Доклады Академии Наук СССР
1944. Том XLV, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТАТИСТИКИ К ОПИСАНИЮ ЗАКОНОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 15 III 1944)

Наиболее простые законы, описывающие деформирование не вполне упругих и вязкопластических тел, содержат линейные соотношения между напряжением, деформацией и их производными по времени (1). Таковы, например, закон линейного упрочнения (2)

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad \text{если } \varepsilon < \alpha,$$
$$\sigma = E\alpha + h(\varepsilon - \alpha), \quad \text{если } \varepsilon > \alpha,$$

и закон последействия и релаксации вида (3)

$$\dot\sigma + r\sigma = b\dot\varepsilon + bn\varepsilon.$$

Однако подобные законы описывают деформирование соответствующих реальных тел часто лишь качественно.

Представляя реальное тело в виде некоторой конструкции большого числа элементов, обладающих простейшими законами деформирования с заданным распределением констант, входящих в выражение этих законов, можно достаточно точно описывать деформирование реальных тел и с количественной стороны.

В случае растяжения тела, строение которого предполагается волокнистым, среднее напряжение выражается формулой

$$\bar\sigma = \int_0^\infty \sigma p(\alpha)\, d\alpha,$$

где α — константа, входящая в выражение закона деформирования отдельного волокна, и $p(\alpha)$ — ее функция распределения. Таким образом, произведение $Fp(\alpha)\,d\alpha$ представляет собой часть поперечного сечения тела F, приходящуюся на долю волокна, у которого константа заключена в пределах α, $\alpha + d\alpha$.

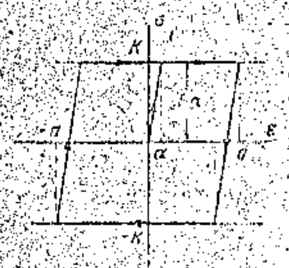
Если в первом примере отдельные волокна подчиняются закону линейного упрочнения с разными константами α, то для среднего напряжения имеет место выражение

$$\bar\sigma = \int_0^\varepsilon [E\alpha + h(\varepsilon - \alpha)]\, p(\alpha)\, d\alpha + \int_\varepsilon^\infty E\varepsilon p(\alpha)\, d\alpha,$$

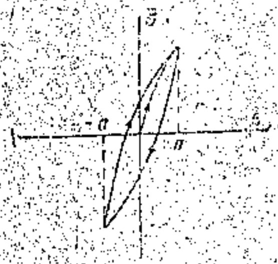
откуда

$$\frac{\partial^2\bar\sigma}{\partial\varepsilon^2} = -(E - h)\, p(\varepsilon).$$

Последняя формула позволяет находить функцию распределения при известном законе деформирования тела. Пусть петля гистерезиса отдельного волокна имеет вид фиг. 1, а функция распределения $p(\alpha)$ постоянна, если $0 < \alpha < \beta$, и равна нулю, если $\alpha > \beta$. Тогда петля гистерезиса всего тела состоит из кусков двух парабол (фиг. 2)



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \pm \frac{E}{4\beta}(a \mp \varepsilon)^2 \mp \frac{Ea^2}{2\beta},$$

где a — амплитуда изменения деформации ε. Если такое тело несет на одном конце колеблющуюся массу, а другим концом заделано, то уменьшение амплитуды к концу полуколебания приблизительно пропорционально квадрату амплитуды в начале полуколебания.

Для другого примера, представляя напряжение отдельных волокон в виде

$$\sigma(t) = b\varepsilon(t) - \int_0^t b(r-n)\, e^{-r(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\, d\tau$$

и считая у всех волокон константы b и $bn/r = c$ одинаковыми, а r и n, которые пропорциональны друг другу, различными, можно притти к закону наследственности Больтцмана-Вольтерра (³)

$$\bar{\sigma}(t) = b\varepsilon(t) - \int_0^t K(t-\tau)\varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

Ядро релаксации $K(t-\tau)$ определяется при этом формулой

$$K(x) = (b-c)\int_0^\infty re^{-rx}p(r)\, dr,$$

где $p(r)$ — функция распределения константы r. Если

$$p(r) = 0 \text{ при } 0 < r < a$$

и

$$p(r) = M/r^{2-\alpha} \text{ при } a < r < \infty \quad (0 < \alpha < 1),$$

то при малых $t-\tau$ имеет место приближенное равенство

$$K(t-\tau) = \frac{(b-c)\,\Gamma(\alpha)}{(t-\tau)^{\alpha}}.$$

При заданной функции $K(x)$ функция распределения находится посредством известной формулы Меллина.

Поступило
15 III 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ю. Ишлинский, ДАН, XXVI, № 1 (1940). [2] А. Ю. Ишлинский, Прикладн. мат. и мех., V, в. 1 (1940). [3] А. Ю. Ишлинский, Прикладн. мат. и мех., IV, в. 1 (1940). [4] Boltzmann, Wiss. Abh., I, Wien — Berlin (1874).