

В кн.: Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах, Тр. Совещания, Киев, 1958, М.: 1959. (Назван. АН УССР, ОТН)  
А. Ю. ИШЛИНСКИЙ (тип. ВВИА им. Гурьевского)

## ПОЛНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ МАНЕВРИРОВАНИЕМ В ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

### ВВЕДЕНИЕ

Гироскопы используются на подвижных объектах в большинстве случаев в составе устройств, служащих для указания направлений, определенным образом ориентированных относительно неподвижных звезд. Такими устройствами являются, в частности, гироскопическая вертикаль (гирогоризонт), гироскопический компас, гироазимут и другие, более сложные устройства, например гирогоризонткомпас (пространственный гироскопический компас).

Перемещение объекта, на котором расположено соответствующее гироскопическое устройство относительно Земли, и связанные с этим движением инерционные воздействия на элементы устройства вызывают дополнительные отклонения осей гироскопов. В результате гироскопическое устройство указывает нужное направление с той или иной ошибкой. Можно, однако, указать целый ряд гироскопических устройств, где с принципиальной точки зрения такая ошибка полностью устраняется.

Идеи, лежащие в основе создания подобных устройств, близки к тем, которые в теории регулирования известны под названием компенсации внешних возмущений и условий инвариантности.

Ниже приводятся наиболее характерные примеры этих устройств.

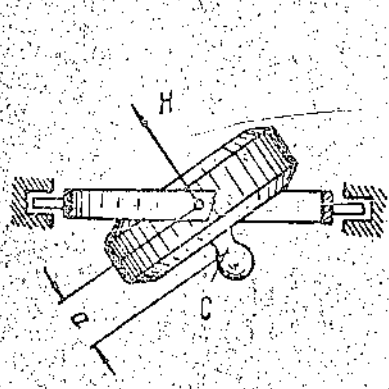
#### 1. Гироскопический маятник

Гироскопическим маятником называется гироскоп, подвешенный в кардановом подвесе так, что центр тяжести системы: ротор гироскопа — его кожух отстоит на некотором расстоянии  $a$  от центра подвеса. Внешнее кольцо подвеса предполагается уравновешенным. Внутренним кольцом подвеса является сам кожух гироскопа.

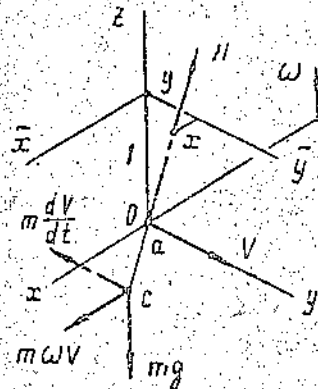
Чтобы не усложнять дальнейшее изложение дополнительными обстоятельствами, не будем учитывать влияние на гироскопический маятник вращения Земли и поверхность Земли примем за плоскость, параллельно которой перемещается точка (центр) подвеса маятника.

Вначале рассмотрим гироскопический маятник, у которого вектор  $H$  собственного кинетического момента, или, что то же, ось собственного вращения ротора гироскопа параллельна прямой, соединяющей центр тяжести маятника с центром его подвеса (фиг. 1).

При сделанных предположениях, а также при отсутствии трения в осях подвеса, такой гироскопический маятник будет устойчиво сохранять вертикальное направление оси собственного вращения, если его центр тяжести оказывается ниже точки подвеса, а сама эта точка или неподвижна или движется равномерно и прямолинейно. Однако при движении точки подвеса гироскопического маятника по кривой или при неравномерном движении по прямой упомянутая ось будет совершать около вертикали сложное коническое



Фиг. 1.



Фиг. 2.

движение, а в одном частном случае так называемой резонансной циркуляции вообще опрокинется.

Таким образом, гироскопический маятник без надлежащих условий для указания вертикали на движущемся объекте мало пригоден.

Прежде чем перейти к описанию этих усложнений, которые представляют устройства для компенсации возмущающего действия на гироскопический маятник некоторых сил инерции переносного движения, приведем уравнения движения этой гироскопической системы.

Воспользуемся системой координат  $xuz$  с началом в точке подвеса, гироскопического маятника и с осью  $z$ , направленной вертикально вверх. Ось  $y$  направим вдоль вектора скорости точки подвеса  $V$ , а ось  $x$  — в правую сторону от этого вектора (фиг. 2).

Положение оси собственного вращения ротора гироскопа относительно системы координат  $xuz$  удобно определять двумя числами:  $x$  и  $y$ , представляющими собой координаты точки пересечения этой оси с плоскостью  $\tilde{x}\tilde{y}$ , параллельной координатной плоскости  $xy$  и отстоящей от нее на расстоянии, равном единице (плоскость  $z = +1$ ).

