Уч. зап. МГУ, 1940, в. 39.
Механика, С. 83

О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. Ю. Ишлинский

На стр. 97, 98, 99 своей книги «Плоская задача расчета бесконечно-длинной балки на упругом основании и т. д.» (Москва, 1937, изд. ВИА РККА им. В. В. Куйбышева) проф. Жемочкин подсчитывает перемещения, вызванные действием на границу упругой полуплоскости равномерно распределенной нагрузки.

В основу вывода проф. Жемочкин берет известное решение Фламана для действия сосредоточенной силы на границу полуплоскости, которое записывает в виде:

$$v=\frac{2P}{\pi E_0}\ln\frac{d}{r},^{*} \tag{17}$$

где v — осадка точек оси x — границы полуплоскости (см. рис. 1), $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и для точек границы $r=|x|$, d — расстояние закрепленной точки полуплоскости от оси x; для нее $x=0$, $y=d$ и $u=v=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

Рис. 1.

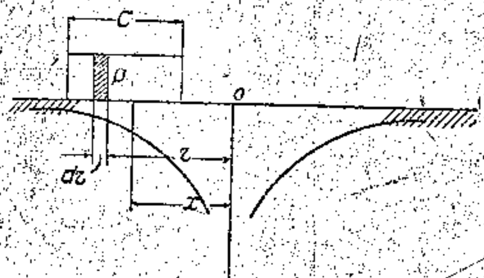

Рис. 2.

Чтобы получить перемещения для случая распределенной нагрузки (см. рис. 2) проф. Жемочкин по существу поступает так: прогиб от элементарной силы $pd\zeta$ в точке O составит величину:

$$\frac{2pd\zeta}{\pi E_0}\ln\frac{d}{\zeta}$$

и, следовательно, полная деформация составит величину:

$$v=\int\limits_{x-\frac{c}{2}}^{x+\frac{c}{2}}\frac{2\,pd\zeta}{\pi E_0}\ln\frac{d}{\zeta}, \tag{19}$$

где x — координата середины равномерно распределенной нагрузки и c — длина участка ее распределения.

* Проф. Жемочкин осадку v обозначает буквой y.

6*

Это выражение принципиально неверно, ибо выражение прогиба

$$\frac{2pd\zeta}{\pi E_0}\ln\frac{d}{\zeta}$$

от элементарной нагрузки $pd\zeta$ предполагает закрепленным элемент AB, находящийся на расстоянии d под нагрузкой $pd\zeta$, но никак не на оси y (см. рис. 3).

Поэтому проф. Жемочкин складывает деформации, проходящие от бесконечного числа деформированных состояний с закреплениями в разных местах, что, конечно, недопустимо.

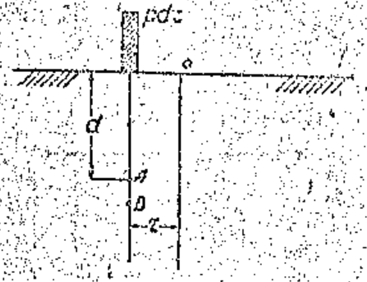

Рис. 3.

По этой же причине неверны его рассуждения на стр. 92 и 93, где этот неправильный метод суммирования излагается в общем виде. В этом месте автор вообще забывает про граничные условия, т. е. закрепления полуплоскости. Заметим, что для полупространства, где автор использует решения Буссинеска, этот метод вполне приемлем, так как при действии сосредоточенной силы перемещения в бесконечно удаленных точках равны нулю.

Дадим правильное решение поставленной задачи.

Как известно (см. Ляв, стр. 220), перемещения

$$u=\frac{A}{2\mu}\ln r+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}A\frac{y^2}{r^2},$$

$$v=\frac{A}{2(\lambda+2\mu)}\theta-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}A\frac{xy}{r^2},$$

с точностью до жесткого перемещения всей полуплоскости соответствуют силе

$$-\frac{\pi A(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},$$

действующей на границу полуплоскости, причем ось x должна быть выбрана в направлении этой силы.

