 1985. 264 с.
155. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения, М., Наука, 1980. 254 с.
156. Морозов Н.Ф., Смирнов В.И., Петров Ю.В. Об эрозионном разрушении твердых тел // В кн.: Александров, В.М. и Ворович, И.И. (Редакторы) Механика контактных взаимодействий, М.: Наука, 2001. С. 640-650.
157. Никитин И.С. Динамика слоистых блочных сред с проскальзыванием и трением // М., Институт проблем механики АН СССР, 1989, Препринт N. 366, 1989, с. 1-43.
158. Никишков Г.П., Пашнин В.Г. Расчет напряженного состояния контактирующих тел с использованием изопараметрических элементов // Прочность материалов и элементов конструкций атомных реакторов, Сб. науч. трудов, Московский инженерно-физический ин-т, М.: Энергоатомиздат, 1985, С. 38-43.

159. Никишков Г.П. Программный комплекс для решения задач механики деформируемого твердого тела // М.: Московский инженерно-физический ин-т, 1988. 84 с.
160. Николаевский В.Н. (Ред.) Высокоскоростные ударные явления, М. Мир, 1973, 528 с.
161. Николс Б. Дальнейшее развитие метода маркеров и ячеек для течений несжимаемой жидкости // Численные методы в механике жидкостей, ред. О.М. Белоцерковский, М.: Мир, 1973. С. 165-173.
162. Нох В.Ф. СЭЛ - совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике, М., Мир, 1967. С. 128-184.
163. Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Докл. АН СССР, 1960. Т. 135. No. 5. С. 1054-1057.
164. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, М.: Мир, 1985. 558 с.
165. Петренко И.И., Пуртов С.В., Федосеев А.И. Решение больших задач МКЭ многосеточным методом: Алгоритм разбиения на подобласти. Серпухов, 1986. 15 с. (Препр. . АН СССР, Ин-т физики высоких энергий; ИФВЭ 86-200).
166. Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // ЖВ-МиМФ, 1984. Т. 24. С. 722-739.
167. Подгорный А.М., Гонтаровский П.П., Марченко Г.А. и др. Некоторые прикладные упругопластические задачи смешанного типа. Харьков, 1976, 43 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; N. 36).

168. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю. И. Большие упруго-пластические деформации. М.: Наука, 1986, 232 с.
169. Поздняков А.А. Метод расчета контакта // М., Труды МФТИ, 1979.
170. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций, Л., Судостроение, 1974. 344 с.
171. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.
172. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах М.: Наука, 1979. 319 с.
173. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения, Киев: Наукова Думка, 1982.
174. Рвачев В.Л. (редактор) Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций // Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др.; Отв. ред. Рвачев В.Л., Ин-т проблем машиностроения, Киев, Наукова думка, 1989, 232 с.
175. Реснянский А.Д., Мержиевский Л.А. Применение метода подвижных сеток в задачах разрушения твердых тел // Динамика сплошной среды, 1984, Вып. 66, с. 150-157.
176. Роговой А.А., Вариационная постановка упруго-пластической задачи при больших деформациях в эйлерово-лагранжевых координатах // Напряжения и деформации в конструкциях и материалах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985, с. 77-83.
177. Родрига Г. (редактор) Параллельные вычисления. М.: Наука, 1986, 376 с.

178. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. М., Энергия, 1971, 214 с.
179. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам, М., Стройиздат, 1977, 129 с.
180. Розин Л.А., Смирнов М.С. Решение контактной задачи теории упругости с податливостью в односторонних связях // Известия вузов, Строительство, 2000, N. 5.
181. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
182. Рузанов А.И., Романычева Л.К., Волков И.А. Построение расчетных моделей и численный анализ разрушения твердых тел при импульсных нагрузках, Механика быстропротекающих процессов, Новосибирск, 1984, с. 98-105.
183. Сагомоян А.Я. Динамика пробивания преград. М. Изд-во МГУ, 1980, 221 с.
184. Садовский В.М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упруго-пластических тел // ПММ, 1991, Т. 55, Вып. 6, с. 1041-1048.
185. Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред, М., Наука-Физматлит, 1997, 208 с.
186. Садырин А.И. К определению контактных усилий при соударении упругопластических тел // Прикл. проблемы прочности и пластичности, Всес. межвуз. сб., вып. 3, Горьк. ун-т, Горький, 1976, с. 70-73.
187. Садырин А.И. Конечно-разностная аппроксимация граничных условий в динамической контактной задаче // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Статика и

- динамика деформируемых систем, Всес. межвуз. сб., Горьковский ун-т, Горький, 1979.
188. Садырин А.И. Моделирование динамического разрушения деформируемых тел при ударных контактных взаимодействиях // Прикладные проблемы прочности и пластичности, ТНИ КМК, М., 1995, с. 132-141.
189. Сажин В.В., Симонов И.В. Соударение упругих и упруго-пластических прямоугольников под малым углом. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1987. Препринт No. 300. 57 с.
190. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВ-МиМФ, 1965. Т. 5. No. 5. С. 816-827.
191. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
192. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
193. Сегерлинд Л. Применение МКЭ. М.: Мир, 1979. 392 с.
194. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1, 492 с; Т. 2, 568 с.
195. Симонов И.В. Контактные задачи расклинивания упругих тел // Механика контактных взаимодействий / под ред. В.М. Александрова и И.И. Воровича. М.: Физматгиз, 2001. С. 654-667.
196. Сокольников И.С. Математическая теория упругости. М.: "Мир", 1961. (Перевод книги : Sokolnikoff I.S. Mathematical theory of elasticity, 2nd ed. New-York: McGraw-Hill Book Co., 1956)

197. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
198. Тишкин В.Ф. Построение дискретных конечно-разностных моделей сплошных сред на основе вариационного подхода. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1984. Препринт No. 150. 18 с.
199. Угодчиков А.Г., Коротких Ю.Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек, К.: Наукова думка, 1967. 219 с.
200. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике, М.: Мир, 1967. С. 212-263.
201. Улам С. Устойчивость при расчетах по методу многих тел // В сб. Гидродинамическая неустойчивость. Под ред. Биркгоффа, Беллмана, Линя. Пер. с англ. / М.: Мир, 1964.
202. Федоренко Р.П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений, УМН, 1973. Т. 28. вып. 2. С. 121-182.
203. Федоренко Р.П. Метод численного решения пространственных задач качения с проскальзыванием и сцеплением // М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1979. Препринт N. 158.
204. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости, М.: Мир, 1974. 159 с.
205. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999, 600 с.
206. Фукс И.И. Об одном методе численного решения двумерных динамических контактных задач упругопластических

- тел // Прикл. проблемы прочности и пластичности, Всес. межвуз. сб., вып. 3, Горьк. ун-т, Горький, 1976, с. 78-81.
207. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейке для задач гидродинамики, Вычислительные методы в гидродинамике // М.: Мир, 1967, с. 316-342.
208. Цветкова И.Н. Анализ точности алгоритмов контактного взаимодействия в трехмерных задачах динамики упруго-пластических тел // Вестник Нижегород. Гос. Ун-та, 1995, с. 93-95.
209. Цветкова И.Н. Численный анализ нестационарного наклонного проникания стального цилиндра в алюминиевую пластину // Тез. докл. 22-й науч.-тех. конф. "Проектирование систем", М., Моск. Гос. Техн. Ун-т им. Баумана, 1995.
210. Шевченко Ю.Н., Пискун В.В., Савченко В.Г. Решение осесимметричной пространственной задачи термопластичности на ЭЦВМ типа М-220, Киев, Наукова думка, 1975, 108 с.
211. Шокин Ю. И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985, 364 с.
212. Addressio F.L., Carroll D.E., Dukowicz J.K., Harlow F.H., Johnson J.N., Kaskiwa B.A., Maltrud M.E. and Ruppel H.M. CAVEAT: A computer code for fluid dynamics problems with large distortion and internal slip // Los Alamos National Laboratory, UC-32, 1988.
213. Alart P. and Curnier A. A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems prone to Newton like Solution Methods // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1991, v. 92, p. 353-375.
214. Aliabadi M.H. and Brebbia C.A. Computational Methods in Contact Mechanics // Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston, 1993.

215. Aliabadi M.H. Boundary element formulations in fracture mechanics. // AMR, 1997, v. 50(2), p. 83-96.
216. Amsden A.A. and Harlow F.H. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations. // J. Comp. Phys., 1970, v. 6, p. 322.
217. Annin B.D., Sadovskaya O.V. and Sadovskii V.M. Variational approach to dynamic contact problems of elastoplasticity // Int. Conf. "Mathematics in applications"(abstracts), Novosibirsk, 1999, p. 18-19.
218. Armero F. and Simo J.C. A New Unconditionally Stable Fractional Step Method for Non-Linear Coupled Thermomechanical Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992. V. 35. P. 737-766.
219. Armero F. and Garikipati K. Analysis of Strong Discontinuities in Multiplicative Finite Strain Plasticity and Their Relation with the Numerical Simulation of Strain Localization in Solids, International Journal of Solid and Structures, 1996. V. 33. P. 2863-2885.
220. Armero F., Petocz E. Formulation and Analysis of Conserving Algorithms for Frictionless Dynamic Contact/Impact Problems, // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1998, v. 158, p. 269-300.
221. Armero F., Callari C. An Analysis of Strong Discontinuities in a Saturated Poro-Plastic Solid, International Journal for Numerical Methods in Engineering , 1999, 46, 1673-1698.
222. Armero F., Petocz E. A New Dissipative Time-Stepping Algorithm for Frictional Contact Problems: Formulation and Analysis, A Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 179, 151-178.
223. Armero F. Large-Scale Modeling of Localized Dissipative Mechanisms in a Local Continuum: Applications to the

- Numerical Simulation of Strain Localization in Rate-Dependent Inelastic Models, *Journal of the Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* , 1999, 4, 101-132.
224. Armero F., Oller S. (2000) A General Framework for Continuum Damage Models. Part I: Infinitesimal Plastic Damage Models in Stress Space, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 7409-7436.
225. Armero F. and Perez-Foguet A. (2002), On the Formulation of Closest-Point Projection Algorithms in Elastoplasticity. Part I: The Variational Structure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, 297-329.
226. Asano N., Kamegaya H. and Funatsu K. A hybrid type of virtual work principle for impact contact problems of two bodies // *Variational Methods in Engineering: Proc. 2nd Int. conf.*, Southhampton, Juli, 1985, Berlin e.a.: 1985, P. 6/41-6/52.
227. Attaway S., Barragy T., Brown K., Gardner D., Hendrickson B., Plimpton S.J., Vaughan C. Transient Solid Dynamics Simulations on the Sandia/Intel Teraflop Computer // Gordon Bell finalist paper, in *Proc of SuperComputing '97*, San Jose, CA, November 1997.
228. Attaway S.W., Hendrickson B.A., Plimpton S.J., Gardner D.R., Vaughan C.T., Brown K.H., Heinstein M.W. A Parallel Contact Detection Algorithm for Transient Solid Dynamics Simulations Using PRONTO3D, *J. Comp. Mech.*, 1998, v. 22, p. 143-159.
229. Attaway S.W., Barragy E.J., Brown K.H. et al. Transient Solid Dynamics Simulations on the Sandia/Intel Teraflop Computer, Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2001, Report NM 87185-0437.
230. Azarenok B.N., Ivanenko S.A. Application of moving adaptive grids for numerical solution of 2-D nonstationary problems in

- gas dynamics. Report on applied mathematics. BN. Computing Center of RAS, 2001. P.1-25.
231. Azarenok B.N. Variational barrier method of adaptive grid generation in hyperbolic problems of gas dynamics // SIAM J. Numer. Anal. 2001. Available at <http://www.math.ntnu.no/conservation/2001/042.html>
232. Azarenok B.N., Ivanenko S.A., Tang T. Godunov's scheme and moving adaptive grids. Report on Applied Mathematics. 2002. Available at <http://www.math.ntnu.no/conservation/2002/016.html>
233. Babushka I. and Rheinboldt W. Error estimates for Adaptive Finite Element Computations // J. Num. Analysis, 1978, v.15, p. 736-754.
234. Babushka I. and Miller A. A feedback finite element method with a posteriori error estimation: Part 1. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimation // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1987, v. 61, p. 1-40.
235. Baillet L., Walter H. and Brunet M. A 3D contact algorithm using an explicit FEM applied to ironing process, Proc. of the 4th Int. Conf. and Workshop on Numer. Simulation of 3D Sheet Forming Processes (NUMISHEET 99), Eds. J.-C. Gelin et P.Oicart, Besanson-France, 1999, p. 209-214.
236. Baraff D., Witkin A. Dynamic simulation of non-penetrating flexible bodies // Proceedings of SIGGRAPH 92, Computer Graphics, 1992, v. 26, No. 2, p. 303-308.
237. Baraff D., Witkin A., Large steps in cloth simulation // Proceedings of SIGGRAPH 98, Computer Graphics, Annual Conference Series, 1998, p. 43-54.

