

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

СТЕПАНОВ ФЕДОР ИГОРЕВИЧ
**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С ТРЕНИЕМ ДЛЯ
ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Академик РАН И.Г. Горячева

Москва – 2016

Введение	3
Глава 1 Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству	15
1.1. Постановка задачи о скольжении единичного индентора	15
1.2. Метод решения контактной задачи о скольжении единичного индентора	17
1.3. Анализ результатов решения контактной задачи	30
1.4. Анализ напряженного состояния под единичным индентором	39
1.5. Выводы по Главе 1	45
Глава 2 Задача о скольжении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству с пригрузкой в виде двух сосредоточенных сил	46
2.1. Постановка задачи о контакте с пригрузкой	46
2.2. Результаты решения контактной задачи и анализ влияния пригрузки	48
2.3. Выводы по Главе 2	56
Глава 3 Задача о скольжении системы из двух штампов по вязкоупругому полупространству	57
3.1. Постановка задачи о скольжении двух инденторов	57
3.2. Метод решения контактной задачи	59
3.3. Результаты решения контактной задачи и их анализ	61
3.4. Анализ напряженного состояния под парой инденторов	69
3.5. Выводы по Главе 3	73
Заключение	75
Список литературы	76

Введение

В механике деформируемого твердого тела существует практически важный и актуальный класс задач, связанный с несовершенной упругостью. Многие материалы, применение которых связано с контактным взаимодействием различного типа, в том числе и фрикционным, обладают реологическими свойствами (вязкоупругие материалы).

Несмотря на множество экспериментальных и теоретических результатов, накопленных к настоящему моменту в области механики контактного взаимодействия вязкоупругих материалов, это научное направление по-прежнему является актуальным. Во многом это обусловлено большой практической значимостью достижений в этой области. Реологическими свойствами обладают многие полимеры, в частности, резины, биологические ткани и т.д. Фрикционный контакт присутствует практически в любом механизме и даже в организме человека. Неотъемлемой частью развития техники является появление новых материалов, свойства которых требуют подробного изучения, а их поведение в условиях фрикционного контакта – механико-математического моделирования. В связи с этим при проектировании и изучении узлов трения возникает множество новых контактных задач. При этом существующие методы решения контактных задач часто оказываются недостаточными. Многообразие и сложность физических явлений и процессов, протекающих при контактном взаимодействии, представляют собой большой научный интерес. В частности, взаимное влияние сил трения, обусловленных различными механизмами диссипации энергии (например, адгезионным и деформационным), несплошность контакта, обусловленная микрорельефом и т.д.

Изучение природы силы трения – одно из основных направлений механики контактного взаимодействия. В настоящий момент установлено, что сила трения в случае вязкоупругих тел возникает благодаря двум основным механизмам: – деформационным потерям энергии в поверхностных слоях контактирующих тел, а также адгезии поверхностей. Следует отметить, что деформационные потери

при трении возникают на разных масштабных уровнях. В данной работе основное внимание уделяется решению контактной задачи с учетом трения скольжения для вязкоупругих тел, в том числе исследуется механизм взаимного влияния, который может быть использован для анализа процессов, происходящих при множественном контакте.

Освещая тему развития исследований в данном направлении, прежде всего следует упомянуть экспериментальные работы, направленные на изучение деформационного механизма силы трения. Начало интенсивного развития многих направлений механики контактного взаимодействия приходится на середину прошлого века. В том числе появилось множество экспериментальных работ, изучающих силу трения при качении и скольжении тел [4, 17, 18, 33, 36, 38-40, 45, 46, 49, 77, 78].

В работе, состоящей из двух частей [36,78], изучалась сила трения, возникающая при качении твердого металлического шарика по двум различным основаниям из мягкого металла и резины. В первом случае возникающая сила трения была преимущественно обусловлена пластическими деформациями в материале основания. Под воздействием шарика на поверхности образовывалась канавка, с каждым новым прохождением глубина канавки незначительно увеличивалась, а сила трения снижалась. Было обнаружено, что добавление смазки в область контакта практически не влияет на величину силы трения. В случае качения шарика по резине, когда пластические деформации отсутствуют, сила трения обусловлена вязкоупругостью материала. Был обнаружен эффект небольшого относительного проскальзывания поверхности резины относительно шарика, однако никакого влияния на силу трения этот эффект не оказывал. Это доказывают измерения, сделанные после добавления смазки в область контакта.

Логическим продолжением изучения механизмов силы трения стала работа [46], в которой исследовалось скольжение твердых инденторов сферической и конической формы по резине при наличии смазки. Было установлено, что сила трения скольжения практически равна силе трения качения сферического

индентора по резиновой поверхности. Авторы заключили, что в этих двух случаях сила трения возникает в результате одного и того же механизма гистерезисных потерь в резине. Было выдвинуто предположение, что сила трения жестких сферических и конических инденторов выше в том случае, если характеристики резины описываются относительно небольшим значением модуля Юнга.

Исследование роли вязкоупругих свойств резины и адгезии поверхностей при фрикционном контакте проводилось в работе [48]. На этот раз исследовалось скольжение резинового индентора по гладкой и шероховатой твердой поверхности. Эксперименты проводились для нескольких типов резины при различной температуре и скоростях скольжения. Результаты показали, что в случае скольжения по гладкому основанию, сила трения возрастает при увеличении скорости до определенного максимального значения, а затем снижается. В случае же скольжения по шероховатому основанию наблюдается два локальных максимума силы трения. Первый локальный максимум совпадал со случаем скольжения по гладкому основанию, а второй возникал при определенном отношении скорости скольжения к частоте возникновения деформации, обусловленной воздействием неровностей. Также было обнаружено, что при добавлении мелкого порошка в область контакта, локальный максимум силы трения, возникающий при небольшой скорости скольжения, пропадает как в случае гладкого, так и в случае шероховатого основания. В результате авторы сделали вывод, что данный локальный максимум силы трения обусловлен наличием молекулярной адгезии поверхностей. Второй локальный максимум силы трения, обнаруженный при скольжении индентора по шероховатой поверхности, возникает в результате гистерезисных потерь энергии в резиновом инденторе. Авторы резюмировали, что сила трения возникает благодаря двум факторам: адгезии поверхностей и деформационным потерям. При этом оба этих фактора напрямую зависят от вязкоупругих свойств резины.

Современные экспериментальные работы, в которых изучается трение эластомеров, имеют преимущественно техническую направленность, например

[37, 50, 59, 74]. По-прежнему очень актуальной темой для исследований является взаимодействие колеса автотранспорта с различными типами дорожного покрытия [47, 51, 62, 73, 79]. Часто экспериментальные исследования проводятся в тесном взаимодействии с разработчиками новых материалов [25]. В подобных исследованиях определяются свойства новых материалов и целесообразность их применения в технике. Нельзя не отметить также большую научную значимость этих работ, поскольку в них предлагаются новые более эффективные экспериментальные методы исследования триботехнических свойств эластомеров.

Таким образом, результаты целого ряда экспериментальных работ, некоторые из которых описаны выше, послужили свидетельством того, что наряду с адгезией деформационные потери внутри контактирующих тел вносят существенный вклад в силу трения. Примерно в это же время было опубликовано множество теоретических исследований, в которых предпринимались попытки описать вязкоупругие свойства материалов, а также построить модель, описывающую механизм деформационной составляющей силы трения [16, 29, 41, 52, 63, 64-66, 76]. Отдельно стоит упомянуть класс задач, в которых исследуется индентирование в вязкоупругое полупространство [35, 43, 53, 54, 55, 61]. Многие результаты этих исследований содержатся в монографиях [9,20,15,21,19]

В работе [63] исследовалось качение цилиндра по вязкоупругому полупространству, свойства которого описываются моделью Максвелла. В работе предложен метод решения, который основывается на серьезном упрощении модели полупространства. Упрощение заключается в том, чтобы рассматривать полупространство как набор независимых вертикальных столбиков, сжимающихся под действием нагрузки. То есть рассматривались только нормальные напряжения внутри полупространства. В результате решения задачи, определяется нагрузка, которая требуется, чтобы внедрение цилиндра оставалось постоянным, а также сила сопротивления движению цилиндра. Решение получено как для простой модели Максвелла, в которой после прохождения цилиндра,

поверхность полупространства не восстанавливается до первоначальной формы, так и для обобщенной модели Максвелла, которая больше подходит для описания реальных вязкоупругих материалов. Было также предложено более точное решение задачи, основанное на результатах работы, посвященной индентированию вязкоупругого материала [76]. Авторы заключили, что полученные зависимости могли быть использованы для экспериментального определения спектра времен релаксации реальных вязкоупругих материалов.

В [41] исследовалась задача о качении жесткого сферического индентора по вязкоупругому полупространству, свойства которого описываются моделью Кельвина-Фойхта с одним временем релаксации. В результате применения метода, подобного [63] были получены аналитические выражения для контактного давления и коэффициента трения. Результаты данной работы во многом согласовались с результатами, полученными Атаком и Тейбором, хотя эти авторы использовали другие модели материала.

Плоская контактная задача о скольжении цилиндра по вязкоупругому основанию, описываемому моделью стандартного линейного твердого тела с одним временем релаксации и постоянным коэффициентом Пуассона, решалась в [52]. Автором было получено точное аналитическое решение задачи путем сведения ее к классической задаче теории потенциала и построению гармонической функции Грина [44]. В работе все же было отмечено, что экспериментальная проверка полученных данных невыполнима, поскольку выбранная модель едва ли подходит для описания реально существующих материалов. Позже Морланд [64-66] распространил результаты Хантера на решение задачи о контакте двух цилиндров, описываемых более общими определяющими соотношениями.

Подход, предложенный Хантером, был использован для более сложной задачи, в которой рассматривалось скольжение вязкоупругого цилиндра по полупространству из того же материала [6]. В этой работе учитывались зоны

проскальзывания цилиндра относительно поверхности полупространства, а также зоны адгезии.

В случае, когда скольжение по вязкоупругому полупространству исследуется в трехмерной постановке, получение точного аналитического решения зачастую становится невозможным. В таких случаях исследователи прибегают к различным аппроксимациям. В теоретико-экспериментальной работе [75] при исследовании трения между жестким параболическим или коническим индентором и вязкоупругим полупространством использовался так называемый метод сокращения размерности. Суть метода заключается в том, чтобы свести трехмерную задачу к одномерному случаю. В случае если индентор в рассматриваемой задаче является осесимметричным, метод дает точное решение. Если индентор не является осесимметричным, существует возможность получить только приближенное численное решение. Все же следует отметить, что относительно применимости данного метода ведутся научные дискуссии.

Еще один подход к решению контактных задач о скольжении цилиндрического или сферического индентора предложен в работе [72]. С его помощью можно исследовать скольжение не только по вязкоупругому полупространству, но и по тонкому слою, соединенному с жестким основанием. Однако с помощью данного метода можно определить только силу трения скольжения, в то время как распределение контактного давления определить невозможно.

В связи с развитием вычислительной техники, многие численные методы оказываются весьма эффективными при решении контактных задач для вязкоупругих тел. В работе [71] в трехмерной постановке исследовалась задача, решенная Хантером, причем используется аппроксимация, предложенная в [70]. В качестве формы индентора был выбран эллипсоид, вытянутый перпендикулярно направлению скольжения. Такая форма индентора позволила с определенной точностью произвести сравнение с решением Хантера. Полученные численные

результаты хорошо согласовывались с аналитическим решением Хантера для двумерной задачи.

В настоящее время среди исследователей рассматриваемых здесь задач популярен метод конечных элементов [60, 67-69]. Этот метод может быть использован для решения контактных задач с любой формой индентора и моделью вязкоупругого материала. В случае если рассматриваются трехмерные контактные задачи, этот метод оказывается малоэффективным, поскольку требует больших объемов вычислений. Если требуется достаточно высокая точность численных результатов, применение этого метода становится затруднительным. Все же метод конечных элементов реализован во многих автоматизированных программных пакетах (системах автоматизированного проектирования).

В работе [2] было получено аналитическое решение задачи о скольжении распределенной нагрузки по вязкоупругому основанию, материал которого описывается интегральным оператором Вольтера и характеризуется постоянным коэффициентом Пуассона. На основании полученных результатов в работе [1] было предложено численное решение задачи о скольжении жесткого индентора без трения по вязкоупругому полупространству. Задача решалась с использованием метода граничных элементов.

Теоретико-экспериментальное исследование скольжения жесткого индентора по вязкоупругому полупространству, описываемого моделью Максвелла и стандартного твердого тела представлено в работе [34]. Задача решается с использованием аналога функции Грина методом граничных элементов. В работе также представлено сравнение численных результатов с экспериментальными данными. Аналогичный подход использован в работе [58], в которой для сокращения объема вычислений также используются быстрые преобразования Фурье.

В работах [56,57] представлено решение контактной задачи о скольжении жесткого индентора по вязкоупругому полупространству, имеющему упругие эллиптические неоднородности внутри.

Следует упомянуть ряд работ, исследующих множественный контакт при трении. Актуальность таких задач обусловлена необходимостью моделирования сил трения, возникающих при контакте шероховатых поверхностей. Впервые задача о скольжении индентора при наличии пригрузки, моделирующей воздействие других инденторов была рассмотрена Л.А. Галиным [5] в упругой постановке. Развивая предложенный Галиным подход, И.Г. Горячева получила решения для упругого фрикционного контакта одноуровневой [12], разноуровневой [11] и двухуровневой [10] системы инденторов.

Важной целью для исследователей является решение контактных задач, в которых исследуется скольжение по вязкоупругим материалам тел с периодическим рельефом [7, 13, 14, 24, 26, 27]. В работе [32] рассматривалась задача о скольжении жесткого тела с периодическим рельефом по вязкоупругому основанию. Полупространство описывалось телом Кельвина и спектром времен релаксации. Решение получено как для случая полного контакта, так и для частичного, когда регулярный рельеф недостаточно глубоко внедрен. Скольжение системы инденторов по вязкоупругому слою, описываемому моделью Кельвина-Фойгхта, исследовалось в работе [22]. В работе [23] помимо этого было изучено взаимное влияние сферических инденторов, а также напряженно-деформированное состояние слоя. В качестве модели материала слоя была выбрана обобщенная модель Максвелла.

Целями данной работы являются:

- разработка метода решения контактных задач о скольжении единичного гладкого индентора при наличии тангенциальных сил в области контакта, а также системы, состоящей из двух инденторов произвольной формы, по вязкоупругому полупространству, описываемому спектром времен релаксации;
- исследование влияния на контактные характеристики формы индентора, а также касательных напряжений, действующих в области контакта при скольжении индентора по вязкоупругому полупространству;
- исследование взаимного влияния при скольжении двух инденторов по границе вязкоупругого полупространства;
- исследование напряженного состояния вязкоупругого полупространства, возникающего при контакте одного и двух инденторов параболической формы.

Апробация результатов исследования

- Основные результаты работы были представлены на международных и российских конференциях таких как:
- II Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», Новосибирск, 10–14 октября 2011;
- Ломоносовские чтения, Москва, МГУ, 2013;
- VII Всероссийская (с международным участием) конференция по механике деформируемого твёрдого тела, Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013;
- 56-я научная конференция МФТИ с международным участием, Москва, 25–30 ноября 2013;
- 5th ASIATRIB 2014, Ангара, Индия, 17-20 февраля 2014;

- III Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», Новосибирск, 26–30 мая 2014;
- 57-я научная конференция МФТИ с международным участием, 24–29 ноября 2014, Москва;
- Ломоносовские чтения, 2014, Москва, МГУ;
- WCCM-ECCM-ECFD 2014 Congress, Барселона, Испания, 20-25 июля 2014;
- Международная научно-техническая конференция. ИММС НАНБ. Гомель Беларусь, 2015;
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа, 2015;
- Совместное заседание семинара по механике сплошной среды им. Л.А. Галина ИПМех РАН под руководством профессора А.В. Манжирова и семинара по механике фрикционного взаимодействия твердых тел им. И.В. Крагельского ИПМех РАН под руководством академика РАН И.Г. Горячевой, 2016;
- 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM, Монреаль, Канада, 21-26 августа, 2016.

Публикации

И. Г. Горячева, Ф. И. Степанов, Е. В. Торская Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству//ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 6. С.853-863.

I.G. Goryacheva, F.I. Stepanov, E.V. Torskaya Effect of friction in sliding contact of a sphere over a viscoelastic half-space //Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, series Computational Methods in Applied Sciences, Springer. 2016, P. 93-103.

Ф.И. Степанов, Последовательное скольжение двух гладких штампов по вязкоупругому основанию с трением.//Прикладная механика и техническая физика. 2015. - Т.56, №6, 2015, С.158-165.

Степанов Ф.И., Торская Е.В., Исследование напряженного состояния при скольжении штампа по вязкоупругому полупространству//Трение и износ. 2016, Т.37, №2, С.12-17.

Структура работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трех Глав, заключения и списка литературы.

В первой Главе исследуется контактная задача о скольжении жесткого параболического индентора по вязкоупругому полупространству при наличии касательных напряжений в области контакта. Задача решается численно, методом граничных элементов. Полученное решение использовано для оценки влияния касательных напряжений и других параметров задачи на контактные характеристики и деформационную составляющую силу трения. Предложен метод определения напряженного состояния полупространства, возникающего

при контакте. Были исследованы растягивающие-сжимающие и максимальные касательные напряжения внутри полупространства и на его поверхности.

Во второй Главе исследуется контактная задача о скольжении жесткого индентора по вязкоупругому полупространству вместе с двумя сосредоточенными силами, выступающими в роли пригрузки. С помощью предложенного метода решения проводится анализ влияния пригрузки и других параметров задачи на контактные характеристики и деформационную составляющую силы трения.

В третьей Главе исследуется задача о скольжении с постоянной скоростью двух жестких параболических инденторов по вязкоупругому полупространству. Разработан метод, позволяющий определять контактные характеристики инденторов с учетом их взаимного влияния. Проведено исследование контактных характеристик и деформационной составляющей силы трения инденторов в зависимости от различных параметров задачи, среди которых скорость скольжения и расстояние между инденторами. Также приводятся результаты расчетов напряженного состояния полупространства, возникающего в результате контакта инденторов с поверхностью полупространства.

Заключение содержит основные результаты диссертации.

Количество страниц в диссертации – 83, в том числе иллюстраций – 29, список литературы содержит 79 наименований

Автор выражает большую признательность научному руководителю академику И.Г. Горячевой, а также д.ф.-м.н. Е.В. Торской за поддержку в проведении исследований.