В теории гироскопов плоскость  $\tilde{x}\tilde{y}$  называется картинной плоскостью, а упомянутая точка пересечения — полюсом гироскопа. Будем предполагать, что ось собственного вращения гироскопа, а следовательно, и вектор  $H$ , проходят через точку подвеса гироскопического маятника. Если величины  $x$  и  $y$  малые, а это также будет

предполагаться в д более высокого порядк вектора собственн координатных плоск

В рамках элем дифференциальные у неменные величины

$$H \left( \frac{dx}{dt} \right)$$

$$H \left( \frac{dy}{dt} \right)$$

Здесь, помимо о ловой скорость цир оси  $z$ ) угловая скоо верхности Земли, п кость;  $m$  — масса св жести;  $M_x^*$  и  $M_y^*$  — полнительных сил, д Совокупность ур

если моменты  $M_x^*$  и л подвеса постоянна п скорость циркуляции ет вертикальное наг момента  $H$ , о чем ур Члены, стоящие

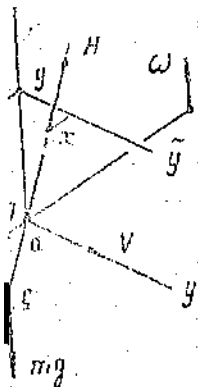
—  $ma$

представляют собой и  $y$ ), сил инерции пе нием начала систем ище действие на гир решение (2) станови строгое выполнение

$M$

В этом случае вс скомпенсированным  $M_x^*$ , приложенным и таких моментов необ го устройства для д измерения величины  $V$

при отсутствии трения будет устойчивым вращением, подвеса, а сама эта но и прямолинейно, конического маятника по прямой уподобляющееся коническое



Фиг. 2.

лаваемой резонансной без надлежащих усеченся объекте мало сложений, которые мунающего действия инерции переносного гироскопической системы в начале в точке поднаправленной вертикакорости точки подвешенора гироскопа отноелить двумя числами: чки пересечения этой кой плоскости  $xy$  и от(плоскость  $z = \pm 1$ ). ется картинной плосполюсом гироскопа, ащения гироскопа, а ку подвеса гироскопике, а это также будет

предполагаться в дальнейшем, то с точностью до малых величин более высокого порядка они соответственно равны углам отклонения вектора собственного кинетического момента гироскопа  $H$  от координатных плоскостей  $yz$  и  $xz$ .

В рамках элементарной (прецессионной) теории гироскопов дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять переменные величины  $x$  и  $y$  (фиг. 2), имеют следующий вид:

$$H \left( \frac{dx}{dt} - \omega y \right) = mgay - ma \frac{dV}{dt} + M_x^*; \quad (1)$$

$$H \left( \frac{dy}{dt} + \omega x \right) = -mgax - ma\omega V + M_y^*.$$

Здесь, помимо обозначений, уже встречавшихся выше,  $\omega$  — угловая скорость циркуляции, т. е. направленная по вертикали (по оси  $z$ ) угловая скорость системы координат  $xyz$  относительно поверхности Земли, принимаемой, как уже было указано, за плоскость;  $m$  — масса системы: кожух—ротор,  $g$  — ускорение силы тяжести;  $M_x^*$  и  $M_y^*$  — моменты относительно осей  $x$  и  $y$  каких-либо дополнительных сил, действующих на систему: кожух—ротор.

Совокупность уравнений (1) имеет частное решение:

$$x \equiv 0; \quad y \equiv 0, \quad (2)$$

если моменты  $M_x^*$  и  $M_y^*$  отсутствуют и, кроме того, скорость  $V$  точки подвеса постоянна по величине и не меняет направления (угловая скорость циркуляции  $\omega$  равна нулю). Этому решению соответствует вертикальное направление вектора собственного кинетического момента  $H$ , о чем уже упоминалось выше.

Члены, стоящие в правых частях уравнений (1),

$$-ma \frac{dV}{dt} = M_x' \quad \text{и} \quad -ma\omega V = M_y', \quad (3)$$

представляют собой моменты (соответственно относительно осей  $x$  и  $y$ ), сил инерции переносного движения, обусловленных перемещением начала системы координат  $xyz$ . Они и производят возмущающее действие на гироскопическую систему, вследствие чего частное решение (2) становится уже невозможным. Исключение составляет строгое выполнение двух условий:

$$M_x^* = ma \frac{dV}{dt} \quad \text{и} \quad M_y^* = ma\omega V. \quad (4)$$

В этом случае возмущающее действие сил инерции оказывается скомпенсированным искусственно создаваемыми моментами  $M_x^*$  и  $M_y^*$ , приложенными к системе: кожух—ротор. Однако для создания таких моментов необходимо, помимо специального счетно-решающего устройства для дифференцирования величины скорости  $V$  и умножения величины  $V$  на угловую скорость циркуляции  $\omega$  (а также

электромагнитного или какого-либо еще устройства для осуществления моментов  $M_x^*$  и  $M_y^*$ ), еще знание самих текущих значений величин  $V$  и  $\omega$ .