238. Bartold F. J., Bischoff D. Generalization of Newton type Methods to Contact Problems with Friction // J. Mech. Theor. Appl., Special issue: Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, 1988, p. 97-110.
239. Bass J.M. Three dimensional finite deformations rolling contact of a hyperelastic cylinder: formulation of the problem and computational results // Computers and Structures, 1987, v. 26, p. 991-1004.
240. Bathe K.J., Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1985, v. 21, p. 65-88.
241. Bathe K.J., Chaudhary A. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction // Computers and Structures, 1986, v. 24, p. 855-873.
242. Bathe K.J. Finite Element Procedures for Solids and Structures-Nonlinear Analysis // MIT Center for Advanced Engineering Study, 1986.
243. Bathe K.J., Mijailovich S.S. Finite-element analysis of frictional contact problems // J. de Mecanique Theorique et Appliquee, 1988, v. 7, p. 31-45.
244. Bathe K.J. Some remarks and references on recent developments in finite-element analysis procedures. Computers and Structures, 1991. V. 40. P. 201-202.
245. Bathe K.J. Finite Element Procedures, Prentice-Hall, EngleWood Cliffs, NJ, 1996.
246. Bathe K.J., Bouzinov P.A. On the constraint function-method for contact problems // Computers and Structures, 1997, v. 64, p. 1069-1085.
247. Batra R.C. Rubber-covered balls - the non-linear elastic problem // J. Appl. Mech., 1980, v. 47, p. 82-86.

248. Batra R.C. Quasistatic indentation of a rubber-covered roll by a rigid roll // Int. J. Numer. Meth. Engng., 1981, v. 17, p. 1823-1833.
249. Bazant Z.P., Belytschko T.B., Chang T.P. Continuum theory for strain-softening // J. of Engineering Mechanics, ASCE, 1984. V. 110. No. 12. P. 1666-1692.
250. Bazant Z.P., Pijaudier-Cabot G. Non-local continuum damage, localization instability and convergence // J. of Applied Mechanics, ASME, 1988. V. 55. P. 287-293.
251. Bazant Z.P., Ozbolt J. Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures // J. of Engineering Mechanics, ASCE, 1990. V. 116. No. 11. P. 2485-2505.
252. Bechmann D., Space deformation models survey // Computer & Graphics, 1994. V. 18(4). P. 571-586.
253. Becker R., Rannacher R. A Feed-Back Approach to Error Control in Finite Element Methods: Basic Analysis and Examples, EAST-WEST J. Num. Math. 1996. V. 4. P. 237-264.
254. Belytschko T., Kennedy J.M., Lin J.I. Three-dimensional penetration computation // Struct. Mech. React. Technol., 1987, V.B. P. 83-88.
255. Belytschko T., Lin J.I. A three dimensional impact-penetration algorithm with erosion // Computers and Structures, 1987. V. 25. P. 95-104.
256. Belytschko T., Neal M.O. Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty Projection and Lagrangian Methods // In: L.E. Schwer, N.J. Salamon and W.K. Liu, eds., Proc. Symp. on Comput. Techniques for impact, Penetration and Perforation of Solids, ASME, Winter Annual Meeting, San Francisco, CA, 1989, AMD-Vol. 103.

257. Belytschko T., Neal M.O. Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods // Int. J. Num. Meth. Engrg., 1991, v. 31, p. 547-572.
258. Belytschko T., Yeh L.S. The splitting pinball method for contact-impact problems // Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1993, v. 105, p. 375-393
259. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element-Free Galerkin Methods // Int. J. Num. Meth. Eng., 1994, v. 37, p. 229-256,
260. Belytschko T., Kronggauz Y., Organ D., Fleming M. Meshless Methods: An Overview and Recent Developments // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1996, v. 139, p. 3-47.
261. Benson D.J., Hallquist J.O. A single surface contact algorithm for the postbuckling analysis of shell structures // Report to the University of California at San Diego, 1987.
262. Benson D.J., Hallquist J.O. A single surface contact algorithm for the postbuckling analysis of shell structures // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, 1990, v. 78, p. 141-163.
263. Benson D.J. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1992, v.99, 235-394.
264. Benson D.J. Volume of fluid interface reconstruction methods for multi-material problems // AMR, 2002, 55(2), p. 151-165.
265. Bertolf L.D., Buxton L.D., Thorue B.J. et al. Damage in steel plates from hypervelocity impact II. Numerical results and spall measurement // J. Appl. Phys., 1975, v. 46, p. 3776-3783.
266. Bertsekas D.P. Constraint Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Academic Press, New York, 1984.
267. Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: Single asperity contact // AMR, 1996, v. 49(5), p. 275-298.

268. Bjorkman G., Klarkbring A., Sjodin A., Larsson T., Ronnquist M. Sequential Quadratic Programming for Non-Linear Elastic Contact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1995, v. 38, p. 137-165.
269. De Borst R., Sluys L.J., Muhlhaus H.B., Pamin J. (1993) Fundamental issues in finite element analysis of localisation of deformation. Engng Computations, v. 10, N. 2, p. 99-121.
270. Bourago N.G., Numerical Modeling of Unsteady Viscous Gas and Fluid Flows, // In: "Sixth Nordic Seminar on Computational Mechanics. Abstract", Lincoping, Sweden, October 18-19, 1993. P. 135.
271. Bourago N.G. Computer code ASTRA for nonlinear problems in continuum mechanics // Seventh Nordic Seminar on Computational Mechanics, Trondheim, Norway, October 14-15, 1994. P. 48-49.
272. Bourago N.G. Numerical methods for nonlinear processes in elastic plastic media // In: Lectures of FEM-94 Seminar, publ. 94:1, Goteborg, Sweden, 1994, p. 1-15.
273. Bourago N.G., Runesson K. Thermodynamic theory and numerical simulation of damage and consolidation processes, Abstracts of III Mississippi State University conference in Differential Equations and Computer Simulation, Starkville, USA. 13-14 May, 1997.
274. Bourago N.G. Application of Navier-Stokes Equations to Crystal Growth Modelling // Lecture of Materials and Crystal Growth Seminar, MSFC/Space Sciences Laboratory, NASA, Huntsville, Alabama State, USA, May 17, 1997.
275. Bourago N.G., Fedyushkin A.I., Polezhaev V.I. Double-diffusion convection and impurity distribution in Bridgmen method with and without magnetic field // Abstracts of 32nd

- Scientific Assembly of COSPAR, Nagoya, Japan, 12-19 July, 1998. P. 466.
276. Bourago N.G. Thermodynamic theory of damage and compaction processes // Geophysical Research Abstracts, 1999, Vol. 1. No. 1. P. 174.
277. Bourago N.G., Fedyushkin A.I. Impurity distribution in submerged heater method with and without rotation // Proc. Int. Conf. Comput. Heat Mass Transfer, N. Cyprus, Turkey, 1999, p. 207-215.
278. Bourago N.G., Fedyushkin A.I., Polezhaev V.I. Dopant distribution in crystals grown by the submerged heater method under steady and oscillatory rotation // Advances in Space Research, Vol. 24, No. 10, p. 1245-1250.
279. Bourago N.G. Utilization of moving grids for nonstationary nonlinear problems in solid and fluid dynamics. Application to simulation of natural phenomenas and technological processes // Optimization of Finite Element Approximations, Splines and Wavelets (OFEA'2001). Abstracts of International conference (June 24-29, 2001 St.-Petersburg, Russia), 2001. P. 89-90. Slides are available at <http://www.ipmnet.ru/~burago/papers/grid.htm>.
280. Bourago N.G. A survey on contact algorithms // Proc. of the Workshop "Grid generation: theory and applications"/ Ed. S.A.Ivanenko et V.A.Garanzha. Moscow: Computing Centre of RAS, 2002. P. 42-59. Available at Web: <http://www.ipmnet.ru/~burago/papers/contact.htm>.
281. Bowden F.P., Tabor D. The Friction and Lubrication of Solids. Part II. Clarendon press, Oxford, 1964.
282. Brackbill J.U., Kothe D.B., Ruppel H.M. FLIP: A low dissipation, particle-in-cell method for fluid flow // Computer Physics Communication, 1988, v. 48, p. 25-38.

283. Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension. // J. Comp. Phys., 1992, v. 100, p. 335.
284. Brown K., Attaway S., Plimpton S., Hendrickson B., Parallel strategies for crash and impact simulations // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 2000, v. 184, p. 375-390.
285. Brunet M.A. A solution method for large strain of anisotropic material with contact and friction boundary conditions // Proc. 5th Int. Symp. Numer. Meth. Engng., Lausanne-Switzerland, Eds. R. Gruber, J. Periaux and R.P.Shaw, Berlin, Springer-Verlag, 1989, v.2, pp. 369-374.
286. Camacho G.T., Ortiz M. Computational modelling of impact damage in brittle materials // International Journal of Solids and Structures, 1996. Vol. 33. P. 2899-2938.
287. Campos L.T., Oden J.T., Kikuchi N. A Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatics // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1982. V. 34. P. 821-845.
288. Carey G. Computational grids: Generation, Adaptation and Solution Strategy. Taylor & Francis, Florida, 1997.
289. Carpenter N.J., Taylor R.L., Katona M. G. Lagrange constraints for transient finite-element surface-contact // Int. J. Num. Meth. Engng., 1991, v. 32, p. 103-128.
290. Carter Jr W.T., Sham T.-L., Law K.H. A parallel finite element method and its prototype analysis of shell structures // Computers and Structures, 1989. V. 31. P. 921-934.
291. Catherall D. The adaption of structured grids to numerical solutions for transonic flows. Internat. J. Numer. Methods Engng. 1991. V. 32. P. 991-939.

