



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

ул. Московское шоссе, д. 34, г. Самара, 443086
Тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36
Сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru
ОКПО 02068410, ОГРН 1026301168310,
ИНН 6316000632, КПП 631601001



УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор – проректор по
науке

Розенцвайг А.И.

« 1 » 11 марта 2026 года

01 СЕН 2026

№ 104-4915

На № 11504/01-21712-205
от 07.07.2026

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
на диссертацию Дигилова Александра Вячеславовича
на тему «Несовместные деформации в гибких пластинах. Теория и
эксперимент», представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
по специальности 1.1.8. - Механика деформируемого твердого тела

Актуальность темы

Диссертация А.В. Дигилова посвящена важным и актуальным вопросам современной механики деформируемого твердого тела – задаче моделирования ультратонких упругих элементов микроэлектромеханических систем (МЭМС). Современная микроэлектроника и приборостроение активно используют в качестве чувствительных элементов МЭМС ультратонкие упругие конструкции (пластины, мембраны, кантилеверы) с характерными размерами от десятков нанометров до десятков микрон. На их основе создаются датчики давления, акселерометры, микроболометры, оптические элементы рентгеновской литографии и др., разрабатываемые в Российской Федерации и за рубежом. Между тем в широкой инженерной практике приемлемые методы анализа напряженно-деформированного состояния таких элементов практически отсутствуют. Существующие решения представляют собой либо простые аппроксимации, которые могут приводить к значительным погрешностям, либо предполагают использование различных конечно-элементных схем, которые часто оказываются неэффективными. Традиционные теории гибких пластин (Феппля–фон Кармана, Кирхгофа) разработаны для макрообъектов и базируются на эвристических кинематических гипотезах, которые не являются асимптотически строгими. Для элементов МЭМС, где отношение толщины к

характерному размеру достигает 10^{-3} – 10^{-6} , такие модели дают систематические погрешности.

Прямое же численное моделирование (МКЭ) становится плохо обусловленным из-за наличия малого параметра и требует чрезмерных вычислительных ресурсов.

Более того, особенности технологического процесса приводят к тому, что в них неизбежно присутствуют несовместные деформации, оказывающие серьезное влияние на упругий отклик элемента. Процессы изготовления МЭМС (напыление, травление, эпитаксия) неизбежно приводят к возникновению несовместных (остаточных) деформаций, которые создают внутренние напряжения и могут в разы изменять жесткость элемента. В существующих инженерных подходах этот фактор, как правило, игнорируется, что ведет к существенному расхождению между расчетными и реальными характеристиками устройств. Таким образом, **актуальность работы** определяется необходимостью: построить математически строгую теорию гибких пластин, учитывающую несовместные деформации и конечные прогибы; разработать вычислительно эффективные алгоритмы решения соответствующих нелинейных краевых задач; провести экспериментальную верификацию предложенных моделей на объектах нанометрового масштаба. Решение этих задач позволит существенно повысить точность проектирования МЭМС, сократить сроки разработки и улучшить эксплуатационные характеристики устройств.

Структура и содержание работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы (229 наименований) и 5 приложений. Общий объём – 243 страницы, иллюстративный материал представлен 40 рисунками и 23 таблицами.

Во введении автор обосновывает актуальность темы, формулирует цель и задачи исследования, перечисляет научную новизну и практическую значимость работы, а также представляет положения, выносимые на защиту.

Во введении приведён развёрнутый исторический обзор (более 30 страниц), в котором прослеживается эволюция теорий пластин – от экспериментов Хладни и работ Софи Жермен, Эйлера и Лагранжа до моделей типа Кирхгофа, Миндлина–Рейсснера и уравнений Феппля–фон Кармана. Отдельно рассмотрены работы по несовместным деформациям (Кренер, Эшелби, Лычев и др.) и современные методы решения нелинейных задач (методы Галеркина, Ритца, гомотопический анализ).