Глава 1 Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству

1.1 Постановка задачи о скольжении единичного индентора

Рассматривается процесс скольжения жесткого индентора по вязкоупругому полупространству. Форма индентора описывается гладкой функцией $f(x, y)$. Система координат (x, y, z) связана с индентором, ось z направлена по нормали к плоскости скольжения в противоположную полупространству сторону. Начало декартовой системы координат находится в точке первоначального касания индентора с полупространством. Движение происходит в направлении оси Ox (рис.1.1) с постоянной скоростью V много меньшей скорости распространения волн в материале полупространства, что в дальнейшем позволяет пренебрегать силами инерции. На индентор действует вертикальная сила Q и касательная сила T , коллинеарная вектору скорости.

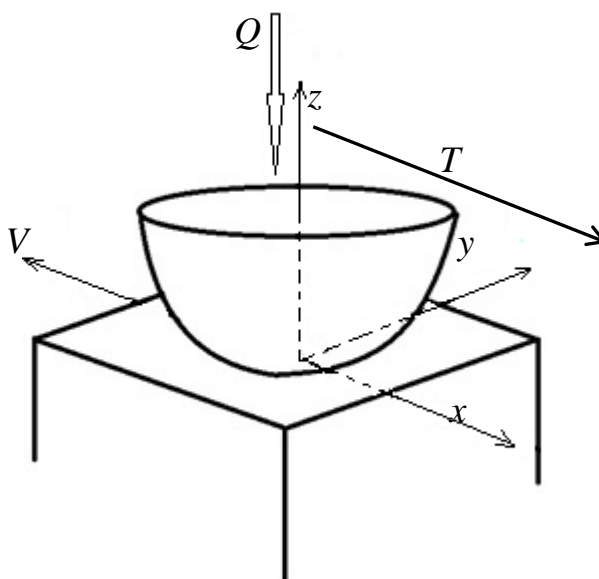


Рис.1.1 Схема контакта

Рассматриваются следующие граничные условия на поверхности полупространства:

$$\begin{aligned}
z=0: \quad \tau_{xz}(x, y) &= \mu\sigma_z(x, y), \quad \tau_{yz} = 0, \quad w(x, y) = f(x, y) + D \quad \text{при } (x, y) \in \Omega \\
\sigma_z &= 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } (x, y) \notin \Omega \\
-\infty < x < +\infty, \quad &-\infty < y < +\infty
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь Ω – область контакта, $w(x, y)$ – вертикальные смещения поверхности полупространства, D – внедрение индентора, σ_z и τ_{xz} , τ_{yz} – нормальное и касательные напряжения, μ – коэффициент трения относительного проскальзывания.

Контактные давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$ и область контакта Ω неизвестны. Для определения последней используется условие непрерывности давления на границе области контакта.

Контактное давление удовлетворяет условию равновесия:

$$Q = \iint p(x, y) dx dy \tag{1.2}$$

Здесь и далее, если не оговорено иное, интегрирование ведется по области Ω . Касательная сила T , которую следует приложить к штампу, чтобы он находился в равновесии, определяется в процессе решения задачи. Модель материала полупространства характеризуется постоянным коэффициентом Пуассона ν и описывается интегральным оператором Вольтера, задающим зависимость сдвиговых деформаций $\gamma(t)$ от касательных напряжений $\tau(x, y)$ в виде:

$$\gamma(t) = \frac{1}{G} \tau_{xz}(t) + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^t \tau_{xz}(\tau) K(t - \tau) d\tau; \quad K(t') = \sum_i k_i \exp\left(-\frac{t'}{\lambda_i}\right) \tag{1.3}$$

G – мгновенный модуль сдвига, λ_i – спектр времен последствия, k_i – величины, обратные времени релаксации. Процесс скольжения штампа предполагается установившимся, то есть, движение штампа начинается в момент времени $t = -\infty$.

1.2 Метод решения контактной задачи о скольжении единичного индентора

Рассмотрим сначала скольжение сосредоточенной силы по упругому полупространству с постоянной скоростью V в направлении оси Ox . Свяжем с приложенной нагрузкой подвижную декартову систему координат. В этой системе координат ось z направлена по нормали к поверхности полупространства в противоположную полупространству сторону. Один из способов решения данной задачи подробно описан в [20] и заключается в сведении ее к краевой задаче теории потенциала простого слоя. В соответствии с полученным в [20] решением, вертикальные перемещения точек упругого полупространства записываются в следующем виде:

$$w(x, y, z) = \frac{T_x}{4\pi G} \left(\frac{xz}{R_0^3} + (1-2\nu) \frac{x}{R_0(R_0+z)} \right) + \frac{T_y}{4\pi G} \left(\frac{yz}{R_0^3} + (1-2\nu) \frac{y}{R_0(R_0+z)} \right) - \frac{T_z}{4\pi G} \left(\frac{2(1-\nu)}{R_0} + \frac{z^2}{R_0^3} \right); \quad (1.4)$$

$$R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Здесь T_x, T_y, T_z – проекции силы на координатные оси.

Зависимость вертикальных перемещений поверхности полупространства (при $z=0$) от нагрузки, приложенной в точке $(\xi, \eta, 0)$ примет вид:

$$w(x, y, 0) = \frac{(1-2\nu)T_x}{4\pi G} \frac{(\xi-x)}{R^2} + \frac{(1-2\nu)T_y}{4\pi G} \frac{(\eta-y)}{R^2} - \frac{(1-\nu)T_z}{2\pi GR}, \quad (1.5)$$

$$R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}.$$

Предположим, что рассмотренное полупространство является вязкоупругим и описывается моделью, характеризуемой постоянным коэффициентом Пуассона ν и следующей временной зависимостью сдвиговых деформаций от касательных напряжений:

$$\gamma(t) = \frac{1}{G} \tau_{xz}(t) + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^t \tau_{xz}(t) K(t-\tau) d\tau \quad (1.6)$$

Поскольку процесс скольжения сосредоточенной силы считается установившимся, положение системы координат можно отнести к любому моменту времени, например $t=0$. Таким образом, движение сосредоточенной силы начинается в момент времени $t=-\infty$, и она достигает начала системы координат в момент времени $t=0$. Заменяя $1/G$ в выражении (1.5) на оператор Вольтера вида (1.6), а также учитывая, что в момент времени $\tau < 0$ сосредоточенная сила находится на расстоянии $-V\tau$ от центра системы координат, вертикальные перемещения границы полупространства запишутся в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) = & \frac{(1-2\nu)T_x}{4\pi G} \left[\frac{\xi-x}{R^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\xi-x-V\tau}{R_*^2} d\tau \right] + \\ & + \frac{(1-2\nu)T_y}{4\pi G} \left[\frac{\eta-y}{R^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\eta-y}{R_*^2} d\tau \right] - \frac{(1-\nu)T_z}{2\pi G} \left[\frac{1}{R} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{1}{R_*} d\tau \right], \quad (1.7) \\ & R_* = \sqrt{(\xi-x-V\tau)^2 + (\eta-y)^2}. \end{aligned}$$

В случае скольжения распределенных внутри области Ω нагрузок $\tau_{xz}(x, y)$, $\tau_{yz}(x, y)$, $p(x, y)$, на основании принципа суперпозиции перемещений и выражения (1.7), путем интегрирования по области контакта Ω можно получить выражение для вертикальных перемещений границы полупространства:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) = & \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega} \tau_{xz}(\xi, \eta) \left[\frac{\xi-x}{R^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\xi-x-V\tau}{R_*^2} d\tau \right] d\xi d\eta + \\ & + \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega} \tau_{yz}(\xi, \eta) \left[\frac{\eta-y}{R^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\eta-y}{R_*^2} d\tau \right] d\xi d\eta - \\ & - \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left[\frac{1}{R} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{1}{R_*} d\tau \right] d\xi d\eta. \quad (1.8) \end{aligned}$$

Наконец, в случае, если ядро релаксации имеет вид (1.3), путем прямой подстановки в (1.8), получим выражение для вертикальных смещений границы полупространства [2]:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, 0) = & \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega} \tau_1(\xi, \eta) \left[\frac{\xi-x}{R^2} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n k_i I_1 \left(\frac{\xi-x}{\lambda_i V}, \frac{\eta-y}{\lambda_i V} \right) \right] d\xi d\eta + \\
 & + \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega} \tau_2(\xi, \eta) \left[\frac{\eta-y}{R^2} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n k_i I_2 \left(\frac{\xi-x}{\lambda_i V}, \frac{\eta-y}{\lambda_i V} \right) \right] d\xi d\eta - \\
 & - \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} q(\xi, \eta) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n k_i I_3 \left(\frac{\xi-x}{\lambda_i V}, \frac{\eta-y}{\lambda_i V} \right) \right] d\xi d\eta, \\
 I_1(\alpha, \beta) = & e^\alpha \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + \beta^2}, \quad I_2(\alpha, \beta) = e^\alpha \beta \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u^2 + \beta^2}, \quad I_3(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

С учетом граничных условий, (1.9) примет вид

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega} \mu p(\xi, \eta) \left[\frac{\xi-x}{R^2} + \frac{1}{V} k I_1 \left(\frac{\xi-x}{\lambda V}, \frac{\eta-y}{\lambda V} \right) \right] d\xi d\eta - \\
 & - \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{V} k I_2 \left(\frac{\xi-x}{\lambda V}, \frac{\eta-y}{\lambda V} \right) \right] d\xi d\eta \\
 I_1(\alpha, \beta) = & e^\alpha \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + \beta^2}, \quad I_2(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}, \quad u = \frac{\xi-x-V\tau}{\lambda V}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Исследование контактной задачи сводится к построению решения интегрального уравнения (1.10) при заданной из граничных условий (1.1) функции $w(x, y)$. Для определения формы и размеров площадки контакта, а также распределения давления на ней используется метод граничных элементов. При этом выбирается прямоугольная область Ω^* , заведомо большая, чем искомая область контакта Ω , и разбивается на одинаковые прямоугольные элементы (в рассматриваемой задаче для удобства это квадраты со стороной Δ), давление в них предполагается постоянным (рис.1.2). Вертикальные перемещения границы полупространства внутри области Ω^* определяются в соответствии с принципом

суперпозиции перемещений, вызванных каждым нагруженным элементом отдельно.

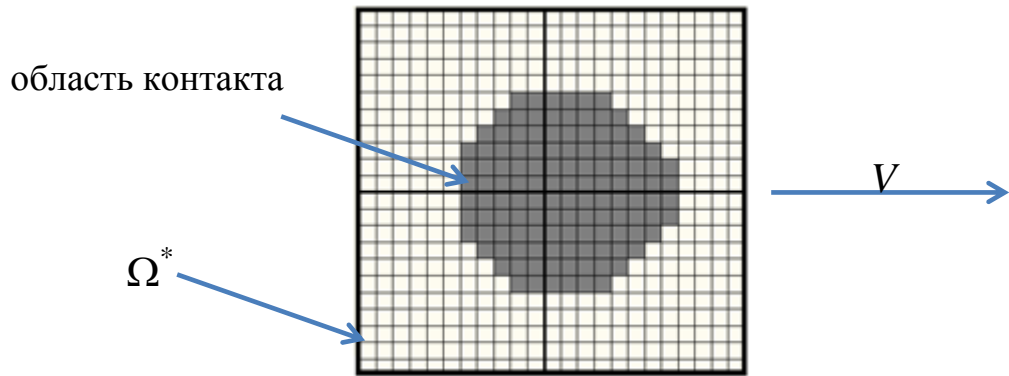


Рис.1.2 Кусочно-постоянная функция давления внутри области Ω^* .

На основании интегрального уравнения (1.10), при учете граничных условий (1.1) и (1.2), составляется система уравнений, записанная в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Коэффициенты матрицы k_j^i соответствуют вертикальному смещению поверхности полупространства в центре ячейки разбиения j в результате действия единицы давления внутри ячейки i . Безразмерные коэффициенты k_j^i вычисляются с помощью соотношения, полученного из интегрального уравнения (1.10):

$$\begin{aligned}
k_j^i = & \frac{1}{\pi^2 c} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \iint_{\Omega_i} \left\{ \frac{(\xi' - x_{ij}') \mu}{(\xi' - x_{ij}')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2} + \mu B e^{A(\xi' - x_{ij}')} \int_{A(\xi' - x_{ij}')}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + A^2 (\eta' - y_{ij}')^2} \right\} d\xi' d\eta' - \\
& - \frac{2}{\pi^2 c} \iint_{\Omega_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\xi' - x_{ij}')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2}} + B e^{A(\xi' - x_{ij}')} \int_{A(\xi' - x_{ij}')}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + A^2 (\eta' - y_{ij}')^2}} \right\} d\xi' d\eta'
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь интегрирование ведется по области Ω_i , соответствующей i – ому элементу разбиения области Ω^* . Для большей общности результатов введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned}
(x', y', \xi', \eta') &= \frac{1}{r} (x, y, \xi, \eta), \quad c = \frac{G}{G_l}, \quad A = \frac{r}{\lambda V}, \\
B &= k \frac{r}{V}, \quad Q' = \frac{Q}{G_l r^2}, \quad p'(x, y) = \frac{p(x, y)}{G_l},
\end{aligned} \tag{1.13}$$

r – характерный размер индентора (в рассматриваемом случае радиус), G_l – длительный модуль сдвига. Также дополнительно вводится безразмерная скорость $V' = V\lambda / r$.

Решение контактной задачи осуществляется с использованием написанной на языке СИ программы, ее блок-схема представлена на рис.1.3.

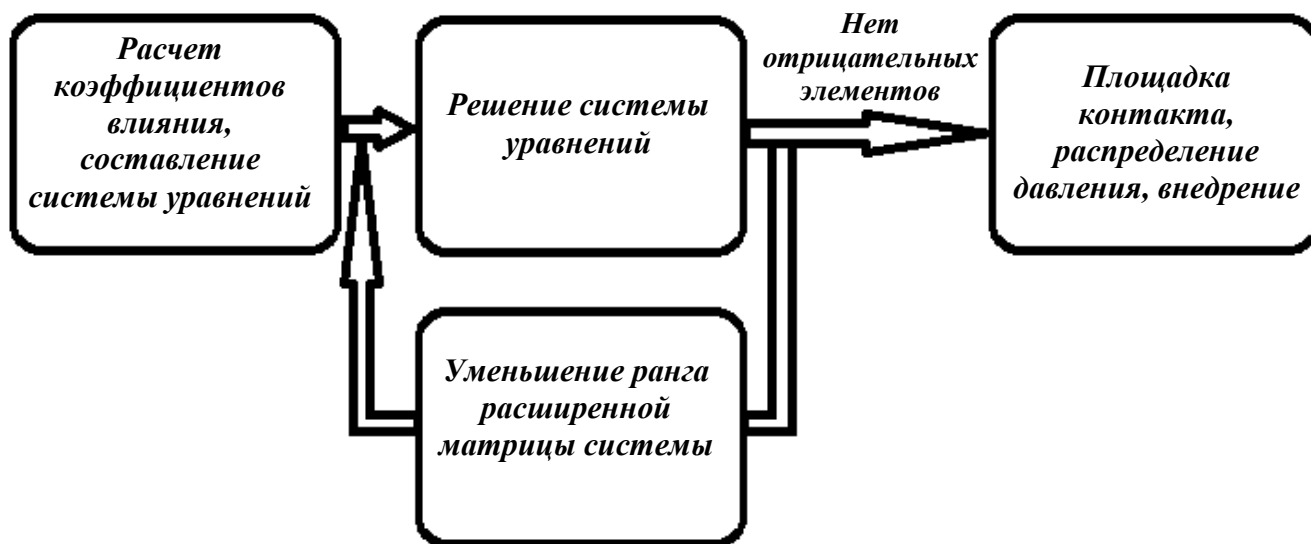


Рис.1.3 Схема работы программы

Работа программы начинается с вычисления коэффициентов k_j^i в соответствии с выражением (1.12) для составления системы уравнений (1.11). Интегралы вычисляются численно-аналитически, с использованием формулы Симпсона. Для того чтобы избавиться от бесконечного верхнего предела интегрирования в (1.12), используется замена переменной $u' = 1/u$.

При разбиении области Ω^* на $N_1 \cdot N_2$ элементов, количество коэффициентов влияния, входящих в расширенную матрицу системы (1.11) составляет $(N_1 \cdot N_2)^2$. Благодаря симметрии искомой площадки контакта и распределению давления по ней относительно оси Ox , а также зависимости коэффициентов k_j^i лишь от взаимного расположения точек i и j , количество вычислений можно значительно сократить.

Рассмотрим подробнее способ вычисления коэффициентов k_j^i для прямоугольной области Ω^* , состоящей из $(N_1 \cdot N_2)$ одинаковых элементов (рис.1.4а). Для расчета коэффициентов влияния k_j^i достаточно определить вертикальные перемещения границы полупространства вокруг одного

нагруженного единичным давлением элемента внутри области Ω_1^* размером $(2 \cdot N_1 - 1) \cdot (2 \cdot N_2 - 1)$ (рис. 1.4б). В силу симметрии задачи относительно оси Ox , количество элементов, которые необходимо вычислить сокращается до $N_1 \cdot (2 \cdot N_2 - 1)$.

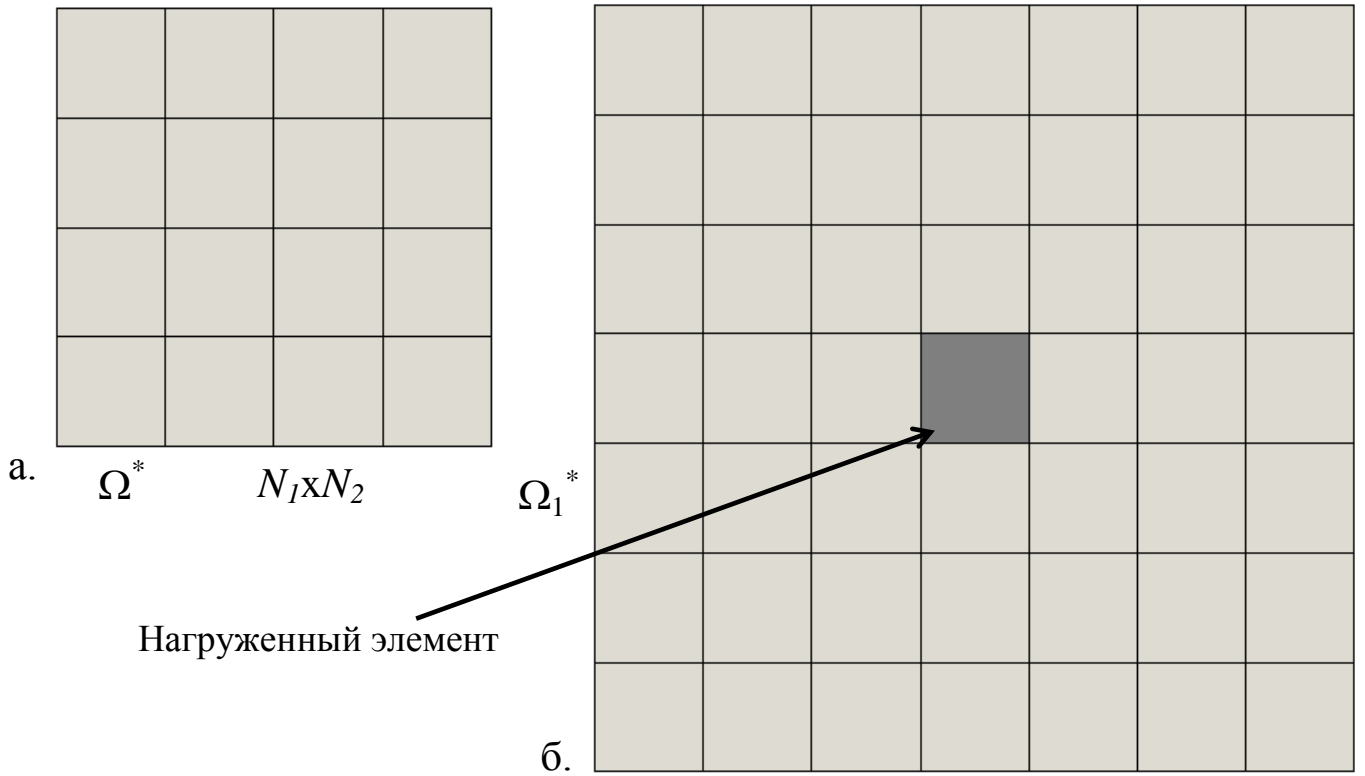


Рис.1.4 Исследуемая область Ω^* (а) и Ω_1^* (б).