В реальных устройствах последнее достигается посредством использования показаний лага и гироазимута. При этом делается еще одно дополнительное предположение о том, что вектор  $V$  направлен по продольной оси объекта или его отклонение от этой оси (углы дрейфа) невелико.

С точки зрения теории регулирования здесь имеет место введение в регулирующую систему, описываемую совокупностью уравнений (1), возмущений по второму каналу, через дополнительные моменты  $M_x^*$  и  $M_y^*$ , которые и производят полную компенсацию непосредственно воздействующих внешних возмущений (3).

Для осуществления компенсации потребовалась дополнительная информация — знание текущих значений величин  $V$  и  $\omega$ . В п. 2 будет показано, как, используя дополнительный гироскоп, можно достичь тех же целей и с меньшей информацией — зная только величины  $V$ .

Отметим, что при наличии качки у объекта появятся еще инерционные воздействия на гироскоп, обусловленные соответствующим ускорением точки подвеса. Они вызовут колебательные движения оси гироскопа около вертикального направления той же частоты, с которой происходит качка объекта. Однако эти колебания будут иметь несравненно меньшую амплитуду, чем, например, у такого же маятника, но с невращающимся гироскопом. Гироскопическое устройство является своего рода фильтром относительно высоких частот воздействующих на него переменных моментов.

Недостатком описанной гироскопической системы, помимо сравнительно сложной системы компенсации, являются также незатухающие (без учета сил трения в подвесе гироскопа) собственные движения оси ротора около вертикали, соответствующие решению однородной совокупности дифференциальных уравнений (1). Для неподвижного наблюдателя — это периодическое движение по круговому конусу, растров которого определяется начальным положением оси ротора. Период собственного движения выражается формулой

$$T = 2\pi \frac{H}{mga} \quad (5)$$

Существуют схемы гироскопических устройств, которые обеспечивают затухание собственных движений при любых начальных условиях. Они основаны на применении так называемой радиальной коррекции. В результате действия последней искусственно создаются моменты, которые приводят ось ротора кратчайшим путем к вертикали.

В этих схемах также вполне возможна и применяется на практике аналогичная система компенсации сил инерции переносного движения.

## 2. Гироскопическая угловая скорость

В первом пункте (или переносного движения объекта и его циркулирующую систему текущих для ее измерения или измерения).

Для этой цели в маятнике еще один ротора основного гироскопу скорости объекта.

При рассмотрении относительно симметрии и  $\Omega$  — угловая скорость. На собственное вращение. лагается вертикаль.

Нетрудно убедиться, что ось ротора направлена по отрицательной оси  $M_y^*$  имеет направление инерции переносного движения.

Здесь  $J$  — момент инерции ротора относительно оси симметрии и  $\Omega$  — угловая скорость. На собственное вращение. лагается вертикаль.

Нетрудно убедиться, что ось ротора направлена по отрицательной оси  $M_y^*$  имеет направление инерции переносного движения. второй формулой (3) ного ротора регулируется.

то тем самым один из действующих на гироскоп уравновешивается.

Замечательно, что ось ротора направлена по отрицательной оси  $M_y^*$  имеет направление инерции переносного движения.

Действительно, дополнительный ротор должен создавать реактивные моменты.

## 2. Гироскопический маятник с дополнительным ротором, угловая скорость которого изменяется пропорционально скорости объекта

В первом пункте было указано, что для компенсации сил инерции переносного движения, обусловленных изменением скорости объекта и его циркуляцией, можно избежать введения в компенсирующую систему текущих значений угловой скорости циркуляции (по «второму каналу»), что требует наличия специального устройства для ее измерения (например, гиросимута с дифференцирующим элементом).

Для этой цели следует расположить на том же гироскопическом маятнике еще один ротор, ось собственного вращения которого была бы перпендикулярна как к оси ротора основного гироскопа, так и к вектору скорости объекта  $V$ .

При рассмотрении движения маятника относительно системы координат  $xuz$ , введенной в п. 1, на дополнительный ротор будут действовать кориолисовы силы инерции, которые приведутся к гироскопическому моменту  $M_y^*$ , имеющему направление оси  $y$  (фиг. 3) и равному по величине:

$$M_y^* = J\Omega\omega. \quad (6)$$

Здесь  $J$  — момент инерции дополнительного ротора относительно его оси симметрии и  $\Omega$  — его собственная угловая скорость. Направление оси собственного вращения основного гироскопа при этом расчете предполагается вертикальным.