292. Cescotto S., Charlier R. Frictional Contact Finite Elements Based on Mixed Variational Principles. // Int. J. Num. Meth. Engng., 1993, v. 35, p. 1681-1701.
293. Chan S. H., Tuba I.S. A Finite Element Method for Contact Problems in Solid Bodies // Int. J. Mech. Sci., 1971, v. 13, p. 615-639.
294. Charbrand P., Dubois F., Raous M. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction, Math. Comp. Modelling, 1998, v. 28, No. 4-8, p. 97-108.
295. Chaudhary A.B., Bathe K.J. A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction // Computer and Structures, 1986, v. 24, p. 855-873.
296. Chawla V., Laursen T.A. Energy Consistent Algorithms for Frictional Contact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1998, v. 42, p. 799-827.
297. Chen J.S., Pan C., Wu C.T., Liu W.K. Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Analysis of Nonlinear Structures // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1996, v. 139, p. 195-229.
298. Chen J.S., Wang H.P. New Boundary Condition Treatments in Meshfree Computation of Contact Problems // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1998.
299. Chen J.S., Wu C.T., Yoon S., You Y. Stabilized Conforming Nodal Integration for Galerkin Meshfree Methods // Int. J. Num. Meth. Eng., 2001, v. 50, p. 435-466.
300. Chen W.H., Tsai P. Finite Element Analysis of Elastodynamic Sliding Contact Problems with Friction // Computers and Structures, 1986, v. 22, N. 6, p. 925-938.

301. Chen Y.M., Wilkins M.L. Stress Analysis of Crack Problems a Three-Dimensional Time-Dependent Computer Program. // Int. J. Fracture, 1976, v. 12, N. 4, p. 607-617.
302. Cheng J.H., Kikuchi N. An Incremental Constitutive Relation of Unilateral Contact Friction for Large Deformation Analysis. // J. Appl. Mech., ASME, 1985, v. 52, p. 639-648.
303. Cheng T.Y., Saleeb A.F., Shyu S.C. Finite Element Solutions of Two-Dimensional Contact Problems Based on a Consistent Mixed Formulation. // Computers and Structures, 1987, v. 27, N.4, p. 455-466.
304. Cheng W.Q., Zhu F.W., Luo J.W. Computational Finite Element Analysis and Optimal Design for Multibody Contact System. // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1988, v. 71, p. 31-39.
305. Chenot J.-L. Bay F., Fourment L. Finite element simulation of metal powder forming, Int. J. Numer. Meth. Engng., 1990. V. 30. P. 1649-1674.
306. Christiansen P.W., Klarbring A., Pang J.S., Stromberg N. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. // Int. J. Num. Meth. Engng., 1998, v. 42 p. 145-173.
307. Cocu M. Existence of solutions of Signorini problems with friction. // Int. J. Engng. Sci., 1984, v. 22, p. 567-575.
308. Colella P., Woodward P. The Piecewise Parabolic Method for Gas-Dynamical Problems // J. Comp. Phys., 1984. V. 54. P. 174-201.
309. Colella P., Woodward P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys., 1984. V. 54, P. 155-173.

310. Conry T.F., Seireg A. A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact" // ASME Trans. J. Appl. Mech., 1971, p.387 -392.
311. Cooper M.G., Mikic B.B., Yovanovich M.M. Thermal Contact Conductance // Int. J. Heat Mass Transfer, 1969, v. 12, p. 279-300.
312. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume I: Essentials, John Wiley & Sons, 1997 (ISBN 0 471 92956 5) Volume II: Advanced Topics, John Wiley & Sons, 1997 (ISBN 0 471 95649 X)
313. Curnier A. Theory of Friction. // Int. J. Solids Structures, 1984, v. 20, p. 637-647.
314. Curnier A., Alart P. A Generalized Newton Method for Contact Problems with Friction // J. Mec. Theor. Appl., 1988, Special Issue: Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, p. 67-82.
315. Curnier A., He Q.C., Telega J.J. Formulation of Unilateral Contact between two Elastic Bodies undergoing Finite Deformation. / C. R. Acad. Sci., Paris, 1992, v. 314, p. 1-6.
316. Curnier A., He Q. C., Klarbring A. Continuum Mechanics Modelling of Large Deformation Contact with Friction // in Contact Mechanics, eds. M. Raous, M. Jean and J. J. Moreau, Plenum Press, New York, 1995.
317. Daux C., Moes N., Dolbow J., Sukumar N., Belytschko T. Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the Extended Finite Element Method. // Int. J. Num. Meth. Engng., 2000, v. 48, p. 1741-1760.
318. Desai S., Zaman M.M., Lightner J.G., Siriwardane H.J. Thin-Layer Element for Interfaces and Joints // Int. J. of Anal. Num. Geomech., 1984, v. 8, p. 19-43.

319. Devaut G., Lions J. L. Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
320. Devloo P., Oden J.T., Strouboulis T. Implementation of an adaptive refinement technique for the SUPG algorithm, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1987. V. 61. P. 339-358.
321. Diekmann R., Hungershofer J., Lux M., Taenzer L., Wierumy J.-M. Using Space Filling Curves for Efficient Contact Searching, 16th IMACS World Congress, 2000.
322. Dilintas G., Laurent-Gengoux P., Trystam D. A conjugate projected gradient method with preconditioning for unilateral problems, Computers and Structures, 1988, v. 29, No. 4, p. 675-680.
323. Djachenko V.F. The Free Point Method for Problems of Continuous Media // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1973, N. 2.
324. Dolbow J., Moes N., Belytschko T. Discontinuous Enrichment in Finite Elements with a Partition of Unity Method // Finite Elements Anal. 2000, Des. 36, p. 235-260.
325. Dolbow J., Moes N., Belytschko T. An Extended Finite Element Method for Modeling Crack Growth with Frictional Contact // Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 2001, v. 190, p. 6825-6846.
326. Donzelli P.S., A Mixed-Penalty Contact Finite Element formulation for biphasic soft tissues, PhD Thesis, Dept. of Mech. Eng., Aeronautical Eng. and Mechanics, RPI, Troy, NY, 1995.
327. Doolan E.P., Miller J.J.H., Schilders W.H.A. Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers, Boole Press, Dublin, 1980. (Рус.пер.: Э. Дулан, Дж.

- Миллер, У. Шилдерс, Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем, М., "Мир", 1983, 200 с.)
328. Dowson D. History of Tribology, Longman, New York, 1979.
329. Duarte C.A., Oden J.T. An h-p Adaptive Method Using Clouds // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1996, v. 139, pp. 237-262.
330. Duarte C.A., Hamzeh O.N., Liszka T.J., Twordzydlo W.W. A Generalized Finite Element Method for the Simulation of Three-Dimensional Dynamic Crack Propagation // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2001, v.190, p. 2227-2262.
331. Eck C., Steinbach O., Wendland W.L. A Symmetric Boundary Element Method for Contact Problem with Friction // Mathematics and Computers in Simulation, 1999, V. 20. No. 1-4. P. 43-61.
332. Eck C., Wendland W.L. An Adaptive Boundary Element Method for Contact Problems / In M. Bonnet, A.-M. Sandig, W. L. Wendland (eds.) Mathematical Aspects of Boundary Element Method, 1999, p. 116-127,
333. Ehrlich L.W. A Numerical Method of Solving a Heat Flow Problem with Moving Boundary // J. Assoc. Comp. Machinery, 1958, V. 5. N. 2. P. 161-176.
334. Elsner B., Galbas H.-G., Gorg B., Kolp O., Lonsdale G. A Parallel Multilevel Contact Search Algorithm in Crashworthiness Simulation / Advances in Computational Structures Technology (Selected Papers from Third Int. Conf. on Comp. Structure Technology, Budapest, Civil Comp Press., 1996.
335. Endo T., Oden J.T., Becker E.B., Miller T. A numerical-analysis of contact and limit-point behavior in a class

- of problems of finite elastic-deformation. *Computers and Structures*, 1984. Vol. 18. P. 899-910.
336. Enright D., Redkiw R., Ferziger J., Mitchell I. A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing, dated by March, 21, 2002, in printing. Available at <http://graphics.stanford.edu/~fedkiw/papers/stanford2001-04.pdf>
337. Eterovic A.L., Bathe K.J. On the Treatment of Inequality Constraints Arising from Contact Conditions in Finite-Element Analysis // *Computers and Structures*, 1991, v. 40, p. 203-209.
338. Fancello E.A., Feijoo R.A. Shape Optimization in Frictionless Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1994, v. 37, p. 2311-2335.
339. Fancello E.A., Haslinger J., Feijoo R.A. Numerical Comparison Between Two Cost Functions in Contact Shape Optimization // *Structural Optimization*, 1995, v. 9, No. 1, pp.57-68.
340. Farahani K., Mofid M., Vafai A. A solution method for general contact-impact problem // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2000, v. 187, p. 69-77.
341. Farahani K., Mofid M., Vafai A. United Elements Method for General Contact-Impact Problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 2001, v. 191, p. 843-860.
342. Faria L.O., Bass J.M., Oden J.T., Becker E.B. A Three-Dimensional Rolling Contact Model for a Reinforced Rubber Tire // *Tire Sci. Technol.*, TSTCA, 1989, v. 17, p. 217-233.
343. Faria L.O., Bass J.M., Oden J.T., Yavari B., Tworzidlo W.W., Becker E.B. Tire Modelling by Finite Elements // *Tire Sci. Technol.*, TSTCA, 1992, v. 20, p. 33-56.

344. Farhat C., Roux F.-X. A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm // Int. J. Num. Mech. Engng, 1991, v. 32, p. 1205-1227.
345. Farhat C., Cruvelli L., Roux F.-X. A Transient FETI Methodology for Large-Scale Parallel Implicit Computations in Structural Mechanics // Int. J. Num. Meth. Engng., 1994, v. 37, p.1945-1975.
346. Farhat C., Chen P.-S., Mandel J. A Scalable Lagrange Multiplier Based Domain Decomposition Method for Time-Dependent Problems // Int. J. Num. Meth. in Engng, 1995, v. 38, p. 3831-3853.
347. LaFaurie B., Nardone C., Scardovelly R., Zaleski S. Modelling Merging and Fragmentation in Multiphase Flows with SURFER // J. Comp. Phys., 1994, v. 113, p. 134-147
348. Fedyushkin A.I., Bourago N.G., Polezhaev V.I., Zharikov E.V. (2001) Influence of vibration on heat and mass transfer during crystal growth in ground-based and microgravity environments. Proc. 2nd Pan Pacific Basin Workshop on Microgravity Sciences, 2001, Pasadena, USA, paper CG-1065, P. 1-6.
349. Felippa C.A., Park K.C., Farhat C. Partitioned Analysis of Coupled Mechanical Systems / Invited Plenary Lecture, Fourth World Congress in Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, July 1998 // Expanded version in Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 2001, v. 190 , p. 3247-3270.
350. Fish J. Finite Element Method for Localization Analysis. Ph.D. thesis, Northwestern University, USA, 1989.
351. Flanagan L.M., Flanagan D.P. PRONTO3D: A Three-Dimensional Transient Solid Dynamics Program // Tech. Rep. SAND87-1912, Sandia National Labs, Albuquerque, NM, March 1989.