Коэффициенты k_j^i , где $i = (i_1 - 1)N_1 + j_1$, $j = (i_2 - 1)N_1 + j_2$, а $i_1, i_2 = 1..N_2$, $j_1, j_2 = 1..N_1$ номера вертикальных и горизонтальных элементов области Ω^* , выражаются через внедрение $\omega(i_3, j_3)$ внутри элемента (i_3, j_3) области Ω_1^* , $i_3 = 1..(2N_1 - 1)$, $j_3 = 1..(2N_2 - 1)$ следующим образом:

$$k_j^i = \omega(N_1 + i_1 - i_2; N_2 + j_1 - j_2) \quad (1.13)$$

После расчета коэффициентов k_j^i и составления расширенной матрицы системы (1.10), происходит решение этой линейной системы уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента [28]. Поскольку область контакта заранее не

известна, полученные при решении контактные давления могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Элементы, обладающие нулевым и отрицательным давлением, априори не могут быть частью искомой области контакта. В соответствии с граничными условиями (1.1) элементам с отрицательным давлением присваивается значение нуль. В дальнейшем ранг матрицы системы (1.10) сокращается за счет нулевых элементов, и система решается заново. Описанный итерационный процесс продолжается до того момента, когда очередное полученное решение будет содержать в себе только положительные и нулевые значения давления. В результате приближенно определяется неизвестная область контакта Ω , распределение по ней контактного давления, а также внедрение D индентора в полупространство. Погрешность численного решения в значительной степени зависит от того, как была выбрана область Ω^* . Поскольку для наиболее точного решения необходимо, чтобы найденная в результате область Ω состояла из наибольшего числа элементов разбиения, Ω^* требуется выбирать таким образом, чтобы отношение площадей $S_{\Omega} / S_{\Omega^*}$ было максимальным. Для того чтобы приближенно оценить размер области Ω^* , можно воспользоваться аналитическим решением задачи Герца. Погрешность численного решения также зависит от входных параметров задачи, поскольку они определяют искомую функцию распределения контактного давления, а точность аппроксимации этой функции, очевидно, зависит от ее гладкости. Оценивать погрешность результатов решения задачи необходимо отдельно в каждом случае, а для достижения необходимой точности следует увеличить количество элементов разбиения, либо изменить выбранную область Ω^* .

На основании решения контактной задачи может быть вычислена деформационная составляющая коэффициента трения. Поскольку рассматриваемая задача является симметричной относительно оси Ox , то для определения деформационной составляющей коэффициента трения можно воспользоваться соотношением, полученным для случая плоского контакта [10]:

$$\mu^* = \frac{T^*}{P} = \frac{\iint xp(x, y)dxdy}{r \iint p(x, y)dxdy} \quad (1.14)$$

Здесь μ^* – механическая составляющая силы трения (обусловленная вязкоупругими свойствами материала). Общая сила трения, действующая на индентор, определяется как $T = T^* + \mu P$. Для равномерного движения индентора она должна уравниваться касательной силой, приложенной к индентору в направлении оси Ox .

Решение контактной задачи для рассматриваемого процесса скольжения индентора по вязкоупругому полупространству позволяет также исследовать напряженное состояние внутри полупространства. Поскольку рассматриваемая модель вязкоупругого материала обладает постоянным коэффициентом Пуассона, для расчета напряжений могут быть использованы известные решения задачи Буссинеска и Черутти. Ниже представлены выражения для компонентов напряжения, вызванного воздействием сосредоточенной силы, направленной по нормали к поверхности полупространства [15]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\sigma_z}{2\pi} \left(\frac{(1-2\nu)}{x^2+y^2} \left(\left(1-\frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right) - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right); \\
\sigma_y &= \frac{\sigma_z}{2\pi} \left(\frac{(1-2\nu)}{x^2+y^2} \left(\left(1-\frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right) - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right); \\
\sigma_z &= -\frac{3\sigma_z z^3}{2\pi\rho^5}; \\
\tau_{xy} &= \frac{\sigma_z}{2\pi} \left(\frac{(1-2\nu)}{x^2+y^2} \left(\left(1-\frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{zxy}{\rho^3} \right) - \frac{3zxy}{\rho^5} \right); \\
\tau_{xz} &= -\frac{3\sigma_z}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}; \\
\tau_{yz} &= -\frac{3\sigma_z}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5};
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

$$\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2.$$

Компоненты напряжения, вызванного воздействием сосредоточенной силы, направленной по касательной к поверхности полупространства записываются в следующем виде [15]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{\tau_{xz}}{2\pi} \left((1-2\nu) \left(\frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) - \left(\frac{3x^3}{\rho^5} \right) \right); \\
\sigma_y &= \frac{\tau_{xz}}{2\pi} \left((1-2\nu) \left(\frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{y^2x}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2y^2x}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) - \frac{3y^2x}{\rho^5} \right); \\
\sigma_z(x, y) &= -\frac{\tau_{xz}}{2\pi} \frac{3xz^2}{\rho^5}; \\
\tau_{xy} &= \frac{\tau_{xz}}{2\pi} \left((1-2\nu) \left(-\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) - \frac{3x^2y}{\rho^5} \right); \\
\tau_{yz} &= -\frac{\tau_{xz}}{2\pi} \frac{3xyz}{\rho^5}; \\
\tau_{xz} &= -\frac{\tau_{xz}}{2\pi} \frac{3x^2z}{\rho^5}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

На основании соотношений (1.15) и (1.16), а также принципа суперпозиции, получены выражения, связывающие компоненты тензора напряжений с нагрузкой, равномерно распределенной по области Ω_i , соответствующей i – ому элементу разбиения области Ω^* :

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x, y, z) &= \frac{\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{(1-2\nu)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{z(y-\eta)^2}{\rho^3} \right) \right) d\xi d\eta + \\
&\quad \frac{\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(-\frac{3z(x-\xi)^2}{\rho^5} \right) d\xi d\eta - \\
&\quad -\frac{\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left((1-2\nu) \left(\frac{(x-\xi)}{\rho^3} - \frac{3(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(x-\xi)^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) \right) d\xi d\eta + \\
&\quad + \frac{\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3(x-\xi)^3}{\rho^5} \right) d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, y, z) &= \frac{\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{(1-2\nu)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{z(x-\xi)^2}{\rho^3} \right) \right) d\xi d\eta - \\
&\quad - \frac{\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3z(y-\eta)^2}{\rho^5} \right) d\xi d\eta + \\
&\quad + \frac{\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left((1-2\nu) \left(\frac{(x-\xi)}{\rho^3} - \frac{(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(y-\eta)^2(x-\xi)}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(y-\eta)^2(x-\xi)}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) \right) d\xi d\eta + \\
&\quad - \frac{\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3(y-\eta)^2(x-\xi)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta, \\
\sigma_z(x, y, z) &= - \iint_{\Omega_i} \frac{3z^2}{2\pi\rho^5} (\sigma_z z + (x-\xi)\tau_{xz}) d\xi d\eta, \\
\tau_{xy}(x, y, z) &= \frac{\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{(1-2\nu)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \frac{z(x-\xi)(y-\eta)}{\rho^3} \right) \right) d\xi d\eta - \\
&\quad - \frac{\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(-\frac{3z(x-\xi)(y-\eta)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta + \\
&\quad \frac{\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left((1-2\nu) \left(-\frac{(y-\eta)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^2(\rho+z)^3} \right) \right) d\xi d\eta - \\
&\quad - \frac{\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{3(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta, \\
\tau_{xz}(x, y, z) &= -\frac{3\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z^2(x-\xi)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta - \frac{3\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z(x-\xi)^2}{\rho^5} \right) d\xi d\eta, \\
\tau_{yz}(x, y, z) &= -\frac{3\sigma_z}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z^2(y-\eta)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta - \frac{3\tau_{xz}}{2\pi} \iint_{\Omega_i} \left(\frac{z(y-\eta)(x-\xi)}{\rho^5} \right) d\xi d\eta,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Поскольку некоторые интегралы (1.17) могут быть вычислены только с помощью численных методов интегрирования, компоненты тензора напряжений можно получить только в виде кусочно-постоянной функции. Областью определения этой функции служит трехмерная сетка, заданная внутри исследуемой области полупространства Ω_3 . Предположим, что исследуемая область Ω_3 (рис.1.5а) состоит из $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ элементов, а количество нагруженных

элементов на поверхности полупространства, найденных при решении контактной задачи равно n . При расчете напряжений $\sigma_x(i, j, k)$ в узлах сетки с помощью выражения (1.17), потребовалось бы вычислить $n \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ интегралов. Объем вычислений можно значительно сократить, поскольку для определения напряженного состояния внутри области Ω_3 , достаточно рассчитать напряжения $\sigma_x^*(i^*, j^*, k^*)$ внутри области Ω_4 размером $(2 \cdot N_1 - 1) \cdot (2 \cdot N_2 - 1) \cdot N_3$ возникающие в результате воздействия единичного давления в центре этой области (рис.1.5б).

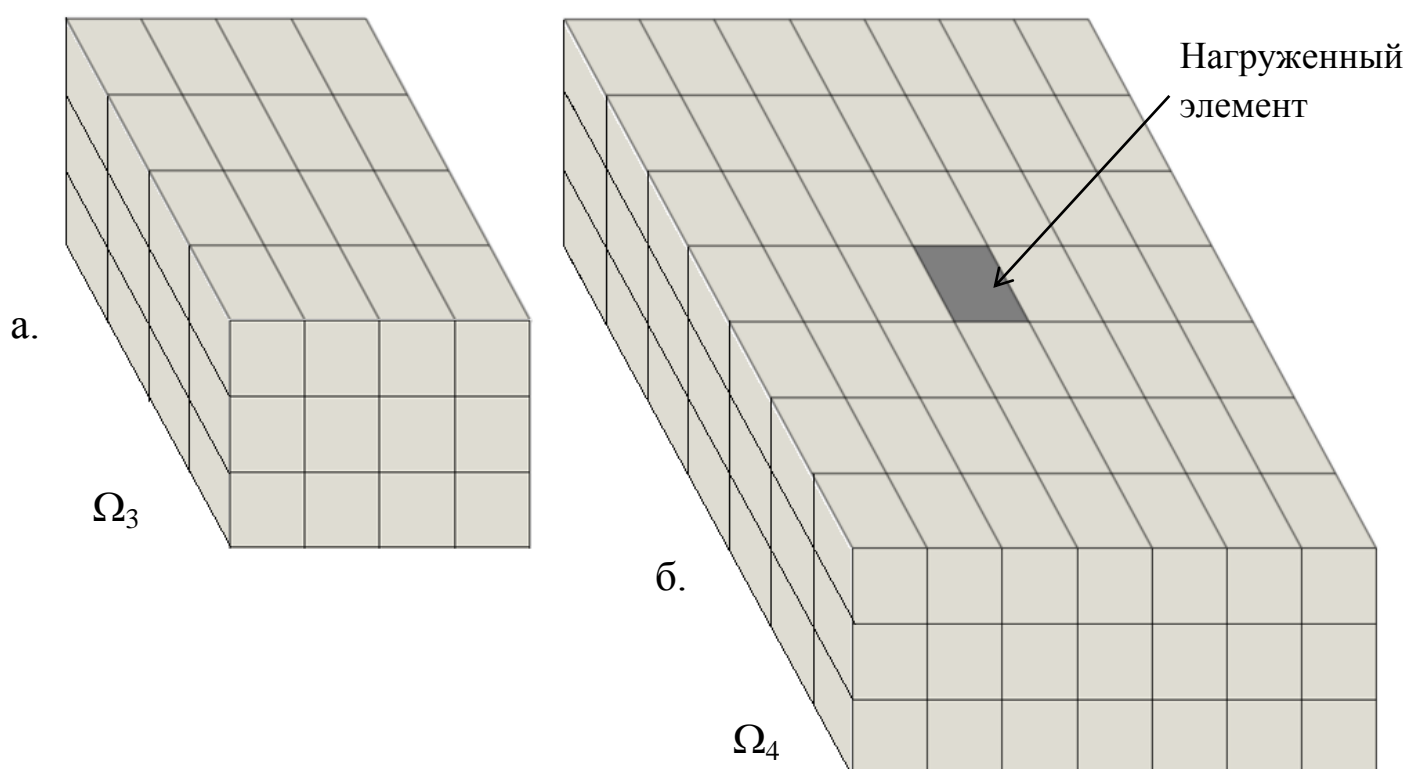


Рис.1.5. Исследуемая область Ω_3 (а) и Ω_4 (б).

Пусть (i_0, j_0) координаты χ -ого элемента сетки, построенной внутри области Ω^* . Используя давления $p(i_0, j_0)$, полученные при решении контактной задачи, а также рассчитанные с помощью (1.17) напряжения $\sigma_x^*(i^*, j^*, k^*)$, можно получить значения напряжений $\sigma_x(i, j, k)$ внутри области Ω_3 следующим образом:

$$\sigma_x(i, j, k) = \sum_{\chi=1}^n p(i_0, j_0) \cdot \sigma_x^*(N_1 + i - i_0, N_2 + j - j_0, k) \quad (1.18)$$

Главные и максимальные касательные напряжения в произвольной точке рассматриваемой области определяются в результате решения уравнения [3]:

$$\text{def} \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (1.19)$$

Корни уравнения $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ являются главными напряжениями, а $\tau_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $\tau_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$, $\tau_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$ – главными касательными напряжениями.

1.3 Анализ результатов решения контактной задачи.

На основании изложенного метода решения проведен анализ зависимости контактных характеристик (распределение контактного давления, форма и размер площадки контакта) от следующих безразмерных параметров: нагрузки Q' , с отношения мгновенного модуля сдвига основания G к длительному модулю G_l , скорости V' , коэффициента Пуассона ν и коэффициента трения относительного проскальзывания μ . Результаты, представленные на рис. 1.5, 1.7 и 1.8, получены при $\nu = 0.3$, $\mu = 0.5$.

Для сравнения решения пространственной контактной задачи с двумерным случаем, рассмотренным в [10], были рассчитаны контактные давления, возникающие при двух характерных скоростях скольжения индентора, форма которого описывается функцией

$$f(x, y) = -(3x^2 + y^2)/(2r) \quad (1.20)$$

Такой индентор представляет собой вытянутый вдоль оси Oy эллиптический параболоид. Для верификации метода решения проводилось сравнение полученного распределения контактного давления в центральном сечении $y=0$ вытянутого индентора с решением плоской задачи о скольжении индентора по вязкоупругому полупространству [10]. Результаты расчетов, изображенные на рис.1.6, показывают, что при относительно большой скорости ($V'=3.33$) распределение контактного давления и расположение площадки контакта близко к решению задачи Герца с мгновенным модулем упругости. При уменьшении скорости до $V'=0.66$, площадка контакта смещается в направлении скольжения относительно оси симметрии индентора, распределение давления по площадке контакта становится несимметричным вследствие проявления вязких свойств материала основания. Качественное сравнение кривых, изображенных на рис.1.6, с решением задачи в плоской постановке [10] дает хорошее соответствие.

Проведен анализ скольжения параболического индентора по поверхности вязкоупругого полупространства. Форма индентора описывается функцией

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2)/(2r) \quad (1.21)$$

Влияние величины параметра c на распределение давления по площадке контакта показано на рис.1.7 для случаев скольжения по упругому ($c=1$, рис.1.7а) и вязкоупругому ($c=5$, рис.1.7б, $c=10$, рис.1.7в) полупространству. На рис. 1.7г изображены распределения контактных давлений в плоскости $y=0$ для указанных трех случаев.

В случае скольжения по вязкоупругому полупространству, при увеличении параметра c , т.е. при увеличении вязкости, площадка контакта уменьшается и сдвигается в направлении скольжения индентора, ее форма становится вытянутой вдоль оси Oy в отличие от упругого случая, в котором площадка контакта круговая. Максимальное значение давления увеличивается, при этом его расположение смещается вперед по направлению скольжения.

