АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1955 XXXII, 5

Т. 32, в. 5

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

О МАЯТНИКЕ ПОШЕХОНОВА

Рассматривается установление периодического режима изменения угловой скорости видимого вращения рамы маятника Пошехонова вокруг вертикальной оси при наличии кулонова трения в подшипниках этой оси.

По предположению собственно маятник совершает периодические качания постоянной амплитуды вокруг горизонтальной оси, подшипники которой расположены в теле рамы.

Кроме того, считается, что вся система расположена на одном из полюсов Земли.

При упомянутых упрощающих предположениях решение задачи достигается простым применением теоремы о моменте количества движения системы вокруг вертикальной оси.

Момент инерции системы вокруг вертикальной оси периодически изменяется. Поэтому рама неподвижна относительно Земли лишь при достаточно большом так называемом моменте трогания с места в подшипниках вертикальной оси рамы.

При меньшем трении рама приходит во вращательное движение относительно Земли с переменной по знаку угловой скоростью.

Если трение не слишком мало, то существует периодически повторяющиеся интервалы времени, в течение которых рама относительно Земли неподвижна.

При малом трении периодическое изменение угловой скорости рамы устанавливается спустя бесконечно большое время. Угловая скорость рамы относительно Земли обращается в этом случае в нуль лишь в мгновения перемены ее знака.

Средняя абсолютная угловая скорость рамы оказывается больше угловой скорости Земли. Ее можно определить посредством одной квадратуры.

LE PENDULE DE POCHÉHONOV, par *A. I. Ichlinsky*.— L'auteur considère l'établissement d'un régime périodique de variation de la vitesse angulaire de rotation apparente du chassis d'un pendule de Pochéhonov autour d'un axe vertical en présence d'une friction de Coulo dans les paliers de cet axe.

On suppose que le pendule proprement dit oscille périodiquement avec une amplitude constante autour d'un axe horizontal dont les paliers sont dans le corps du chassis.

On suppose encore que le système est situé sur l'un des pôles de la terre.

Avec ces simplifications la solution du problème s'obtient tout bonnement par l'emploi du théorème du moment de quantité mouvement d'un système autour d'un axe vertical. Le moment d'inertie d'un système autour d'un axe vertical varie périodiquement. Aussi le chassis est immobile relativement à la terre seulement lorsque le moment de mise en marche dans les paliers de l'axe vertical du chassis est suffisamment grand.

Au cas d'une friction moindre le chassis reçoit un mouvement rotatoire relativement à la terre dont la vitesse angulaire est de signe variable. Si la friction n'est pas trop petite, il existe des intervalles de temps se répétant périodiquement au cours desquels le chassis est immobile relativement à la terre.

Si la friction est insignifiante, la variation périodique de la vitesse angulaire du chassis s'établit après un intervalle de temps infiniment grand. Dans ce cas la vitesse angulaire du chassis relativement à la terre égale zéro seulement aux moments ou elle change de signe. La vitesse angulaire moyenne absolue du chassis est plus grande que la vitesse angulaire de la terre. Elle peut être déterminée par une quadrature.

Маятник Пошехонова демонстрируется в Московском и Сталинградском планетариях* вместе с маятником Фуко для экспериментального доказательства вращения Земли.

В отличие от обычного плоского маятника подшипники горизонтальной оси маятника Пошехонова укреплены не на неподвижном основании, а в теле специальной рамы, которая может свободно вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 1).

* С конструкцией маятника, демонстрируемого в Москве, любезно ознакомил меня сотрудник планетария Р. И. Цветов.

При пуске маятника в ход пережигается нить, которая удерживает маятник в отклонённом положении. После нескольких колебаний можно обнаружить прогрессирующий поворот рамы в сторону, обратную видимому движению Солнца, что, по мысли изобретателя маятника, и доказывает факт вращения Земли.

Движение маятника Пошехонова, как механической системы с двумя степенями свободы, подчиненной идеальным связям, было предметом теоретического рассмотрения Б. П. Перцева [1]. Автор посредством метода Лагранжа составил уравнения движения системы и предпринял попытку их интегрирования при малых углах отклонения маятника от вертикали.

