КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ПРОСЛОЙКАМИ ИЗ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Н.Г. Бураго[1], И.С. Никитин[2]

[1]ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
[2]ФГБУН Институт автоматизации проектирования РАН

Аннотация. На основе асимптотического метода осреднения получены уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использованы нелинейные (вязкопластические) условия проскальзывания, связывающие скачки касательных скоростей и напряжений на контактных границах.

Ключевые слова: слоистая среда, метод осреднения, нелинейные контактные условия

1. Уточненная модель с линейной вязкостью на контактных границах

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon$, s=0, $\pm1, \pm2 \ldots$, где постоянная толщина слоя $\varepsilon <<1$ является малым параметром.

На границах слоев выполняются следующие условия скольжения в предположении, что межслойная граница всегда поджата и выполнено линейное условие вязкого трения:

$$\sigma_{33} < 0 \quad [u_3] = [\sigma_{\gamma 3}] = [\sigma_{33}] = 0, \quad \sigma_{\gamma 3} = \eta [v_\gamma] / \varepsilon$$

Здесь u_k - компоненты вектора смещений, v_k - компоненты вектора скорости, $v_k = u_{k,t}$, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, η - коэффициент эффективной вязкости на границе слоев. Квадратные скобки $[f] = f|_{x^{(s)}+0} - f|_{x^{(s)}-0}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе. Далее для компактности формул дифференцирование обозначено следующим образом: $\partial(...)/\partial x_j = (...)_{,j}$, $\partial(...)/\partial t = (...)_{,t}$, $\partial(...)/\partial \xi = (...)_{,\xi}$.

Сами слои являются изотропными упругими и подчиняются закону Гука (при $x_3 \neq x^{(s)}$)

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$$

где тензор модулей упругости имеет вид: $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$. Примем нулевые начальные условия для смещений и скоростей среды: $u_k|_{t=0} = v_k|_{t=0} = 0$.

Введем в соответствии с методом асимптотического осреднения [1] «быструю» переменную $\xi = x_3 / \varepsilon$. Будем считать, что функция $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ является гладкой по «медленным» переменным x_l и гладкой по «быстрой» переменной ξ, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где она может терпеть разрывы первого рода. Кроме того, по ξ эта функция является 1-периодической: $[[u_i]] = u_i\big|_{\xi^{(s)}+1/2} - u_i\big|_{\xi^{(s)}-1/2} = 0$. С учетом такого выбора аргументов и правила дифференцирования сложной функции, перепишем систему на ячейке периодичности $x^{(s)} - 1/2 \le x_3 \le x^{(s)} + 1/2$, $-1/2 \le \xi \le 1/2$. При $x_3 \ne x^{(s)}$, $\xi \ne 0$ уравнения имеют вид $\varepsilon^{-2} C_{i3k3} u_{k,\xi\xi} + \varepsilon^{-1}(C_{ijk3} u_{k,j\xi} + C_{i3kl} u_{k,l\xi}) + C_{ijkl} u_{k,lj} - \rho u_{i,tt} = 0$

Имеем также контактные условия при $x_3 = x^{(s)}$, $\xi = 0$

$\varepsilon^{-1} C_{33k3} u_{k,\xi} + C_{33kl} u_{k,l} < 0$, $[u_3]=0$, $[\varepsilon^{-1} C_{i3k3} u_{k,\xi} + C_{i3kl} u_{k,l}] = 0$, $\varepsilon^{-1} C_{\gamma 3k3} u_{k,\xi} + C_{\gamma 3kl} u_{k,l} = \varepsilon^{-1} \eta [u_{\gamma,t}]$

и условия 1-периодичности: $[[u_i]] = u_i\big|_{\xi+1/2} - u_i\big|_{\xi-1/2} = 0$

Здесь и далее греческие индексы (β, γ) принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3. Представим смещения среды в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε: $u_i = w_i(x_k, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + \ldots$

Введем операцию «осреднения» $\langle f \rangle$ для функции «быстрой» переменной ξ, которая будет часто использоваться в дальнейшем: $\langle f \rangle = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f d\xi$. Приближения смещений должны удовлетворять дополнительному условию $\langle u_k^{(\mathrm{n})} \rangle = 0$ [1].

