

Об остаточных напряжениях при крутке

А. Ю. Ишлинский

1°. Задача об отыскании остаточных напряжений в круглом пруте при кручении за предел упругости — элементарна, если считать, что прут имеет бесконечно большую длину и его поверхность свободна от напряжений. В этом случае, который рассматривался многими авторами, сечения, нормальные к оси прута, остаются плоскими и не искажаются в плане, т. е.

$$\varepsilon_r = 0, \quad \varepsilon_\theta = 0, \quad \gamma_{r\theta} = 0. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться цилиндрической системой координат $r\theta z$, ось z которой является одновременно и осью прута. Так как при кручении прута сечения остаются на неизменном расстоянии друг от друга и лишь поворачиваются вокруг оси прута, то

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{rz} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, единственной, не равной нулю компонентой деформации оказывается $\gamma_{r\theta}$, выражение для которой согласно известной формуле сопротивления материалов имеет вид

$$\gamma_{r\theta} = \varphi \cdot r, \quad (3)$$

где φ так называемый погонный угол крутки.

При кручении прута за предел упругости напряжение $\tau_{r\theta}$ определяется в зависимости от деформации $\gamma_{r\theta}$ по диаграмме (рис. 1)

$$\tau = \tau(\gamma). \quad (4)$$

Последняя строится, исходя из экспериментально устанавливаемой зависимости

$$\sigma_\varepsilon = \sigma(\varepsilon). \quad (5)$$

В данном случае [2]

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \tau_{r\theta} \sqrt{3}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Диаграмма (4) может быть получена и непосредственно, а именно при кручении за предел упругости полых тонкостенных труб.

Крутящий момент, соответствующий данной крутке, находится по формуле

$$M_{кр} = 2\pi \int_0^a \tau_{r\theta} r^2 dr. \quad (7)$$

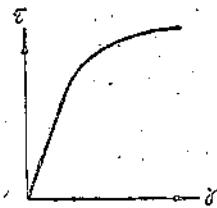


Рис. 1.

Считая здесь в соответствии с (4) τ_{z_0} функцией γ_{z_0} и производя согласно (3) замену переменных интегрирования r на γ_{z_0} , получим

$$M_{кр} = \frac{2\pi}{9^3} \int_0^{\gamma_a} \tau(\gamma) \gamma^3 d\gamma, \quad (8)$$

где для краткости записи переменная интегрирования обозначена через γ , а верхний предел γ_a представляет собой значение γ_{z_0} при $r = a$. Так как [3]

$$\gamma_a = \vartheta \cdot a, \quad (9)$$

то (8) может быть представлено в виде

$$M_{кр} = 2\pi a^3 \Phi(\gamma_a), \quad (10)$$

где функция

$$\Phi(\gamma_a) = \frac{1}{\gamma_a^3} \int_0^{\gamma_a} \tau(\gamma) \gamma^3 d\gamma \quad (11)$$

может быть построена для данной диаграммы $\tau = \tau(\gamma)$ раз навсегда. В случае крутки в пределах упругости

$$\tau(\gamma) = G\gamma, \quad (12)$$

и формула (10) при учете соотношения (9) приводится к известному виду

$$M_{кр} = GI_p \vartheta, \quad (13)$$

при этом, как обычно,

$$I_p = \frac{\pi a^4}{2}, \quad (14)$$

а G — означает модуль сдвига.

При крутке за предел упругости согласно (10) по заданному крутящему моменту $M_{кр}$ можно определить угол сдвига γ_a и далее, используя (9), найти погонный угол крутки ϑ .

При снятии крутящего момента происходит так называемая упругая разгрузка, подчиняющаяся закону

$$\tau_{z_0} - \tau_{z_0}^1 = G(\gamma_{z_0} - \gamma_{z_0}^1). \quad (15)$$

Здесь τ_{z_0} и γ_{z_0} напряжение и деформация, которые имели место при действии крутящего момента $M_{кр}$, $\tau_{z_0}^1$ и $\gamma_{z_0}^1$ остаточные напряжение и деформация. Если скручивающий момент снят полностью, то

$$\int_0^a \tau_{z_0}^1 2\pi r^2 dr = 0. \quad (16)$$

Заметим, что в соответствии с (3)

$$\gamma_{z_0}^1 = \vartheta_1 r, \quad (17)$$

где ϑ_1 — остаточный погонный угол крутки.