352. Fleming M.Y., Chu A., Moran B., Belytschko T. Enriched Element-Free Galerkin Methods for Singular Fields // Int. J. Numer. Methods Engng., 1997, v. 40, p. 1483-1504.
353. Floryan J.M., Rasmussen H. Numerical algorithms for viscous flows with moving boundaries // AMR, 1989. V. 42. No. 12. P. 323-341.
354. Francavilla A., Zienkiewicz O.C. A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1975, v. 9, p. 913-924.
355. Fredriksson B. Finite Elements Solutions of Surface Nonlinearities in Structural Mechanics with Special Emphasis to Contact and Fracture Mechanics Problems // Comp. and Struct., 1976, v. 6, p. 281-290.
356. De La Fuente H.M., Felippa C.A. Ephemeral penalty functions for contact dynamics // Finite Elements in Analysis and Design, 1991. V. 9. P. 177-191.
357. Fung Y.C., Biomechanics. Springer-Verlag, 1993.
358. Galin L.A. Contact Problems in the Theory of Elasticity (edited by I.N. Sneddon), North Carolina State College Translation, 1961.
359. Ghaboussi J., Wilson E.L., Isenberg J. Finite element of rock joints and Interfaces // J. of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 99, 1973, p. 833-848.
360. Giannopolis A.E. The Return Mapping Method for the Integration of Friction Constitutive Equations // Computers and Structures, 1989, v. 32, p. 157-168.
361. Gillow K.A., Howison S.D. A bibliography on free and moving boundary problems for Hele-Shaw and Stokes Flow, 2002. Available at Web: <http://www.maths.ox.ac.uk/~howison/Hele-Shaw>.

362. Ginsberg M., Johnson J.P. Benchmarking the Performance of Physical Impact Simulation Software on Vector and Parallel Computers, Proc. of the Supercomputing 88: vol.II, Science and Applications, Computer Society Press, 1988.
363. Ginsberg M., Katnik R.B. Improving Vectorization of a Crashworthiness Code, SAE Technical Paper No. 891985, Passenger Car Meeting and Explosion, Dearborn, 1989.
364. Giroux E.D. HEMP User's Manual, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1973. Rept. UCRL-51079.
365. Glocker Ch., Pfeiffer F. Multibody dynamics with unilateral contacts. John Wiley Sons, 1996.
366. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. Multiple contact model in the problem of tribomechanics // Tribology International, 1991, v. 24, No. 1, p. 29-35.
367. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology, Kluwer Academic Publishers, 1998, 344 p.
368. Goudreau G.L., Hallquist J.O. Recent developments in large-scale finite element Lagrangian hydrocode technology // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1982, v. 33, p. 725-757.
369. Gourret J.-P., Thalmann N.M., Thalmann D. Simulation of object and human skin deformations in a grasping task. Proc. of SIGGRAPH 89 // Computer Graphics, 1989, v. 23, p.4.
370. Green A.E., Naghdi P.M. A General Theory of Elastic-Plastic Continuum, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1965. V. 18. P. 251.
371. Guerra F.M., Browning R.V. Comparison of two slideline methods using ADINA // Computers and Structures, 1983, v. 17, N. 5/6, P. 819-834.

372. Gulidov A.I., Sapozhnikov G.A., Fomin V.M. Numerical simulation of high-speed bodies interaction, University of Tsukuba, 1990.
373. Hallquist J.O. A Procedure for the Solution of Finite Deformation Contact-Impact Problems by the Finite Element Method, Univ. of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1976, Rept. UCRL-52066.
374. Hallquist J.O. Preliminary User's Manuals for DYNA3D and DYNAP (Nonlinear Dynamic Analysis of Solids in Three Dimension), Univ. of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1976, Rept. UCID-17268.
375. Hallquist J.O. Theoretical Manual for DYNA2D, UCID-19401, Lawrence Livermore National Laboratory, 1983.
376. Hallquist J.O., Goudreau G.L., Benson D.J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computation // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1985, v. 51, p. 107-137.
377. Hallquist J.O., Schweizerhof K. and Stillman D. Efficiency Refinements of Contact Strategies and Algorithms in Explicit FE Programming // in *Proceedings of COMPLAS III*, eds. D.R.J. Owen, E. Hinton, E.E. Onate, Pineridge Press, 1992.
378. Hallquist J.O. LS-DYNA3D Theoretical Manual, Livermore Software Technology Corporation. 1993.
379. Hallquist J.O. LS-DYNA Theoretical Manual, Livermore Software Technology Corporation, 1998.
380. Harlow F.H., Shannon J.P. The splash of a liquid drop. // *J. Appl. Phys.*, 1967, v. 38, p. 3855.
381. Harlow F.H., Amsden A.A. Numerical simulation of almost incompressible flow. // *J. Comp. Phys.*, 1968, v. 3, p. 80.

382. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free boundaries. // *Phys. Fluids*, v. 8, p. 2182.
383. Haug E.J., Kwak B.M. Contact Stress Minimization by Contour Design // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1978, v. 12, p. 917-930.
384. Heegaard J.-H., Cournier A. An Augmented Lagrangian method for discrete large-slip contact problems involving friction // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 36, 1993, 569-593.
385. Heinstein M.W., Mello F.J., Laursen T.A. Augmented Lagrangian Algorithms for Enforcement of Contact Constraints in Explicit Dynamic and Matrix-Free Quasistatic Applications, in *Contact Mechanics II: Computational Techniques*, Eds. M.H. Aliabadi and C. Alessandri, Computational Mechanics Publications, Southampton, United Kingdom, 1995, p. 289-296.
386. Heinstein M.W., Laursen T.A. An Algorithm for the Matrix-Free Solution of Quasistatic Frictional Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1999, v. 44, p. 1205-1226.
387. Heinstein M.W., Mello F.J., Attaway S.W., Laursen T.A. Contact-Impact Modeling in Explicit Transient Dynamics // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2000, v. 187, p. 621-640.
388. Hertz H. Study on the Contact of Elastic Bodies // *J. Reine Anglew. Math.*, 1982, v. 29, 156-171.
389. Hestens M.R., Stiefel E. Method of conjugate gradients for solving linear systems // *J. Res. Nat. Bur. Std.*, 1952, v. 69, p. 409-436.
390. Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 1976. V. 6. P. 773-782.

391. Hirokawa S., Tsuruno R. Three-dimensional deformation and stress distribution in an analytical computational model of the anterior cruciate ligament // J. Biomechanics, 2000, v. 33, p. 1069-1077.
392. Hirota G., Fisher S., State A., Lee C., Fuchs H. An Implicit Finite Element Method for Elastic Solids in Contact, SIGGRAPH 2001 Conf, Available at http://www.cs.unc.edu/~andrei/pubs/2001_ComputerAnimation_FEM.pdf
393. Hirt C.W., Nickols B.D. Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Comp. Physics, 1981. V. 39. P. 201-225.
394. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J., Lovisek J. Solution of variational inequalities in mechanics, Springer, New York, 1988.
395. Hoover C.G., Badders D.C., De Groot A.J., Sherwood R.J. Parallel algorithm research for solid mechanics applications using finite element analysis, Thrust Area Report, UCRL-ID-125471, Lawrence National Laboratory, 1997.
396. Hughes T.J.R., Taylor R.L., Sackman J.L., Curnier A. and Kanoknukulchai W. A finite element method for a class of contact-impact problems // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1976, v. 8, p. 249-276.
397. Hughes T.J.R., Taylor R.L., Kanoknukulchai W. A finite element method for Large Displacement Contact and Impact Problems // in Formulations and Computational algorithms in FE Analysis, ed. K. J. Bathe, MIT-Press, Boston, 1977, p. 468-495.
398. Hughes T.J.R. The Finite Element Method, New York: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1987.

399. Huneke I. On a penalty formulation for contact-impact problems // Computers and Structures, 1993, v. 11, p. 193-203.
400. Hyman J.M. Numerical methods for tracking interfaces // Physics, 1984, v. D12, p. 396-407.
401. Ingraffea A.R., Heuze F.E. Finite element models for rock fracture mechanics // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1980, v. 4, p. 25-43.
402. Jean M. Frictional contact in rigid or deformable bodies // Numerical simulations of geomaterials, Amsterdam, Elsevier Science Publisher, 1995, p. 463-486.
403. Jean M. The nonsmooth contact dynamics method // Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng., 1999, v. 177, p. 235-257.
404. Johnson C., Hansbo P. Adaptive finite element methods in computational mechanics, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1992, v. 101, p. 143-181.
405. Johnson G.R. Analysis of elastic-plastic impact involving severe distortions // Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1977, v. 43, p. 439-444.
406. Johnson G.R. High velocity impact in three dimensions // Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1977, v. 44, p. 95-100.
407. Johnson G.R. , Stryk R.A. Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions // Int. J. Impact Engng, 1987, v. 5, p. 411-421.
408. Johnson G.R. , Stryk R.A. Recent EPIC code developments for high velocity impact // Int. J. Impact Eng. 1990, v.10, p. 281-294.

409. Johnson K.L., Contact Mechanics, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985.
410. Johnson N.L., Legacy and future of CFD at Los Alamos, Canadian CFD Conference Ottawa, Canada, June 3-4, 1996, Technical Report of Los Alamos National Lab., LA-UR-96-1426, p. 1-20, available at http://gnarly.lanl.gov/History/CFD_paper_6_24_96.pdf and at <http://t3.lanl.gov/secondlevel/history/viewgraphs.pdf>.
411. Ju J.W., Taylor R.L. A perturbed lagrangian formulation for the finite-element solution of nonlinear frictional contact problems // J. de Mecanique Theorique et Appliquee, 1988, v. 7, p. 1-14.
412. Kalker J.J., Randen Y., A Minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to non-Hertzian Half-Space Contact Problems // J. of engineering mathematics, 1972, v. 6, p. 193-206.
413. Kalker J.J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
414. Kane C., Repetto E.A., Ortiz M., Marsden J.E. Finite element analysis of nonsmooth contact // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1999, v. 180, p. 1-26.
415. Kanto Y., Yagawa G. A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method // Int. J. Num. Meth. Engng., 1990, v. 29, p. 755-774.
416. Kardestuncer H., Norrie D.H. eds. Finite Element Handbook, Mac-Graw Hill Book Company, 1987.
417. Kikuchi N., Song Y. J. Penalty finite element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity // Quaterly of Appl. Mech., 1981, v. 39, No. 1, pp. 1-21.