Можно показать, развивая выкладки упомянутого автора или непосредственно используя общую теорему механики о кинетическом моменте, как то будет сделано ниже, что рама маятника должна совершать видимое движение против хода Солнца с переменной угловой скоростью без перемены знака последней.

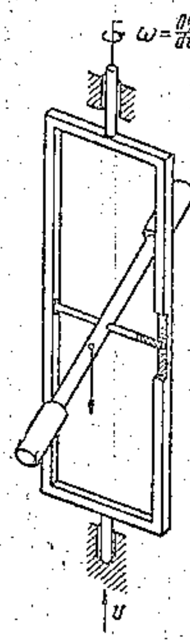

Рис. 1

Опыт, однако, не подтверждает этого вывода, так как рама в отдельные промежутки времени, повторяющиеся в такт с колебаниями маятника, движется в обратном направлении, т. е. по ходу Солнца. Кроме того, характер движения рамы непосредственно после пуска маятника заметно отличается от движения, которое устанавливается спустя некоторое число периодов колебания маятника.

Ниже дается объяснение упомянутым обстоятельствам, основанное на учете трения подшипников вертикальной оси рамы. Относительно этого трения делается предположение, что оно создает постоянный по модулю момент, направленный в сторону, противоположную видимому вращению рамы. Если рама в отдельные промежутки времени стоит на месте, то момент трения может быть любым, однако не бо́льшим по модулю, чем при движении.

Такая постановка исследования не может считаться совершенно удовлетворительной. Так, например, остается без внимания зависимость момента трения от величин динамических реакций. Кроме того, в ряде случаев момент трения при трогании с места существенно зависит от времени неподвижного контакта трущихся тел, что может заметно изменить поведение маятника в самом начале его движения. Не учтены также технологические неточности изготовления маятника и неточности его установки, а также упругие деформации маятника и рамы в процессе движения.

Возможно, что учет перечисленных факторов может несколько изменить детали теоретической картины движения маятника Пошехонова, излагаемой ниже, более точно приближая ее к действительности.

Чтобы не заниматься выяснением влияния на маятник горизонтальной составляющей угловой скорости Земли, будем считать его расположенным на одном из полюсов Земли, например на северном.

Теорема о моменте количества движения системы относительно вертикальной оси рамы приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt}\{\Theta(t)[U+\omega(t)]\}=M_{\text{тр}}=-M_{\text{макс}}\operatorname{Sign}\omega(t);\quad \omega(t)=\frac{d\varphi}{dt}\neq 0. \qquad (1)$$

Здесь $\Theta(t)$ — момент механической системы рама — маятник относительно оси рамы, U — угловая скорость Земли, φ — угол поворота рамы относительно Земли, $M_{\text{тр}}$ — момент трения, $M_{\text{макс}}$ — максимальное значение модуля момента трения.

В мгновение времени, когда рама стоит на месте, должно соблюдаться неравенство

$$\left|\frac{d}{dt}[\Theta(t)U]\right| = |M_{\text{тр}}| \leqslant M_{\text{макс}},\ \omega(t) = 0. \tag{2}$$

Если трение отсутствует, то, согласно уравнению (1),

$$\Theta(t)[U+\omega(t)] = \Theta(t_0)[U+\omega(t_0)] = \text{const}. \tag{3}$$

Пусть в начальное мгновение времени рама и маятник были неподвижны, тогда $\omega(t_0) = 0$ и, следовательно,

$$\omega(t) = \frac{\Theta(t_0)-\Theta(t)}{\Theta(t)}U, \tag{4}$$

где $\Theta(t_0)$ является в данном случае максимальным значением момента инерции, ибо почти очевидно, что угол отклонения маятника от вертикали не может стать большим своего начального значения. Вследствие этого при отсутствии трения

$$\omega(t) \geqslant 0, \tag{5}$$

о чем уже упоминалось выше.

Движение рамы мало сказывается на колебаниях маятника вокруг горизонтальной оси. В силу этого при конкретных расчетах можно принять, что момент инерции $\Theta(t)$ изменяется по периодическому закону, например

$$\Theta(t) = \Theta_0 + (\Theta_m - \Theta_0)\cos^2 pt, \tag{6}$$

где Θ_0 — наименьшее значение момента инерции системы рама — маятник (при вертикальном расположении маятника), Θ_m — момент инерции при наибольшем отклонении маятника и p — частота колебаний маятника вокруг горизонтальной оси.

