ж. Сельскохозяйственная машина 1937, № 5-6
с. 9-10

Задача о скорости косьбы злаков

А. Ю. Ишлинский
Москва

При решении задачи о скорости косьбы растений приходится, конечно, делать некоторые упрощающие предположения о строении стебля, подвергающегося косьбе.

В первом приближении будем считать стебель растения, имеющего колос с зерном, балкой, жестко заделанный у основания, постоянной жесткости на изгиб EI длиною l, несущей на конце сосредоточенную массу m, соответствующую массе колоса. Массой самого стебля будем пренебрегать.

Пусть коса (режущее острие) движется с постоянной скоростью v на высоте ξ от основания стебля. Если отсчет времени производить с момента соприкосновения косы со стеблем, то перемещение точки соприкосновения c будет составлять величину vt, где t — величина истекшего времени (рис. 1). Понятно, что вследствие большой массы косы и малости времени, потребного на косьбу одного стебля, скорость движения косы не может сколько-нибудь заметно измениться вследствие сопротивления стебля этому движению.

Сосредоточенная масса m (колос) отойдет за тот же промежуток времени на некоторое расстояние η от первоначального состояния, имея ускорение $\frac{d^2\eta}{dt^2}$. Если, воспользовавшись принципом Даламбера, ввести силу инерции этой массы $m\frac{d^2\eta}{dt^2}$ (по абсолютной величине), а силу давления косы на стебель обозначить через P, то, рассматривая стебель как бы в равновесии под действием этих сил, можно, используя известное диференциальное уравнение упругой линии согнутой балки $EI\frac{d^2y}{dx^2}=M$, написать уравнение упругой линии для обоих участков стебля, а именно:

При $0\leqslant x\leqslant\xi$

$$EIy=\left[P\xi-m\frac{d^2\eta}{dt^2}l\right]\frac{x^2}{2}-\left[P-m\frac{d^2\eta}{dt^2}\right]\frac{x^3}{6}.$$

При $\xi\leqslant x\leqslant l$

$$EIy=\left[P\xi-m\frac{d^2\eta}{dt^2}l\right]\frac{x^2}{2}-$$
$$-\left[P-m\frac{d^2\eta}{dt^2}\right]\frac{x^3}{6}+P\frac{(x-\xi)^3}{6}.$$

Найденное уравнение легко проверить. Действительно, при $x=0$ первое уравнение дает $y=0$ и $\frac{dy^2}{dx}=0$, т. е. условие жесткости заделки; при $x=\xi$ оба уравнения дают одно и то же значение y и $\frac{dy}{dx}$, т. е. условие сопряжения, и, наконец, оба уравнения удовлетворяют условию: $EI\frac{d^2y}{dx^2}=M$, где M — изгибающий момент, причем:

Если $0\leqslant c\leqslant\xi$, то

$$M=P(\xi-x)-m\frac{d^2\eta}{dt^2}(l-x).$$

Если $\xi\leqslant x\leqslant l$, то

$$M=-m\frac{d^2\eta}{dt^2}(l-x) \quad \text{(рис. 2)}$$

Найденные уравнения изогнутой оси стебля справедливы, строго говоря, лишь при отсутствии массы у самого стебля, что и было предположено. Уравнения содержат две неизвестные величины P и $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, для отыскания которых воспользуемся двумя очевидными равенствами:

При $x=\xi$ $\quad y=vt.$

При $x=l$ $\quad y=\eta.$

Получаем:

$$EIvt=\left[P\xi-m\frac{d^2\eta}{dt^2}\right]\frac{\xi^2}{2}-\left[P-m\frac{d^2\eta}{dt^2}\right]\frac{\xi^3}{6}$$

и

$$EI\eta=\left[P\xi-m\frac{d^2\eta}{dt^2}\right]\frac{l^2}{2}-\left[P-m\frac{d^2\eta}{dt^2}\right]\frac{l^3}{6}+\frac{P}{6}(l-\xi)^3.$$