Нетрудно убедиться (фиг. 3), что если угловая скорость  $\Omega$  направлена по отрицательной части оси  $x$ , то гироскопический момент  $M_y^*$  имеет направление, прямо противоположное моменту  $M_x'$  сил инерции переносного движения. Величина последнего выражается второй формулой (3). Поэтому, если угловая скорость дополнительного ротора регулируется так, чтобы осуществлялось соотношение:

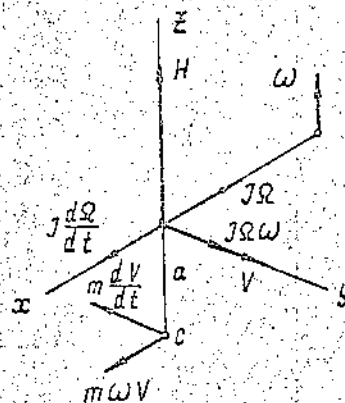
$$J\Omega = maV, \quad (7)$$

то тем самым один из моментов сил инерции переносного движения, действующих на гироскопический маятник, а именно момент  $M_x'$ , уравновешивается.

Замечательно, что другой момент  $M_x'$ , при этом также оказывается уравновешенным.

Действительно, при изменении собственной угловой скорости дополнительного ротора  $\Omega$  на гироскопический маятник будут действовать реактивные силы с моментом

$$M_x'' = \frac{d}{dt} J\Omega, \quad (8)$$



Фиг. 3.

направленным по оси  $x$ . Момент  $M_x^*$  направлен противоположно моменту сил инерции  $M_x'$  и в силу соотношения (7) и второй формулы (3) равен ему по величине.

Таким образом, в этом устройстве посредством использования текущих значений одной только скорости  $V$  (по данным от лага) также удается достичь полной компенсации возмущающего воздействия сил инерции переносного движения на положение гироскопического маятника.

Более внимательное рассмотрение и здесь обнаруживает два канала, по которым происходит влияние угловой скорости циркуляции  $\omega$  на гироскопический маятник — через центробежную силу инерции  $m\omega V$  и через гироскопический момент  $\phi/\Omega$ . Оба возмущения компенсируют друг друга. Однако непосредственного знания величины угловой скорости циркуляции для создания компенсирующих моментов, в отличие от п. 1, уже не требуется.

### 3. Гироскопический маятник Шулера

Если отказаться от упрощающего предположения, принятого в п. 1 и 2, о том, что поверхность Земли можно принять за плоскость, а также не пренебрегать ее вращением, то уравнения гироскопического маятника значительно усложняются. Соответственно усложняется и задача компенсации возмущающего воздействия на маятник сил инерции переносного движения, обусловленных перемещением точки его подвеса по земной сфере. Тем более удивительно, что в этом случае возможно создание такого гироскопического устройства, в котором происходит компенсация сил инерции переносного движения совершенно автономно, т. е. без какого-либо использования текущих значений величин, измеряемых вне устройства и используемых для создания искусственных сил. В состав такого устройства входят два гиromаятника того же типа, как и описанный в п. 1, с противоположным направлением вращения роторов гироскопов. При надлежащих начальных условиях биссектриса угла между направлением осей собственного вращения роторов сохраняет вертикальное направление или (более точно) направление к центру земной сферы, какое бы произвольное движение ни совершало устройство по поверхности Земли. Параметры гироскопических маятников  $H$ ,  $m$  и  $a$  должны быть связаны друг с другом соотношением:

$$\frac{mga}{H} = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (9)$$

где, помимо обозначений, встречавшихся в п. 1,  $R$  — радиус Земли. Это соотношение называется условием Шулера. Оно играет здесь роль, совершенно аналогичную условиям инвариантности в теории регулирования.

При составлении уравнений движения гироскопического маятника с точкой опоры, перемещающейся по поверхности Земли, принимаемой за сферу, удобнее всего воспользоваться системой координат  $x^0y^0z^0$  (фиг. 4), ось  $z^0$  которой направлена по радиусу Земли,

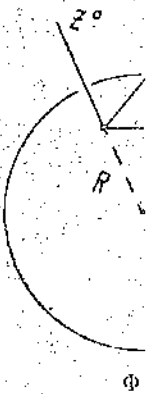
принимаемой скорости точки с тем же радиусом оси  $y^0$  опреде.