Точное определение вида функции $\Theta(t)$ требует, конечно, решения двух совокупных дифференциальных уравнений, которыми определяется движение механической системы рама — маятник, соответственно двум степеням ее свободы.

Подставляя выражение (6) в формулу (4) для угловой скорости поворота рамы относительно Земли и учитывая, что

$$\Theta(t_0) = \Theta_m,$$

имеем

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \left[\frac{\Theta_m}{\Theta_0 + (\Theta_m - \Theta_0)\cos^2 pt} - 1\right]U. \tag{7}$$

Интегрируя правую часть последнего равенства в пределах периода колебания маятника

$$T = \frac{2\pi}{p}, \tag{8}$$

получим следующую формулу для среднего значения угловой скорости видимого вращения рамы

$$\omega_{\text{ср}} = \left[\sqrt{\frac{\Theta_m}{\Theta_0}} - 1\right]U. \tag{9}$$

Обратимся теперь к изучению движения рамы маятника при наличии трения. В начальное мгновение $t = 0$, согласно обстоятельствам запуска маятника Пошехонова, рама имела угловую скорость $\omega(0)$, равную нулю.

Нетрудно убедиться, что в течение некоторого промежутка времени рама будет стоять на месте. Действительно, движение начнется после нарушения неравенства (2), т. е. в некоторое мгновение времени $t = t_1$, при котором

$$\Theta'(t_1) = -\frac{M_{\text{макс}}}{U}. \tag{10}$$

При слишком большом моменте трения $M_{\text{макс}}$, превышающем произведение угловой скорости Земли U на максимальное значение модуля производной момента инерции $\Theta(t)$ по времени, движение рамы не начнется вовсе. Скорость изменения момента инерции определяется скоростью изменения угла отклонения маятника от вертикали. Последняя в начальный момент времени равна нулю, откуда следует, что $\Theta'(0) = 0$.

В интервале времени $0 \leqslant t < t_1$, когда рама стоит на месте, момент инерции $\Theta(t)$ уменьшается, следовательно, в этом интервале

$$\Theta'(t) < 0, \tag{11}$$

и момент трения покоя

$$M_{\text{тр}} = \frac{d}{dt}[\Theta(t)U] < 0 \qquad (|M_{\text{тр}}| < M_{\text{макс}}). \tag{12}$$

Так как момент трения в момент трогания рамы с места отрицателен, то движение ее должно начаться в сторону увеличения угла φ, т. е. по ходу Солнца. Уравнение (1) принимает теперь вид

$$\frac{d}{dt}\{\Theta(t)[U + \omega(t)]\} = -M_{\text{макс}}, \quad \omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} > 0, \tag{13}$$

откуда, учитывая, что в мгновение времени $t = t_1$ угловая скорость $\omega(t_1)$ равна нулю, имеем

$$\Theta(t)[U + \omega(t)] = -M_{\text{макс}}(t - t_1) + \Theta(t_1)U. \tag{14}$$

Угловая скорость рамы вновь обратится в нуль в некоторое мгновение времени $t = t_2$. Согласно соотношению (14), величина t_2 является корнем уравнения

$$\Theta(t_2)U = -M_{\text{макс}}(t_2 - t_1) + \Theta(t_1)U. \tag{15}$$

Если в мгновение $t = t_2$ удовлетворяется неравенство (2), то рама некоторое время, до нарушения этого неравенства, будет стоять на месте, после чего должна начать движение в обратном направлении. Уравнение (1) представится теперь в виде

$$\frac{d}{dt}\{\Theta(t)[U + \omega(t)]\} = +M_{\text{макс}}, \quad \omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} < 0. \tag{16}$$

Аналогично предыдущему, получим после интегрирования уравнения (16) соотношение

$$\Theta(t)[U + \omega(t)] = M_{\text{макс}}(t - t_2^*) + \Theta(t_2^*)U, \tag{17}$$