Интегрируя обе части равенства (15) по r в пределах от $r = 0$ до $r = a$, предварительно умножив их на $2\pi r^2$, и используя соотношения (7), (16), (3), (17) и (14), получим

$$M_{кр} = GI_p (\vartheta - \vartheta_1). \quad (18)$$

Отсюда

Зная ϑ_1
остаточн

Все ост
крутяще
компо

На
риала, л
дена на
Мож
с углом

где τ_0 —
Плас

где r , оп

Остаточн
При

то $\vartheta = \frac{2\tau_0}{aG}$

от оси прут
Эпюра

гают по мод

Отсюда имеем формулу для остаточной крутки

$$\vartheta_1 = \vartheta - \frac{M_{кр}}{GI_p} \quad (19)$$

Для ϑ_1 , можно найти, согласно (15), (3), (17) и (18), закон изменения остаточных напряжений $\tau_{z\theta}^1$ по сечению прута. Имеем:

$$\tau_{z\theta}^1 = \tau_{z\theta} - \frac{M_{кр}}{I_p} r. \quad (20)$$

Все остальные компоненты напряжений равны нулю как при действии крутящего момента, так и после его снятия, ибо соответствующие им компоненты деформаций (1) и (2) остаются без изменения.

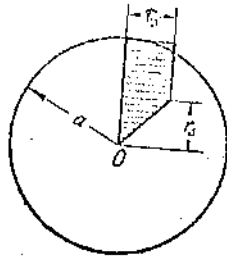


Рис. 2.

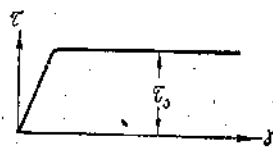


Рис. 3.

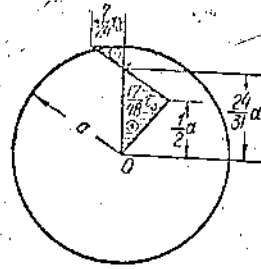


Рис. 4.

На рис. 2 показана эпюра напряжений $\tau_{z\theta}$ в случае прута из материала, лишённого упрочнения. Диаграмма для такого материала приведена на рис. 3.

Можно показать, что в этом случае крутящий момент $M_{кр}$ связан с углом погонной крутки соотношением

$$M_{кр} = 2\pi\tau_s \left(\frac{a^3}{3} - \frac{\tau_s^2}{12G^2\vartheta^2} \right), \quad (21)$$

где τ_s — предел текучести материала.

Пластическая деформация возникает в зоне

$$r > r_s, \quad (22)$$

где r_s определяется из условия

$$G\vartheta r_s = \tau_s. \quad (23)$$

Остаточная погонная крутка находится по формуле (19).

Пример 1. Если крутящий момент равен

$$M_{кр} = \frac{31}{48} \pi a^3 \tau_s,$$

то $\vartheta = \frac{2\tau_s}{aG}$ и зона пластической деформации начинается на расстоянии

$$r_s = \frac{1}{2} a$$

от оси прута.

Эпюра остаточных напряжений $\tau_{z\theta}^1$ показана на рис. 4. Напряжения $\tau_{z\theta}^1$ достигают по модулю максимума в двух местах: на расстоянии $r = \frac{a}{2}$ от оси прута, где

$$\tau_{z\theta}^1 \Big|_{r=\frac{a}{2}} = \frac{17}{48} \tau_s.$$

и у боковой поверхности прута, где

$$\tau_{z\theta}^1 \Big|_{r=a} = -\frac{7}{24} \tau_s.$$

Угол крутки ϑ за предел упругости в рассматриваемом примере равен

$$\vartheta = \frac{48}{31} \frac{M_{кр}}{GI_p},$$

а угол остаточной крутки определяется формулой

$$\vartheta_1 = \frac{17}{48} \vartheta = \frac{17}{31} \frac{M_{кр}}{GI_p} = \frac{17}{24} \frac{\tau_s}{\mu G}.$$

2°. Мы рассмотрим более сложную задачу об отыскании остаточных деформаций и напряжений в круглом полубесконечном пруте и в пруте конечных размеров.

При этом будем предполагать, что полубесконечный прут, а также прут конечных размеров образуются из бесконечно длинного прута (скрученного за предел упругости и далее разгруженного) посредством нормальных к оси плоских разрезов, не сопровождающихся заметной дополнительной пластической деформацией.