418. Kikuchi N. A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems // Int. J. Num. Meth. Engng, 1982, v. 18, p. 343-350.
419. Kikuchi N., Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods / SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics, v. 8, Philadelphia, 1986.
420. Kim J.O., Kwak B.M. Dynamic analysis of two-dimensional frictional contact by linear complementary problem formulation.// Int. J. Solids and Structures, 1996, v. 33, N. 30, p. 4605-4624.
421. Kiselev A.B. Computational simulation of boundary conditions in problems of elastoplastic bodies interaction // Systems Analysis Modelling Simulation, 1995, v. 18-19, P. 809-812.
422. Klarbring A., Bjorkman G. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface // Computer and Structures, 1988, v. 30, p. 1185-1198.
423. Klarbring A. Examples of non-uniqueness and non existence of solutions to quasistatic contact problem with friction // Ingenieur Archiv., 1990, v. 50, p. 529-541.
424. Klarbring A., Bjorkman G. Solution of Large Displacement Contact Problems with Friction using Newton's Method for Generalized Equations //Int. J. Num. Meth. Engng., 1992, v. 34, p. 249-269.
425. Klarbring A., Mikelic A., Shillor M. A global existance result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance, Int. Series Num Math., 1992, v. 101, p. 85-111.
426. Koch R. M., Gross M. H., Carls F. R., von Bühren D.F., Fankhauser G., Parish Y.I.H. Simulating facial surgery using

- finite element methods / Proceedings of SIGGRAPH '96, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 1996, p. 421-428.
427. Kondaurov V.I., Kukudzhanov V.N. On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic media with finite deformations // Archives of Mechanics, 1979, v. 31, N 5.
428. Kondaurov V.I., Lomov I.N. Fracture of brittle material with initial porosity under high energy density flows / Shock Compression of Condensed Matter II 1997. Proc. Conf. Amer Phys. Society. Topical Group of Shock Condensed Matter. Ed. S.C.Smidt, 1998, pp.247-250.
429. Kondaurov V.I. Thermomechanics of Phase Transitions of the First Order in Solids // Russian Journal of Earth Science, 2002, v. 4, No. 2, p. 1-18.
430. Kothe D.B., Rider W.J. Comments on modelling interfacial flows with volume-of-fluid method, Technical report LA-UR-3384, Los Alamos National Lab., 1994. Available at <http://www.c3.lanl.gov/~vjr/pubs.html>.
431. Kothe D.B., Rider W.J., Mosso S.J., Brock J.S. Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions, AIAA Paper 96-0859, 1996.
432. Kothe D., Juric D., Lam K., Lally B. Numerical recipes for mold filling simulation, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, Rept. 87545, USA, 1998 (in B. Thomas, C. Beckermann (Eds.) Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes VIII, New York, 1998, TMS Publishers. Available at <http://www.lanl.gov/energy/est/transportation/trans/pdfs/materials/NUMREC.PDF>)

433. Korobeinikov S.N., Alyokhin V.V., Bondarenko M.I. Application of a finite element method for the solution of three dimensional contact problems / Advances in Simulation and Interaction Techniques, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Computational Structures Technology, M. Papadrakakis, B.H.V. Topping (Eds.), Edinburgh, Civil-Comp. Press, 1994, P. 165-175.
434. Kowalczyk P. Finite-deformation interface formulation for frictionless contact problems // Comm. Num. Meth. Engng., 1994. V. 10. P. 879-893.
435. Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S. Friction and Wear - Calculation Methods, Pergamon Press, 1982.
436. Kukudzhanov V.N., Bourago N.G., Glushko A.I., Kovshov A.N., Ivanov V.L., Shneiderman D.I. On the problem of damage and localization of strains", Chalmers Univ. of Tech., Dept. of Struct. Mech., publ.95:11, Goteborg, 1995. P. 1-35.
437. Kukudzhanov V.N., Santaoya K. Thermodynamics of viscoplastic medii with internal parameters // Izvestia RAS, Mechanics of Solids, 1997, No. 2, p. 115-126.
438. Kulak R.F. Adaptive contact elements for three-dimensional explicit transient analysis // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1989, v. 72, p. 125-151.
439. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic systems, Chapman & Hall/CRC, London, Boca Raton, 2001.
440. Kunugi T. MARS for multiphase flow, Kyoto Univ., 2002, P. 1-10. Available at Web: <http://www.nucleng.kyoto-u.ac.jp/Groups/F-group/gallery/pdf/iscfd13.pdf>

441. Kwak B.M. Complementary problem formulation of three-dimensional frictional contact // J. Appl. Mech., ASCE, 1991, v. 58, p. 134-140.
442. Kwak B.M. Nonlinear complementary problem formulation of three-dimensional frictional contact and its numerical implementations / Comput. Methods in Contact Mechanics III, Ed. by Aliabadi and Samartin, Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997, p. 159-169.
443. Ladeveze P. Nonlinear Computational Structural Mechanics, Springer, New York, 1998.
444. Larsson R., Runesson K. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization // Int. J. Num. Meth. Engng., 1993, v.36, p. 2087-2105.
445. Laursen T.A., Simo J.C. On the Formulation and Numerical Treatment of Finite Deformation Frictional Contact Problems // in Nonlinear Computational Mechanics – State of the Art, P. Wriggers and W. Wagner, eds., Springer-Verlag, Berlin, 1991, p. 716-736.
446. Laursen T.A., Simo J.C. Formulation and Regularization of Frictional Contact Problems for Lagrangian Finite Element Computations, / in Proceedings of the Third International Conference on Computational Plasticity Fundamentals and Applications, Part I, D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton, eds., Pineridge Press, Swansea, United Kingdom, 1992, p. 395-408.
447. Laursen T.A., Simo J.C. Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems Using Augmented Lagrangians // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1993, v. 108, p. 133-146.
448. Laursen T.A., Simo J.C. A Continuum-Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multibody, Large

- Deformation Frictional Contact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1993, v. 36, p. 3451-3485.
449. Laursen T.A., Govindjee S. A note on the treatment of frictionless contact between nonsmooth surfaces in fully nonlinear problems // Comm. Num. Meth. Engng., 1994, v. 10, p. 869-878.
450. Laursen T.A., Oancea V.G. Automation and Assessment of Augmented Lagrangian Algorithms for Frictional Contact Problems // J. Appl. Mech., 1994, v. 61, p. 956-963.
451. Laursen T.A. The Convected Description in Large Deformation Frictional Contact Problems // Int. J. Solids and Structures, 1994, v. 31, p. 669-681.
452. Laursen T.A. Review of Computational Methods in Contact Mechanics / Eds. M.H. Aliabadi and C.A. Brebbia, American Scientist, 1995, v. 83, p. 196-198.
453. Laursen T.A., Oancea V.G. On the constitutive modeling and finite element computation of rate dependent frictional sliding in large deformations // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 1997. V. 143. P. 197-227.
454. Laursen T.A., Chawla V. Design of Energy Conserving Algorithms for Frictionless Dynamic Contact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1997, v. 40, p. 863-886.
455. Laursen T.A. On the development of thermodynamically consistent algorithms for thermomechanical frictional contact // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1999, v. 48, p. 1525-1547.
456. Laursen T.A. Computational Contact and Impact Mechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.
457. Laursen T.A., Love G.R. Improved Implicit Integrators for Transient Impact Problems - Geometric Admissibility Within

- the Conserving Framework // Int. J. Num. Meth. Engng., 2002, v. 53 , p. 245-274.
458. Lax P.O. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure Appl. Math., 1954. V. 7. P. 158-193.
459. Lebon F., Raous M. Multibody contact problem including friction in structure assembly // Computers and Structures, 1992, v. 43, No. 5, p. 925-934.
460. Lee C.Y., Oden J.T. and Ainsworth M. Local a posteriori error estimates and numerical results for contact problems and problems of flow through porous media / in: P. Wriggers, W. Wagner (Eds.), Nonlinear Computational Mechanics, Springer, Berlin, 1991, p. 671-689.
461. Lee C.Y., Oden J.T. A priori error estimation of hp-finite element approximations of frictional contact problems with normal compliance // Int. J. Engng. Science, 1993, v. 31, p. 927-952.
462. Lee C.Y., Oden J.T. Theory and approximation of quasi-static frictional contact problems // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1993, v. 106, p. 407-429.
463. Lee C.Y., Oden J.T. A-posteriori error estimation of hp finite-element approximations of frictional contact problems // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1994, v. 113, p. 11-45.
464. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strain, J. Appl. Mech., 1969. V. 36.
465. Lee S.H. Rudimentary consideration for adaptive gap/friction element based on the penalty method // Computers and Structures, 1993, v. 47, p. 1043-1056.
466. Lemaitre J. A course on Damage Mechanics. Springer-Verlag, 1992; 2nd ed. 1996.

467. Lewis J.P., Cordner M., Fong N. Pose space deformation: a unified approach to shape interpolation and skeleton-driven deformation / Proceedings of SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 2000, pp. 165-172.
468. Li L-Y., Bettess P. Adaptive finite element methods: A review // AMR, 1997. V. 50. No. 10. P. 581-591.
469. Li S., Liu W.K. Meshfree and particle methods and their applications // AMR, 2002, v. 55(1) P. 1-34.
470. Light C., Pratt E., Raous M. Remarks on a numerical method for unilateral contact including friction // Int. Series Num. Math., 1991, v. 101, p. 129-144.
471. Lin J.I. DYNA3D: A nonlinear, explicit, three-dimensional finite element code for solid and structural mechanics, User manual, Methods Development Group, Lawrence Livermore National Laboratory, 1998.
472. Ling W., Stolarski H.K. On elasto-plastic finite element analysis of some frictional problems with large sliding // Engng. Computations, 1997, v. 14, No. 5, p. 558-580.
473. Lions J.-L. The work of Stampacchia in variational inequalities // Boll. Unione mat. Ital. 1978, A15, No. 3, p. 736-756.
474. Liseikin V.D. Grid Generation Methods. New York: Springer-Verlag, 1999.
475. Loret, B., Prevost, J.H. Dynamic strain localisation in elasto-(visco-) plastic solids. Part. I: general formulation and one-dimensional examples. Part 2: Plane strain examples. Computer Meth. in Applied Mech. and Engng, 1990. V. 83, pp. 247-273 and 275-294.

476. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A Plastic-damage model for concrete. *Int. J. of Solids and Structures*, 1989. V. 25, N. 3, pp. 299-326.
477. Madhusudana C.V., Fletcher L.S. Gas conductance contribution to contact heat transfer // *AIAA Paper 81-1163*, 1981.
478. Maenchen G., Sack S. The TENSOR code / in "Methods in Computational Physics", v. 3, Fundamental methods in Hydrodynamics, Academic Press, New York, 1964.
479. Malone J.G. Automated mesh decomposition and concurrent finite element analysis for hypercube multiprocessor computer // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1988, v. 70, p. 27-58.
480. Malone J.G., Johnson N.L. A parallel finite element contact impact algorithm for non-linear explicit transient analysis: Part I - The search algorithm and contact mechanics // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1994, v. 37, p. 559-590.
481. Malone J.G., Johnson N.L. A parallel finite element contact impact algorithm for non-linear explicit transient analysis: Part II - Parallel implementation // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1994, v.37, p. 591-603.
482. Malvern L.E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1969.
483. Marchant M.J., Weatherill N.P. Adaptivity techniques for compressible inviscid flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 1993. V. 106. P. 83-106.
484. Marks W.R., Salamon N.J. A projected conjugate gradient method for frictionless contact problems // *Trans. ASME, J. Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1983, v. 105.

485. Martins J.A.C., Oden J.T. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws // *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, 1987, v. 11, p. 407-428. bibitemMay86 May H.-O. The conjugate gradient method for unilateral problems // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1986, v. 12, No. 4, p. 595-598.
486. McDevitt T.W., Laursen T.A. A Mortar-Finite Element Formulation for Frictional Contact Problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2000, v. 48, p. 1525-1547.
487. *Mechanics of granular materials and powder systems*, Ed. M. M. Mehrabadi, ASME, 1992. MD-Vol. 37, 141 pp.
488. Melenk J.M., Babuska I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1996, v. 139, p. 289-314.
489. Meschke G., Lackner R., Mang H.A. An anisotropic elastoplastic damage model for plain concrete. *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, 1998. V. 42, pp. 703-727.
490. Michalowski R., Mroz Z. Associated and nonassociated sliding rules in contact friction problems // *Arch. Mech.*, 1978, v. 30, p. 259-276.
491. Mikolajczak A., Rassinoux A., Dufossi F., Kromer V. A finite element procedure of contact problems based on a remeshing of the contact zone / *European Congress on Comput. Methods in Appl. Sci. Engng*, ECCOMAS 2000, Barcelona, 2000, p. 1-15.
492. Miller K., Chinzei K., Orsengo G., Bednarz P. Mechanical properties of brain tissue in-vivo: experiment and computer simulation // *J. Biomechanics*, 2000, v. 33, p. 1369-1376.

493. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // Int. J. Numer. Methods Engng. 1999, v. 46, p. 131-150.
494. Monaghan J.J. Why Particle Methods Work // SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1982, v. 3 (4), p. 422-433.
495. Moresi L., Muhlhaus H., Dufour F. An overview of numerical methods for Earth simulations, 2001. Available at <http://www.ned.dem.csiro.au/research/solidMech/Geodynamics/ChapmanConference/AbstractsReceived/AbstractFiles/Moresi-et-al.pdf>
496. Munjiza a., Owen D.E., Bicanic N. A Combined Finite-Discrete Element Method in Transient Dynamics of Fracturing Solids // Eng. Computations, 1995, v. 12, p. 145-174.
497. Nackenhorst U. On the finite element analysis of steady state rolling contact / in: M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia (Eds.), Contact Mechanics - Computational Techniques, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, 53-60.
498. Nagtegaal J.C., Taylor L.M. NUMISHEET91, 1991, p. 705.
499. Neto E.A.D., Hashimoto K., Peric D., Owen D.R.J. A phenomenological model for frictional contact accounting for wear effects // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1996, A354, p. 819-843.
500. Nichols B.D., Hirt C.W., Methods for Calculating Multi-Dimensional, Transient Free Surface Flows Past Bodies / Proc. First Intern. Conf. Num. Ship Hydrodynamics, Gaithersburg, 1975.
501. Nillson L., Zhong Z.H., Oldenberg M. Analysis of shell structures subjected to contact-impact / in: A-K.Noor, T.

- Belytschko and J. Simo, Analytical and Computational Methods for Shells, ASME, New York, 1989.
502. Nour-Omid B., Wriggers P. A 2-level iteration method for solution of contact problems // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1986, v. 54, p. 131-144.
503. Oancea V.G., Laursen T.A. A Finite Element Formulation of Thermomechanical Rate-Dependent Frictional Sliding // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1997, v. 40, p. 4275-4311.
504. Oancea V.G., Laursen T.A. Stability Analysis of State Dependent Dynamic Frictional Sliding // *Int. J. of Non-Linear Mech.*, 1997, v. 32, p. 837-853.
505. Oden J.T. Exterior Penalty Methods for Contact Problems in Elasticity // in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, eds. W. Wunderlich, E. Stein, K.J. Bathe, Springer, Berlin, 1981.
506. Oden J.T., Pires E.B. Algorithms and numerical results for finite-element approximations of contact problems with non-classical friction laws // *Computers and Structures*, 1983, v. 19, p. 137-147.
507. Oden J.T., Pires E.B. Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity // *J. Appl. Mech.*, 1983, v. 50, p. 67-76.
508. Oden J.T., Carey G.F. *Finite Elements / Special Problems in Solid Mechanics*, Volume V, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1984.
509. Oden J.T., Pires E.B. Algorithms and numerical results for finite-element approximations of contact problems with non-classical friction laws. *Computers and Structures*, 1984. V. 19. P. 137-147.

510. Oden J.T., Martins J.A.C. Models and computational methods for dynamic frictional phenomena, CMAME 1985. V. 52. P. 527-634.
511. Oden J.T., Martins J.A.C. Models and computational methods for dynamic frictional phenomena // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, v. 52, p. 527-634.
512. Oden J.T., Lin T.L. On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, p. 297-367.
513. Ogata Y., Yabe T. Shock capturing with improved numerical viscosity in primitive Euler representation, Comp. Phys. Comm., 1999, v. 119, p. 179.
514. Oishi A. Large-scale dynamic analyses with contact-impact using the hierarchical domain decomposition method / Annual report of Adventure Project ADV-99-1, Tokushima, 1999, p. 1-23.
515. Okamoto N., Nakazawa M. Finite Element Incremental Contact Analysis with Various Frictional Conditions // Int. J. Num. Meth. Engng, 1979, v. 14, p. 337-357.
516. Oldenburg M., Nilsson L. The position code algorithm for contact searching // Int. J. Num. Meth. Engng, 1994, v. 37, p.359-386.
517. Oloffson T., Klisinski M., Nedar P. Inner softening bands: a new approach to localisation in finite elements / Comput. Modelling of Concrete Structures, Proc. of EURO-C Int. Conf., Edited by H.Mang, N. Bicanic and R. De Borst, Swansea: Pineridge Press, 1994, p. 373-382.
518. Onate E., Oller S., Oliver J., Lubliner J. A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity, Engng Computations, 1988. V. 5. N. 4. P. 309-319.

519. Oran E.S., Boris J.P. Numerical Simulation of Reactive Flow, Elsevier, New York, 1987.
520. Ortiz M., Pinsky P.M., Taylor R.L. Operator split methods for the numerical solution of the elastoplastic dynamic problem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1983. V. 39. P. 137-157.
521. Ortiz M., Quigley J.J. IV Adaptive Mesh Refinement in Strain Localization Problems // Comp. Meth. appl. Mech. Engng., 1991, v. 90, p. 781-804.
522. Ortiz M. Computational micromechanics. Computational Mechanics, 1996. V. 18. P. 321-338.
523. Ortiz M., Stainier L. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999. V. 171. P. 419-444.
524. Ortiz M., Repetto E.A. Nonconvex energy minimization and dislocation structures in ductile single crystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1999. V. 47. No. 2. P. 397-462.
525. Osher S., Sethian J.A. Front propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. // J. Comp. Phys., 1988, v. 79, p. 12.
526. Osher S., Fedkiw R. Level Set Methods: An Overview and Some Recent Results // J. Comp. Phys., 2001, v. 169, p. 463-502.
527. Osher S.J., Tryggvason G. Preface // J. Comp. Phys., 2001, v. 169, No. 2, p. 249-249 (Special issue of JCP on methods for multiphase flows).
528. Osher S., Fedkiw R. The Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces, Springer-Verlag, New York, 2002.

529. Ottosen N.S. A Failure criterion for concrete. J. of the Engng Mechanics Division, ASCE, 1977. V. 103. No. 4. P. 527-535.
530. Ottosen N.S. Constitutive mechanics and numerical computations, Sixth Nordic Seminar on Comput. Mech., Univ. of Lincoping, October 18-19, 1993. P. 55-70.
531. Owen D.R.J., Hinton E. Finite elements in plasticity: theory and practice, Swansea: Pineridge Press, 1980. 594 p. ISBN 0-906674-05-2.
532. Ozbolt J., Bazant Z.P. Numerical smeared fracture analysis: nonlocal microcrack interaction approach. Int. J. for Numer. Meth. in Engng, 1996. V. 39, pp. 635-661.
533. Padmanabhan V., Laursen T.A. A Framework for Development of Surface Smoothing Procedures in Large Deformation Frictional Contact Analysis // Finite Elements in Analysis and Design, 2001, v. 37, p. 173-198.
534. Padovan J., Zeid I. Finite element analysis of steadily moving contact fields // Computers and Structures, 1984, v. 2, p. 111-200.
535. Padovan J. Finite element analysis of steadily and transiently moving and rolling viscoelastic structure-I // Theory Comput. Struct., 1987, v. 27, p. 249-257.
536. Padovan J., Padovan P. Modelling wear at intermittently slipping high speed interfaces // Computers and Structures, 1994, v. 52, p. 795-812.
537. Pamin J., De Borst R. Gradient plasticity and finite elements in the simulation of concrete fracture. Comput. Modelling of Concrete Structures, Proc. of EURO-C Int. Conf., Innsbruck-Austria, Edited by H. Mang, N.Bicanic and R. De Borst. Swansea, Pineridge Press, 1994. P. 393-402.

538. Panagiotopoulos P.D. Inequality Problems in Mechanics and Applications. Birkhauser, Boston, 1985.
539. Pandolfi P., Kane C., Marsden J.E., Ortiz M. Time-Discretized Variational Formulation of Nonsmooth Frictional Contact // Int. J. Num. Meth. Engng., 2001, 31 p.
540. Papadrakakis M., Ghionis P. Conjugate gradient algorithms in nonlinear structural analysis problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, v. 59, p. 11-27.
541. Papadopoulos P., Taylor R.L. A Mixed Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1992, v. 94, p. 373-389.
542. Papadopoulos P., Taylor R.L. A Simple Algorithm for Three-dimensional Finite Element Analysis of Contact Problems // Computers and Structures, 1993, v. 46, p. 1107-1118.
543. Papadopoulos P., Jones R.E. On a Class of Finite Elements for Frictionless Contact Problems, Recent Developments in Finite Element Analysis, T. J. R. Hughes, E. Onate and O. C. Zienkiewicz editors, Springer-Verlag/CIMNE, Barcelona, 1994, p. 246-254.
544. Papadopoulos P., Jones R.E., Solberg J. A Novel Finite Element Formulation For Frictionless Contact Problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 1995, v. 38, p. 2603-2617.
545. Papadopoulos P., Solberg J.M. A Hamiltonian Formulation for Dynamic Contact Between Finitely Deforming Elastic Solids / in Advances in Computational Engineering Science S.N. Atluri and G. Yagawa editors, Tech Science Press, Forsyth, 1997, p. 1098-1103
546. Papadopoulos P., Solberg J.M. A Lagrange Multiplier Method for the Finite Element Solution of Frictionless Contact Problems // Math. Comp. Modelling, 1998, v. 28, p. 373-84.

547. Parisch H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1989, v. 28, p. 1803-1812
548. Parisch H., Lubbing Ch. // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1997, v. 40, p. 3359.
549. Park J., Anderson W.J. Geometric Optimization in Presence of Contact Singularities // *AIAA Journal*, 1995, v. 33, No. 8, p. 1503-1509.
550. Park K.C., Felippa C.A. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2000, v. 47, p. 395-418.
551. Park K.C., Felippa C.A., Rebel G. A simple algorithm for localized construction of nonmatching structural interfaces, Center for Aerospace Structures, Report No. CU-CAS-00-22, University of Colorado, Boulder, 2000.
552. Pasta J.R., Ulam S. Heuristic numerical work in some problems of hydrodynamics // *Math. Tables Aids Comput.* 1959. 13.
553. Peric D., Owen D.R.J. Computational model for 3-d contact problems with friction based on the penalty method // *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1992, v. 35, p. 1289-1309.
554. Peyret R., Taylor T.D. *Computational Methods for Fluid Flow*, New York, Springer, 1990. P. 1-358.
555. Pfeiffer F. Unilateral problems of dynamics // *Archive of Applied Mechanics*, 1999, v.69, p. 503-527.
556. Pietrzak G., Curnier A. Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of multibody, large deformation frictional contact problems / *Comput. Plasticity, Fundamentals and Applications*, Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton, Barcelona, CIMNE, 1997, p. 878-883.