Обозначим ротора гироскопа и через  $\phi$  — углы малы, м ные уравнени

$$\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt}$$

Здесь:  $\omega$  нат  $x^0y^0z^0$  вдо



рость циркуля системы: кожд по предполож

Если ско, сравнительно скорости точке по принять:

При тако уравнения (10

которое означ ловиях ось со

произвольно  
и второй фор-

использования  
данным от лага)  
ающего воздей-  
ние гироскопиче-

аруживает два  
орости циркуля-  
ребную силу  
/Ω. Оба возму-  
твенного знания  
и компенсирую-

ня, принятого в  
ить за плоскость,  
ния гироскопиче-  
ственно усложня-  
твия на маятник  
к перемещением  
нительно, что в  
еского устройст-  
ции переносного  
тнбо использова-  
устройства и ис-  
остав такого уст-  
к и описанный в  
роторов гироско-  
риса угла между  
в сохраняет вер-  
вление к центру  
и совершало уст-  
копических маят-  
м соотношением:

(9)

радиус Земли,  
дно играет здесь  
итности в теории

опического маят-  
ости Земли, при-  
системой коорди-  
радиусу Земли,

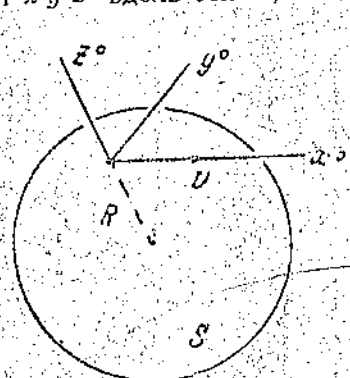
принимаемой за точную сферу. Ось  $x^0$  направляется по вектору скорости точки подвеса  $v$  по отношению к неврещающейся сфере  $S$  с тем же радиусом и с тем же центром, как и у Земли. Направление оси  $y^0$  определяется тем самым однозначно.

Обозначим через  $\theta$  угол отклонения оси собственного вращения ротора гироскопического маятника от координатной плоскости  $x^0z^0$  и через  $\psi$  — от плоскости  $y^0z^0$ . Тогда в предположении, что эти углы малы, можно представить линеаризованные дифференциальные уравнения для переменных величин  $\theta$  и  $\psi$  в виде:

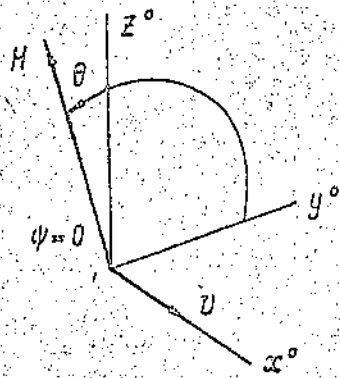
$$\frac{d\theta}{dt} - \left[ \omega^0 + \frac{a}{H} \left( F - \frac{mv^2}{R} \right) \right] \psi = - \frac{a}{H} m \frac{dv}{dt}; \quad (10)$$

$$\frac{d\psi}{dt} + \left[ \omega^0 + \frac{a}{H} \left( F - \frac{mv^2}{R} \right) \right] \theta = - \frac{v}{R} - \frac{a}{H} m \omega^0 v.$$

Здесь:  $\omega^0$  — составляющая угловой скорости системы координат  $x^0y^0z^0$  вдоль оси  $z^0$ , т. е. радиуса Земли — своеобразная ско-



Фиг. 4.



Фиг. 5.

рость циркуляции на неврещающейся сфере  $S$ ;  $F$  — сила тяготения системы: кожух—ротор гироскопа маятника к Земле, направленная по предположению к центру Земли.

Если скорость точки подвеса относительно поверхности Земли сравнительно невелика, например, значительно меньше окружной скорости точек ее экватора, то с достаточным приближением можно принять:

$$F \approx \frac{mv^2}{R} = mg = \text{const.} \quad (11)$$

При таком предположении и соблюдении соотношения (9) уравнения (10) допускают частное решение:

$$\theta = - \frac{mv}{H} v; \quad \psi = 0, \quad (12)$$

которое означает (фиг. 5), что при соответствующих начальных условиях ось собственного вращения ротора гироскопического маятни-

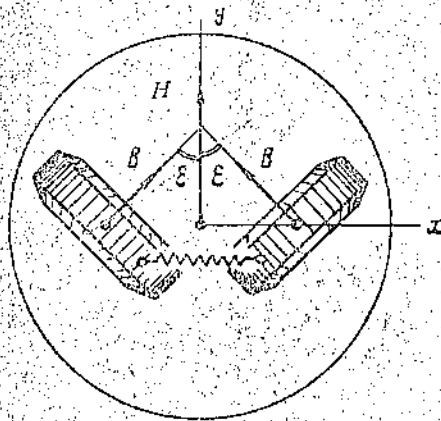
ка будет отклоняться от радиуса Земли на угол, пропорциональный скорости  $v$  точки его подвеса относительно невращающейся сферы  $S$  в плоскости, перпендикулярной этому вектору.