Вблизи разрезов закон распределения остаточных напряжений существенно отличается от соответствующего закона в случае бесконечно длинного прута, так как на торцевых сечениях напряжения $\tau_{z\theta}$ обращаются в нуль. Кроме того, появляются остаточные напряжения $\tau_{r\theta}$, которые в бесконечно длинном пруте отсутствовали. В наличии этих напряжений нетрудно убедиться, если рассмотреть равновесие части прута (рис. 5), ограниченного торцом, каким-либо другим нормальным сечением и цилиндрической поверхностью $r = r_1 < a$. По сечению не являющемуся торцом, действуют остаточные напряжения $\tau_{z\theta}$, создающие момент относительно оси z (этот момент равен нулю лишь при $r_1 = a$). С другой стороны, напряжения $\tau_{z\theta}$ на торце отсутствуют. Следовательно, равновесие рассматриваемой части возможно лишь при наличии напряжений $\tau_{r\theta}$,

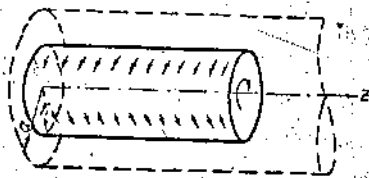


Рис. 5.

действующих по цилиндрической поверхности $r = r_1$ и создающих противоположный момент вокруг оси z .

Остаточные напряжения $\tau_{r\theta}$ обуславливают искажение сечений в их плоскости, так как соответствующая им компонента деформации $\gamma_{r\theta}$ будет теперь отлична от нуля. Это означает, что радиусы сечений, состоящие из материальных частиц, искривятся. Вследствие этого в волокнах, расположенных вблизи оси прута, как будет показано ниже, уменьшается крутка по сравнению с бесконечно длинным прутком. Наоборот, в волокнах, расположенных ближе к боковой поверхности, крутка увеличивается.

Любопытно отметить, что если разрезы сделаны весьма близко друг к другу, то остаточная крутка внутренних волокон, не претерпевших пластических деформаций, будет равна нулю. Крутка волокон, которые имели деформацию за предел упругости, будет определяться только величиной пластической деформации. Напряжение $\tau_{r\theta}$ в этом случае отсутствует.

Любопытно отметить, что если разрезы сделаны весьма близко друг к другу, то остаточная крутка внутренних волокон, не претерпевших пластических деформаций, будет равна нулю. Крутка волокон, которые имели деформацию за предел упругости, будет определяться только величиной пластической деформации. Напряжение $\tau_{r\theta}$ в этом случае отсутствует.

Обозначения от исходных Перемещений Отличия через μ

В соответствии

Здесь, а также в остальных частях прута, значены конечные моменты

где величина μ можно определить по формулам (3) и (4). Из (3) и (4)

Заменяя μ согласно (2)

Напряжения

Подставляя в формулы (2) значения μ и τ_s для отыскания

для отыскания

Обозначим через $u(r, z)$ остаточное перемещение u_0^0 , отсчитываемое от исходного состояния прута до его деформации за предел упругости. Перемещения u_r^0 и u_z^0 в нашем случае равны нулю.

Отличные от нуля остаточные деформации $\gamma_{\theta z}^0$ и $\gamma_{r\theta}^0$ выражаются через $u(r, z)$ формулами [1]

$$\begin{aligned}\gamma_{\theta z}^0 &= \frac{\partial u_0^0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^0}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{r\theta}^0 &= \frac{\partial u_0^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^0}{\partial \theta} - \frac{u_0^0}{r} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}.\end{aligned}\quad (24)$$

В соответствии с законом упругой разгрузки

$$\begin{aligned}\tau_{z\theta} - \tau_{z\theta}^0 &= G(\gamma_{z\theta} - \gamma_{z\theta}^0), \\ \tau_{r\theta} - \tau_{r\theta}^0 &= G(\gamma_{r\theta} - \gamma_{r\theta}^0).\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь, аналогично (15) $\tau_{z\theta}$, $\tau_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$ и $\gamma_{r\theta}$ — напряжения и деформации, которые имели место при кручении за предел упругости бесконечно длинного прута, заданным крутящим моментом $M_{кр}$; через $\tau_{z\theta}^0$, $\tau_{r\theta}^0$, $\gamma_{z\theta}^0$, $\gamma_{r\theta}^0$ обозначены остаточные напряжения и деформации в полубесконечном или конечном куске прута, полученного из бесконечного прута после снятия момента $M_{кр}$ и последующих разрезов. В (25) следует положить

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta}^0 &= 0, \quad \gamma_{r\theta}^0 = 0, \\ \tau_{z\theta}^0 &= \tau(\gamma_{z\theta}) = \tau(\vartheta_r) = \tau_{z\theta}(r), \quad \gamma_{z\theta}^0 = \vartheta_r,\end{aligned}\quad (26)$$

где величину погонной крутки ϑ (до разгрузки прута) и функцию $\tau_{z\theta}(r)$ можно определять, пользуясь формулами и соотношениями (8), (9), (3) и (4).