557. Pifco A.B., Winter R. Theory and application of finite element analysis to structural crash simulation // Computers and Structures, 1981, v. 13, p. 277-285.
558. Pinsky P.M., Ortiz M., Taylor R.L. Operator split methods for the numerical solution of the finite-deformation elastoplastic dynamic problem. Computers and Structures, 1983. V. 17. P. 345-359.
559. Pires E.B., Oden J.T. Analysis of contact problems with friction under oscillating loads // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1983. V. 39. P. 337-362.
560. Plimpton S., Attaway S., Hendrickson B., Swegle J., Vaughan C., Gardner D. Transient Dynamics Simulations: Parallel Algorithms for Contact Detection and Smoothed Particle Hydrodynamics // J. Parallel and Distributed Computing, 1998, v. 50, p. 104-122.
561. Praskacz E.J. On impact-contact algorithms for parallel distributed-memory computers / Computational Mech. '95 (Proceedings of the Int. Conf. on Comp. Engng Scirnce, Hawaii, USA), 1995, p. 369-374.
562. Puckett E.G., Saltzman J.S. A 3D adaptive mesh refinement algorithm for multimaterial gas dynamics. // Physica, 1992, v. D60, p. 84.
563. Puckett E.G., Almgren A.S., Bell J.B., Marcus D.L., Rider W.J. A high-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows. // J. Comp. Phys., 1997, v. 130, p. 269.
564. Puso M.A., Laursen T.A. A 3D Contact Smoothing Method Using Gregory Patches // Int. J. Num. Meth. Engng., 2002.
565. Rabier P.J., Martins J.A.C., Oden T.J., Campos L. Existence and local uniqueness of solutions to contact problems in

- elasticity with nonlinear friction laws // Int. J. Engng. Sci., 1986, v. 24, p. 1755-1768.
566. Rabier P.J., Oden J.T. Solution to Signorini-like contact problems through interface models. 1. Preliminaries and formulation of a variational equality // Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 1987, v. 11, p. 1325-1350.
567. Rabier P.J., Oden, J.T. Solution to Signorini-like contact problems through interface models. 2. existence and uniqueness theorems // Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 1988, v. 12, p. 1-17.
568. Radovitzky R., Ortiz, M. Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999. V. 172. P. 203-240.
569. Rannacher R., Suttmeier F.T. A posteriori Error Control in Finite Element Methods via Duality Techniques: Application to Perfect Plasticity, // Comp. Mech, 1999.
570. Raous M. (Ed.) Numerical methods in mechanics of contact involving friction // J. de Mechanique Theorique et Appliquee, Special Issue, Supp. 1 to vol. 7, Gauthier-Villars, 1988.
571. Rashid M.M. The arbitrary local mesh refinement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 1998, v. 154, p. 133-150.
572. Rider W.J., Kothe D.B. Stretching and Tearing Interface Tracking Methods / Technical Report AIAA - 95-0699, AIAA, 1995 (Available at www.c3.lanl.gov/~wjr/publ.html).
573. Riedel H., Sun D.-Z. Simulation of die pressing and sintering of powder metals, hard metals and ceramics / Num. Meth. in Indust. Proc., Chenot, Wood and Zienkiewicz (Eds.), Balkema, Rotterdam, 1992, p. 883-886.

574. Ringers B.E. New sliding surface techniques enable lagrangian code to handle deep target penetration/perforation problems // Lect. Notes Engng, 1983, No. 3, p. 36-46.
575. Rots J.G., Nauta P., Kusters G.M.A., Blaauwendraad J. Smeared crack approach and fracture localisation in concrete, Reron, 1985. V. 30. No. 1. P. 1-48.
576. Rots J.G. Smeared and discrete representations of localised fracture. Int. J. of Failure, 1991. V. 51. P. 45-59.
577. Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // AMR, 1995, v. 48(4), p. 151-188
578. Sachdeva T.D., Ramakrishnan C.V. A Finite Element Solution for the Two-dimensional Elastic Contact Problems with Friction // Int. J. Numer. Meth. Engng., 1981, v. 17, p. 1257-1271.
579. Saleeb A.F., Chen K., Chang T.Y.P. An effective two-dimensional frictional contact model for arbitrary curved geometry // Int. J. Num. Meth. Engng., 1994, v. 37, p. 1297-1321
580. Santos A., Makinouchi A. // J. Mater. Proc. Tech., 1993, v. 50, p. 277.
581. de Saracibar A., Chiumenti M. Numerical Analysis of Frictional Wear Contact Problems. Computational Model and Applications, to appear in Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1998.
582. Schweizerhof K., Hallquist J.O. Explicit integration schemes and contact formulations for thin metal forming. FE-simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry / VDI Berichte 894, Zurich-Switzerland, Dusseldorf: VDI Verlag, 1991, p. 405-439.
583. Schweizerhof K., Hallquist J.O., Wainscott B. Improvements in contact algorithms for the simulation of thin sheet metal

- forming with explicit finite element programs / In: Num. Meth. in Industrial Forming Processes. Proc. of NUMIFORM 92, Valbonne-France, Edited by J.L. Chenot, R.D. Wood and O.C.Zienkiewicz, Rotterdam: Balkema, 1992, p. 535-542.
584. Sethian J.A. Level Set Methods. Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, Cambridge University Press, 1996.
585. Sethian J.A. Tracking interfaces with level sets // American Scientist, 1998, v. 85, p. 254.
586. Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1999.
587. Sethian J., Evolution, Implementation, and Application of Level Set and Fast Marching Methods for Advancing Fronts // J. Comp. Phys., 2001, 169, p. 503-555.
588. Shai I., Santo M. Heat transfer with contact resistance // Int. J. Heat Mass Transfer, 1982, v. 24, 465-470.
589. Sharif N.H., Wiberg N.-E. Stationary level set method for modeling sharp interfaces in groundwater flow / Preprint 2001:06, Chalmers University, Goteborg, 2001. Available at http://www.phi.chalmers.se/pub/preprints/pdf/-_phiprint-2001-06.pdf
590. Shyy W., Francois M., Udaykumar H.S., N'dri N., Tran-Son-Tay R. Moving boundaries in micro-scale biofluid dynamics // AMR, 2001, v. 54(5), p. 405-453.
591. Signorini A. Sopra alcune questione di elastostatica // Atti Soc. Ital. Progr. Sci., 1933, p. 513-533.

592. Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinearizzat e semilinearizzata // Rend. di Matem. e delle sue appl., 1959, T. 18, No. 1-2, p. 95-139.
593. Simo J.C., Wriggers P., Taylor R.L. A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite-element Solution of Contact Problems // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1985, v. 50, p. 163-180.
594. Simo J.C., Wriggers P., Schweizerhof K.H., Taylor R.L. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints // Int. J. Num. Meth. Engng., 1986, v. 23, p. 779-800.
595. Simo J.C., Laursen T.A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction // Computer and Structures, 1992, v. 42, p. 97-116.
596. Simo J., Oliver J., Armero F. An analysis of strong discontinuities induced by softening solutions in rate-independent solids // J. Comp. Mech., 1993, v. 12, p. 277-296.
597. Simon J.C. On a fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1991, v. 60, p. 153-173.
598. Simons J.W., Bergan P.G. A finite element formulation of three- dimensional contact problems with slip and friction // J. Comp. Mech., 1986, v. 1, p. 153-164.
599. Soltani B., Mattiasson K., Samuelsson A. Implicit and dynamic explicit solutions of blade forming // Seventh Nordic Siminar on Comput. Mech. Abstracts. The Norvegian Inst. of Techn. Univ. of Trondheim. October 4-5, 1994. P. 78-80.

600. Stadter J.T., Weiss R.O. Analysis of Contact through Finite Element Gaps // Computers and Structures, 1979, v. 10, p. 867-873.
601. Stampacchia G., Lions J.L. Inequations variationnelles non coercives // C. R. Acad. Sci, Paris, 1965, v. 261, p. 25-27.
602. Stampacchia G., Lions J.L. Variational inequalities // Com. Pure Appl. Math., 1967, v. 20, p. 493-519.
603. Stecher F.P., Johnson G.C. Lagrangian computations for projectile penetration into thick plates / in: W.A.Gruver, ed., Computers in Engineering, Vol. 2, ASME, New York, 1984, G00240.
604. Stechschulte R.A., Luchini J.R. A laminated composite solid element and its application to tire analysis // Tire Sci. Technol., TSTCA, 1987, v. 15, p. 42-57.
605. Stein E., Wriggers P. Calculation of impact contact problems of thin elastic shells taking into account geometrical nonlinearities within the contact region. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1982, v. 34, p. 861-880.
606. Stromberg N. A Newton method for three dimensional fretting problems. European Journal of Mechanics A/Solids, 1997. V. 16. P. 573-593.
607. Sumi Y. Computational crack path prediction // Theoret. Appl. Fract. Mech., 1985, v. 4, pp. 149-156.
608. Sun S.M., Tzou H.S., Natori M.C. Parametric quadratic programming method for dynamic contact problems with friction // AIAA J., 1994, v. 32, No. 2, p. 371-378.
609. Sussman M., Smereka P., Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow // J. Comp. Phys., 1994, v. 114, p. 146.

610. Sussman M., et al. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows // J. Comp. Phys., 1999, v. 148, p. 81.
611. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. // SIAM J. Num. Anal., 1984, v. 21, p. 995.
612. Szymczak W.G., Rogers J.C.W., Solomon J.M., Berger A.E. A numerical algorithm for hydrodynamic free boundary problems // J. Comp. Phys., 1993, v. 106, p. 319-336.
613. Tada Y., Nishihara N. Optimum Shape Design of Contact Surface with Finite Element Methods // Advances in Engineering Software, 1993, v. 18, p.75-85.
614. Tabor D. Friction - The Present state of Our Understanding // J. Lubr. Technology, 1981, v. 103, p. 169-179.
615. Le Tallec P., Numerical methods for solids / In: Ciarlet, P.G., Lions, J. L. (eds.), Handbook of Numerical Analysis. North-Holland, 1994.
616. Le Tallec P. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations // Int. J. Num. Meth. Engng., 1994, v. 37, p. 1159-1186.
617. Tanaka R., Nakamura T., Yabe T., Wu H. A class of conservative formulation of the CIP method. // CFD J., 1999, v. 8, p. 1.
618. Tanaka R., Nakamura T., Yabe T. Constructing an exactly conservative scheme in a non-conservative form. // Comp. Phys. Comm., 2000, v. 126, p. 232.
619. Tarzia D.A. A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion Stefan problem. University di Ferenze, Technical Report, 1988.

620. Taylor R.L., Papadopoulos P. On a Finite Element Method for Dynamic Contact/Impact Problems / In: Finite Elements in the 90's , E. Onate, J. Periaux and A. Samuelson editors, Springer-Verlag/CIMNE, Barcelona, 1991, p. 212-224,
621. Taylor R.L., Papadopoulos P. On a Patch Test for Contact Problems in Two Dimensions / In: Nonlinear Computational Mechanics, P. Wriggers and W. Wagner editors, Springer-Verlag, Berlin, 1991. p. 690-702.
622. Taylor R.L., Papadopoulos P. On a Finite Element Method for Dynamic Contact/Impact Problems // Int. J. Num. Meth. Engng., 1993, v. 36, p. 2123-2140,
623. Terzopoulos D., Platt J., Barr A., Fleischer K., Elastically deformable models / In: Proc. of SIGGRAPH'87, Computer Graphics, 1987, v. 21, No. 4, pp. 205-214.
624. Truesdell C., ed., Continuum Mechanics (reprints). New York: Gordon and Breach v. I. 1966; v. II. 1965.
625. Truesdell C. and Noll, W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics, in Encyclopedia of Physics, v. III/3, ed. S. Flugge. Berlin: Springer-Verlag. 1965.
626. Truesdell C. A simple example of an initial-value problem with any desired number of solutions. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 1974. V. 108. P. 301-304.
627. Truesdel C. A First Course in Rational Continuum Mechanics, General Concepts, v. 1, Academic Press, New York, 1977.
628. Tomita Y. Simulations of plastic instabilities in solid mechanics. AMR 1994, v. 47(6) Part 1, p. 171-205; A. S. Kobayashi (ed.) AMR, 1994, v. 47(6) Part 2.
629. Thompson E. Use of Pseudo-Concentrations to Follow Creeping Viscous Flows During Transient Analysis // Int. J.