Цель первой главы «Уравнения конечных несовместных деформаций тонкостенных элементов МЭМС» – получение из трёхмерной нелинейной теории упругости непротиворечивых двумерных уравнений для гибких пластин, учитывающих несовместные деформации.

В первой главе на основе вариационного принципа стационарности действия и теоремы Нетер, а также гипотезы локальной разгрузки выполнен строгий вывод уравнений упругости для пространственного случая для сред с распределёнными дефектами, в которых мерой несовместности служит тензорное поле импланта; при этом нетеровы симметрии позволили получить не только полевые уравнения, но и законы сохранения энергии и импульса, включая уравнение баланса для тензора напряжений Эшелби. Проведена последовательная асимптотическая редукция этих уравнений по двум малым параметрам – деформационному и параметру, характеризующему толщину пластины – с разложением поля перемещений в ряд по поперечной координате, что позволило перейти к двумерным моделям типа континуума Коссера с двумя независимыми полями имплантов (для метрики поверхности и для поворотов директоров). В результате получены модифицированные уравнения Феппля–фон Кармана, учитывающие остаточные напряжения, и на основе сравнительного анализа различных асимптотических приближений (от трёхмерной упругости до модели мембраны) установлены границы применимости классических моделей в зависимости от относительной толщины элемента.

В итоге в первой главе построена иерархия математически строгих моделей пластин, учитывающих конечные несовместные деформации; определены области, где классические теории перестают работать.

Целью второй главы диссертации «Решение нелинейных краевых задач о конечных деформациях ультратонких пластин» является разработка эффективных вычислительных алгоритмов для решения уравнений, полученных в Главе 1, и исследование влияния несовместных деформаций на упругий отклик.

Во второй главе разработаны оригинальные численно-аналитические алгоритмы, позволяющие решать нелинейные задачи для круглых и прямоугольных пластин в широком диапазоне нагрузок; выявлены качественные особенности влияния несовместных деформаций в зависимости от геометрии: на основе уравнений, полученных в первой главе, разработаны численно-аналитические алгоритмы решения нелинейных краевых задач для круглых и прямоугольных гибких пластин. Для осесимметричного случая построен итерационный алгоритм с обратными операторами, проведён анализ его сходимости и предложена регуляризация с использованием эквивалентного оператора на основе линеаризованного уравнения Бергера, что позволило строить решения при давлениях вплоть до значений, при которых величина прогиба может быть соизмерима с радиусом недеформированной пластины и даже его превосходить. Для прямоугольной пластины реализован метод Галеркина с построением базиса из собственных функций оператора защемлённой балки и диагональной нумерацией Кантора,

что позволило свести нелинейную задачу к системе кубических матричных уравнений. Рассмотрены два типа краевых условий (подвижные и абсолютно жёсткие края), и показано, что различия между ними существенно влияют на распределение напряжений. Параметрический анализ влияния несовместных деформаций выявил, что характер их воздействия зависит от геометрии пластины.

В третьей главе «Экспериментальное исследование деформаций тонких пластин» представлены результаты экспериментальной валидации предложенных теоретических моделей, выполненные методом голографической интерферометрии с использованием инкрементальной схемы нагружения. Для квадратной медной пластины макроразмера показано хорошее совпадение числа интерференционных полос с теоретическим прогнозом, что подтверждает адекватность базовой модели. Для круглой алюминиевой мембраны нанометровой толщины обнаружено систематическое завышение прогибов классической моделью Феппля–фон Кармана, которое было устранено введением параметра несовместных деформаций $\epsilon = 6.5 \cdot 10^{-4}$, что свидетельствует о существенной роли остаточных напряжений в микроразмерных элементах. Для повышения точности и информативности обработки экспериментальных данных разработан алгоритм автоматической скелетизации интерференционных картин, включающий бикубическую интерполяцию интенсивности и аппроксимацию линий рядами Фурье. Дополнительно рассмотрен случай отслоения мембраны от подложки, показано, что при больших нагрузках эффективный радиус мембраны увеличивается, что необходимо учитывать при интерпретации и цифровой обработке экспериментальных данных.