Из (25), используя (26), получаем теперь

$$\begin{aligned}\tau_{z\theta}^0 &= \tau_{z\theta}(r) - G\vartheta_r + G\gamma_{z\theta}^0, \\ \tau_{r\theta}^0 &= G\gamma_{r\theta}^0.\end{aligned}\quad (27)$$

Заменяя здесь остаточные деформации $\gamma_{z\theta}^0$ и $\gamma_{r\theta}^0$ их выражениями согласно (24), имеем

$$\begin{aligned}\tau_{z\theta}^0 &= \tau_{z\theta}(r) - G\vartheta_r + G \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \tau_{r\theta}^0 &= G \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right).\end{aligned}\quad (28)$$

Напряжения $\tau_{z\theta}^0$ и $\tau_{r\theta}^0$ должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.\quad (29)$$

Подставляя (28) в (29), получим после очевидных упрощений дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.\quad (30)$$

для отыскания функции $u(r, z)$.

3°. Мы будем искать решение (30) в виде

$$u = \vartheta^* r z + \sum \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) \quad (31)$$

для куска прута конечных размеров и в виде

$$u = \vartheta^* r z + \sum C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) \quad (32)$$

для полубесконечного прута.

Формулы (31) и (32) легко устанавливаются при интегрировании уравнения (30) посредством метода разделения переменных. При этом учитывается, что перемещение $u(r, z)$ обращается в нуль на оси прута (т. е. при $r = 0$) и, кроме того, отбрасывается слагаемое, соответствующее повороту прута без деформации. При непосредственной проверке формул (31) и (32) подстановкой в уравнение (30) следует учесть, что

$$J_1''(\lambda x) + \frac{1}{x} J_1'(\lambda x) + \left(\lambda^2 - \frac{1}{x^2} \right) J_1(\lambda x) = 0 \quad (33)$$

в соответствии с известными дифференциальными равенствами в теории бесселевых функций.

Выражения (28) для остаточных напряжений прута конечной длины принимают теперь, после использования формулы (31), вид

$$\tau_{z0}^0 = \tau_{z0}(r) - G \vartheta r + G \vartheta^* r + G \sum \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} \right) \frac{\alpha_k}{a} J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right), \quad (34)$$

$$\tau_{r0}^0 = G \sum \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) \left[\frac{\alpha_k}{a} J_1' \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) - \frac{1}{r} J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) \right]. \quad (35)$$

Ниже будет показано [см. (48)], что $\vartheta^* = \vartheta_1$. Если, кроме того, использовать известное соотношение теории бесселевых функций

$$\lambda x J_n'(\lambda x) = n J_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x), \quad (36)$$

положив в нем $n=1$, $\lambda = \frac{\alpha_k}{a}$, $x=r$, то формулы (34) приведутся к виду

$$\tau_{z0}^0 = \tau_{z0}(r) - G(\vartheta - \vartheta_1)r + \frac{G}{a} \sum \alpha_k \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} \right) J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right), \quad (37)$$

$$\tau_{r0}^0 = -\frac{G}{a} \sum \alpha_k \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) J_2 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right).$$

Соответствующие формулы для полубесконечного прута получаются, если в (28) подставить (32) и сделать аналогичные выкладки

$$\tau_{z0}^0 = \tau_{z0}(r) - G(\vartheta - \vartheta_1)r + \frac{G}{a} \sum \alpha_k C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right), \quad (38)$$

$$\tau_{r0}^0 = -\frac{G}{a} \sum \alpha_k C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_2 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right).$$

На бою
Это при

для отъ
Пе

а,
Дл
вием об
конечно

координ
вий на

Умножи
и, далее
 $n = 2$ ф

и учиты

Таким об

откуда, п

Сравни

Последне
ные пере
ниям (41

В те

($\lambda^2 -$

$\int_0^r x$

На боковой поверхности $r = a$ остаточное напряжение τ_{r0}^0 отсутствует. Это приводит к трансцендентному уравнению

$$J_2(\alpha_k) = 0 \quad (39)$$

для отыскания количества α_k .