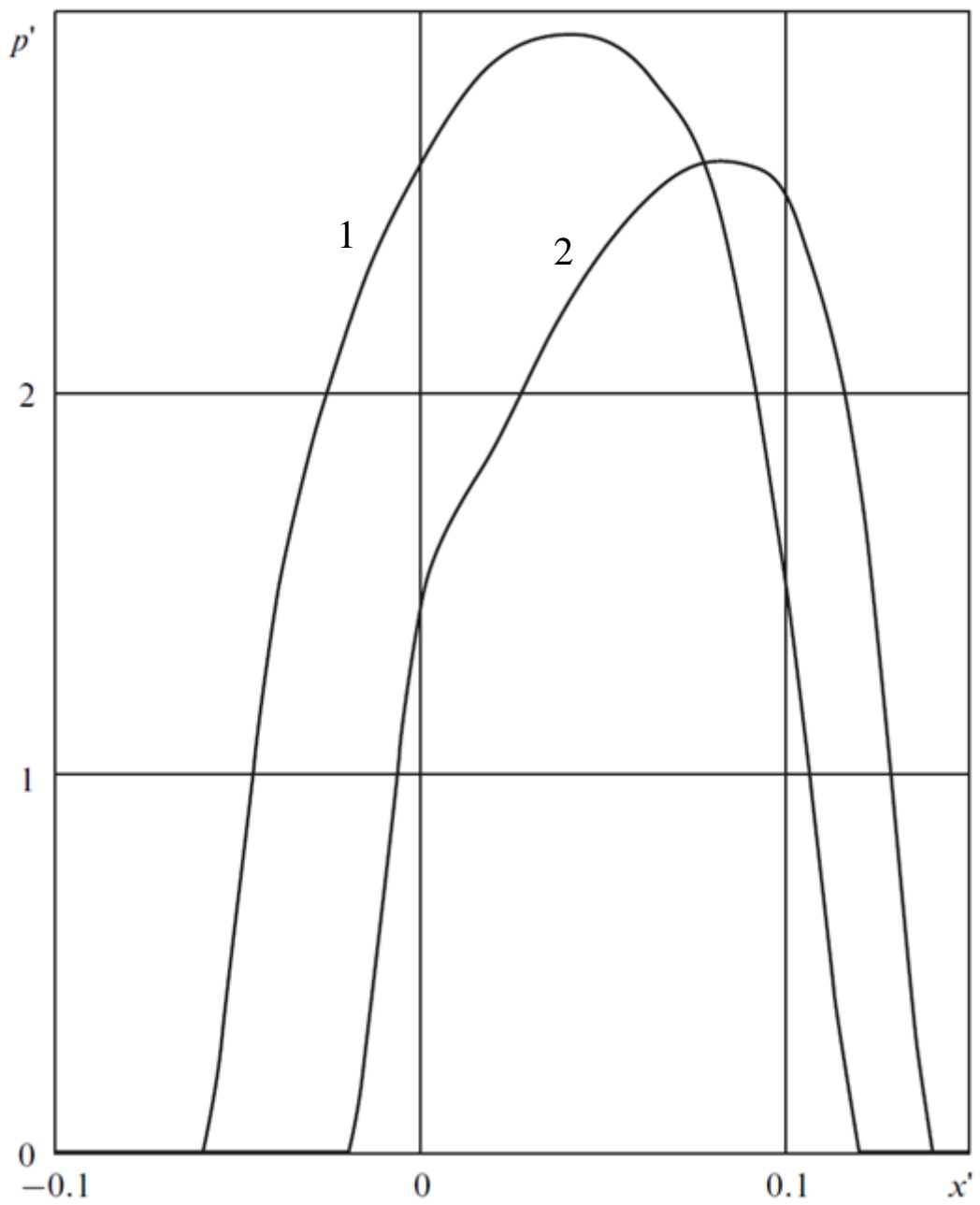


Рис.1.6 Распределение контактного давления в сечении $y = 0$

($Q' = 0.2$, $c = 5$, $V' = 0.66$ (кривая 2), $V' = 3.33$ (кривая 1))

Результаты расчетов, представленные на рис.1.8, позволяют определить влияние скорости на форму и расположение площадки контакта, а также распределение контактного давления на примере трех скоростей скольжения ($V' = 0.16, 0.416, 3.33$). При увеличении скорости, размер площадки контакта уменьшается, степень ее асимметрии относительно плоскости $x = 0$ возрастает, а при дальнейшем увеличении скорости уменьшается. Контактные давления в центральном сечении $y = 0$ распределены несимметрично относительно начальной точки касания. Максимальные значения контактных давлений сдвинуты по направлению движения индентора и возрастают при увеличении скорости.

Также была изучена роль касательных напряжений при скольжении. На рис.1.9 представлены распределения контактных давлений, полученные в условиях нулевых ($\mu = 0$) и ненулевых значений касательных напряжений ($\mu = 0.5$) в области контакта, соответствующих разным значениям коэффициента трения в граничных условиях (1.1).

При увеличении коэффициента трения относительного проскальзывания площадка контакта смещается по направлению скольжения, максимальное давление внутри нее увеличивается, а расположение максимума давления сдвигается в сторону движения индентора. Такое перераспределение давления при наличии касательных напряжений в области контакта увеличивает гистерезисные потери при скольжении, т.е. деформационную составляющую силы трения.

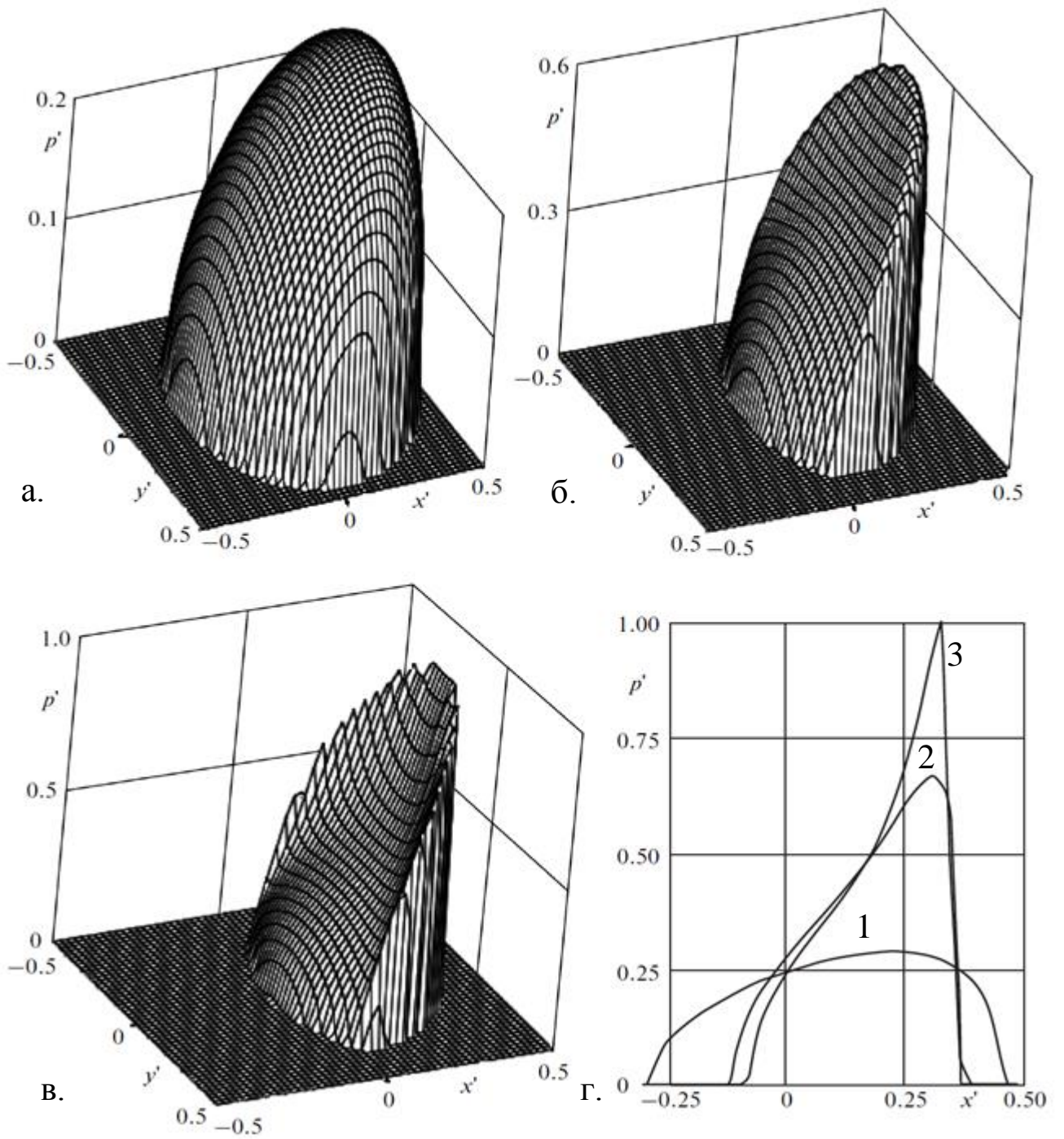


Рис.1.7 Распределение контактного давления при различных параметрах c ($Q'=0.08$, $V'=0.416$, $c=1$ (кривая 1), $c=5$ (кривая 2), $c=10$ (кривая 3)).

Контактное давление в центральном сечении $y = 0$ распределено несимметрично относительно начальной точки касания. Максимальные значения контактного давления сдвинуты по направлению движения индентора и возрастают при увеличении скорости.

Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения (1.13) от скорости при разных значениях коэффициента Пуассона ν и коэффициента трения μ представлены на рис.1.10 а при $c = 5$, $Q' = 0.1$. Зависимости эти немонотонные: при возрастании скорости от нуля деформационная составляющая силы трения сначала растет, а потом снижается. При различных значениях коэффициента Пуассона касательные напряжения влияют на гистерезисные потери по-разному. Так, в случае $\mu = 0.5$, увеличение гистерезисных потерь относительно случая отсутствия касательных напряжений в области контакта ($\mu = 0$) при $\nu = 0.3$ значительно больше, чем при $\nu = 0.45$. Коэффициент Пуассона влияет на гистерезисные потери и при отсутствии касательных напряжений (коэффициент μ^* для материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ больше, чем с $\nu = 0.45$).

На рис. 1.10б изображена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки при $\mu = 0.5$ и $\mu = 0$. Эта зависимость монотонно возрастающая и нелинейная. При увеличении нагрузки от нуля, значение коэффициента μ^* быстро возрастает, а при дальнейшем увеличении нагрузки скорость роста μ^* уменьшается. Следует отметить, что для рассматриваемой модели диапазон изменения нагрузки ограничен сверху и определяется границами применимости линейных моделей теории упругости и вязкоупругости.

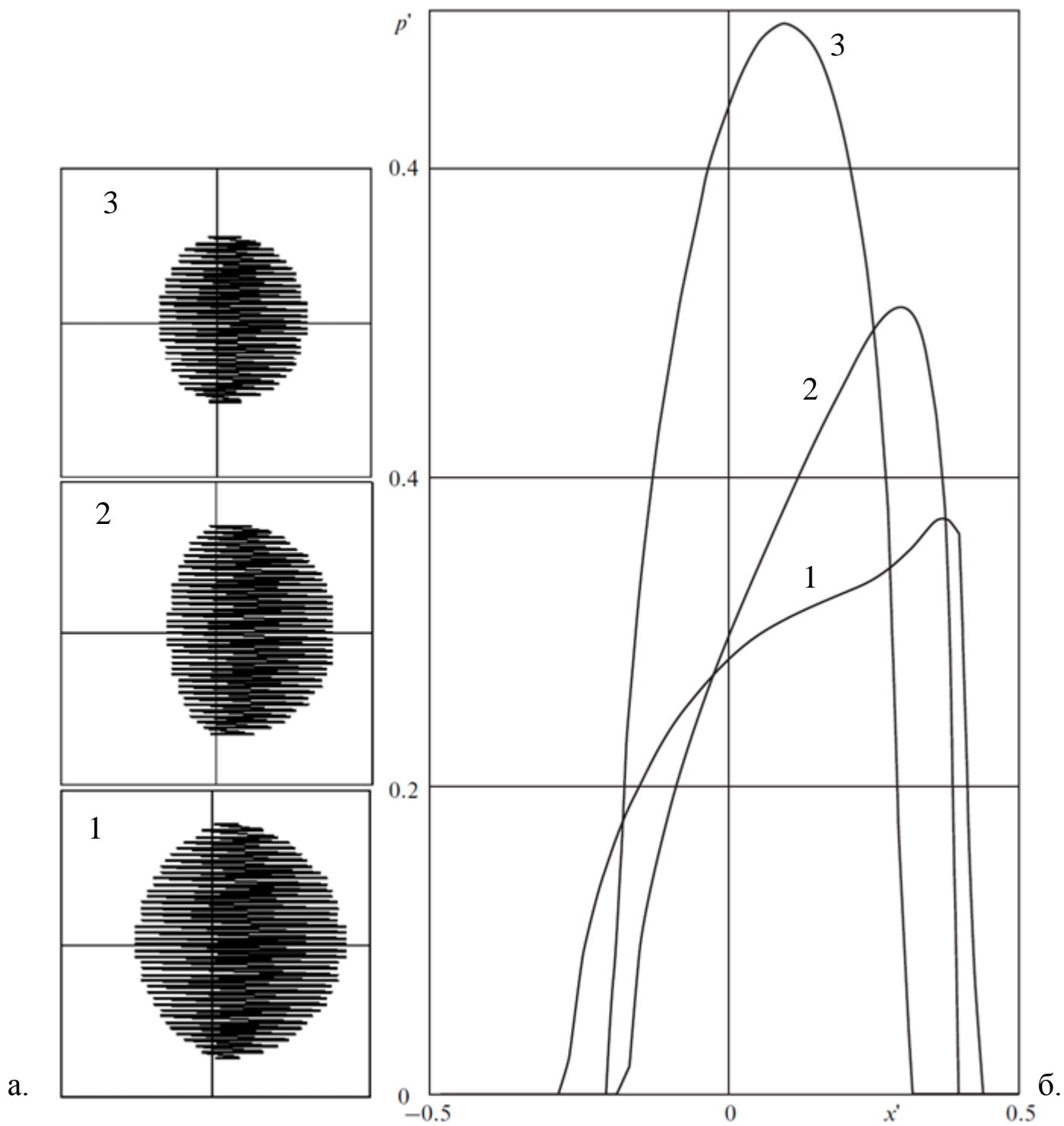


Рис.1.8 Распределение контактного давления для различных скоростей.

($Q' = 0.1$, $c = 3$, $V' = 0.16$ (кривая 1), $V' = 0.416$ (кривая 2), $V' = 3.33$ (кривая 3))

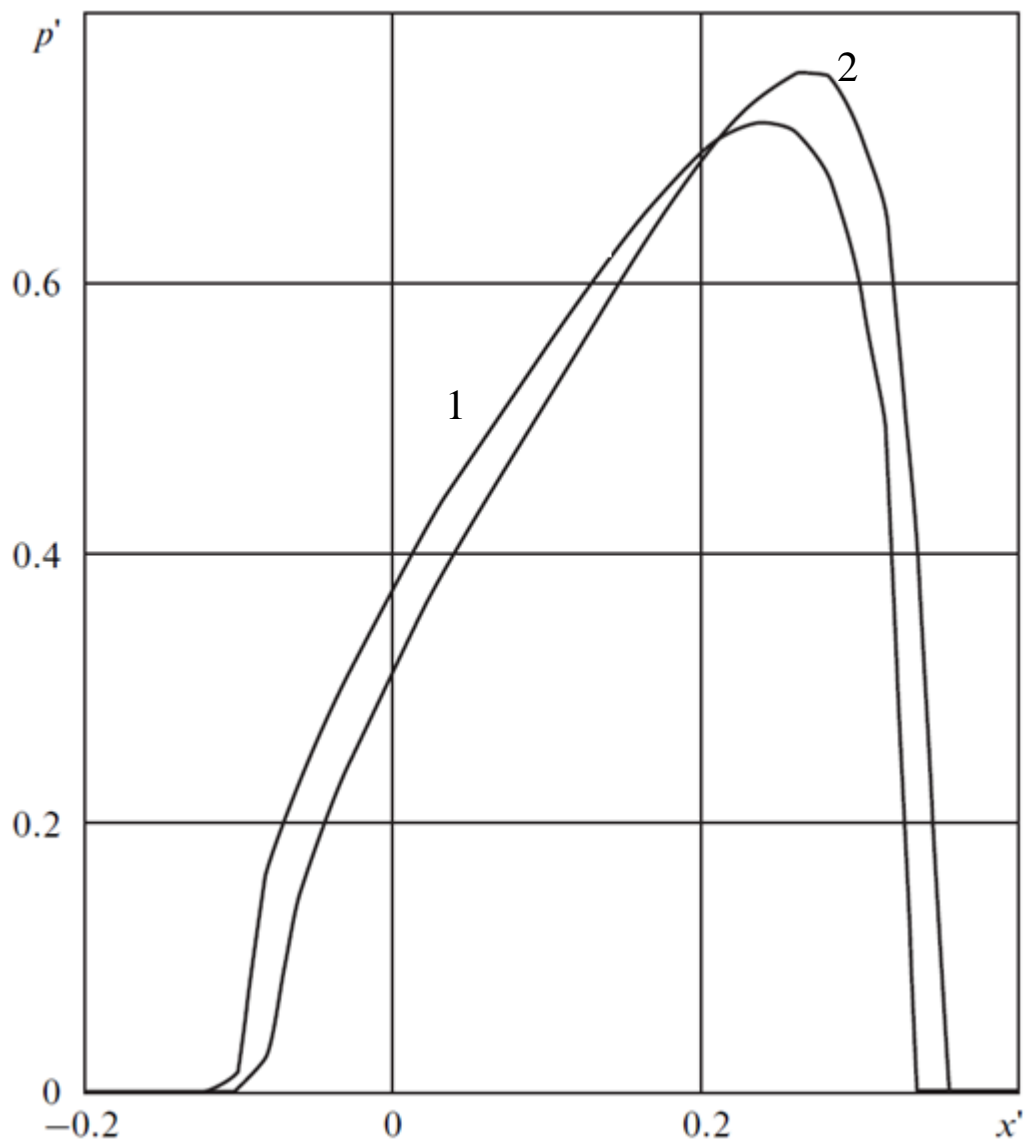


Рис.1.9 Распределение контактного давления в сечении $y = 0$

($Q' = 0.1$, $c = 5$, $\nu = 0.3$, $V' = 0.66$, $\mu = 0$ (кривая 1), $\mu = 0.5$ (кривая 2))

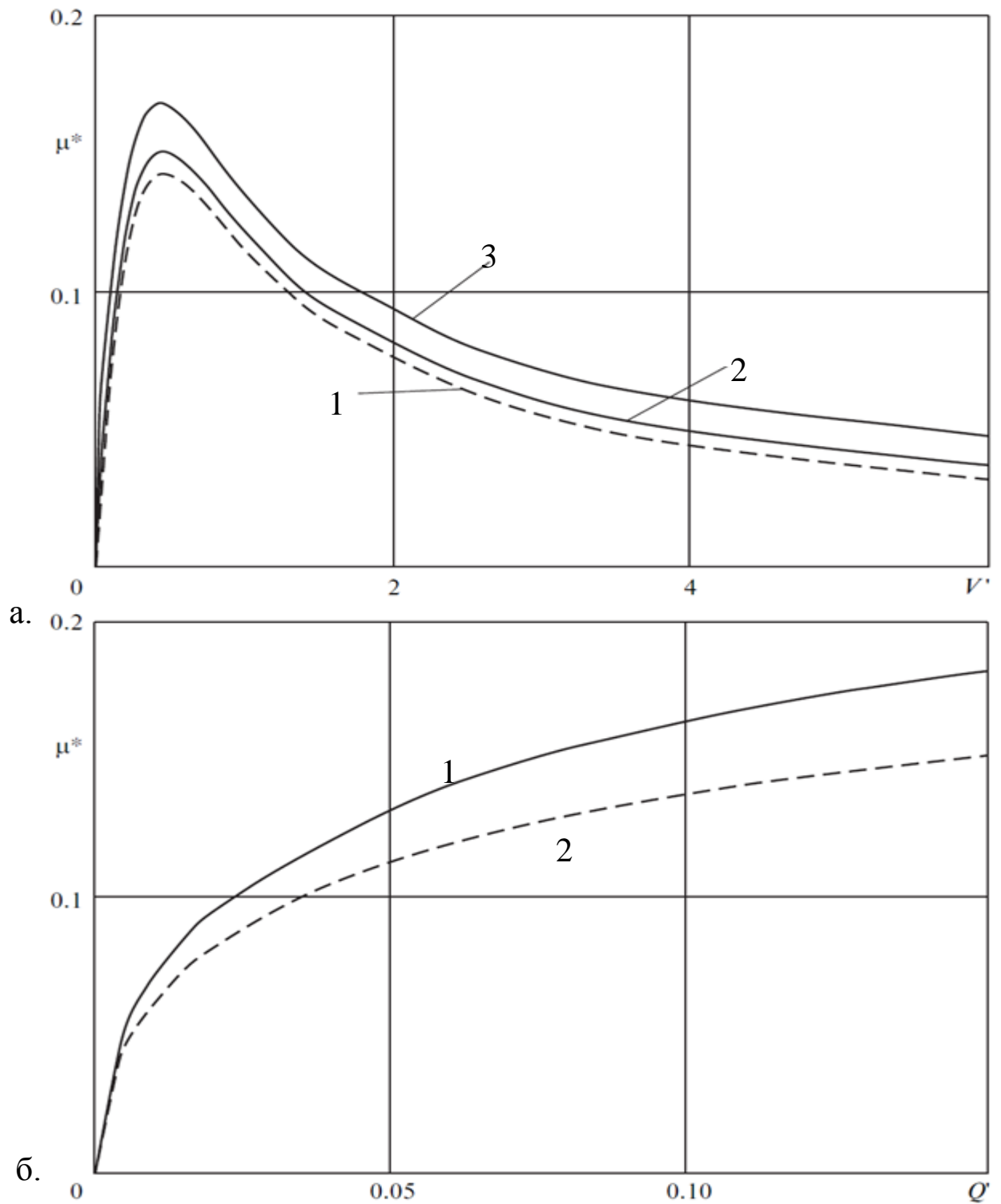


Рис. 1.10 (а) Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости $c = 5$, $Q' = 0.1$, $c = 5$. (кривая 1 $\nu = 0.3$, $\mu = 0$, кривая 2 $\nu = 0.45$, $\mu = 0.5$, кривая 3 $\nu = 0.3$, $\mu = 0.5$); (б) Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки $c = 5$, $V' = 0.33$, $\nu = 0.3$ (кривая 1 $\mu = 0.5$, кривая 2 $\mu = 0$)

1.4 Анализ напряженного состояния под единичным индентором.