Направив ось x нормально к границе полуплоскости (см. рис. 4), получим интересующий нас случай.

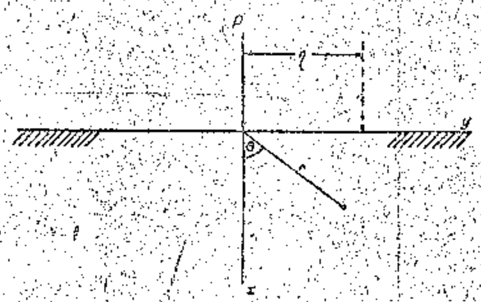

Рис. 4.

Если сила действует в точке границы с координатами $(0, \eta)$, то следует в формулах заменить y на $y-\eta$. Прибавим к величинам u и v еще те перемещения, которые соответствуют перемещению абсолютно жесткой полуплоскости.

Получим окончательно:

$$u=\frac{A}{2\mu}\ln\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\eta)}A\frac{(y-\eta)^2}{x^2+(y-\eta)^2}+a-\omega y,$$

$$v=\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\frac{x(y-\eta)}{x^2+(y-\eta)^2}+b+\omega x.$$

Определим константы так наз. аддитивного смещения a, b и ω так, чтобы в точке $(d, 0)$ перемещения u и v обращались бы в нуль вместе с производной $\frac{\partial v}{\partial x}$, что соответствует закреплению элемента оси x на глубине d.

Получим:

$$0=\frac{A}{2\mu}\ln\sqrt{d^2+\eta^2}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\frac{\eta^2}{d^2+\eta^2}+a;$$

$$0=\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\operatorname{arctg}\frac{-\eta}{d}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\frac{d\eta}{d^2+\eta^2}+b+\omega d,$$

а так как

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\frac{-(y-\eta)}{x^2+(y-\eta)^2}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\left[\frac{y-\eta}{x^2+(y-\eta)^2}-\frac{2x^2(y-\eta)}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}\right]+\omega,$$

то

$$0=\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\frac{\eta}{d^2+\eta^2}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\cdot\eta\frac{\eta^2-d^2}{(d^2+\eta^2)^2}+\omega.$$

Решая полученные уравнения относительно a, b, ω, получим:

$$a=-\frac{A}{2\mu}\ln\sqrt{d^2+\eta^2}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\frac{\eta}{d^2+\eta^2},$$

$$b=\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\operatorname{arctg}\frac{\eta}{d}+\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\frac{d\eta}{d^2+\eta^2}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\frac{2d^3\eta}{(d^2+\eta^2)^2},$$

$$\omega=-\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\frac{\eta}{d^2+\eta^2}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\frac{\eta^2-d^2}{(d^2+\eta^2)^2}\eta.$$

Подставляя a, b и ω в выражения для u и v, получим после небольших преобразований:

$$u=\frac{A}{2\mu}\ln\frac{\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{d^2+\eta^2}}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\left[\frac{(y-\eta)^2}{x^2+(y-\eta)^2}-\frac{\eta^2}{d^2+\eta^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\eta^2-d^2}{(d^2+\eta^2)^2}\eta y\right]+\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\cdot\frac{\eta}{d^2+\eta^2}y,$$

$$v=\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\left[\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x}+\operatorname{arctg}\frac{\eta}{d}+\frac{d\eta}{d^2+\eta^2}-\frac{\eta x}{d^2+\eta^2}\right]-$$
$$-\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\left\{\frac{x(y-\eta)}{x^2+(y-\eta)^2}+\frac{2d^3\eta}{(d^2+\eta^2)^2}+\frac{\eta^2-d^2}{(d^2+\eta^2)}\eta x\right\}.$$

В строительной механике важно знать преимущественно вертикальные перемещения, т. е. в наших обозначениях u для граничных точек, т. е. при $x=0$.