Из первого соотношения можно определить величину P:

$$P=3\frac{EIvt+m\frac{d^2\eta}{dt^2}\left(l\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{6}\right)}{\xi^3}.$$

Подставляя значения P во второе соотношение и приводя его в порядок, получим линейное диференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\alpha^2\eta=\beta vt,$$

где

$$\alpha^2=\frac{EI}{m}\frac{12}{(l-\xi)^2(4l-\xi)},$$

$$\beta=\frac{EI}{m}\frac{6(3l-\xi)}{\xi(l-\xi)^2(4l-\xi)},$$

а η является искомой функцией.

Не трудно найти общий интеграл этого уравнения:

$$\eta=\frac{\beta v}{\alpha^2}t+A\cos\alpha t+B\sin\alpha t,$$

где A и B — произвольные константы.

Они определяются из начальных условий движения, а именно: при $t=0$ $\eta=0$ и, следовательно $0=A$, а так как $\frac{d\eta}{dt}=\frac{\beta v}{\alpha^2}+\alpha B\cos\alpha t$ также обраща-

Рис. 1

Рис. 2

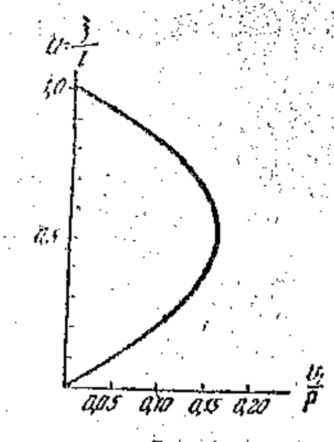

Рис. 3

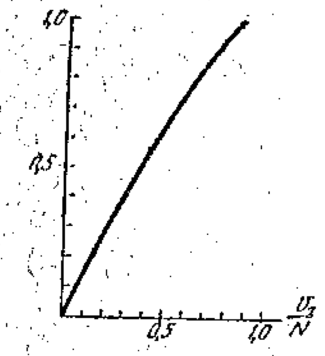

Рис. 4

ется в нуль при $t = 0$, то $B = -\frac{\beta v}{\alpha^3}$ и окончательно:

$$\eta = \frac{\beta v^2}{\alpha^3} t - \frac{\beta v}{\alpha^3} \sin \alpha t,$$

что дает закон движения конца стебля, т. е. колоса.

Для абсолютного значения силы инерции получим выражение:

$$m \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\beta v}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Сила инерции достигает, таким образом, максимального значения

$$\max\left(m \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) = \frac{\beta v}{\alpha} = v \frac{3l - \xi}{\xi(l-\xi)} \sqrt{\frac{3mEI}{4l - \xi}}$$

в момент времени $t_1 = \frac{\pi}{2\alpha}$.

Для нас важно знать ту скорость косы, при которой осуществляется косьба стебля. Чтобы воспользоваться для определения этой скорости нашим исследованием, необходимо выразить математически условия косьбы, т. е. построить гипотезу разрушения стебля при косьбе. Наиболее естественным представляются следующие две гипотезы разрушения:

1. Стебель перерезается косой, если перерезывающая сила Q в сечении, которая граничит с местом удара, достигает предельного значения R, характеризующего данный стебель.

2. Стебель перерезыванием ломается в месте, где ударяется коса. Излом происходит, если изгибающий момент M достигает предельного значения K, характеризующего данный стебель. Так как максимальное значение перерезывающей силы верхней части стебля равно силе инерции $\max\left(m \frac{d^2\eta}{dt}\right)$, то условие разрушения от этой силы запишется так:

$$\max\left(m \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) = v_1 \frac{3l - \xi}{\xi(l-\xi)} \sqrt{\frac{3mEI}{4l - \xi}},$$