где мгновение начала нового движения рамы t_2^* является корнем уравнения

$$\Theta'(t_2^*) = \frac{M_{\text{макс}}}{U}. \tag{18}$$

Если неравенство (2) нарушается сразу же в мгновение времени $t = t_2$, то, конечно,

$$t_2^* = t_2. \tag{19}$$

Движение, определяемое уравнением (17), будет продолжаться до мгновения времени $t = t_3$, в котором угловая скорость $\omega(t)$ снова обратится в нуль. Уравнение, определяющее значение t_3, имеет вид

$$\Theta(t_3)U = M_{\text{макс}}(t_3 - t_2^*) + \Theta(t_2^*)U. \tag{20}$$

Аналогично определяется дальнейшее поведение угловой скорости рамы $\omega(t)$. Отыскание угла поворота рамы φ, как функции времени, приводит после отыскания $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ к вычислению квадратур.

Можно дать простой геометрический способ отыскания мгновений времени t_1, t_2, t_2^*, $t_3, \ldots$ Для этой цели построим (рис. 2) график функции $y = \Theta(t)$, например, согласно приближенному представлению этой функции формулой (6). Движение рамы начнется в мгновение $t = t_1$, которому соответствует на графике точка A_1, где угловой коэффициент касательной к графику равен величине

$$-k, \quad k = \frac{M_{\text{макс}}}{U}, \tag{21}$$

что непосредственно следует из уравнения (10).

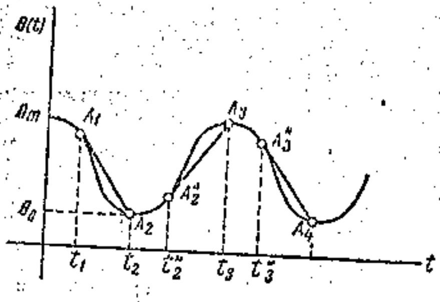

Рис. 2

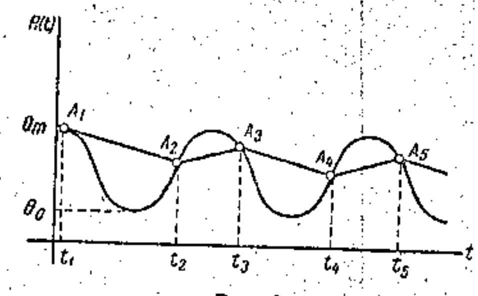

Рис. 3

Отыскание мгновения времени остановки рамы t_2 сводится к определению абсциссы точки A_2 пересечения графика $\Phi(t)$ с упомянутой касательной, уравнение которой имеет вид

$$y = -k(t - t_1) + \Theta(t_1). \tag{22}$$

Действительно, учитывая соотношение (21), немедленно убеждаемся, что графическое отыскание t_2 эквивалентно решению уравнения (15). Если в точке A_2 угловой коэффициент касательной к графику $y = \Theta(t)$ меньше значения $+k$, то следует отыскать на графике ближайшую точку с абсциссой $t_2^* > t$, где угловой коэффициент касательной как раз равен значению $+k$. Абсцисса точки пересечения этой новой касательной определяет мгновение времени $t = t_3$ вторичной остановки рамы. Далее построения повторяются.

Угловая скорость рамы $\omega(t)$ является здесь периодической функцией с тем же периодом, что и функция $\Theta(t)$.

Иначе обстоит дело, если в точке A_2 угловой коэффициент касательной больше значения $+k$ (рис. 3). В этом случае $t_2^* = t_2$ и для отыскания точки A_3 следует построить секущую с угловым коэффициентом $+k$, проходящую через точку A_2. Абсцисса ближайшей точки пересечения этой секущей с графиком $y = \Theta(t)$ определяет мгновение $t = t_3$, в котором обращается в нуль угловая скорость рамы. Затем следует построить секущую A_3A_4 с угловым коэффициентом $-k$ и так далее. В точках A_2, A_3, $A_4, \ldots$, происходит изменение знака угловой скорости рамы. Существенно, что угловая скорость рамы не является в данном случае периодической функцией времени и лишь стремится к ней по мере возрастания числа колебаний маятника, совершившихся от мгновения пуска маятника. Практически это происходит тем скорее, чем относительно больше момент трения. Однако он должен оставаться меньше некоторого предельного значения моментов трения, при которых движение рамы совершается с остановками.