Получим:

$$u=\frac{A}{2\mu}\ln\frac{|y-\eta|}{\sqrt{d^2+\eta^2}}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}A\left[1-\frac{\eta^2}{d^2+\eta^2}+\frac{\eta^2-d^2}{(d^2+\eta^2)^2}\eta y\right]+$$
$$+\frac{A}{2(\lambda+\mu)}\frac{\eta}{d^2+\eta^2}y.$$

Пусть теперь распределенная нагрузка $p(\eta)$ находится на участке (a, b).

Осадка от этой нагрузки в какой-либо точке границы $(0, y)$ будет, очевидно, выражаться формулой:

$$u(0,y)=\int_a^b\left[\frac{1}{2\mu}\ln\frac{|y-\eta|}{\sqrt{d^2+\eta^2}}+\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(1-\frac{\eta^2}{d^2+\eta^2}+\frac{\eta^2-d^2}{(d^2+\eta^2)^2}\eta\cdot y\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\frac{\eta}{d^2+\eta^2}y\right]\frac{-1}{\pi}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}p(\eta)\,d\eta,$$

ибо, согласно предыдущему, величина A равна $\frac{-P}{\pi}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$, где P — сосредоточенная сила, действующая на границу упругой полуплоскости в перпендикулярном к границе направлении.

Для сравнения результатов, получаемых по этой формуле с результатами, получающимися по формуле (19) проф. Жемочкина, произведем конкретный расчет, положив, например, $y=0$ (осадка в начале координат) $a=0$, $b=c$, $p=\text{const.}$ и $\lambda=\mu$. Получим:

$$u(0,0)=\frac{3}{2\pi}p\frac{1}{2\mu}\int_0^c\left\{\ln\sqrt{d^2+\eta^2}-\ln\eta+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\eta^2}{d^2+\eta^2}\right\}d\eta.$$

Легко заметить, что формуле (19) проф. Жемочкина будет соответствовать в новых обозначениях формула:

$$u'(0,0)=\frac{3}{2\pi}p\frac{1}{2\mu}\int_0^c(\ln d-\ln\eta)\,d\eta,$$

если сделать пересчет модуля упругости плоского напряженного состояния E_0 на модули λ и μ плоско деформированного состояния.

Замечая, что:

$$\int\ln\sqrt{d^2+\eta^2}\cdot d\eta=\eta\ln\sqrt{d^2+\eta^2}-\eta+d\cdot\operatorname{arctg}\frac{\eta}{d},$$

$$\int\ln\eta\,d\eta=\eta\ln\eta-\eta,$$

$$\int\frac{\eta^2}{d^2+\eta^2}\,d\eta=\eta-d\cdot\operatorname{arctg}\frac{\eta}{d}$$

и производя подстановку пределов $\eta=0$ и $\eta=c$, получим:

$$u(0,0)=\frac{3}{4\pi\mu}p\left(c\ln\frac{\sqrt{d^2+c^2}}{c}+\frac{5}{3}d\cdot\operatorname{arctg}\frac{c}{d}\right),$$

$$u'(0,0)=\frac{3}{4\pi\mu}p\left(c\ln\frac{d}{c}+c\right).$$

Теперь легко видеть, что формула проф. Жемочкина приводит к неверному результату, ибо при $d=0$, т. е. при закреплении точки с координатами (0, 0), перемещение $u'(0,0)$ не только не обращается в нуль, а становится даже бесконечно большим. В то же время полученная нами формула дает $u(0,0)=0$, если положить в ней $d=0$. Любопытно, что ту же ошибку при подсчете перемещений в плоской задаче сделал ранее С. П. Тимошенко (см., напр., его Курс теории упругости, Москва, 1934, стр. 106).

«Ученые записки МГУ—Механика, вып. XXXIX, 1940».