Был проведен анализ растягивающих-сжимающих и максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства и в центральном сечении $y=0$. Из (1.9) видно, что если материал полупространства является абсолютно несжимаемым ($\nu=0.5$), касательные напряжения в области контакта не оказывают влияния на перемещения границы полупространства в вертикальной плоскости. Исследовались напряжения, возникающие в материалах, характеризующихся двумя значениями коэффициента Пуассона: $\nu=0.45$, $\nu=0.3$.

На рис. 1.11 изображено распределение растягивающих-сжимающих напряжений в плоскости $y=0$. Исследовалось два случая скольжения без трения (рис.1.11а, $\mu=0$) и с трением (рис.1.11б, $\mu=0.5$). Максимум растягивающих напряжений отмечен точкой C , сжимающих точкой T . В обоих случаях наблюдается концентрация максимумов растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности полупространства. В связи с данным результатом, было исследовано распределение растягивающих-сжимающих напряжений в плоскости $z=0$.

На рис.1.12а и рис.1.12б изображено распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности полупространства при $\mu=0$ и $\mu=0.5$ соответственно. На рис. 1.12в представлено распределение растягивающих-сжимающих напряжений на оси Ox . Несимметрия распределения контактного давления приводит к тому, что при отсутствии трения точки максимального сжатия и растяжения (C и T на рис.1.12а) находятся близко друг к другу, и переход между максимальным отрицательным (сжимающим) и максимальным положительным (растягивающим) значениями напряжений происходит почти скачкообразно (пунктирная кривая на рис.1.12в). Наличие трения приводит к тому, что максимальное растяжение (T на рис.1.12б) локализуется позади области контакта (сплошная кривая на рис. 1.12в), а резкое изменение значения напряжений приходится на область сжатия.

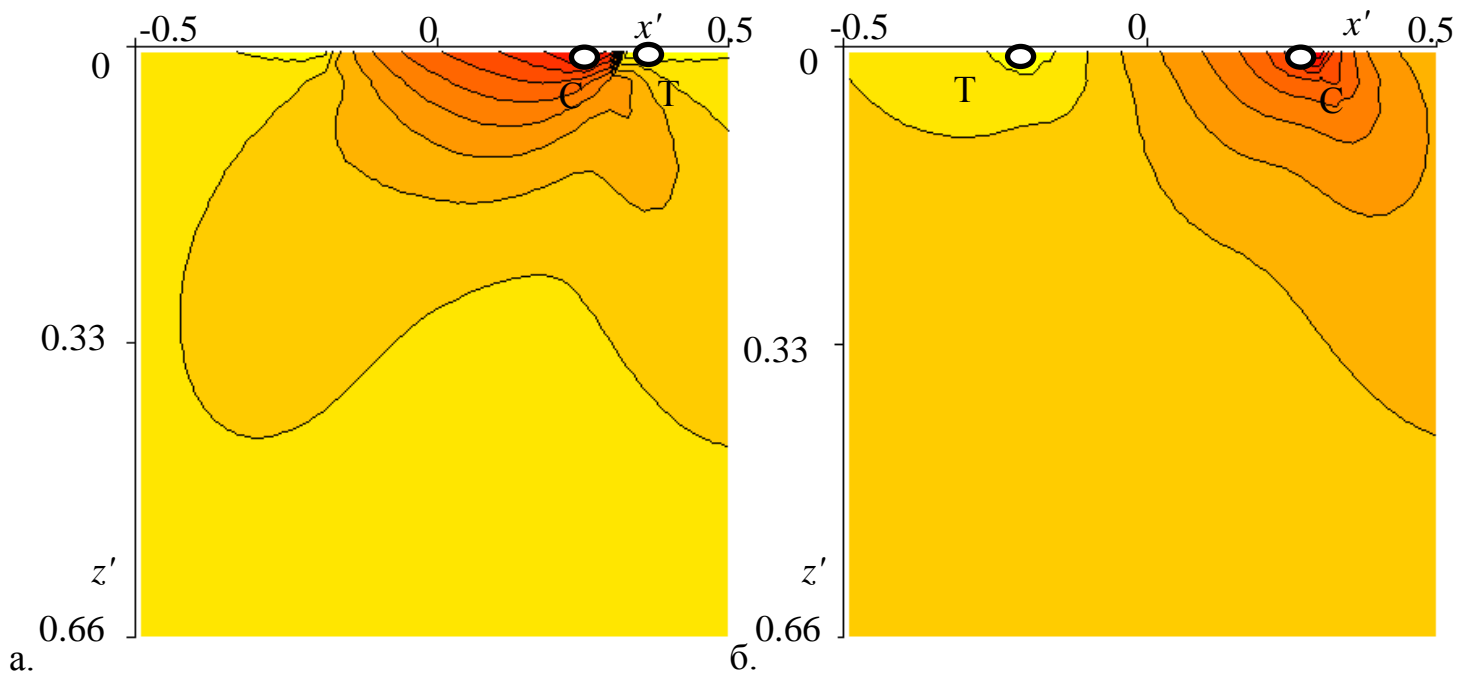


Рис. 1.11 Распределение растягивающих-сжимающих напряжений в плоскости $y = 0$ при $Q' = 0.1$, $c = 5$, $V' = 0.75$, $\nu = 0.3$, $\mu = 0$ (рис.1.11а), $\mu = 0.5$ (рис.1.11б).

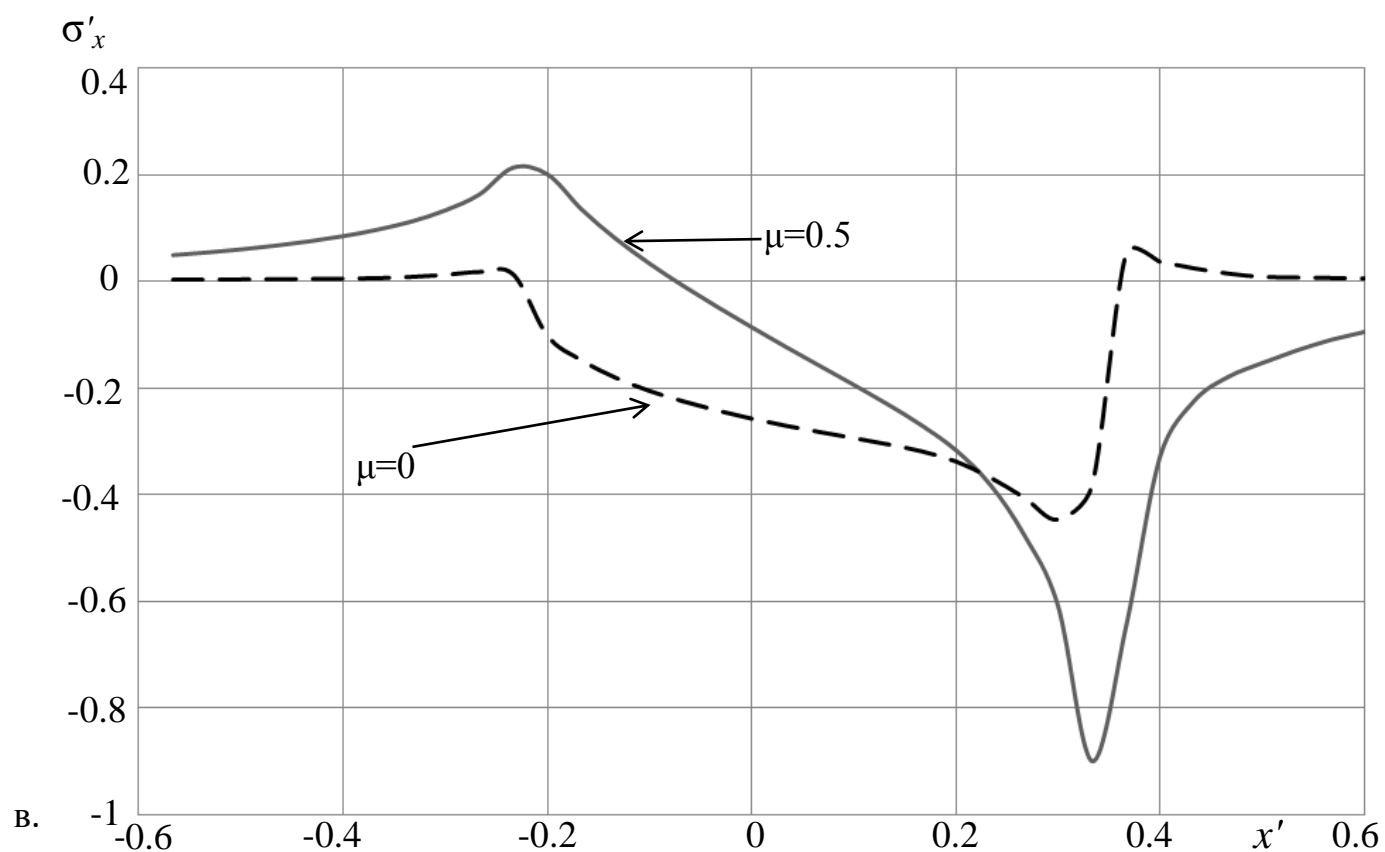
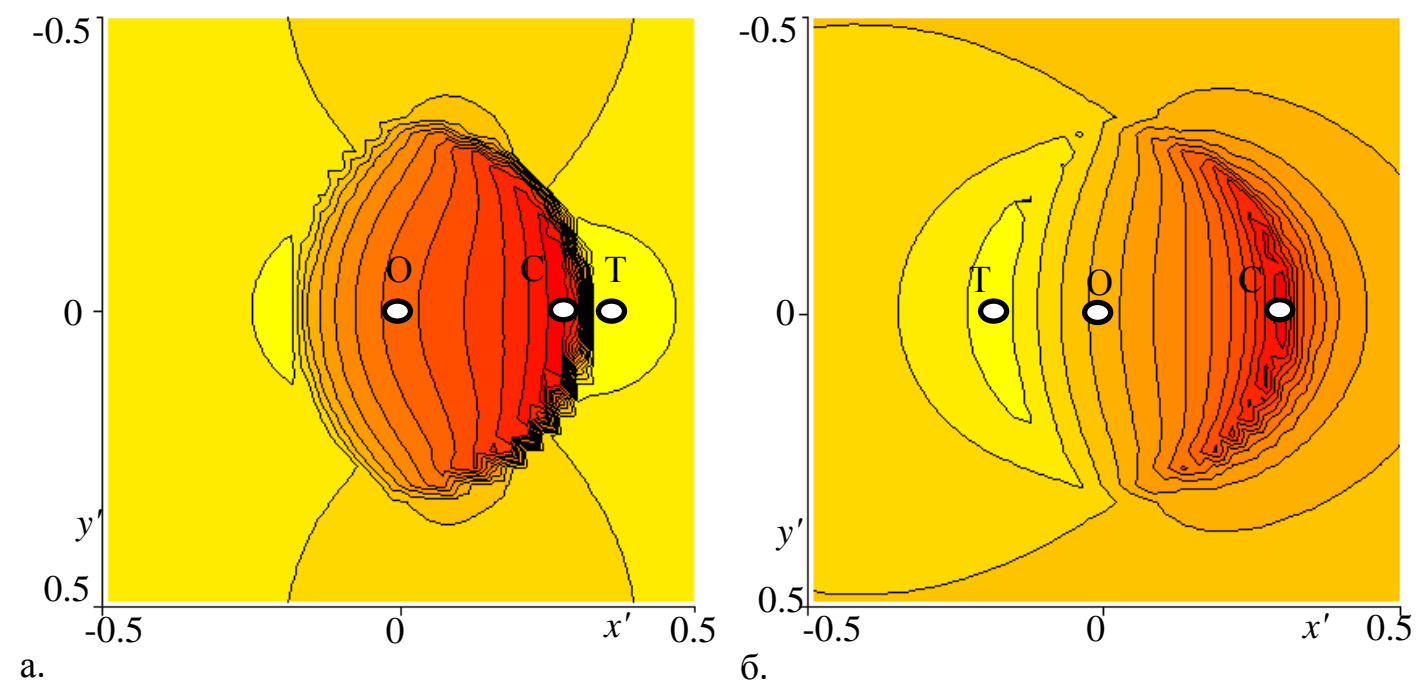


Рис.1.12 Распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности полупространства при $Q'=0.1$, $c=5$, $V'=0.75$, $\nu=0.3$, $\mu=0$ (рис.1.12а), $\mu=0.5$ (рис.1.12б).

Изолинии максимальных касательных напряжений под сферическим штампом при двух разных значениях коэффициента Пуассона приведены на рис.1.13. Когда трения нет, максимумы локализуются под поверхностью, но уже при коэффициенте трения $\mu = 0.2$ точка максимума находится на поверхности. Интересно, что при всех прочих равных условиях абсолютные значения максимумов в слабо сжимаемом материале ($\nu = 0.45$) меньше, чем в материале со значением коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$.

Контактные давления и внутренние напряжения в случае вязкоупругого материала зависят от скорости. В связи с этим были получены зависимости максимальных значений растягивающих и максимальных касательных напряжений от скорости скольжения индентора (рис.1.14). При скорости скольжения, близкой к нулю, значения напряжений соответствуют тем, что получаются при решении задачи об упругом вдавливании (при наличии сил трения) с длительным модулем сдвига G , в качестве упругой характеристики материала. При увеличении скорости скольжения одновременно с ростом максимальных значений контактного давления растут и значения максимумов напряжений. Следует отметить, что этот рост ограничен предельными значениями, которые определяются путем решения задачи о расчете напряжений для упругого материала с модулем сдвига G . Эти предельные значения для параметров расчета, соответствующих результатам рис.1.15, составляют $\tau_{\max} = 0.5697$ и $\sigma_{x_{\max}} = 0.7232$.

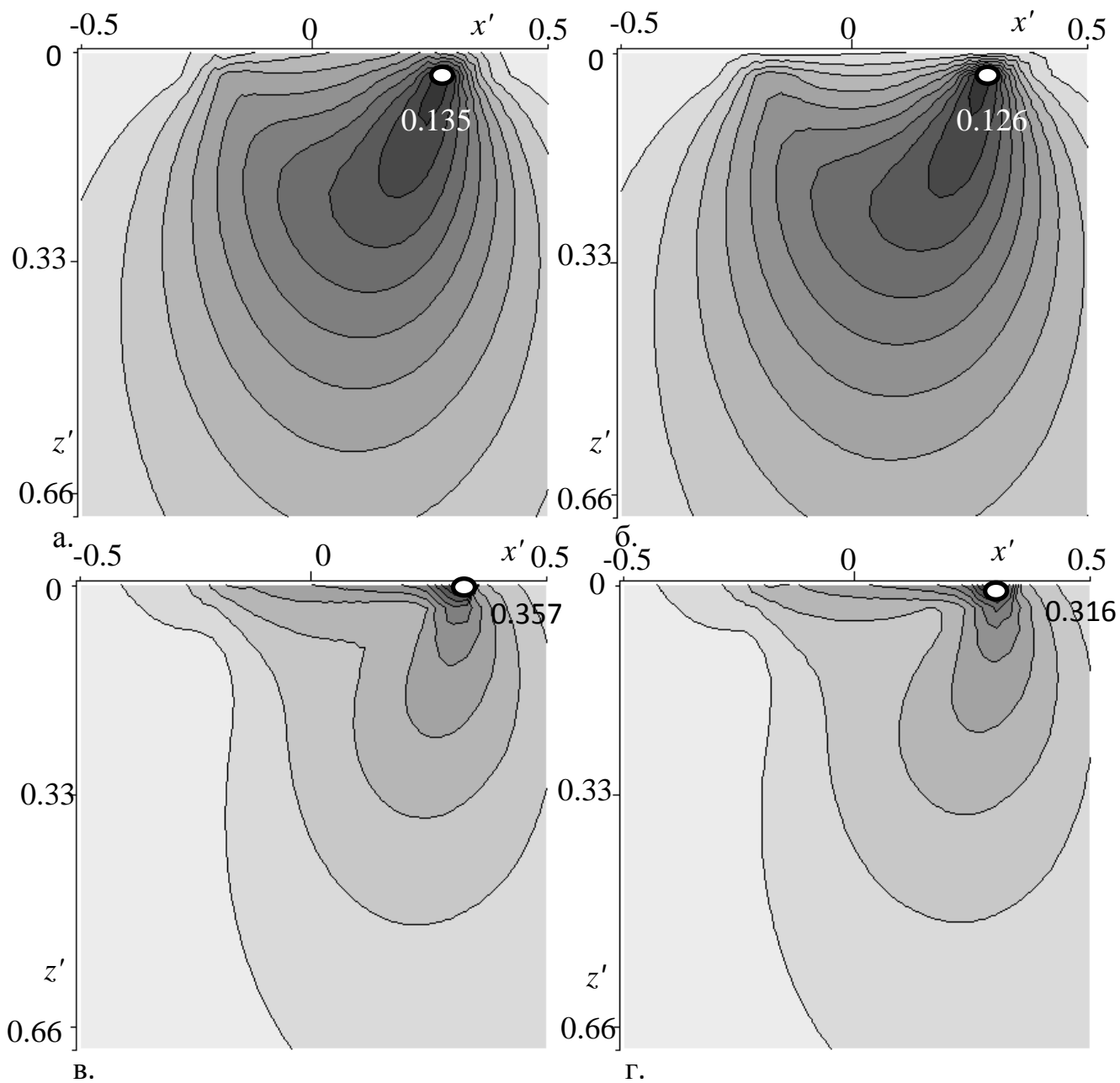


Рис.1.13 Распределение максимальных касательных напряжений под штампом (сечение плоскостью $y = 0$): $\mu = 0$ (а, б), $\mu = 0.5$ (в, г); $\nu = 0.3$ (а, в), $\nu = 0.45$ (б, г).
 $Q' = 0.1$, $c = 5$, $V' = 0.75$.