Подставим это представление в систему уравнений теории упругости. Приравнивая к нулю член при отрицательной степени ε^{-1}, получим, что первое приближение $u_i^{(1)}$ удовлетворяет уравнению: $C_{i3k3} u^{(1)}_{k,\xi\xi} = 0$. Система уравнений после этого примет вид:

$$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} u^{(1)}_{k,j\xi} + (C_{i3kl} u^{(1)}_{k,l} + C_{i3k3} u^{(2)}_{k,\xi})_{,\xi} + \varepsilon \left[C_{ijkl} u^{(1)}_{k,jl} + C_{ijk3} u^{(2)}_{k,j\xi} + (C_{i3kl} u^{(2)}_{k,l} + C_{i3k3} u^{(3)}_{k,\xi})_{,\xi} \right] +$$
$$+ \varepsilon^2 \left[C_{ijkl} u^{(2)}_{k,jl} + C_{ijk3} u^{(3)}_{k,j\xi} + (C_{i3kl} u^{(3)}_{k,l} + C_{i3k3} u^{(4)}_{k,\xi})_{,\xi} \right] + \ldots = \rho w_{i,tt} + \varepsilon \rho u^{(1)}_{i,tt} + \varepsilon^2 \rho u^{(2)}_{i,tt} + \ldots$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \ldots, \quad \sigma_{ij}^{(\mathrm{n})} = C_{ijkl} u^{(\mathrm{n})}_{k,l} + C_{ijk3} u^{(\mathrm{n}+1)}_{k,\xi}.$$

Все приближения напряжений являются 1-периодическими функциями ξ. В частности, выполняются условия $[\sigma_{i3}^{(\mathrm{n})}] = 0$, $[[\sigma_{i3}^{(\mathrm{n})}]] = 0$. Легко видеть, что $\langle \sigma^{(\mathrm{n})}_{i3\,,\xi} \rangle = 0$.

Выведем уточненную теорию второго порядка, для этого в системе уравнений удержим члены порядка ε^2. Применяя операцию осреднения по ячейке периодичности $\langle \ \rangle$ к системе уравнений, получим искомый результат:

$$C_{ijkl}w_{k,jl} + C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(1)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(2)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(3)}\right\rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}$$

Каждая из функций $u_i^{(n)}(x_k,\xi,t)$ *(n=1,2,3),* находится из соответствующей «задачи на ячейке периодичности» при $-1/2 \le \xi \le 1/2$ [1,2]. Эти задачи в общем виде решены в [2] с точностью до некоторых функций, которые определяются из условий проскальзывания.

Для заданных условий решение для первого приближения касательных смещений имеет вид $u_\gamma^{(1)} = \varphi_\gamma(\xi - sign\xi/2)$. Функции φ_γ определяются из условия на скачок касательных скоростей $\eta[u_{\gamma,t}^{(1)}] = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu u_{\gamma,\xi}^{(1)}$ Отсюда следует уравнение для φ_γ:

$$\eta\varphi_{\gamma,t} + \mu\varphi_\gamma = -\tau_\gamma, \qquad \tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) .$$

Решение для второго приближения касательных смещений будет выглядеть так [2]:

$$u_\gamma^{(2)} = -\psi_\gamma(\xi^2 - \xi sign\xi + 1/6)/2 , \ \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3} .$$

Решение для третьего приближения касательных смещений имеет вид [2]:

$$u_\gamma^{(3)} = \chi_\gamma\left(\xi^3/6 - \xi^2 sign\xi/4 + b_\gamma\xi + c_\gamma^\pm\right), \ [u_\gamma^{(3)}] = \chi_\gamma\left(1/12 - b_\gamma\right), \ c_\gamma^+ - c_\gamma^- = 1/12 - b_\gamma ,$$

$$\chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,ll} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu .$$

Функции b_γ определяются из условия на скачок касательных скоростей

$$\eta[u_{\gamma,t}^{(3)}] = \eta\Omega_{\gamma,t} = \mu(\chi_\gamma b_\gamma - \psi_{\gamma,3}/12 - \psi_{3,\gamma}/12) , \text{ где } \Omega_\gamma = \chi_\gamma\left(1/12 - b_\gamma\right).$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение для Ω_γ:

$$\eta\Omega_{\gamma,t} + \mu\Omega_\gamma = \mu g_\gamma, \quad g_\gamma = (\chi_\gamma - \psi_{\gamma,3} - \psi_{3,\gamma})/12 .$$

С использованием полученных результатов, а также с учетом выражения для тензора модулей упругости уточненная система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\gamma,3} = \rho w_{\gamma,tt}$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\beta,\beta} = \rho w_{3,tt}$$

$$\varphi_\gamma = -\int_0^t \tau_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta}dt_1/\eta , \qquad \tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) , \qquad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3} ,$$

$$\chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,ll} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu \ ,$$

$$\Omega_\gamma = \int_0^t \mu g_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta} dt_1 / \eta\,, \quad g_\gamma = (\chi_\gamma - \psi_{\gamma,3} - \psi_{3,\gamma})/12$$