Первые пять отличных от нуля корней уравнения (39) суть [3]

$$\alpha_1 = 5,136, \quad \alpha_2 = 8,417, \quad \alpha_3 = 11,620, \quad \alpha_4 = 14,796, \quad \alpha_5 = 17,960. \quad (40)$$

Для определения коэффициентов A_k и B_k следует воспользоваться условием обращения в нуль остаточных напряжений τ_{r0}^0 на торцах прута конечной длины. Примем

$$z_1 = 0, \quad z_2 = l \quad (41)$$

координатами центров этих торцов. На основании формулы (34) и условий на торцах получим

$$0 = \tau_{z0}(r) - G\vartheta r + G\vartheta^* r + G \sum \frac{\alpha_k}{a} B_k J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right), \quad (42)$$

$$0 = \tau_{z0}(r) - G\vartheta r + G\vartheta^* r + G \sum \frac{\alpha_k}{a} \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k l}{a} B_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k l}{a} \right) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right). \quad (43)$$

Умножим правую часть соотношения (42) или соотношения (43) на $2\pi r^2$ и, далее, проинтегрируем в пределах от $r = 0$ до $r = a$. Используя при $n = 2$ формулу теории бесселевых функций

$$\int x^n J_{n-1}(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} x^n J_n(\lambda x) \quad (44)$$

и учитывая равенство (39), имеем

$$\int_0^a r^2 J_1\left(\frac{\alpha_k}{a} r\right) dr = \frac{a}{\alpha_k} r^2 J_2\left(\frac{\alpha_k}{a} r\right) \Big|_0^a = 0. \quad (45)$$

Таким образом, получаем

$$2\pi \int_0^a \tau_{z0}(r) \cdot r^2 dr - G\vartheta \frac{\pi a^4}{2} + G\vartheta^* \frac{\pi a^4}{2} = 0, \quad (46)$$

откуда, вводя обозначения (7) и (14), имеем

$$\vartheta^* = \vartheta - \frac{M_{кр}}{GI_p}. \quad (47)$$

Сравнение этой формулы с формулой (19) дает равенство

$$\vartheta^* = \vartheta_1. \quad (48)$$

Последнее означает, что член $\vartheta^* r z$ в формуле (31) определяет остаточные перемещения бесконечно длинного прута до разреза его по сечениям (41).

В теории бесселевых функций известны формулы

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = x [\mu J_n(\lambda x) J_n'(\mu x) - \lambda J_n(\mu x) J_n'(\lambda x)], \quad (49)$$

$$\int_0^x x [J_n(\lambda x)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \left\{ [J_n'(\lambda x)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2 x^2}\right) [J_n(\lambda x)]^2 \right\}. \quad (50)$$

Исключая из этих формул производные от бесселевых функций $J_n(\lambda x)$ и $J_n(\mu x)$, посредством формулы (36) приходим к соотношениям

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = x [\lambda J_{n+1}(\lambda x) J_n(\mu x) - \mu J_{n+1}(\mu x) J_n(\lambda x)], \quad (51)$$

$$\int_0^x x [J_n(\lambda x)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \left\{ [J_{n+1}(\lambda x)]^2 - 2 \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda x) J_{n+1}(\lambda x) + [J_n(\lambda x)]^2 \right\}. \quad (52)$$

Изменяя в этих соотношениях переменную интегрирования x на r , принимая верхний предел интегрирования равным a и, кроме того, считая

$$\lambda = \frac{\alpha_l}{a}, \quad \mu = \frac{\alpha_k}{a}, \quad n=1$$

и учитывая (39), получим формулы

$$\int_0^a r J_1\left(\frac{\alpha_l r}{a}\right) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) dr = 0, \quad (53)$$

$$\int_0^a r \left[J_1\left(\frac{\alpha_l r}{a}\right) \right]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_l)]^2. \quad (54)$$

Умножим теперь правые части соотношений (42) и (43) на

$$r J_1\left(\frac{\alpha_l r}{a}\right)$$

и проинтегрируем их в пределах от $r=0$ до $r=a$. Приняв во внимание формулы (53) и (54), а также (45), имеем

$$0 = \int_0^a \tau_{z0}(r) J_1\left(\frac{\alpha_l r}{a}\right) r dr + G \frac{\alpha_l}{a} B_l \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_l)]^2. \quad (55)$$

$$0 = \int_0^a \tau_{z0}(r) J_1\left(\frac{\alpha_l r}{a}\right) r dr + G \frac{\alpha_l}{a} \left(A_l \operatorname{sh} \frac{\alpha_l l}{a} + B_l \operatorname{ch} \frac{\alpha_l l}{a} \right) \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_l)]^2. \quad (56)$$

Решая уравнения (55) и (56) относительно A_l и B_l и меняя индекс l на k , получим:

$$A_k = \frac{2 \operatorname{th} \frac{\alpha_k l}{2a}}{G \alpha_k a J_1^2(\alpha_k)} \int_0^a \tau_{z0}(r) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) r dr, \quad (57)$$

$$B_k = - \frac{2}{G \alpha_k a J_1^2(\alpha_k)} \int_0^a \tau_{z0}(r) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) r dr. \quad (58)$$

Таким образом, задача об отыскании функции $u(r, z)$ свелась к отысканию определенных интегралов, входящих в состав формул (57) и (58).