Если теперь представить себе другой гироскопический маятник с такими же параметрами, но с обратным вращением ротора, то в формулах (12) следует поменять знак у величины собственного кинетического момента  $H$ . В результате ось собственного вращения ротора этого второго маятника будет отклоняться от радиуса Земли на тот же угол и в той же плоскости, что и ось собственного вращения первого ротора, но в другую сторону. Очевидно, что биссектриса угла между осями собственного вращения роторов и будет направлена все время к центру Земли, как бы ни перемещался по земной сфере объект, на котором расположены точки подвесов обоих маятников.

Заметим также, что угол между осями обоих роторов пропорционален величине скорости  $v$  перемещения объекта относительно невращающейся сферы  $S$  и, в принципе, может служить мерой для ее измерения. Плоскость же, содержащая обе оси (точнее, плоскость, параллельная обеим осям), определяет направление вектора скорости  $v$ , так как последний направлен к ней по нормали.

#### 4. Гиروهоризонткомпас (пространственный гироскопический компас)

Свойствами, которые в теории регулирования называются инвариантностью, т. е. независимостью по отношению к внешним возмущениям, в более совершенной форме, чем описанная в п. 3 комбинация двух гироскопических маятников Шулера, обладает двух-



Фиг. 6.

гироскопическое устройство, именуемое пространственным гироскопическим компасом. Чувствительный элемент этого устройства массы  $m$  состоит из двух гироскопов с одинаковым собственным кинетическим моментом  $B$ , укрепленных на одной раме так, что оси их кожухов параллельны (фиг. 6). Сами кожухи посредством кинематической передачи, например зубчатых колес, могут поворачиваться относительно рамы на равные углы  $\epsilon$  в разные стороны, вследствие чего суммарный собственный кинетический момент обоих гироскопов  $H = 2B \cos \epsilon$  направлен по одной и той же прямой, связанной с чувствительным элементом. Эту прямую проведем через точку подвеса чувствительного элемента и назовем осью  $y$  системы координат  $xyz$ , связанной с последним. Ось  $z$  этой системы направим также через точку подвеса, параллель-

но осям кожухов, правая система координат.

Центр тяжести лежит на отрицательной стороне оси  $z$  относительно точки подвеса. Следовательно, вспомогательная ось  $x$  направлена относительно оси  $y$ .

где  $k$  — некоторый коэффициент. Оказывается, что чувствительность элемента относительно оси  $x$  является условием начальных обстоятельств чувствительным элементом точки подвеса по оси  $z$ . В часе направлена к центру Земли.

Таким образом, гироскопическое устройство начальных обстоятельств чувствительным элементом точки подвеса по оси  $z$  направлена к центру Земли.

Начальные обстоятельства чувствительным элементом точки подвеса по оси  $z$  направлена к центру Земли.

Это равенство может быть и направлением которой направляется гироскопический элемент поверхности Земли в исходное мгновение значения скорости.

Это равенство может быть и направлением которой направляется гироскопический элемент поверхности Земли в исходное мгновение значения скорости.

Направление которой направляется гироскопический элемент поверхности Земли в исходное мгновение значения скорости.

где  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и осью  $z$ .



но осям кожухов, а ось  $x$  — так, чтобы в результате образовалась правая система прямоугольных координат.

Центр тяжести чувствительного элемента должен быть расположен на отрицательной части оси  $z$  на некотором расстоянии  $a$  от точки подвеса. Специальное пружинное устройство (или какое-либо иное вспомогательное) налагает на каждый из кожухов момент  $N$  относительно оси кожуха по закону:

$$N = k \sin 2\epsilon, \quad (13)$$

где  $k$  — некоторый постоянный коэффициент.

Оказывается, что, если отвлечься от моментов трения в осях подвеса чувствительного элемента и в осях кожухов и от различных несовершенств его изготовления, то соотношение

$$k = -\frac{2B^2}{maR} \quad (14)$$

является условием, при осуществлении которого и при надлежащих начальных обстоятельствах система координат  $xyz$ , связанная с чувствительным элементом, совпадает при произвольном движении точки подвеса по земной сфере с системой координат  $x^0y^0z^0$ , введенной в п. 3. В частности, ось  $z$  всегда будет вертикальна, точнее — направлена к центру Земли.

Таким образом, соотношение (14) является для этого гироскопического устройства своего рода условием инвариантности.