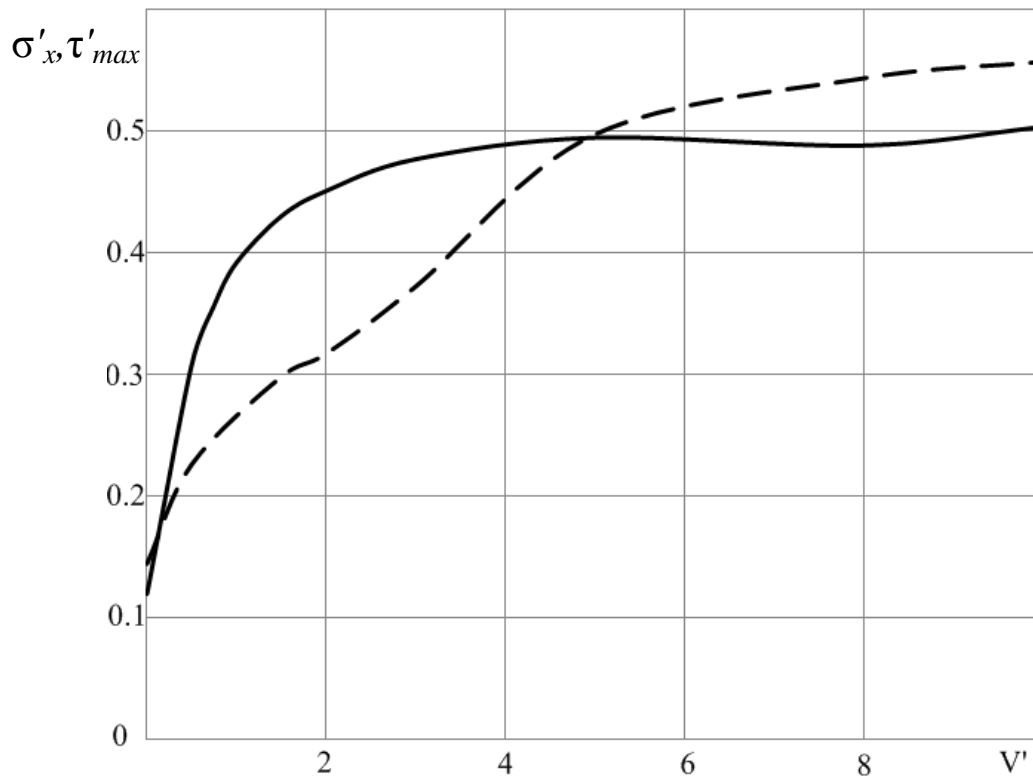


Рис.1.14 Зависимость максимальных касательных τ'_{max} (сплошные линии) и растягивающих σ'_x (пунктирные линии) напряжений от скорости. $Q'=0.1$, $c = 5$, $V'=0.75$, $\nu=0.3$.

1.5 Выводы по Главе 1

Построенная система уравнений и разработанный метод ее решения позволяют провести анализ влияния формы индентора, касательных напряжений в области контактного взаимодействия, а также вязкоупругих характеристик основания, нагрузки и скорости скольжения на распределение напряжений и силу сопротивления при скольжении жесткого индентора по вязкоупругому полупространству (трехмерная постановка).

Показано, что общая сила трения не является прямой суммой ее механической и адгезионной составляющих, как это часто принимается при расчете силы сопротивления скольжению деформируемых тел, поскольку распределение контактного давления при наличии касательных напряжений в области контакта отличается от распределения давления в случае скольжения без трения. При этом указанное различие зависит от величины коэффициента Пуассона ν .

В Главе 1 также показано, что на основе решения контактной задачи о скольжении с трением гладкого индентора по границе упругого полупространства можно провести расчет напряженного состояния, возникающего в полупространстве. В результате исследования напряженного состояния вязкоупругого полупространства обнаружено, что максимумы максимальных касательных напряжений могут локализоваться как под поверхностью, так и на поверхности в зависимости от величины коэффициента трения, а растягивающие и сжимающие напряжения достигают максимума на поверхности. Величина максимумов напряжений растет с увеличением скорости скольжения, она несколько больше для материалов с меньшим значением коэффициента Пуассона. Увеличение коэффициента трения также приводит к росту концентрации напряжений под штампом.

Глава 2. Задача о скольжении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству с пригрузкой в виде двух сосредоточенных сил.

2.1 Постановка задачи о контакте с пригрузкой

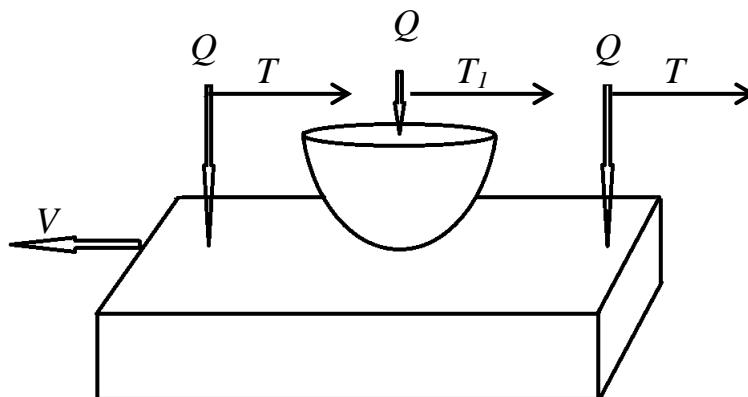


Рис. 2.1 Схема контакта.

Рассматривается пространственная контактная задача о скольжении с постоянной скоростью гладкого индентора и двух точечных нагрузок по границе вязкоупругого полупространства. В области контакта действуют касательные напряжения, связанные с контактным давлением законом трения Кулона–Амонтона и обусловленные силами адгезионного взаимодействия поверхностей. Впереди и позади индентора на равном расстоянии движутся две сосредоточенные силы (пригрузки).

Модель материала полупространства аналогична рассмотренной в Главе 1 и описывается выражением (1.3). На поверхности полупространства рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 z = 0: \quad & \tau_{xz}(x, y) = \mu\sigma_z(x, y), \quad w(x, y) = f(x, y) + \psi(x, y, l) + D : (x, y) \in \Omega, \\
 & \tau_{xz}(x, y) = T\delta(x \pm l, y \pm 0), \quad \sigma_z(x, y) = Q\delta(x \pm l, y \pm 0), \\
 & \tau_{xz}(x, y) = 0, \quad \sigma_z(x, y) = 0 : (x, y) \notin \{\Omega, (-l, 0), (l, 0)\}, \\
 & \tau_{yz} = 0 : -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь Ω – область контакта, $w(x, y)$ – вертикальные смещения поверхности полупространства, D – внедрение индентора, σ_z и τ_{xz} , τ_{yz} – нормальное и касательные напряжения, μ – коэффициент трения, T и Q – касательная и нормальная сила соответственно, при этом $T = \mu Q$. Форма индентора описывается функцией $f(x, y)$. Контактные давления внутри области контакта Ω удовлетворяют условию равновесия:

$$Q = \iint p(x, y) dx dy \quad (2.2)$$

Вертикальные перемещения границы полупространства, обусловленные воздействием пригрузки, описываются функцией $\psi(x, y, l)$. Координаты точек приложения сосредоточенных сил: $(-l, 0)$ и $(l, 0)$. Контактные давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$ и область контакта Ω неизвестны.

Линейная система уравнений, составленная на основании граничных условий (2.1) и условия равновесия внутри области Ω^* (2.2) запишется в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_1 + \psi_1 \\ \vdots \\ f_N + \psi_N \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

При составлении системы (2.3) помимо расчета коэффициентов k_i^j требуется также рассчитать значения кусочно-постоянной функции дополнительных перемещений ψ_i .

Рассмотрим подробнее способ вычисления значений ψ_i для n -го количества сосредоточенных сил, действующих в точках с координатами (x^γ, y^γ) , где $\gamma = 1..n$. Если область Ω^* разбита на $N_1 \times N_2$ прямоугольных элементов, коэффициент ψ_i соответствует вертикальному смещению границы полупространства в точке (x_q, y_j) , где $i = q \cdot N_1 + j$, $j = 1..N_1$, $q = 1..N_2$, $i = N_1 \cdot N_2$. Производя суммирование

по всем имеющимся сосредоточенным силам, из (1.7) получим следующее выражений для элементов ψ_i :

$$\psi_i = \psi(x_q, y_j) = \sum_{\gamma}^n \left(\frac{1-2\nu}{4\pi G} \mu p(x^{\gamma}, y^{\gamma}) \left[\frac{x^{\gamma} - x_q}{R^2} + \frac{1}{V} k I_1 \left(\frac{x^{\gamma} - x_q}{\lambda V}, \frac{y^{\gamma} - y_j}{\lambda V} \right) \right] \right) - \sum_{\gamma}^n \left(\frac{1-\nu}{2\pi G} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{V} k I_2 \left(\frac{x^{\gamma} - x_q}{\lambda V}, \frac{y^{\gamma} - y_j}{\lambda V} \right) \right] \right) \quad (2.4)$$

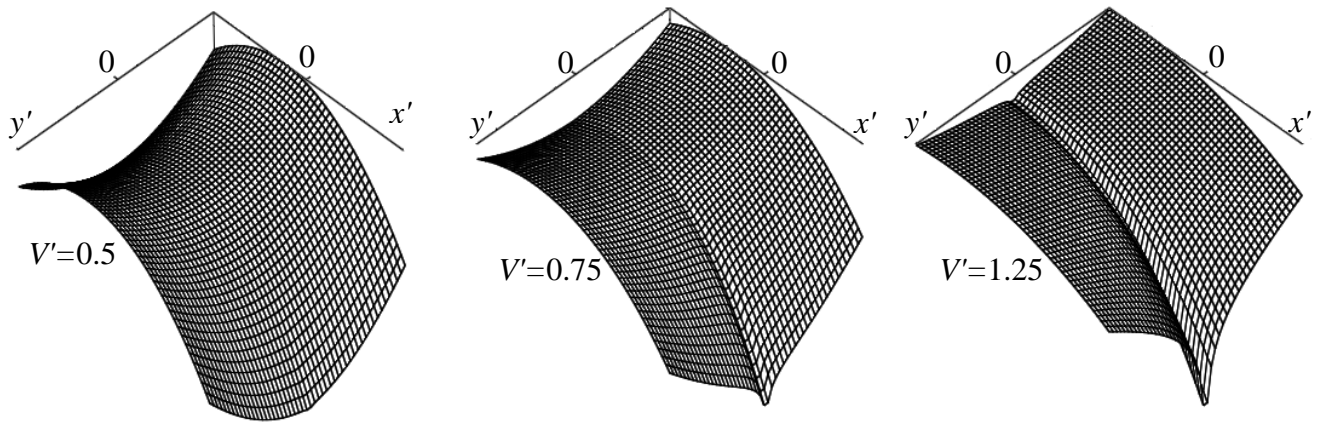
$$I_1(\alpha, \beta) = e^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + \beta^2}, \quad I_2(\alpha, \beta) = e^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}, \quad u = \frac{x^{\gamma} - x_q - V\tau}{\lambda V}$$

Далее, система (2.3) решается при помощи итерационного метода, подробно описанного в Главе 1. В результате решения определяются область контакта штампа, распределение контактного давления и внедрение штампа в полупространство с учетом воздействия сосредоточенных сил.

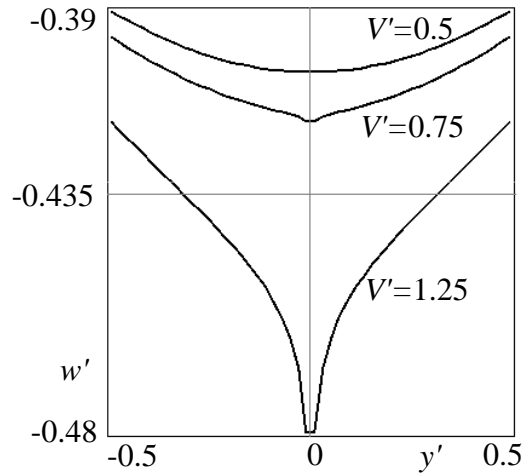
2.2 Результаты решения контактной задачи и анализ влияния пригрузки

С целью определения влияния пригрузки в виде двух сосредоточенных сил на контактные характеристики при скольжении штампа по вязкоупругому полупространству были получены решения контактной задачи при различных расстояниях l' от точек приложения сил до центра индентора, и при различных скоростях скольжения.

Изменения контактных характеристик штампа с пригрузкой по сравнению с контактными характеристиками изолированного индентора обусловлены наличием дополнительных перемещений границы полупространства в области контакта. На рис.2.2 изображены дополнительные перемещения границы полупространства $\psi(x, y)$ внутри области Ω^* . В данном случае две сосредоточенные силы движутся при трех различных скоростях $V' = 0.5$, $V' = 0.75$, $V' = 1.25$.



а.



б.

Рис. 2.2 Функция $\psi(x, y)$ ($Q' = 0.1$, $\nu = 0.3$, $c = 3$, $\mu = 0.5$, $l' = 3$).

Расстояние от точек приложения сил до начала системы координат (при наличии индентора это соответствует его центру) в каждом случае одинаковое: $l' = 3$. На рис.2.2б представлены дополнительные перемещения в плоскости $x = 0$.

При относительно небольшой скорости $V' = 0.5$, когда проявляются преимущественно упругие свойства полупространства, поверхность, описываемая функцией $\psi(x, y)$, принимает седловидную форму, точка минимума внедрения границы полупространства смещена незначительно в сторону, противоположную направлению движения. По мере увеличения скорости движения сосредоточенных сил вязкие свойства полупространства начинают преобладать. Минимум внедрения поверхности значительно смещается назад, вдоль оси Ox возникает канавка, которая образуется после прохождения точечной нагрузки, движущейся впереди. Глубина этой канавки тем меньше, чем дальше она находится от точки приложения передней сосредоточенной силы. При дальнейшем увеличении скорости скольжения глубина указанной канавки значительно увеличивается, поверхность полупространства приобретает клиновидную форму. Как уже отмечалось, дополнительные перемещения границы полупространства вызывают изменения в форме площадки контакта и распределении давления по ней относительно случая скольжения изолированного штампа. Из рис.2.3 видно, что при увеличении скорости скольжения, давление в центре площадки контакта уменьшается вплоть до полного разделения площадки на две подобласти. Это возможно благодаря тому, что при большой скорости скольжения глубина центральной канавки оказывается больше, чем глубина максимального внедрения индентора D .

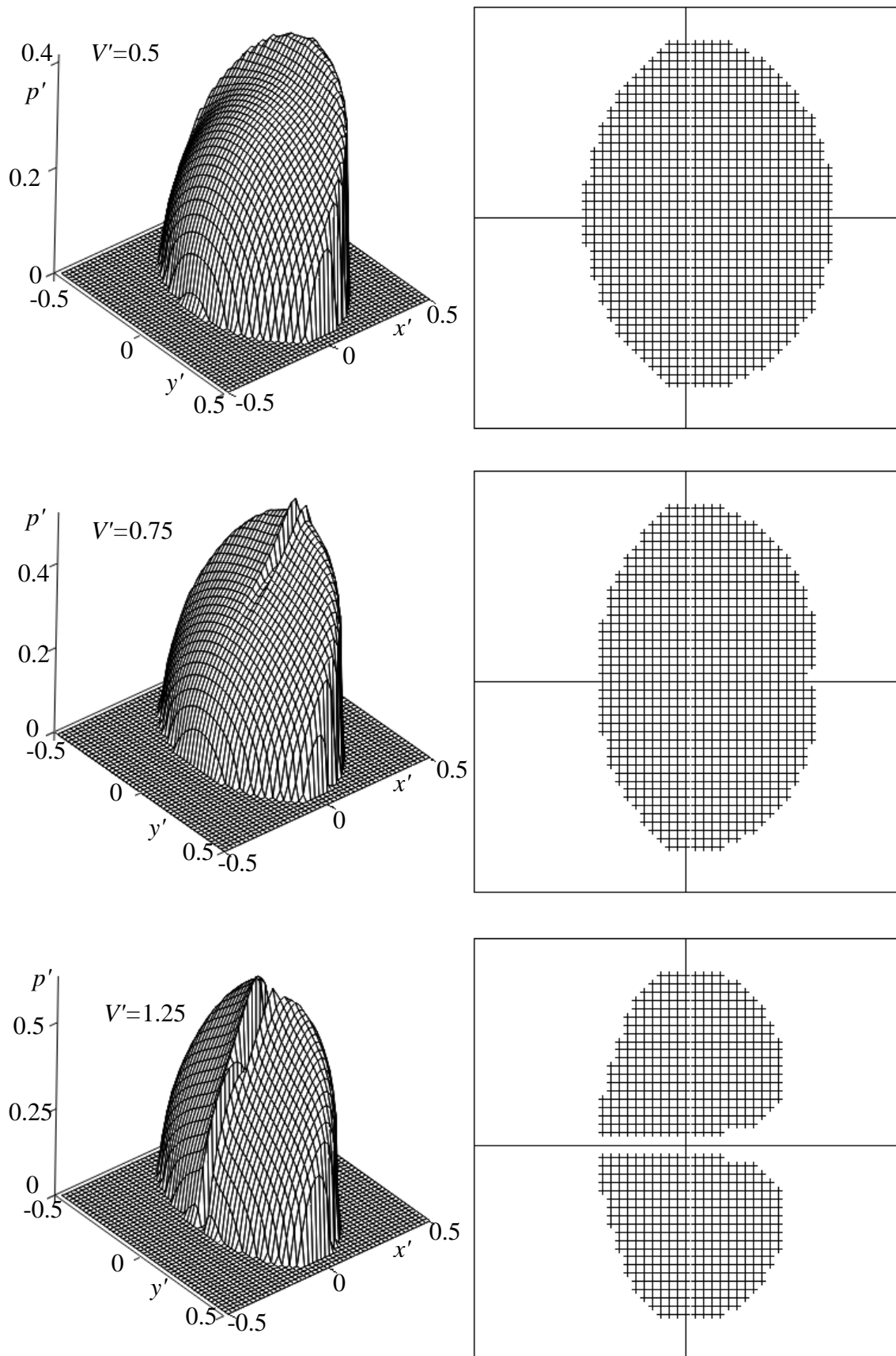


Рис.2.3 Площадки контакта и распределение контактного давления ($Q' = 0.1$, $\nu=0.3$, $c = 3$, $\mu=0.5$).