Экспериментально подтверждено, что классическая модель Феппля–фон Кармана адекватно описывает деформирование макроскопических пластин (медная квадратная пластина толщиной 184 мкм), однако для наноразмерных элементов МЭМС (алюминиевая мембрана толщиной 750 нм) она даёт систематическое завышение прогибов, что указывает на необходимость учёта остаточных (несовместных) деформаций.

Введение в теоретическую модель параметра несовместных деформаций $\epsilon = 6.5 \cdot 10^{-4}$, подобранного по данным голографической интерферометрии, позволило полностью согласовать расчётное число интерференционных полос с экспериментальным (31 полоса вместо 44, предсказываемых классической теорией). Данный факт служит веским экспериментальным подтверждением наличия в нанометровых мембранах значительных несовместных деформаций, возникших на этапе их изготовления и проявляющихся в виде эффективного начального натяжения, изменяющего изгибную жёсткость элемента.

Разработанный алгоритм автоматической скелетизации интерференционных картин, основанный на бикубической интерполяции интенсивности и аппроксимации полос возмущёнными эллипсами (рядами Фурье), позволяет переходить от растровых изображений к аналитическому описанию поля перемещений, что существенно повышает точность и информативность обработки экспериментальных данных по сравнению с ручным подсчётом полос.

В ходе экспериментально-теоретического анализа зафиксирован эффект частичной потери адгезионного контакта (отслоения) мембраны от подложки, развивающийся при высоких уровнях нагружения. Данный эффект проявляется в увеличении эффективного радиуса опорного контура деформируемого элемента и, как следствие, в дискретном изменении его деформационной реакции, что на графике зависимости «нагрузка — прогиб» выражается в переходе экспериментальных точек между различными ветвями теоретических решений (семейством кривых, соответствующих мембранам различных радиусов). Указанное явление необходимо учитывать при проектировании МЭМС-датчиков давления, функционирующих в режимах интенсивных нагрузок, поскольку игнорирование эволюции граничных условий может приводить к систематическим ошибкам при идентификации упругих параметров и оценке работоспособности чувствительного элемента.

В заключении диссертации подведены итоги исследования и перечислены основные результаты, полученные в работе. Сформулированы ключевые выводы, среди которых: несовместные деформации могут в разы изменять эффективную жёсткость гибких пластин и мембран микроэлектромеханических систем, а их игнорирование приводит к существенным погрешностям при проектировании; разработанные итерационные алгоритмы и обобщённый метод Галеркина позволяют эффективно решать нелинейные краевые задачи в широком диапазоне нагрузок без привлечения трудоёмких конечно-элементных расчётов; предложенная методика голографической интерферометрии и алгоритмы обработки изображений обеспечивают надёжную валидацию теоретических моделей в нанометровом масштабе. Отдельно отмечено, что характер влияния несовместных деформаций существенно зависит от геометрии пластины. Все полученные теоретические результаты согласованы с экспериментальными данными, что подтверждает применимость предложенных моделей и их пригодность для практического применения при проектировании микроэлектромеханических систем.

Приложения в диссертации содержат вспомогательный математический аппарат, необходимый для воспроизведения и верификации результатов основной части работы. В приложении А приведён вывод

формул дифференциальной геометрии поверхностей, включая инварианты метрики и тензора кривизны, использованные при выводе уравнения Софи Жермен. Приложение Б содержит таблицы собственных частот пластин со свободными краями, полученные методом Ритца и верифицированные по известным литературным данным. В приложениях В и Г представлены коэффициенты разложений решений для круглой пластины при различных нагрузках и вывод функции диагональной нумерации Кантора, применённой для упорядочивания базисных функций в методе Галеркина. Приложение Д включает явные аналитические выражения для более чем двадцати вспомогательных интегралов от тригонометрических и гиперболических функций, используемых при вычислении матриц Галеркина для прямоугольных пластин.