- Num. Meth. Fluids, 1986, v. 6, pp. 749-761; Proc. of the Third Inter. Conf. Numer. Meth. in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, v. 18, Springer Verlag N.Y., 1986, pp. 163-173.
630. Tompson J.F., Soni B.K., Weatherill N.P. (Eds.) Handbook of grid generation, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
631. Toro E.T. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics // Berlin, Springer-Verlag, 1997.
632. Tseng J., Olson M.D. The Mixed Finite Element Method Applied to Two-dimensional Elastic Contact Problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 1981, v. 17, p. 991-1014.
633. Twodzydlo W.W., Liszka T.J., Reddy M.P., Westermann T.A., Yavari B.B. H-p adaptive FEA and error estimation in engineering applications, theoretical background and practical experiences / In: Fifth Pan American Congress on Applied Mechanics, PACAM V, San Juan, Puerto Rico, 1997.
634. Udaykumar H.S., Mittal R., Shyy W. Computation of Solid-Liquid Phase Fronts in the Sharp Interface Limit on Fixed Grids // J. Comp. Phys., 1999, v. 153, p. 535-574.
635. Unverdi S.O., Truggvason G. A front-tracking projection method for viscous, incompressible, multi-fluid flows // J. Comp. Phys. 1992, v. 100, p. 25-37.
636. de Vahl Davis G. and I. P. Jones. Natural convection in square cavity: A comparison exercise. Intern. J. Numer. Meth. Fluids. 1983. V. 3. P. 227.
637. Verfurth R. A Review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques // Technical report, Institut fur Angewandte Mathematik, Universitat, Zurich, 1993.
638. Wakisaka T., Takeuchi S., Chung J.H. A numerical study on the mixture formation process in fuel injection engines by means of the CIP method. // CFD J., 1999, v. 8, p. 82.

639. Walter H., Baillet L., Brunet M. 3D finite element modelling of crack propagation in concrete during pull-out and shear tests of anchors. *Fracture and Damage Mechanics, Londres-Angleterre, Edite par M.H.Aliabadi, 1999. P. 403-411.*
640. Wang S.P., Nakamachi E. The inside-outside search algorithm for finite element analysis // *Int. J. Num. Meth. Engng, 1997, v. 40, p. 3665-3685.*
641. Welch J.E., Harlow F.H., Shannon J.P., Daly B.J. The MAC method Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-3425, 1965.
642. Wheeler A. A. Four test problems for the numerical simulation of flow in Chochralski crystal growth, *J. Crystal Growth, 1990. V. 99. P. 910.*
643. White L., Oden J.T. Dynamics and control of viscoelastic solids with contact and friction effects // *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 1989, v. 13, p. 459-474.*
644. Wikstrom N. A literature survey aiming to shed some light on the cavitation simulation problem, 2000, available at <http://www.na.chalmers.se/~niklasw/documents/survey.pdf>
645. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow / In: *Methods in Computational Physics, v. 3, Fundamental methods in Hydrodynamics, Academic Press, New York, 1964, p. 211-263.*
646. Wilkins M.L. Mechanics of penetration and perforation // *Int. J. Engng. Sci., 1978, v. 16, p. 793-807.*
647. Wilkins M.L. Computer simulation of penetration phenomena / In: *Ballistic materials and penetration mechanics, Roy C. Laible (Ed.), Amsterdam, New York, Oxford, 1980, p. 225-252.*
648. Wilkins M.L. Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations. // *J. Comp. Phys., 1980, v. 36, p. 281.*

649. Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Springer-Verlag, New York, 1999.
650. Wilson E.A., Parsons B. Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems using Differential Displacements. // Int. J. Num. Meth. Engng., 1970, v. 2, p. 387-395.
651. Woo K.L., Thomas T.R. Contact of Rough Surfaces: A Review of Experimental Works // Wear, 1980, v. 58, p. 331-340.
652. Woodward P.Y., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. // J. Comp. Phys., 1984, v. 54, p. 115.
653. Wriggers P., Simo J.C. A Note on Tangent Stiffness for Fully Nonlinear Contact Problems // Comm. Appl. Num. Meth., 1985, v. 1, p. 199-205.
654. Wriggers P., Wagner W., Stein E. Algorithms for Nonlinear Contact Constraints with Application to Stability Problems of Rods and Shells, // J. Comp. Mech., 1987, v. 2, p. 215-230.
655. Wriggers P., Van T.V., Stein E. Finite-element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. // Computers and Structures, 1990, v. 37, p. 319-331.
656. Wriggers P., Zavarise G. Thermomechanical Contact - A Rigorous but Simple Numerical Approach // Computers and Structures, 1993, v. 46, p. 47-53.
657. Wriggers P., Imhof M. On the Treatment of Nonlinear Unilateral Contact Problems. // Archive of Applied Mechanics Ingenieur Archiv, 1993, v. 63, p. 116-129.
658. Wriggers P., Zavarise G. Application of Augmented Lagrangian Techniques for Nonlinear Constitutive Laws in Contact Interfaces // Comm. Num. Meth. Engng., 1993, v. 9, p. 815-824.

659. Wriggers P., Miehe C. Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis - A Finite Element Model. // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1994, v. 113, p. 301-319.
660. Wriggers P., Scherf O., Carstensen C. Adaptive techniques for the contact of elastic bodies / in: T.J.R. Hughes, E. Onate, O.C. Zienkiewicz (Eds.), *Recent Developments in Finite Element Analysis*, CIMNE, Barcelona, 1994, pp. 78-86.
661. Wriggers P. Finite Element Algorithms for Contact Problems. // *Archive Comp. Meth. Engng.*, 1995, v. 2, p. 1-49.
662. Wriggers P., Scherf O. An adaptive finite element technique for nonlinear contact problems // *Comput. Mech.*, 1995, v. 17, p. 88-97.
663. Wriggers P., Zavarise G. On contact between 3-dimensional beams undergoing large deflections. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1997. V. 13. P. 429-438.
664. Wriggers P., Scherf O. Adaptive finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strains. // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1998, v. 151, p. 593-603.
665. Wriggers P., Panagiotopoulos P. (Eds.) *New Developments in Contact Problems // CISM courses and lectures, No.384*, Udine, Springer-Verlag, Wien, New York, 1999, P. 1-246.
666. Xie Y.M., Steven G.P. A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization // *Computers and Structures*, 1993, v. 49, p. 885-896,
667. Xie Y.M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
668. Xing H.-L., Fujimoto T., Makibouchi A., Nikishkov G.P. Static-explicit FE modeling of 3-d large deformation multibody contact problems on parallel computer / In: *Simulation of*

- Material Processing: Theory, Methods, Applications. Huetink, Baajiens (Eds.), Balkema, Rotterdam, 1998, p. 207-212.
669. Xing H.-L., Makinouchi A. A node-to-point contact element strategy and its applications, RIKEN Review No. 30, 2000.
670. Yagawa G., Soneda N., Yosimura S. A large scale finite element analysis using domain decomposition method on a parallel computer // Computers and Structures, 1991, v. 38, p. 615-625.
671. Yagawa G., Sgioya R. Parallel finite elements on a massively parallel computer with domain decomposition // Computing Systems Engng., 1993, v. 4, p. 495-503
672. Yagawa G., Yoshioka A., Yoshimira S., Soneda N. A parallel finite element method with a supercomputer network. // Computers and Structures, 1993, v. 47, p. 407-418.
673. Yoon S.Y., Yabe T. The unified simulation for incompressible and compressible flow by the predictor-corrector scheme based on the CIP method, Comput. Phys. Commun., 1999, v. 119, p. 149.
674. Yovanovich M. M. Thermal Contact Correlations, AIAA Paper, 81-1164, 1981.
675. Zavarise G., Wriggers P., Stein E., Schrefler B.A. A Numerical Model for Thermomechanical Contact based on Microscopic Interface Laws. // Mechanics Research Comm., 1992, v. 19, p. 173-182.
676. Zavarise G., Wriggers P., Stein E., Schrefler B.A. Real contact mechanisms and finite-element formulation - a coupled thermomechanical approach. // Int. J. Num. Meth. Engng., 1992, v. 35, p. 767-785.
677. Zavarise G., Wriggers P., Schrefler B.A. On Augmented lagrangian Algorithms for Thermomechanical Contact

- Problems with Friction // Int. J. Num. Meth. Engng., 1995, v. 38, p. 2929-2949.
678. Zavarise G., Wriggers P., Schrefler B.A. A Method for Solving Contact Problems // Int. J. Num. Meth. in Engng., 1998, v. 42, p. 473-498.
679. Zhong Z.H. A contact searching algorithm for general 3-D contact-impact problems. / Dissertation no. 178, Linkoping Institute of Technology, 1988.
680. Zhong Z.-H., Nilsson L. A contact searching algorithm for general contact problems. // Computers and Structures, 1989, v. 33, p. 197-209.
681. Zhong Z.H., Mackerle J. Static Contact Problems - A Review, // Engineering Computations, 1992, v. 9, p. 3-37.
682. Zhong Z.H., Mackerle J. Contact-impact Problems: A Review with Bibliography. // ASME Transactions, Appl. Mech. Rev., 1993, v. 47(2), p. 55-76.
683. Zhong Z.H. Finite Element Procedures for Contact-impact Problems, Oxford University Press Inc., Oxford, 1993.
684. Zhong Z.H., Nilsson L. Automatic contact searching algorithm for dynamic finite element analysis // Computers and Structures, 1994, v. 52, N. 2, p. 187-197.
685. Zhong Z.H., Nilsson L. Lagrange multiplier approach for evaluation of friction in explicit finite-element analysis. // Communications in Numerical Methods in Engng, 1994, vol. 10, p. 249-255.
686. Zhu T., Atluri S.N. A Modified Collocation Method and a Penalty Formulation for Enforcing the Essential Boundary Conditions in the Element Free Galerkin Method // Computational Mechanics, 1998, v. 21, p. 211-222.

687. Zhuang Y. Real-time simulation of physically-realistic global deformations. / PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 2000.
688. Ziegler H. Some extremum principles in irreversible thermodynamics with applications to continuum mechanics, in Progress in Solid Mechanics, eds. I. N. Sneddon and R. Hill, 1966. Vol.4, Amsterdam: North - Holland Publ.
689. Zukas J.A., Nickolas T., Swift H.F., Greszuk L.B., Curran D.R. Impact dynamics, New York, Wiley, 1982 (Перевод: Зукас Дж. А., Николас Т., Свифт Х.Ф., Грещук Л.В., Курран Д.Л. Динамика удара, М., Мир, 1985, 296 с.)