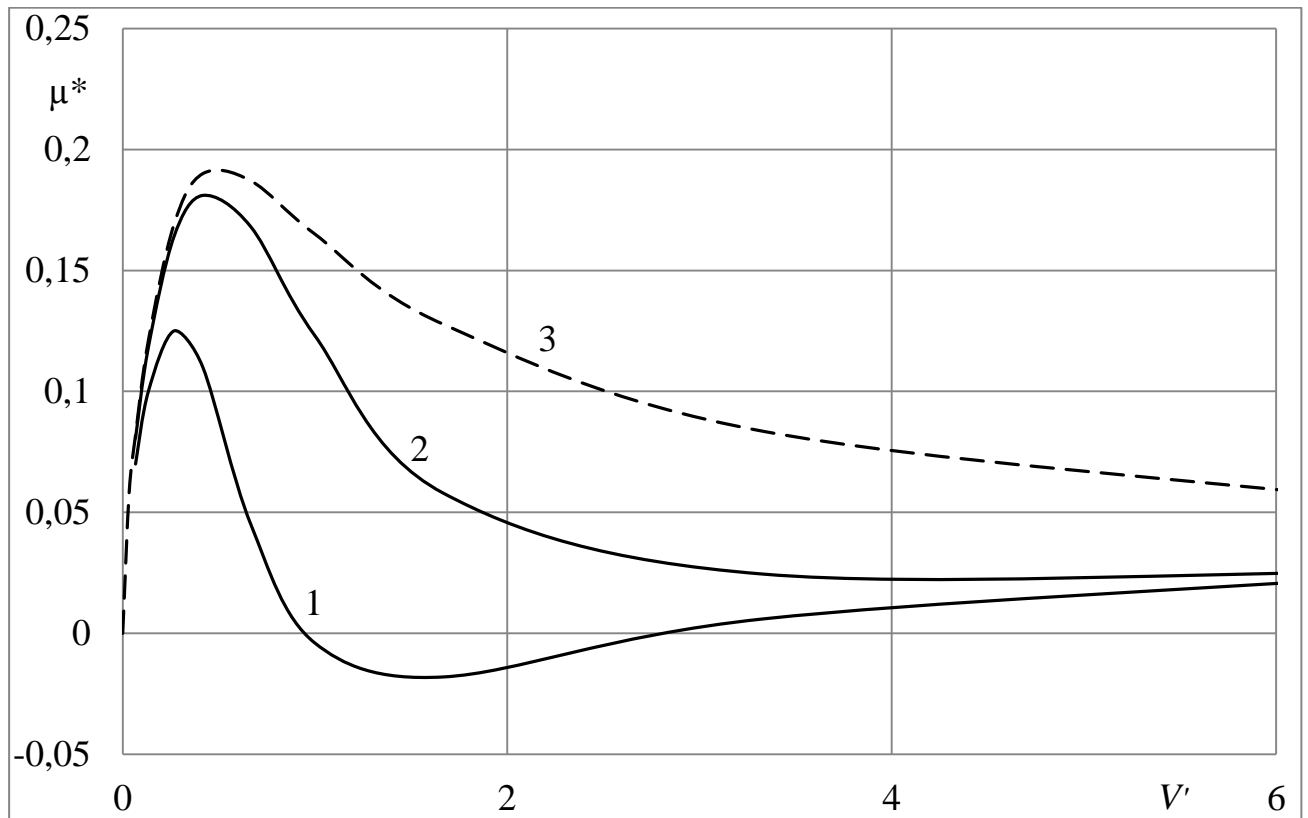


Рис. 2.4 Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости скольжения $c = 5$, $\mu=0.5$, $\nu=0.3$, $Q' = 0.1$ (кривая 1 $l' = 3$) кривая 2 $l' = 10$, кривая 3 – изолированный штамп

В связи с вышеупомянутым изменением распределения контактного давления, изменяется также и значение деформационной составляющей коэффициента трения. На рис.2.4 представлена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости для изолированного штампа (пунктирная кривая) и штампа, скользящего при наличии точечных пригрузок (сплошные кривые), находящихся на расстоянии $l'=3$ и $l'=10$ от центра штампа. При относительно малых скоростях, когда вязкие свойства материала полупространства проявляются незначительно, значение деформационной составляющей коэффициента трения для штампа с пригрузкой практически совпадает с изолированным штампом. Увеличение скорости приводит к снижению деформационной составляющей коэффициента трения относительно изолированного индентора. Это обусловлено тем, что при увеличении скорости скольжения минимум дополнительных перемещений смещается в сторону, противоположную направлению скольжения (рис.2.2), соответственно возрастают контактные давления в задней части индентора. Как видно из рис.2.4 (кривая 1), деформационная составляющая коэффициента трения при определенных скоростях скольжения (и др. параметрах задачи) становится отрицательной. Таким образом, дополнительные перемещения границы полупространства настолько сильно смещают контактные давления назад, что вызывают силу, толкающую индентор в направлении скольжения. При увеличении скорости скольжения, поверхность, описываемая функцией $\psi(x, y)$, меняет свою форму таким образом, что деформационная составляющая коэффициента трения снова становится положительной (рис.2.2).

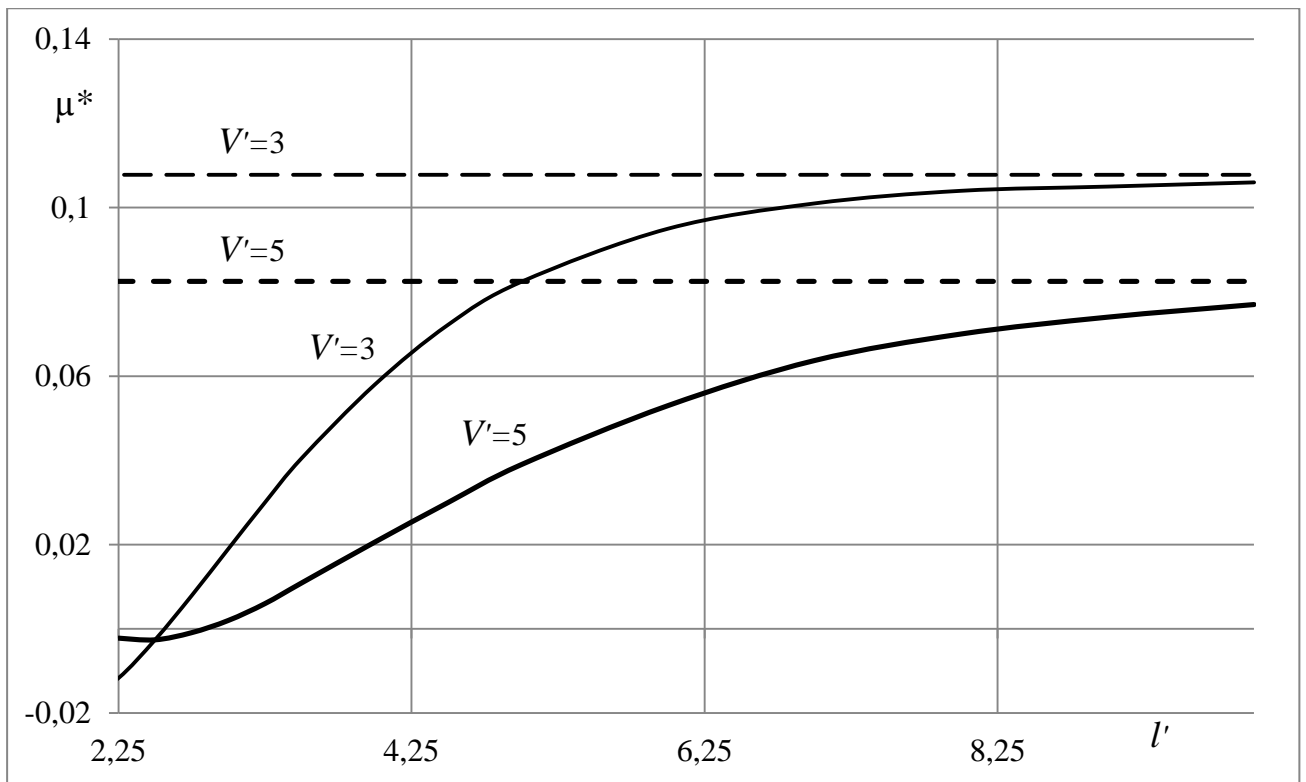


Рис. 2.5 Зависимости деформационной составляющей силы трения от расстояния между центром штампа и сосредоточенными силами, рассчитанные при $c = 3$, $V'=3$, $V'=5$, $\mu=0.5$, $\nu=0.3$, $Q'=0.1$

Также была исследована зависимость деформационной составляющей коэффициента трения индентора от расстояния между сосредоточенными силами и центром индентора (рис.2.5). Исследования проводились при двух различных скоростях скольжения $V'=3$, $V'=5$. Штриховые прямые изображают деформационную составляющую коэффициента трения изолированных штампов. При малом расстоянии от точек приложения сосредоточенных сил до центра индентора гистерезисные потери значительно ниже, чем в случае, когда индентор скользит без пригрузки. При малых значениях l' наблюдаются отрицательные значения деформационной составляющей коэффициента трения.

При увеличении расстояния l' , значение деформационной составляющей коэффициента трения стремится к асимптоте, которая соответствует значению μ^* при движении изолированного штампа.

2.3 Выводы по Главе 2

Предложен метод решения контактной задачи о скольжении жесткого штампа по вязкоупругому полупространству при наличии двух сосредоточенных сил, действующих вне области контакта на линии скольжения штампа. Вычислены дополнительные перемещения границы полупространства, возникающие в результате воздействия пригрузки.

Обнаружен эффект разделения площадки контакта индентора на две подобласти вследствие возникающей в результате прохождения сосредоточенной силы канавки.

Исследования показали, что расположение сосредоточенных сил, рассмотренное в задаче, вызывает снижение деформационной составляющей коэффициента трения относительно случая изолированного штампа. Установлено, что деформационная составляющая коэффициента трения может принимать отрицательные значения при малых расстояниях между сосредоточенными силами и центром штампа (сосредоточенные силы находятся при этом вне области контакта). Этот эффект объяснен влиянием сосредоточенных сил на деформацию формы поверхности полупространства под штампом.

Увеличение расстояния от центра индентора до точек приложения сосредоточенных сил вызывает увеличение деформационной составляющей коэффициента трения вплоть до асимптотического значения, равного деформационной составляющей коэффициента трения изолированного индентора.

Глава 3. Задача о скольжении системы из двух штампов по вязкоупругому полупространству

3.1 Постановка задачи о скольжении двух инденторов.

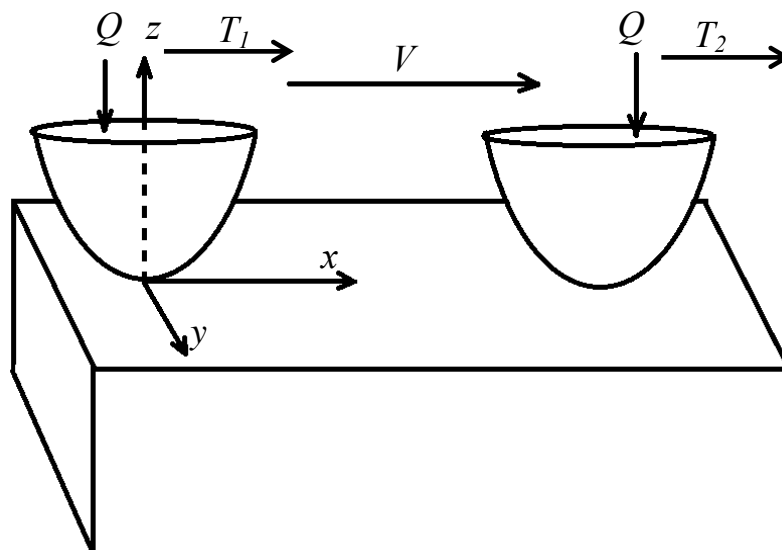


Рис.3.1 Схема контакта.

Рассмотрим процесс скольжения с постоянной скоростью V двух жестких инденторов по вязкоупругому полупространству в направлении оси Ox (рис.3.1). Каждый индентор нагружен вертикальной силой Q и касательной силой T , коллинеарной вектору скорости. Система координат (x, y, z) связана с индентором 1, движущимся за индентором 2, ось z направлена по внешней нормали к границе полупространства. Расстояние между инденторами постоянно $l = const$. Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
z = 0: \quad \tau_{xz}(x, y) &= \mu\sigma_z(x, y), \quad \tau_{yz} = 0, \\
w_1(x, y) &= f(x, y) + \psi_1(x, y) + D_1 \quad (x, y) \in \Omega_1 \\
w_2(x, y) &= f(x-l, y) + \psi_2(x, y) + D_2 \quad (x, y) \in \Omega_2 \\
\sigma_z &= 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega_1, \Omega_2 \\
-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ω_1 и Ω_2 – области контакта инденторов (здесь и далее индексы 1 и 2 обозначают соответствие индентору 1 или 2), D_1 и D_2 – внедрения инденторов, w_1 и w_2 – вертикальные перемещения поверхности полупространства, σ_z и τ_{xz} , τ_{yz} – нормальное и касательные напряжения, соответственно, μ – коэффициент трения относительного проскальзывания, одинаковый для обоих штампов. Функции $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ описывают дополнительные вертикальные перемещения полупространства в области Ω_1 и Ω_2 соответственно в результате воздействия соседнего индентора, $f(x, y) = -(x^2 + y^2)/(2r)$ описывает форму каждого из инденторов в системах координат, связанных с их центрами (r – радиус каждого индентора). Необходимо найти контактные давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$ под каждым индентором, неизвестные области контакта Ω_1 и Ω_2 , а также внедрения инденторов в полупространство D_1 и D_2 . Для определения областей контакта используется условие непрерывности давлений на их границе. Контактные давления удовлетворяют условию равновесия:

$$Q = \iint_{\Omega_1} p(x, y) dx dy, \quad Q = \iint_{\Omega_2} p(x, y) dx dy \tag{3.2}$$

Свойства вязкоупругого полупространства описываются моделью, рассмотренной в Главе 1 (1.3). Вводятся безразмерные параметры (1.12).

3.2 Метод решения контактной задачи.

Решение задачи основано на методе граничных элементов, применявшемся в предыдущих Главах. Выбираются две одинаковые по размеру области Ω_1^* и Ω_2^* , заведомо большие искомым областям контакта Ω_1 и Ω_2 . и разбиваются на одинаковые прямоугольные элементы (рис.3.2). Отличие данной задачи от задачи с пригрузкой заключается в том, что распределение давления и площадка контакта соседнего индентора заранее не известна, поэтому сразу рассчитать функцию дополнительных перемещений невозможно. В связи с этим предложен следующий метод решения контактной задачи.

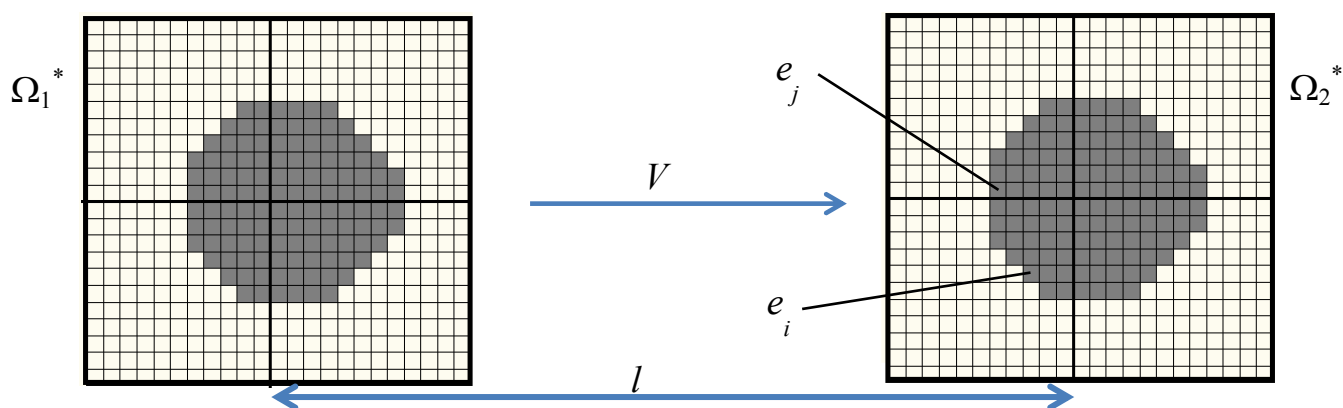


Рис.3.2 Построение сетки внутри областей Ω_1 и Ω_2

Сначала один из инденторов рассматривается как изолированный. В данном случае выбор пал на индентор 2, поскольку он меньше подвержен воздействию соседнего индентора за счет вязкоупругих свойств материала. Определяются контактные характеристики выбранного индентора с помощью метода, описанного в Главе 1. На данном этапе предполагается, что полученные контактные характеристики приближенно равны искомым. Таким образом, становится возможным вычислить функцию дополнительных перемещений границы полупространства внутри области Ω_1^* на основании соотношения (1.9):

$$\Psi_{1,j} = \frac{1}{\pi^2 c} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \iint_{\omega_{2,i}} p_{2,i} \left\{ \frac{(x_{ij}' - \xi')\mu}{(x_{ij}' - \xi')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2} + \mu B e^{A(x_{ij}' - \xi')} \int_{A(x_{ij}' - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + A^2(\eta' - y_{ij}')^2} \right\} d\xi' d\eta' -$$

$$- \frac{2}{\pi^2 c} \iint_{\omega_{2,i}} p_{2,i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_{ij}' - \xi')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2}} + B e^{A(x_{ij}' - \xi')} \int_{A(x_{ij}' - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + A^2(\eta' - y_{ij}')^2}} \right\} d\xi' d\eta'$$
(3.3)

После расчета дополнительных перемещений $\Psi_{1,j}$, на основании граничных условий (3.1) и условия равновесия (3.2) составляется система линейных уравнений для индентора 1:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{1,N} \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_{1,1} + \Psi_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,N} + \Psi_{1,N} \end{bmatrix}$$
(3.4)

Система (3.4) решается с помощью итерационной процедуры, описанной в Главе 1. После определения контактных характеристик индентора 1 вычисляется функция дополнительных перемещений границы полупространства $\Psi_{2,j}(x, y)$ внутри области Ω_2^* . Далее система линейных уравнений, аналогичная (3.4), составляется для индентора 2. Решение этой системы уравнений уточняет полученные ранее контактные характеристики индентора 2. Описанная двойная итерационная процедура (рис.3.3) прекращается в тот момент, когда найденные площадки контакта инденторов перестают отличаться от соответствующих площадок на предыдущем шаге внешнего цикла процедуры, а изменения контактных давлений не превышают заданной погрешности.