Научная новизна полученных результатов

Научная новизна работы заключается в создании комплекса теоретических, численных и экспериментальных методов для анализа гибких пластин с несовместными деформациями, включающего новые математические модели (модифицированные уравнения Феппля–фон Кармана с двумя полями имплантов), новые алгоритмы решения (регуляризованный итерационный метод для круглых пластин и обобщённый метод Галеркина для прямоугольных), новые экспериментальные данные и методы их обработки для нанометрового масштаба. В диссертации впервые получены нелинейные уравнения движения и законы сохранения для гибких тонкостенных элементов, в которых учтены несовместные конечные деформации через два дополнительных поля имплантов. Одно поле ассоциировано с классической дисторсией (изменение метрики), другое – с микроморфной (повороты материальных волокон). Для круглой пластины разработаны оригинальные итерационные алгоритмы с использованием обратных операторов. Ключевая новизна – предложена регуляризация, позволяющая преодолеть расходимость классического итерационного процесса при больших нагрузках. Построено новое решение нелинейной задачи для прямоугольной пластины с полными условиями жёсткого закрепления (абсолютно неподвижные края). Впервые проведена экспериментальная валидация модифицированных моделей Феппля–фон Кармана для ультратонких мембран (толщина 750 нм) методом голографической интерферометрии. Для обработки голографических данных разработан оригинальный алгоритм автоматической идентификации интерференционных полос с бикубической интерполяцией и аппроксимацией линий рядами Фурье.

Практическая значимость работы

Практическая значимость работы заключается в том, что она предлагает готовые инструменты для решения инженерных задач, связанных

с проектированием и эксплуатацией микроэлектромеханических систем (МЭМС). Результаты диссертации ориентированы на прямое применение в промышленности и научных разработках. Предложенные модели позволяют учитывать эффекты, обусловленные полем несовместных деформаций, возникающих в тонкоплёночных структурах на этапе их изготовления и проявляющихся в виде самонапряжённого состояния, модифицирующего упругий отклик элемента, что помогает на этапе расчета более точно прогнозировать жесткость и прогибы мембран, что, в свою очередь, критично для датчиков давления, акселерометров и оптических элементов. Без учета этих факторов готовые устройства могут показывать характеристики, отличающиеся от расчетных. Разработанные редуцированные математические модели и алгоритмы позволяют проводить расчеты быстрее и с меньшими затратами, чем при использовании тяжелого трехмерного конечно-элементного моделирования (МКЭ). Предложенная методика обработки голографических интерферограмм позволяет автоматически и с высокой точностью расшифровывать картины интерференции, получая количественные данные о форме и перемещениях деформируемых поверхностей нанометрового масштаба. Результаты исследования были использованы при выполнении реальных проектов, например, в рамках проектов Российского научного фонда по разработке ультратонких мембран для рентгеновской литографии, что подтверждает их применимость в актуальных технологических задачах.

Достоверность полученных результатов в диссертации А.В. Дигилова обеспечивается строгостью математической постановки краевых задач, применением вариационного принципа стационарности действия и теоремы Нетер, сравнением с классическими результатами, полученными другими авторами. Для круглой пластины проведено сравнение с известным решением Взя (1934 г.) и показано хорошее совпадение в области умеренных нагрузок. Для прямоугольной пластины верификация предлагаемой методики выполнена путём сравнения в линейном приближении собственных частот пластины со свободными краями с известными из литературы результатами. Для итерационных методов проведён строгий анализ сходимости. Показано, что классический итерационный процесс расходится при больших нагрузках, и предложена регуляризация, обеспечивающая сходимость в широком диапазоне параметров. Сходимость подтверждена вычислительными экспериментами (Таблицы 2.1–2.3), где приведены значения погрешности $\varepsilon \leq 0.001$ для всех рассчитанных случаев. Теоретические модели подвергнуты экспериментальной проверке методом голографической интерферометрии. Для макроскопической медной пластины (184 мкм) получено хорошее совпадение числа интерференционных полос с теоретическим прогнозом. Для нанометровой алюминиевой мембраны (750