откуда необходимая для успешной косьбы скорость косы:

$$v_1 \geqslant R \frac{(l-\xi)\,\xi}{3l - \xi} \sqrt{\frac{4l - \xi}{3mEI}}.$$

Перерезывающая сила в нижней части стебля равна разности силы давления P косы на стебель и силы инерции стебля, т. е.

$$Q = P - m \frac{d^2\eta}{dt^2} = 3 \frac{EIvt + m \frac{d^2\eta}{dt^2}\left(l\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6}\right)}{\xi^3} - m \frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

Условие разрушения будет иметь вид $Q \geqslant R$. Заметим, что из последнего соотношения нельзя получить необходимой скорости движения косы, так как в уравнение входит время t от момента удара до начала разрушения. Отклонение стебля vt в точке соприкосновения с косой не должно быть более известного предела, ибо в противном случае коса будет скользить по стеблю, и, кроме того, вследствие больших прогибов уравнения сопротивления материалов потеряют точность. Логично поэтому взять за величину скорости косьбы величину:

$$v_1 \geqslant R \frac{(l-\xi)\,\xi}{3l - \xi} \sqrt{\frac{4l - \xi}{3mEI}}.$$

По второй теории разрушения следует, что разрушение наступит, если:

$$M_{x=\xi} = \max\left(m \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)(l - \xi) \geqslant k$$

или

$$v_2 \frac{3l - \xi}{(l-\xi)\,\xi} \sqrt{\frac{3mEI}{4l - \xi}}\,(l - \xi) \geqslant k,$$

откуда необходимая для успешной косьбы скорость:

$$v_2 = \frac{k\xi}{3l - \xi} \sqrt{\frac{4l - \xi}{3mEI}}.$$

Таким образом гипотезы разрушения дают различные формулы для скорости v. Если отношение $\frac{\xi}{l}$ обозначить через u, то первая гипотеза дает минимальную скорость косьбы:

$$v_1 = \rho\,(1 - u)\,\varphi(u),$$

где

$$\rho = R \sqrt{\frac{l^3}{3mEI}},$$

$$\varphi(u) = \frac{u\sqrt{4 - u}}{3 - u},$$

тогда как по второй гипотезе минимальная скорость косьбы:

$$v_2 = \chi\varphi(u),$$

где

$$\chi = k \sqrt{\frac{l}{3mEI}},$$

$$\varphi(u) = \frac{u\sqrt{4 - u}}{3 - u}.$$

Постоянные ρ и χ целиком определяются стеблем и массой колоса, а выражение $(u - u)\varphi(u)$ и $\varphi(u)$ местом удара косы по стеблю. Можно поэтому исследовать с точностью до постоянных множителей зависимость минимальной скорости косьбы от относительной высоты $u = \frac{\xi}{l}$, на которой коса встречает стебель.

Нижеследующая таблица и графики (рис. 3 и 4) иллюстрируют эту зависимость.

$u = \frac{\xi}{l}$	$v_1 = \rho\,(1 - u)\,\varphi(u)$	$v_2 = \chi \cdot \varphi(u)$
0,0	0	9
0,1	$\rho \cdot 0{,}061$	$\chi \cdot 0{,}068$
0,2	$\rho \cdot 0{,}112$	$\chi \cdot 0{,}139$
0,3	$\rho \cdot 0{,}150$	$\chi \cdot 0{,}214$
0,4	$\rho \cdot 0{,}175$	$\chi \cdot 0{,}292$
0,5	$\rho \cdot 0{,}187$	$\chi \cdot 0{,}375$
0,6	$\rho \cdot 0{,}185$	$\chi \cdot 0{,}462$
0,7	$\rho \cdot 0{,}166$	$\chi \cdot 0{,}553$
0,8	$\rho \cdot 0{,}130$	$\chi \cdot 0{,}651$
0,9	$\rho \cdot 0{,}176$	$\chi \cdot 0{,}756$
1,0	0	0,867

конец