Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 5

МЕХАНИКА

Действительный член АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ КАНАТА (УПРУГОЙ НИТИ) ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Для решения задачи о движении груза массы m на упругом канате переменной длины (см. рис. 1) следует проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\rho F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F g \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \tag{2}$$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -EF\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + mg, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} - \frac{d\xi}{dt} = v, \tag{4}$$

причем должны быть также удовлетворены начальные условия, касающиеся расположения и скоростей элементов каната в момент времени $t = t_0$.

Здесь ρ — объемная плотность ненапряженного каната; ξ — расстояние груза от точки схода каната с колеса; EF — жесткость каната растяжению; F — его поперечное сечение; g — ускорение силы тяжести; x — лагранжева координата элементов каната, представляющая собой длину каната между данным элементом и грузом в предположении, что канат не натянут; $u(x, t)$ — смещение элемента каната относительно груза вследствие деформации каната; l — лагранжева координата верхнего элемента каната.

Очевидно, что

$$\xi = l + u(l, t). \tag{5}$$

Условие (4) выражает равенство между скоростью элемента каната, приходящего в соприкосновение с ободом колеса (или, наоборот, покидающего колесо), и окружной скоростью этого колеса. При этом предполагается, что скольжение каната по колесу отсутствует. Впрочем, пользуясь результатами Н. Е. Жуковского в его исследовании о скольжении ремня на шкиве ([1]), можно отказаться от последнего предположения и соответственно видоизменить условие (4).

Граничное условие (3) представляет собой уравнение движения груза под действием силы натяжения каната и силы тяжести. Уравнение (1) с соответствующими граничными и начальными условиями описывает движение элементов каната и груза как механической системы с бесконечным числом степеней свободы.

Наблюдения Г. Н. Савина, однако, показывают ([3]), что если оставить в стороне мгновения времени, непосредственно следующие за резким изменением окружной скорости колеса или резким изменением величины груза, движение элементов каната не имеет волнового характера и происходит с качественной стороны так, как будто бы канат был лишен массы.

В последнем случае имеем

$$u(x, t) = x\varphi(t), \tag{6}$$

где $\varphi(t)$ — некоторая подлежащая определению функция времени.

Причину затухания волновых движений следует искать во внутреннем трении каната, которое в уравнении (1) не учитывается. Заметим, что учет внутреннего трения приводит задачу к решению дифференциального уравнения в частных производных более высокого порядка ([2]).

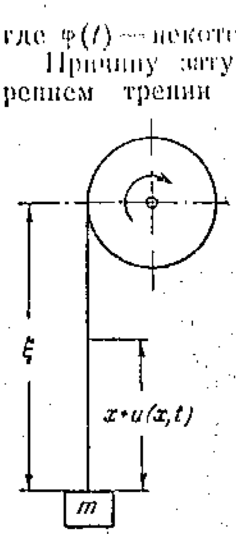

Рис. 1

Вследствие вышеизложенного можно искать приближенное решение задачи, принимая для искомой функции $u(x, t)$ представление (6).

Задачей дальнейшего является построение обыкновенного дифференциального уравнения для функции $\varphi(t)$.

При составлении приближенных уравнений следует по возможности избегать дифференцирования приближенных представлений, так как это неизбежно ведет к значительной утере точности. Поэтому предварительно умножим правую и левую части уравнения (1) на x и проинтегрируем в пределах от $x=0$ до $x=l$, минимизируя тем самым невязку от последующей замены в этом уравнении точного значения $u(x, t)$ приближенным и избавляясь, кроме того, в результате интегрирования по частям от второй производной функции $u(x, t)$ по переменной x. Учитывая граничное условие (2), получим

$$\rho F\int_0^l x\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\,dx - \rho F\frac{l^2}{2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = EFl\,\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - EFu(l, t) - \rho Fg\,\frac{l^2}{2}. \tag{7}$$

Непосредственное интегрирование правой и левой частей уравнения (1) по переменной x приводит к равенству

$$\rho F\int_0^l \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\,dx - \rho Fl\frac{d^2\xi}{dt^2} = EF\left[\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}\right] - \rho Fgl, \tag{8}$$

которое вместе с граничным условием (3) позволяет исключить частную производную от функции u по переменной x в соотношении (7). В результате получим равенство

$$\left(ml + \frac{1}{2}\rho Fl^2\right)\frac{d^2\xi}{dt^2} - \rho F\int_0^l (l-x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\,dx =$$
$$= -EFu(l, t) + \left(ml + \frac{1}{2}\rho Fl^2\right)g. \tag{9}$$

Продифференцируем теперь по времени граничное условие (4), учитывая, что длина рабочей части каната l является переменной величиной. Имеем

$$\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x\,\partial t}\frac{dl}{dt} - \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dv}{dt}. \tag{10}$$

Исключая теперь из равенства (9) вторую производную от функции ξ по времени, приходим к следующему основному интегро-дифференциальному соотношению:

$$\left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right)l\,\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} + \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right)l\,\frac{dl}{dt}\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x\,\partial t} -$$
$$-\rho F\int_0^l (l-x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\,dx + EFu(l, t) = \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right)\left(\frac{dv}{dt} + g\right)l. \tag{11}$$

В этом соотношении окружная скорость колеса v и длина рабочей части каната l связаны равенством

$$\left[1 + \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}\right]\frac{dl}{dt} = -v, \tag{12}$$

которое нетрудно получить, исключая функцию ξ из соотношений (4) и (5).

Вторым членом в квадратных скобках равенства (12) можно пренебречь, так как он в реальных условиях на три порядка меньше единицы.

Подставим в интегро-дифференциальное соотношение (11) приближенное представление функции $u(x, t)$ согласно равенству (6). После очевидных преобразований придем к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho Fl\right) l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right)\frac{dl}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + EF\varphi = \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right)\left(\frac{dv}{dt} + g\right), \tag{13}$$

которое можно положить в основу приближенного решения задач об идеально упругом канате переменной длины.

Если пренебречь собственной массой каната, т. е. считать $\rho = 0$, то уравнение (13) обращается в уравнение, исследованное Н. П. Нероновым [4].

В другом частном случае $l = \text{const}$ (и, следовательно, $v = 0$) приходим к приближенному уравнению основного тона колебания груза на упругой нити с известной поправкой Релея, учитывающей собственную массу нити.

Заметим, что непосредственное применение метода Релея к составлению приближенных уравнений каната переменной длины встречает затруднения, обусловленные сложностью граничных условий, а также тем обстоятельством, что уравнения Лагранжа второго рода справедливы лишь для систем, масса которых в процессе движения не изменяется.

Приемом, аналогичным вышеизложенному, можно получать интегро-дифференциальные соотношения и приближенные уравнения для канатов переменной длины с учетом несовершенной упругости.

Поступило
29 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Жуковский, О скольжении ремня на шкивах, 3, 1949, стр. 497. [2] А. Ю. Ишлинский, Прикладн. матем. и мех., в. 1, 79 (1940). [3] Г. Н. Савин, Докл. АН УССР, № 6 (1951). [4] Н. П. Неронов, Тр. Совещ. по шахтным подъемным канатам, 1944.