4°. Ве
прута выр:

Подставля
(считая $n =$

получим d

В частност

а у боковой

В случае pc

причем

и

5°. Для
(см. приме

причем

Определени
гралов

каждый из

4°. Величина поворота какой-либо элементарной площадки сечения прута выражается формулой

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right). \quad (59)$$

Подставляя сюда выражение $u(r, z)$ согласно формуле (31) и используя (считая $n = 1$) формулу теории бесселевых функций

$$\lambda x J_n'(\lambda x) + n J_n(\lambda x) = \lambda x J_{n-1}(\lambda x), \quad (60)$$

получим для ω выражение

$$\omega = \vartheta_1 z + \frac{1}{2} \sum \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) \frac{\alpha_k}{a} J_0 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right). \quad (61)$$

В частности, для сечения $z = 0$ имеем в центре прута $r = 0$

$$\omega = \frac{1}{2} \sum \frac{\alpha_k}{a} A_k, \quad (62)$$

а у боковой поверхности, т. е. при $r = a$

$$\omega = \frac{1}{2} \sum \frac{\alpha_k}{a} A_k J_0(\alpha_k). \quad (63)$$

В случае полубесконечного прута нетрудно получить следующую формулу:

$$u = \vartheta_1 r z + \sum C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right), \quad (64)$$

причем

$$C_k = - \frac{2}{G \alpha_k a J_1'(\alpha_k)} \int_0^a \tau_{\theta_0}(r) J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr \quad (65)$$

и

$$\omega = \vartheta_1 z + \frac{1}{2} \sum \frac{\alpha_k}{a} C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_0 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right). \quad (66)$$

5°. Для случая идеально пластического материала функция $\tau_{\theta_0}(r)$ (см. пример 1) имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{\theta_0}(r) &= G \vartheta r \quad \text{при } r < r_s, \text{ и} \\ \tau_{\theta_0}(r) &= \tau_s \quad \text{при } r > r_s, \end{aligned} \quad (67)$$

причем

$$G \vartheta r_s = \tau_s. \quad (23)$$

Определение постоянных A_k , B_k или C_k требует знания величин интегралов

$$\int_0^a \tau_{\theta_0}(r) J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr, \quad (68)$$

каждый из которых разбивается на два, именно

$$\int_0^{r_s} G \vartheta r J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr \quad \text{и} \quad \int_{r_s}^a \tau_s J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr. \quad (69)$$

Первый интеграл согласно формуле (44) равен

$$G \vartheta \frac{a r_s^2}{\alpha_k} J_2 \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right). \quad (70)$$

Второй интеграл, интегрируя по частям и используя соотношение, которое следует из (36), при $n=0$

$$J_0' \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) = -J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) \quad (71)$$

можно привести к виду

$$\tau_s \frac{\alpha}{\alpha_k} \left[-a J_0(\alpha_k) + r_s J_0 \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right] + \tau_s \frac{a}{\alpha_k} \int_{r_s}^a J_0 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) dr. \quad (72)$$

Таким образом, учитывая, кроме того (67), получим, что

$$\int_0^a \tau_{s\theta}(r) J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr = \tau_s \frac{a r_s}{\alpha_k} \left[J_2 \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) + J_0 \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right] - \tau_s \frac{a^2}{\alpha_k} J_0(\alpha_k) + \tau_s \frac{a^2}{\alpha_k} \left[J^*(\alpha_k) - J^* \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right]. \quad (73)$$

Здесь для интеграла от функции $J_0(z)$ введено обозначение

$$J^*(z) = \int_0^z J_0(z) dz. \quad (74)$$

Согласно известной рекуррентной формуле теории бesselевых функций

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z). \quad (75)$$

Используя эту формулу при $n=1$, получим окончательно

$$\int_0^a \tau_{s\theta}(r) J_1 \left(\frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr = \tau_s \frac{a^2}{\alpha_k} \left[2J_1 \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) - \alpha_k J_0(\alpha_k) + J^*(\alpha_k) - J^* \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right]. \quad (76)$$

Посредством формулы (76) коэффициенты A_k , B_k и C_k можно представить, согласно их выражениям (57), (58) и (65), в виде

$$C_k = B_k = -A_k \coth \frac{\alpha_k l}{2a} = -\frac{2\tau_s a}{G \alpha_k^2 J_1^2(\alpha_k)} \left[2J_1 \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) - \alpha_k J_0(\alpha_k) + J_0^*(\alpha_k) - J^* \left(\frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right]. \quad (77)$$

Дальнейшие расчеты согласно формулам (32) или (64) сводятся к простым вычислениям.