Следует отметить принципиальное отличие маятника Пошехонова без трения вокруг вертикальной оси от маятника, где это трение, хотя бы и малое, имеется. Если пренебречь затуханием колебаний маятника вокруг горизонтальной оси (например, поддерживать эти колебания посредством часового механизма), то установившимся движением при наличии трения будет такое, при котором обращение в нуль угловой скорости происходит вблизи точек графика с наибольшим по модулю угловым коэффициентом касательной (рис. 4).

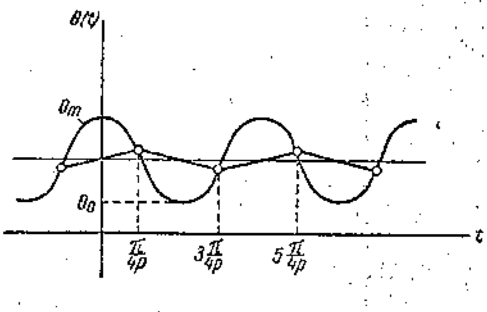

Рис. 4

Если принять, что момент инерции $\Theta(t)$ меняется по закону (6), то абсциссами упомянутых точек будут мгновения времени

$$t_n = (2n+1)\frac{\pi}{4p}. \tag{23}$$

Чтобы определить при исчезающе малом моменте трения $M_{\text{макс}}$ изменение угла φ в интервале времени, где значение угловой скорости рамы положительно, следует, согласно формуле (14), вычислить интеграл

$$U\int\limits_{\pi/4p}^{3\pi/4p}\frac{\Theta\left(\frac{\pi}{4p}\right)-\Theta(t)}{\Theta(t)}\,dt. \tag{24}$$

Соответствующее изменение угла φ в интервале отрицательных значений угловой скорости представляется выражением

$$U\int\limits_{3\pi/4p}^{5\pi/4p}\frac{\Theta\left(\frac{3\pi}{4p}\right)-\Theta(t)}{\Theta(t)}\,dt. \tag{25}$$

Если сумму выражений (24) и (25) разделить на величину периода (8), то получим среднее значение предельной угловой скорости маятника Пошехонова при весьма малом моменте трения в подшипниках вертикальной оси рамы. Для случая, когда $\Theta(t)$ изменяется по закону (6), вычисления приводит к формуле

$$\omega_{\text{ср}} = \left(\frac{\Theta_m+\Theta_0}{2\sqrt{\Theta_m\Theta_0}}-1\right)U. \tag{26}$$

Величина средней угловой скорости оказывается в этом случае несколько меньше, чем в случае точного равенства момента трения нулю (примерно вдвое, если $\Theta_m \gg \Theta_0$).

Таким образом, по мере установления движения средняя угловая скорость рамы маятника Пошехонова должна непрерывно уменьшаться. Этому способствует также уменьшение с течением времени амплитуд колебаний маятника вокруг горизонтальной оси. Учет влияния моментов трения в подшипниках горизонтальной оси маятника и вертикальной оси рамы на уменьшение этих амплитуд может быть произведен по методу малых возмущений.

П р и м е ч а н и е. При пуске маятника Пошехонова, демонстрируемого в Московском планетарии, вначале рама практически стоит на месте (в течение первых 10—50 колебаний). Далее рама приходит в движение, причем характер этого движения в общем совпадает с изложенным выше для случая движения с остановками (рис. 2). Я объясняю это явление изменением трения в подшипниках вертикальной оси рамы, которое резко возрастает при продолжительном пребывании маятника без движении из-за появляющихся окислов и пыли. При пуске маятника в ход подшипник постепенно «разрабатывается», и нормальное движение рамы восстанавливается.

Таким образом, все «аномалии» движения маятника Пошехонова следует в основном объяснять своеобразием законов трения. Повидимому, в некоторых случаях может также сказаться недостаточно точная установка оси рамы и оси маятника, а также недостаточная жесткость конструкции.

Уточняя правую часть уравнения (1), можно дать теоретическое пояснение всем особенностям движения этого интересного прибора.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
21 ноября 1954 г

Литература

1. Б. П. Перцов, „Теория маятника Пошехонова", Астр. журн., 31, № 1, 1954.