нм) показано, что классическая модель даёт систематическое завышение прогибов, а модифицированная модель, учитывающая несовместные деформации, полностью согласуется с экспериментом после подбора параметра несовместных деформаций. Это служит прямым подтверждением адекватности предложенной теории. Проведён сравнительный анализ различных асимптотических приближений (3D-упругость, Кирхгоф, Феппл-фон Карман, мембрана Грина-Ривлина-Адкинса) на примере задачи об изгибе цилиндра. Установлены границы применимости каждой модели в зависимости от относительной толщины (Рисунки 1.5–1.8). Это позволяет количественно оценить, в каких случаях можно использовать упрощённые модели, а в каких необходима полная теория, что повышает надёжность выводов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждены на международных и всероссийских научных конференциях. Всего по теме диссертации опубликовано 8 работ, из которых 4 – в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (категория K1), а также в изданиях, индексируемых в международных базах Scopus, Web of Science и Zentralblatt MATH.

Таким образом, в диссертационной работе А.В. Дигилова 1) развит строгий вариационный формализм, позволяющий из единого принципа стационарности действия последовательно редуцировать систему уравнений трёхмерной нелинейной теории упругости к иерархии новых двумерных моделей тонких пластин, корректно учитывающих поля несовместных деформаций на основе дифференциально-геометрического аппарата; 2) предложены оригинальные вычислительные алгоритмы: регуляризованные итерационные схемы для осесимметричных задач круговых пластин и – впервые – сведение краевой задачи для жестко закреплённой прямоугольной пластины к матричному кубическому уравнению, что обеспечивает высокую эффективность расчётов в широком диапазоне нагрузок; 3) разработана комплексная экспериментальная методика, включающая автоматическую идентификацию изолиний прогибов по голографическим интерферограммам, что позволило верифицировать построенные модели и количественно оценить вклад остаточных напряжений, обусловленных несовместными деформациями, в упругий отклик наномасштабных элементов МЭМС.

Диссертационная работа отличается безупречным теоретическим уровнем, подкреплённым строгим вариационным выводом нелинейных уравнений из первых принципов механики, высоким экспериментальным уровнем с применением современного метода голографической интерферометрии, а также несомненной научной новизной, заключающейся в создании иерархии

асимптотических моделей пластин с несовместными деформациями, не имеющих аналогов в отечественной и зарубежной литературе.

По диссертации можно сформулировать ряд предложений и замечаний.

1. Эксперименты проведены только на двух типах образцов (квадратная медная пластина 6×6 см и круглая алюминиевая мембрана диаметром 1 мм). Для полной валидации хотелось бы видеть большее число материалов и геометрий (например, прямоугольные мембраны, кантилеверы). Отклонения для круглой мембраны объясняются предварительным натяжением, но не приведено независимого измерения этого натяжения (например, профилометрией до нагружения). В главе 3 отсутствуют количественные оценки погрешностей эксперимента (точность определения давления, погрешность подсчёта полос, влияние вибраций и температуры). Без этих данных трудно судить о том, насколько значимы расхождения между теорией и экспериментом.

2. Результаты голографической интерферометрии не сопоставлены с измерениями на оптическом профилометре или атомно-силовом микроскопе. Такое сравнение усилило бы достоверность выводов. Можно было бы сопоставить полученные экспериментальные результаты с результатами, полученными посредством других экспериментальных методов.

3. В диссертации вводится безразмерный параметр, характеризующий величину равномерных остаточных (несовместных) деформаций в плоскости пластины. параметр подбирается эмпирически для согласования теории с экспериментом. Параметр несовместных деформаций, введённый в упрощённой модели (уравнение 2.34), является феноменологическим – он подбирается эмпирически для каждого конкретного образца на основе экспериментальных данных (в работе $\epsilon = 6.5 \cdot 10^{-4}$ для алюминиевой мембраны). При этом в диссертации не предлагается метода независимого определения или расчёта ϵ на основе технологических параметров изготовления (температуры осаждения, давления в камере, скорости напыления, толщины пленки и т.п.). Это может ограничивать прогностическую ценность модели, так как для нового типа образцов или изменения технологии параметр приходится определять заново из дополнительных экспериментов, а не вычислять априори. Так ли это?