Пример 2. Определим, какие остаточные деформации и напряжения окажутся в пруте, рассмотренном в примере 1, если его разрезать на две полубесконечные части. Имеем согласно данным примера 1

$$r_s = \frac{1}{2} a$$

и, следов

Поль (40), сле

Заме и их прих

или посре На ос щений

$u = \vartheta_1 r z -$

- 0

согласно п

Замети

где ϑ угол дел упруго Удерж окончательно

и, следовательно, в соответствии с (77)

$$(70) \quad C_k = -\frac{2\tau_s a}{G} \frac{1}{a^2 J_1^2(\alpha_k)} \left[2J_1\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) - \alpha_k J_0(\alpha_k) + J^*(\alpha_k) - J^*\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) \right].$$

е, которое

Пользуясь таблицами бесселевых функций [3, 4], получаем, используя (40), следующие значения первых четырех коэффициентов:

$$(71) \quad C_1 = -\frac{2\tau_s a}{G} 0,0556, \quad C_2 = \frac{2\tau_s a}{G} 0,0116,$$

$$(72) \quad C_3 = \frac{2\tau_s a}{G} 0,0008, \quad C_4 = \frac{2\tau_s a}{G} 0,0004.$$

Заметим, что значения функции $J^*(x)$ при $x > 1,00$ не табулированы и их приходится вычислять [4] по формуле

$$(73) \quad J^*(x) = \int_0^x J_0(x) dx = \frac{\pi x}{2} [J_0(x) H_0'(x) + J_1(x) H_0(x)] = \\ = \frac{\pi x}{2} \left\{ J_0(x) \left[\frac{2}{\pi} - H_1(x) \right] + J_1(x) H_0(x) \right\}$$

(74) или посредством численного интегрирования функции $J_0(x)$.

На основании (64) имеем для нашего примера формулу для перемещений

$$(75) \quad u = \vartheta_1 r z - \frac{2\tau_s a}{G} \left[0,0556 e^{-5,136 \frac{z}{a}} J_1\left(5,136 \frac{r}{a}\right) - 0,0116 e^{-8,417 \frac{z}{a}} J_1\left(8,417 \frac{r}{a}\right) - \right. \\ \left. - 0,0008 e^{-11,620 \frac{z}{a}} J_1\left(11,620 \frac{r}{a}\right) - 0,0004 e^{-14,796 \frac{z}{a}} J_1\left(14,796 \frac{r}{a}\right) \right]$$

согласно примеру 1

$$(76) \quad \vartheta_1 = \frac{17}{24} \frac{\tau_s}{aG} = \frac{17}{48} \vartheta.$$

Заметим, что в нашем примере $r_s = \frac{a}{2}$ и, следовательно,

$$\tau_s = G \vartheta r_s = G \frac{a}{2} \vartheta,$$

(77)

где ϑ угол погонной крутки при первоначальном деформировании за предел упругости.

Удерживая только два члена в разложении по бесселевым функциям, окончательно имеем

$$u = a^2 \vartheta \left[0,3542 \frac{r z}{a^2} - 0,0556 J_1\left(5,136 \frac{r}{a}\right) e^{-5,136 \frac{z}{a}} + \right. \\ \left. + 0,0116 J_1\left(8,417 \frac{r}{a}\right) \cdot e^{-8,417 \frac{z}{a}} \right].$$

Поворот элементов прута определяется формулой (66), которая для нашего примера имеет вид

$$\omega(r, z) = \alpha \nu \left[0,3542 \frac{z}{a} - 0,1428 J_0 \left(5,136 \frac{r}{a} \right) e^{-5,136 \frac{z}{a}} + \right. \\ \left. + 0,0488 J_0 \left(8,417 \frac{r}{a} \right) e^{-8,417 \frac{z}{a}} + \dots \right].$$

Для сечения $z=0$ имеем при $r=0$ и при $r=a$

$$\omega(0, 0) = -0,0940 \alpha \vartheta,$$

$$\omega(0, a) = 0,0220 \alpha \vartheta.$$

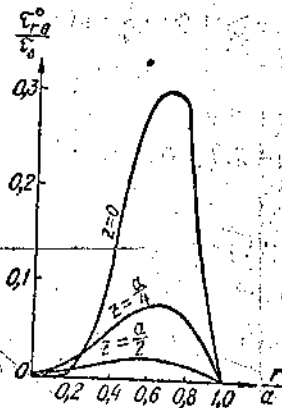


Рис. 6.