2. Уточненная модель с нелинейной вязкостью на контактных границах

Рассмотрим случай проскальзывания между слоями с условиями нелинейной вязкости. Эти условия можно сформулировать различными способами. Выберем условия, моделирующие явление вязкопластичности. При этом предполагается, что до какого-то предельного уровня касательных напряжений σ_s на межслойных границах проскальзывания не происходит, а при превышении этого уровня появляется возможность вязкого проскальзывания. Чтобы избежать громоздких выкладок выберем относительно простую форму такого условия проскальзывания:

$$\eta[v_\gamma]/\varepsilon = \sigma_{\gamma 3} H\left(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/\sigma_s{}^2 - 1\right).$$

Здесь $H(y)$ - функция Хэвисайда, $H(y)$ =0 при $y<0$, $H(y)$ =1 при $y \ge 0$. Однако процедура подстановки асимптотических разложений скоростей и напряжений в сильно нелинейное (разрывное) условие проскальзывания не является корректной. Поэтому видоизменим это условие, «размазав» функцию Хэвисайда на некоторую «эффективную» ширину *d*:

$$\eta[v_\gamma]/\varepsilon = \sigma_{\gamma 3} H_d\left(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/\sigma_s{}^2 - 1\right).$$

Здесь $H_d(y)$ - гладкая функция, $H_d(y) \to H(y)$ при $d \to 0$. Для определенности примем конкретное (одно из возможных) выражение для этой функции:

$$H_d(y) = 1/2 + arctg\left(y/d\right)/\pi\,, \quad H_d{}^{/}(y) = d/\left(\pi(d^2+y^2)\right), \quad H_d{}^{//}(y) = -2dy/\left(\pi(d^2+y^2)^2\right)$$

Подставим разложения скоростей и касательных напряжений в условие проскальзывания:

$$\eta\left([v_\gamma^{(1)}] + \varepsilon[v_\gamma^{(2)}] + \varepsilon^2[v_\gamma^{(3)}] + \ldots\right) =$$

$$= \left(\sigma_{\gamma 3}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\gamma 3}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{\gamma 3}^{(2)} + \ldots\right) H_d\left(\left((\sigma_{\beta 3}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\beta 3}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{\beta 3}^{(2)})(\sigma_{\beta 3}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\beta 3}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{\beta 3}^{(2)})/\sigma_s^2 - 1\right)/d\right)$$

Аргумент функции H_d с точностью до членов порядка ε^2 имеет вид:

$$y = \Delta_0 + \varepsilon\left(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2\right) + \varepsilon^2\left(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(2)} + \sigma_{\beta 3}^{(1)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}\right)/\sigma_s^2, \quad \text{где } \Delta_0 = \sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(0)}/\sigma_s^2 - 1.$$

Функцию $H_d(y/d)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности значения Δ_0, ограничиваясь членами порядка ε^2:

$$H_d = H_d\left(\Delta_0/d\right) + \varepsilon\left(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2\right) d/\left(\pi(d^2 + \Delta_0{}^2)\right) +$$

$$+\varepsilon^2\left(\left(2\sigma_{\beta3}^{(0)}\sigma_{\beta3}^{(2)}+\sigma_{\beta3}^{(1)}\sigma_{\beta3}^{(1)}\right)/\sigma_s^2\cdot d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right)-4\left(\sigma_{\beta3}^{(0)}\sigma_{\beta3}^{(1)}/\sigma_s^2\right)^2\cdot d\Delta_0/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)^2\right)\right)$$

Видно, что для сохранения порядков членов асимптотического разложения в зоне перехода к вязкопластичности $\Delta_0 \sim \varepsilon$, нельзя допускать малых значений параметра *d*, *d* ~ O(1).

Условия проскальзывания различного порядка по ε запишутся в виде

$$\eta[u_{\gamma,t}^{(1)}]=\sigma_{\gamma3}^{(0)}H_d\left(\Delta_0/d\right),\qquad \eta[u_{\gamma,t}^{(2)}]=\sigma_{\gamma3}^{(1)}H_d\left(\Delta_0/d\right)+\sigma_{\gamma3}^{(0)}\left(2\sigma_{\beta3}^{(0)}\sigma_{\beta3}^{(1)}/\sigma_s^2\right)d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right),$$

$$\eta[u_{\gamma,t}^{(3)}]=\sigma_{\gamma3}^{(2)}H_d\left(\Delta_0/d\right)+\sigma_{\gamma3}^{(1)}\left(2\sigma_{\beta3}^{(0)}\sigma_{\beta3}^{(1)}/\sigma_s^2\right)d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right)+$$

$$+\sigma_{\gamma3}^{(0)}\left(\left(2\sigma_{\beta3}^{(0)}\sigma_{\beta3}^{(2)}/\sigma_s^2\right)d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right)-4\left(\sigma_{\beta3}^{(0)}\sigma_{\beta3}^{(1)}/\sigma_s^2\right)^2\cdot d\Delta_0/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)^2\right)\right)$$