Начальные обстоятельства, которые упоминались выше, заключаются в следующем. В исходное мгновение времени оси системы координат  $xyz$  должны совпадать с осями системы  $x^0y^0z^0$ , т. е. ось  $x$  должна быть направлена по вектору  $v$  скорости точки подвеса чувствительного элемента относительно невращающейся сферы  $S$ , а ось  $z$  — по радиусу Земли. Что же касается угла  $\epsilon$ , то его значение в исходное мгновение времени должно вместе с соответствующим значением скорости  $v$  удовлетворять равенству:

$$2B \cos \epsilon = ma v. \quad (15)$$

Это равенство соблюдается и для всего дальнейшего времени и может быть использовано для определения скорости  $v$  точки подвеса.

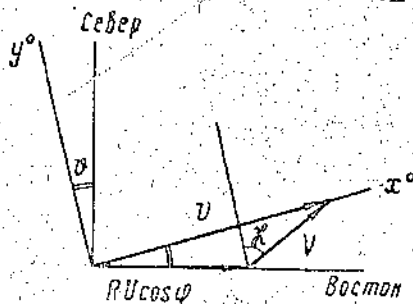
Направление оси  $y$ , связанной с чувствительным элементом, по которой направлен суммарный кинетический момент  $H$ , иногда называется гиронордом. Если точка подвеса неподвижна относительно поверхности Земли, то гиронорд направлен точно на Север. В общем случае гиронорд отклоняется от меридиана места на угол  $\vartheta$  (фиг. 7), определяемый из уравнения

$$\sin \vartheta = \frac{V \cos \chi}{RU \cos \varphi}, \quad (16)$$

где  $\chi$  — угол между гиронордом и вектором  $V$  скорости точки подвеса относительно поверхности Земли.

Таким образом, для использования описанного устройства в качестве компаса требуется дополнительная информация — знание скорости точки подвеса чувствительного элемента относительно земной поверхности Земли и направление этой скорости относительно гироторда. Угол  $\theta$  называется в теории гироскопических компасов курсовой поправкой.

Следует заметить, что при неточном осуществлении начальных условий чувствительный элемент гиригоризонткомпаса совершает малые незатухающие колебания относительно своего стационарного состояния, при котором оси систем координат  $x^0y^0z^0$  соответственно совпадают и, кроме того, соблюдается соотношение (15).



Фиг. 7.

Эти колебания состоят из двух парциальных, частоты которых  $\omega_1, \omega_2$  с большой точностью выражаются формулами:

$$\omega_1 = \nu + \omega^0; \quad \omega_2 = \nu - \omega^0. \quad (17)$$

Здесь  $\nu$  — частота, соответствующая периоду Шулера, а  $\omega^0$ , как и выше, — составляющая угловой скорости системы координат  $x^0y^0z^0$  вдоль оси  $z^0$  — радиуса Земли.

К сожалению, по-видимому, невозможно создать такую гироскопическую систему, которая имела бы одновременно и свойство автономной компенсации инерционных воздействий, вызванных перемещением точки ее подвеса по земной сфере, и затухание колебаний около своего стационарного состояния.

Механические системы с автономной компенсацией — физический маятник Шулера и маятник Бойкова, описание которых приводится в п. 5 и 6, также не имеют затухания.

### 5. Физический маятник Шулера

Рассмотрим твердое тело, подвешенное за одну из его точек. Пусть центр тяжести этого тела находится на оси его динамической симметрии, проходящей через точку подвеса, на расстоянии  $a$ , удовлетворяющем соотношению:

$$mRa = A, \quad (18)$$

где  $A$  — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной оси динамической симметрии и проходящей через точку подвеса;  $m$  — масса маятника;  $R$  — радиус Земли.

Если в начальное мгновение времени направить ось динамической симметрии маятника точно к центру Земли и устранить составляющую его угловой скорости вдоль этой оси, то в дальнейшем, при любом перемещении точки подвеса по земной сфере, такое состояние маятника сохранится.

Практическое осуществление такого маятника затрудняется необходимостью выдерживать с большой точностью расстояние  $a$ ,

которое является мерой маятника. Соотношение теории регуляров

При движении может быть осу

зываете напра При помощи зарируется платфор тель ускорений, показания дважды ся, и результат производится с коэффициентом жности  $k$  в виде

Если коэффи енальности  $k$  уд вно

и наблюдены начальные усло куляр к направ. вительности изм большого круга. точно точном со отклонение  $\alpha$  о нежно:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

Здесь  $j$  — у подвеса маятник

Может быть стема с примене: выбранных нача рами непрерывн произвольном пе

Приведенны систем показыве значимость идеи ний при создан

устройств и  
период — значение  
числительно ед-  
и относительно  
осей компасов