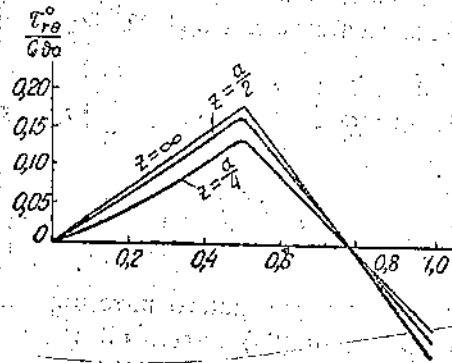


Рис. 7.

Определим, наконец, остаточные напряжения в элементах сечений $z=0, \frac{a}{2}, a$. Для этого следует воспользоваться формулами (38), которые в нашем примере приводятся к виду

$$\tau_{r\theta}^0 = \tau_{r\theta}(r) - \frac{31}{48} G \vartheta r + G \vartheta a \left[-0,2856 e^{-5,136 \frac{z}{a}} J_1 \left(5,136 \frac{r}{a} \right) + \right. \\ \left. + 0,0976 J_1 \left(8,417 \frac{r}{a} \right) e^{-8,417 \frac{z}{a}} + \dots \right], \\ \tau_{r\theta}^0 = -G \vartheta a \left[-0,2856 e^{-5,136 \frac{z}{a}} J_2 \left(5,136 \frac{r}{a} \right) + \right. \\ \left. + 0,0976 J_2 \left(8,417 \frac{r}{a} \right) e^{-8,417 \frac{z}{a}} + \dots \right],$$

где функция $\tau_{r\theta}(r)$ в соответствии с примером 1 определяется формулами

$$\tau_{r\theta}(r) = G \vartheta r \quad \text{при } 0 \leq r \leq \frac{a}{2}$$

$$\tau_{r\theta}(r) = G \vartheta \frac{a}{2} = \text{const} \quad \text{при } a \geq r \geq \frac{a}{2}.$$

Таблицы значений $\tau_{r\theta}^0$ и $\tau_{z\theta}^0$ приводятся ниже; см. также графики (рис. 6 и 7).

$\frac{r}{a}$	0
z	0
0	0
$\frac{a}{4}$	0
$\frac{a}{2}$	0
a	0

Как в сечении почти не ном пруте

1. А. ССРС, М. 2. А. 3. Е. М. — Л., 194 4. Г. М., 1949.

Получ

эрая для на-

Таблица значений $\frac{\tau_{r0}^0}{\tau_s}$

$\frac{r}{a}$ \ z	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0	0,0012	0,116	0,276	0,250	0
$\frac{a}{4}$	0	0,0120	0,0463	0,0765	0,0604	0
$\frac{a}{2}$	0	0,0044	0,0146	0,0212	0,0156	0
a	0	0,0004	0,0012	0,0016	0,0011	0

Таблица значений $\frac{\tau_{z0}^0}{G\theta a}$

$\frac{r}{a}$ \ z	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{a}{4}$	0	0,0426	0,0986	0,0841	-0,0092	-0,116
$\frac{a}{2}$	0	0,0619	0,129	0,105	-0,0143	-0,138
a	0	0,0701	0,141	0,112	-0,0165	-0,145
∞	0	0,0708	0,142	0,113	-0,0167	-0,146

Как видно из графиков, а также таблиц, остаточные напряжения в сечениях, расположенных на расстоянии радиуса от края прута, почти не отличаются от соответствующих напряжений в бесконечно длинном пруте.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ляв, Математическая теория упругости, Объедин. научно-техн. из-во НКТП СССР, М.—Л., 1935.
2. А. А. Ильюшин, Теория пластичности, ОГИЗ, М.—Л., 1948.
3. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, ОГИЗ, М.—Л., 1948.
4. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I и II, Из-во иностр. литер., М., 1949.

Получена 28 февраля 1952 г.
Киев

х сечений
, которые

формулами

(рис. 6