Дифференциальное уравнение для функции φ_γ, введенной в п.1, следует из нелинейного условия проскальзывания:

$$\varphi_{\gamma,t}=-\sigma_{\gamma3}^{(0)}H_d(\Delta_0/d)/\eta,\quad \sigma_{\gamma3}^{(0)}=\mu(w_{\gamma,3}+w_{3,\gamma})+\mu\varphi_\gamma.$$

Из нелинейного условия проскальзывания также следует система неоднородных дифференциальных уравнений для функции Ω_γ, введенной в п.1:

$$\eta\Omega_{\gamma,t}+\mu\Omega_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right)+\sigma_{\gamma3}^{(0)}\left(2\mu\sigma_{\beta3}^{(0)}\Omega_\beta/\sigma_s^2\right)d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right)=$$
$$=\mu g_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right)+\sigma_{\gamma3}^{(0)}\left(2\mu\sigma_{\beta3}^{(0)}g_\beta/\sigma_s^2\right)d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right)$$

Окончательно уточненная система уравнений принимает вид:

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma}+\mu w_{\gamma,kk}+\mu\varphi_{\gamma,3}-\varepsilon^2\mu\Omega_{\gamma,3}=\rho w_{\gamma,tt}$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3}+\mu w_{3,kk}+\mu\varphi_{\beta,\beta}-\varepsilon^2\mu\Omega_{\beta,\beta}=\rho w_{3,tt}$$

$$\varphi_{\gamma,t}=-\sigma_{\gamma3}^{(0)}H_d(\Delta_0/d)/\eta\ ,\quad \sigma_{\gamma3}^{(0)}=\mu(w_{\gamma,3}+w_{3,\gamma})+\mu\varphi_\gamma$$

$$\eta\Omega_{\gamma,t}+\mu\Omega_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right)+\sigma_{\gamma3}^{(0)}\left(2\mu\sigma_{\beta3}^{(0)}\Omega_\beta/\sigma_s^2\right)d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right)=$$
$$=\mu g_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right)+\sigma_{\gamma3}^{(0)}\left(2\mu\sigma_{\beta3}^{(0)}g_\beta/\sigma_s^2\right)d/\left(\pi(d^2+\Delta_0{}^2)\right)$$

$$\Delta_0=\sigma_{\beta3}^{(0)}\sigma_{\beta3}^{(0)}/\sigma_s^2-1,\quad \psi_\gamma=\varphi_{\gamma,3},\qquad g_\gamma=(\chi_\gamma-\psi_{\gamma,3}-\psi_{3,\gamma})/12\,,$$

$$\chi_\gamma=-\varphi_{\gamma,ll}-(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu+2\psi_{\gamma,3}+(\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu+\rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu$$

Для модели с нелинейной вязкостью в систему уравнений для смещений $w_i(x_k,t)$ вошли дополнительные функции φ_γ и Ω_γ, для которых получены нелинейные дифференциальные уравнения. Вид этих уравнений связан с выбором контактных условий.

Полученные модели могут быть полезны для исследования волновых процессов в геологических массивах с соответствующей структурой и динамических процессов деформирования слоистых композитов.

Работа выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392 и программе РАН ОЭММПУ-12..

Литература

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

2. Бураго Н.Г., Никитин И.С. Уточненная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах // Прикл. математика и механика. – 2016. – Т. 80. № 2. – С. 230–241.

Бураго Николай Георгиевич - д.ф.-м.н., в.н.с. ИПМех РАН, Москва, пр. Вернадского, 101-1

Email: burago@ipmnet.ru Tel. +79169614763.

Никитин Илья Степанович - д.ф.-м.н., г.н.с. ИАП РАН, Москва, 2-я Брестская, 19/18,

Email: i_nikitin@list.ru

THE CONTINUUM THEORY OF LAYERED MEDIUM WITH INTERMEDIATE LAYERS OF VISCOUS PLASTIC MATERIAL

N.G. Burago, I.S. Nikitin

Abstract. In this paper the equations of the layered medium with the terms of the second order of the layer thickness small parameter are obtained taking into account the slippage and based on the asymptotic method of homogenization. The nonlinear conditions of slippage are used connecting jumps of the tangential velocities and shear stresses at the contact boundary.

Keywords: layered medium, homogenization method, nonlinear contact conditions

Burago N.G. – Dr. Sci., Leading. Researcher, IPMech RAS, Moscow, pr. Vernadskogo, 101-1,

Email: burago@ipmnet.ru Tel. +79169614763

Nikitin I.S. – Dr. Sci., Principal. Researcher, ICAD RAS, Moscow, 2nd Brestskaya str., 19/18,

Email: i_nikitin@list.ru