4. Автор отчасти критикует прямое МКЭ моделирование, но не приводит количественного сравнения своего асимптотического подхода с численными решениями в COMSOL или ANSYS для тех же задач. Это усилило бы аргументацию о преимуществах метода.

5. В разделе 2.1.4 используется «эквивалентный оператор» с параметром χ , определяемым из трансцендентного уравнения (2.31). Не

обсуждается, как χ зависит от несовместных деформаций (в формулах (2.33) он входит, но алгоритм его определения не детализирован). Другими словами, в разделе 2.1.4 вводится эквивалентный оператор с параметром χ , определяемым из трансцендентного уравнения (2.31), что эффективно решает проблему сходимости при больших прогибах. Однако при обобщении этой схемы на случай несовместных деформаций (раздел 2.1.5) процедура определения χ остается не до конца формализованной: зависимость χ от параметров импланта постулируется аддитивно, но само уравнение для χ , учитывающее наличие начальных напряжений, не выводится. Это приводит к тому, что в практических расчётах (Глава 3) параметр α фактически выполняет роль калибровочного коэффициента, компенсирующего неопределённость в определении эффективного натяжения, тогда как теоретически обоснованной процедуры их отдельной идентификации не предложено.

6. В разделе 2.1.2 приводится анализ сходимости для классического итерационного процесса, однако для регуляризованного алгоритма и метода с эквивалентным оператором доказательство сходимости дано лишь для частного случая равномерного давления, хотя в работе приводятся критерии, которому должна соответствовать функция нагрузки и класс подходящих функций несколько шире. Неясно, гарантируется ли сходимость для произвольного распределения нагрузки $p(r)$. Иначе, в работе показана сходимость итерационного алгоритма для равномерного давления. Однако строгое доказательство сходимости для произвольного распределения нагрузки не приводится. Насколько автор уверен, что алгоритм будет сходиться для всех практически важных случаев нагружения, и не планируется ли в дальнейшем получить такое доказательство?

Отмеченные недостатки, пожелания и вопросы не отменяют общего очень положительного впечатления от работы.

Заключение

Диссертационная работа Дигилова А.В. «Несовместные деформации в гибких пластинах. Теория и эксперимент» содержит новые теоретические, вычислительные и экспериментальные результаты и положения, представляющие научный интерес и обладают научной значимостью. Диссертационная работа А.В. Дигилова характеризуется полнотой и завершенностью, ясно и грамотно написана, хорошо проиллюстрирована графиками и рисунками. Диссертационная работа выполнена автором на современном уровне с привлечением современных вычислительных средств и современного экспериментального оборудования. Представленные в диссертации результаты достоверны, выводы обоснованы. Применяемые в

работе подходы могут быть использованы при изучении актуальных задач моделирования ультратонких упругих элементов микроэлектромеханических систем.

Содержание диссертации достаточно полно и правильно отражено в автореферате.

Уровень диссертации А.В. Дигилова «Несовместные деформации в гибких пластинах. Теория и эксперимент» соответствует требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор – Дигилов Александр Вячеславович – заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.8. - Механика деформируемого твердого тела.

Доклад по завершеному исследованию заслушивался на расширенном заседании кафедры математического моделирования в механике Самарского национального университета, отзыв обсужден и утвержден за заседании кафедры математического моделирования в механике Самарского университета 26 июня 2026 года, протокол № 12.

Заведующий кафедрой
математического моделирования в механике

д.ф.-м.н., доцент



Степанова Лариса Валентиновна

Доцент кафедры математического
моделирования в механике

к.ф.-м.н.



Бахарева Юлия Николаевна

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

Сокращенное наименование: Самарский университет

Почтовый адрес: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

Тел. (846) 335-18-26 (приемная ректора) (846) 267-43-70 (канцелярия)

Адрес электронной почты ssau@ssau.ru

Web-сайт организации: <http://ssau.ru>