или начальных  
или совершает  
стационарного  
 $\omega^0$  — соответ-  
отношение (15),  
и состоит из  
частоты ко-  
дой точностью  
улами:

$$\omega = \omega^0. \quad (17)$$

частота, соответ-  
Шулера, а  $\omega^0$ ,  
ставяющая уг-  
семи координат  
 $\omega^0$  — радиуса

такую гироско-  
и свойство авто-  
взвешив пере-  
иные колебаний  
ней — физиче-  
которых приво-

у из его точек.  
о динамической  
стояния  $a$ , удов-

$$(18)$$

пендикулярной  
точку подвеса;

ось динамиче-  
транить состав-  
альнейшем, при  
такое состояние  
трудняется не-  
расстояние  $a$ ,

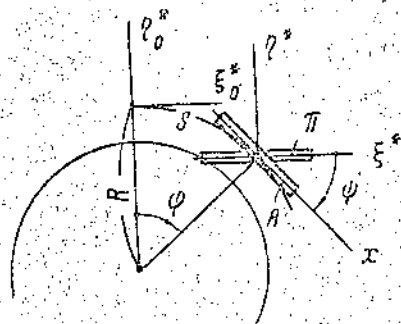
которое является весьма малой величиной (при обычных раз-  
мерах маятника — порядка долей микрона).

Соотношение (18) также можно рассматривать, с точки зрения  
теории регулирования, как условие инвариантности.

### 6. Маятник типа Бойкова

При движении по дуге большого круга невращающейся сферы  $S$   
может быть осуществлено следующее устройство, непрерывно ука-  
зывающее направление к центру Земли.

При помощи гироскопа, или сложением (по идеалам, стабили-  
зируется платформа  $\kappa$ . На ней под углом  $\varphi$  располагается измери-  
тель ускорений  $A$  (фиг. 8). Его  
показания дважды интегрируются,  
и результат интеграции вос-  
производится с соответствующим  
коэффициентом пропорциональ-  
ности  $k$  в виде угла  $\psi$ .



Фиг. 6.

Если коэффициент пропорци-  
ональности  $k$  удовлетворяет усло-  
вию

$$k = \frac{1}{R} \quad (19)$$

и в процессе наблюдения выполняются следующие условия, то перпенди-  
куляр к направлению оси чувстви-  
тельности измерителя ускорений все время направлен к центру  
большого круга сферы  $S$ , а следовательно, и Земли. При недоста-  
точно точном соблюдении начальных условий и соотношения (19)  
отклонение  $\alpha$  от направления к центру Земли удовлетворяет урав-  
нению:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k \left( j - \frac{v^2}{R} \right) \sin \alpha = \left( \frac{1}{R} - k \cos \alpha \right) \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (20)$$

Здесь  $j$  — ускорение силы тяготения к Земле и  $s$  — путь точки  
подвеса маятника по дуге большого круга сферы  $S$ .

Может быть осуществлена более сложная гироскопическая си-  
стема с применением измерителей ускорения, которая при правильно  
выбранных начальных условиях и соотношениях между ее парамет-  
рами непрерывно указывает направление к центру Земли уже при  
произвольном перемещении ее точки подвеса по земной сфере.

\* \* \*

Приведенные выше примеры гироскопических и им подобных  
систем показывают, как нам кажется, практическую и теоретическую  
значимость идей инвариантности и компенсации внешних возмуще-  
ний при создании автоматически действующих устройств.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Булгаков. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.
2. А. Ю. Ицлинский. Механика специальных гироскопических систем. АН УССР, 1952.
3. А. Ю. Ицлинский. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
4. А. Ю. Ицлинский. К теории гироскопического компаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
5. А. Ю. Ицлинский. К теории гироскопического маятника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
6. А. Ю. Ицлинский. Определение угловых положений линеаризованной системы перелетным гироскопом и измерителей ускорений. ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.
7. В. С. Кудряков. Высокакачественные инвариантные системы регулирования (см. настоящий сборник).
8. В. И. Петров. О реализуемости условий инвариантности (см. настоящий сборник).

## ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ

В настоящем докладе [1—7] в области автоматического регулирования ранее полученных результатов с достаточной полнотой.

Имеется ряд интересных комбинаций. Дополнением к попытке свести к автоматическим логарифмическим по принципу новизны широкого анализа и регулирования; позволяющего о весьма произвол

### I. Инвариантные

Эффекта инвариантности при частичных условиях. Получены зависимости с точностью. В настоящей работе рассмотрены условия инвариантности. Рассмотрим уравнения и управления. Обозначим:  $\sigma$  — частотного регулирования;  $\omega$  — по принципу от-