Следует отметить, что описанная процедура обладает хорошей сходимостью. Это обусловлено тем, что взаимное влияние инденторов не равнозначно. Так, при воздействии индентора 1 на индентор 2 проявляются преимущественно упругие

свойства полупространства, а индентор 2 воздействует на индентор 1 за счет вязких свойств полупространства.

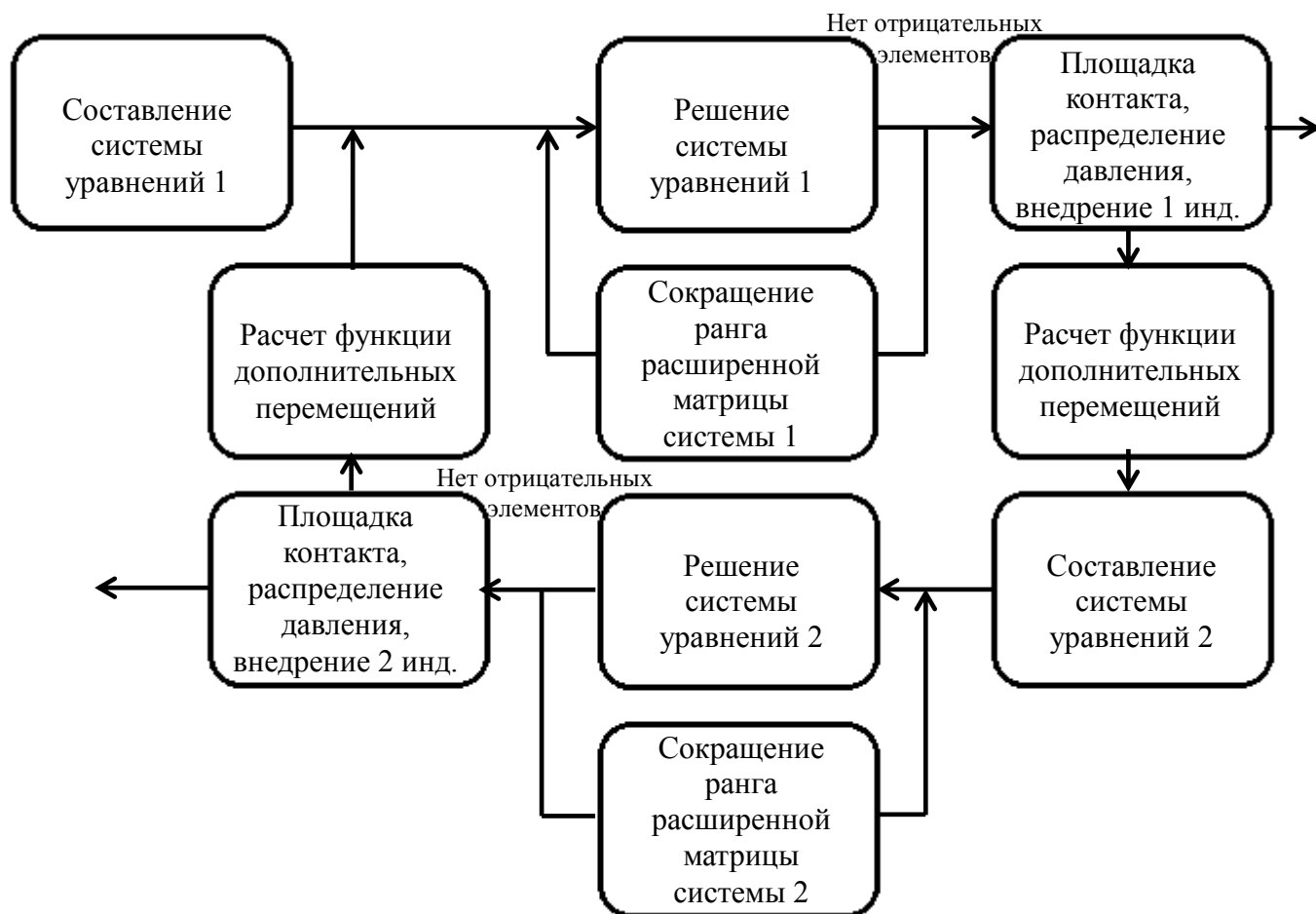


Рис.3.3. Схема работы программы.

3.3 Результаты решения контактной задачи и их анализ

С помощью предложенного метода решения контактной задачи был проведен ряд исследований. Изучались зависимости контактных характеристик, деформационной составляющей коэффициента трения, а также напряженного состояния инденторов от различных параметров задачи.

На рис.3.4 представлены распределения контактного давления инденторов и соответствующие функции дополнительных перемещений при двух характерных скоростях $V' = 3$ (рис.3.4а) и $V' = 6$ (рис.3.4б). Изображенные на рис.3.4 функции $\psi(x, y)$ наглядно демонстрируют характер взаимодействия инденторов. Так, индентор 2, двигаясь по поверхности, оставляет после себя канавку, а индентор 1

при движении вызывает впереди себя изгиб поверхности полупространства, похожий на деформацию поверхности при упругом вдавливании.

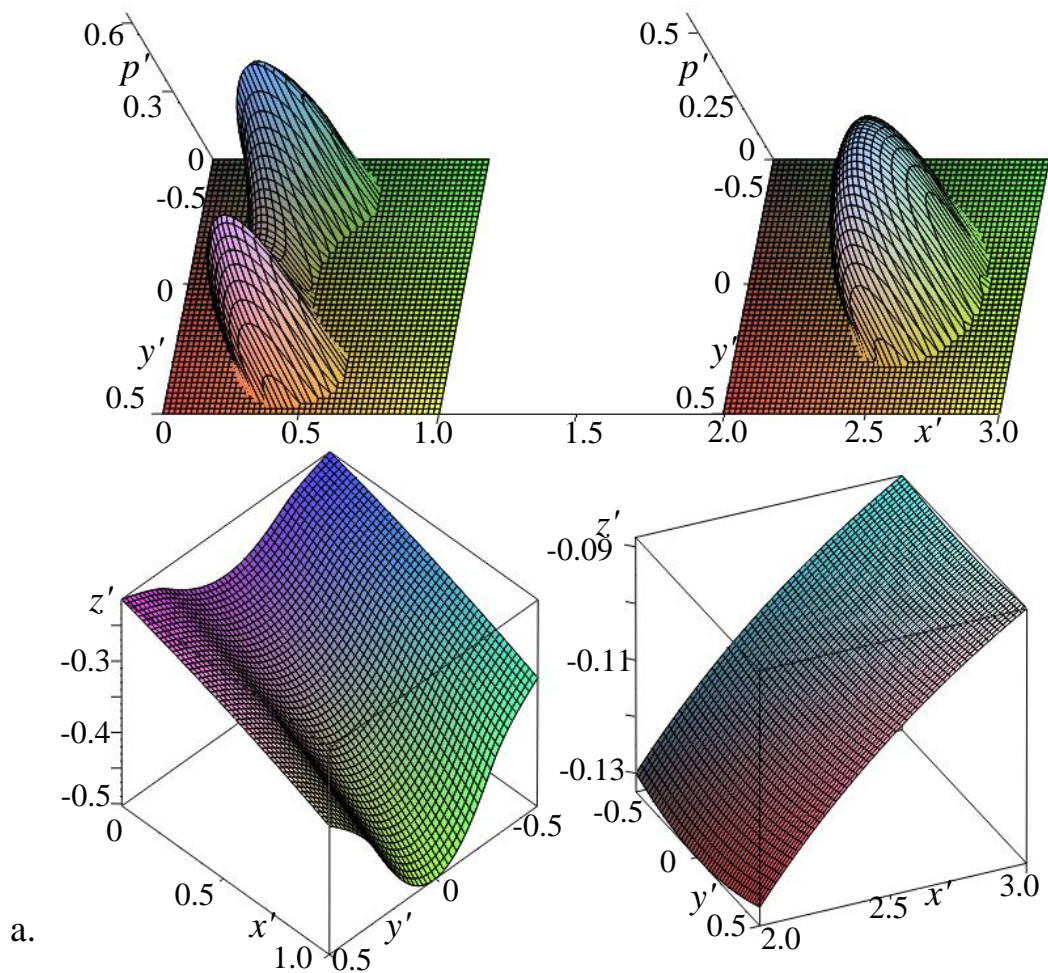


Рис.3.4а Распределение контактного давления и соответствующие функции дополнительных перемещений $c = 3$, $l' = 2$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$ $V' = 3$.

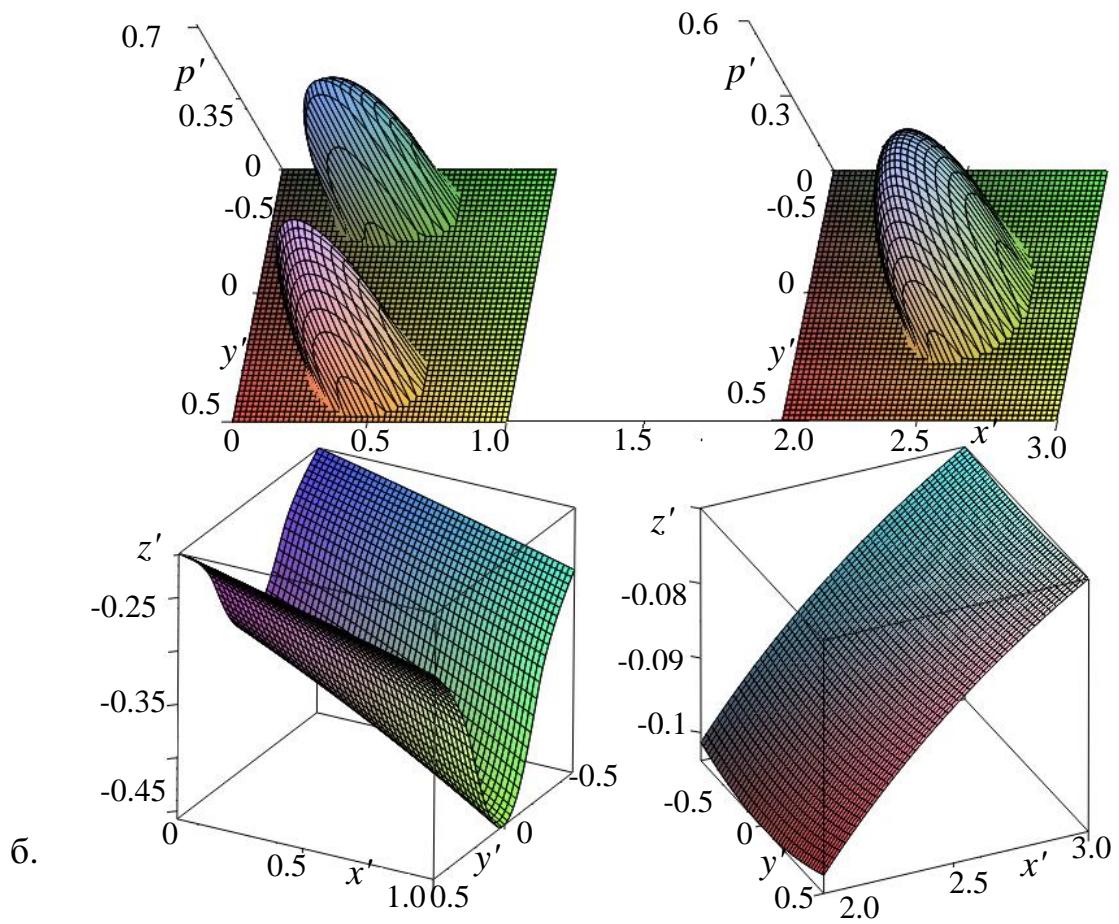


Рис.3.4б Распределение контактного давления и соответствующие функции дополнительных перемещений $c = 3$, $l' = 2$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$, $V' = 6$.

Дополнительные перемещения границы полупространства вызывают снижение давления в центре площадки контакта индентора 1. Увеличение скорости скольжения, приводит к разделению площадки контакта на две подобласти (рис.3.4б). Площадка контакта индентора 2 смещена вперед по сравнению со случаем скольжения изолированного индентора.

Результаты исследования зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от расстояния между центрами инденторов представлены на рис.3.5. Штриховой линией отмечена деформационная составляющая коэффициента трения изолированного индентора, цифрами 1 и 2 – инденторов 1 и 2 соответственно. При малом расстоянии между инденторами их взаимодействие приводит к тому, что деформационная составляющая коэффициента трения индентора 2 становится значительно больше, чем изолированного, а у индентора 1 становится отрицательной. Увеличение расстояния l' приводит к тому, что коэффициент μ^* обоих инденторов начинает асимптотически приближаться к значению в случае скольжения изолированного индентора. Из рис.3.5 видно, что коэффициент μ^* системы, состоящей из индентора 1 и 2, меньше, чем в случае скольжения изолированного индентора.

Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки Q' изображена на рис.3.6. Увеличение нагрузки при маленьких скоростях скольжения вызывает одновременное увеличение деформационной составляющей коэффициента трения у индентора 2 и уменьшение у индентора 1. При большей скорости данный эффект пропадает, деформационные составляющие коэффициента трения отличаются не столь значительно. Диапазон исследуемых нагрузок ограничен, поскольку необходимо, чтобы размер площадки контакта был мал по сравнению с радиусом индентора.

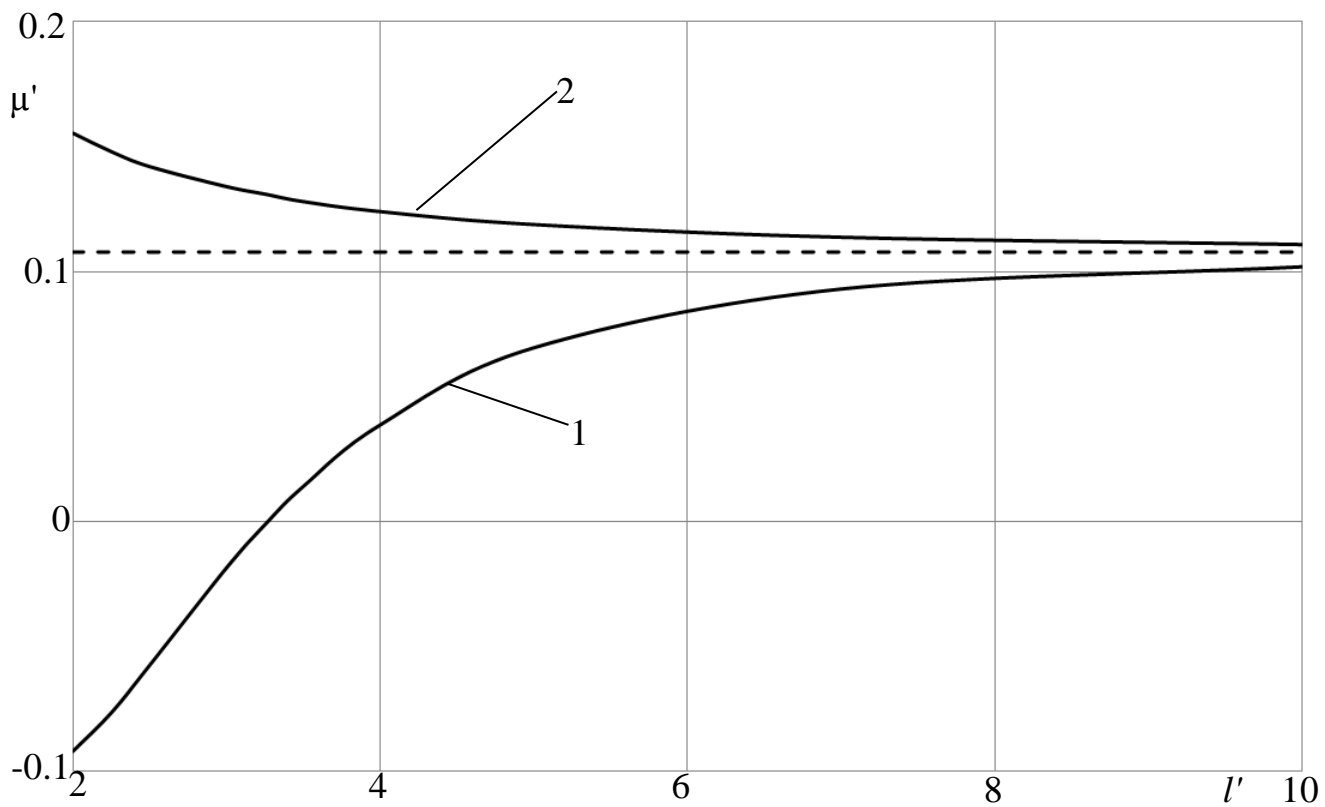


Рис.3.5 Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения индентора 1 и 2 от расстояния между ними ($c = 3$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$, $V' = 3$, $Q' = 0.08$).

На рис.3.7 изображена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов от их скорости скольжения. Штриховая кривая 3 изображает указанную зависимость в случае изолированного индентора, цифрами 1 и 2 указаны зависимости, рассчитанные для инденторов 1 и 2 соответственно. При небольших скоростях скольжения, значения μ^* инденторов 1 и 2 мало отличаются от значения μ^* изолированного индентора. При достижении определенной скорости скольжения значение коэффициента μ^* индентора 2 становится больше, чем изолированного, на постоянную величину. При этом коэффициент μ^* индентора 1 при увеличении скорости снижается быстрее, чем у изолированного индентора.

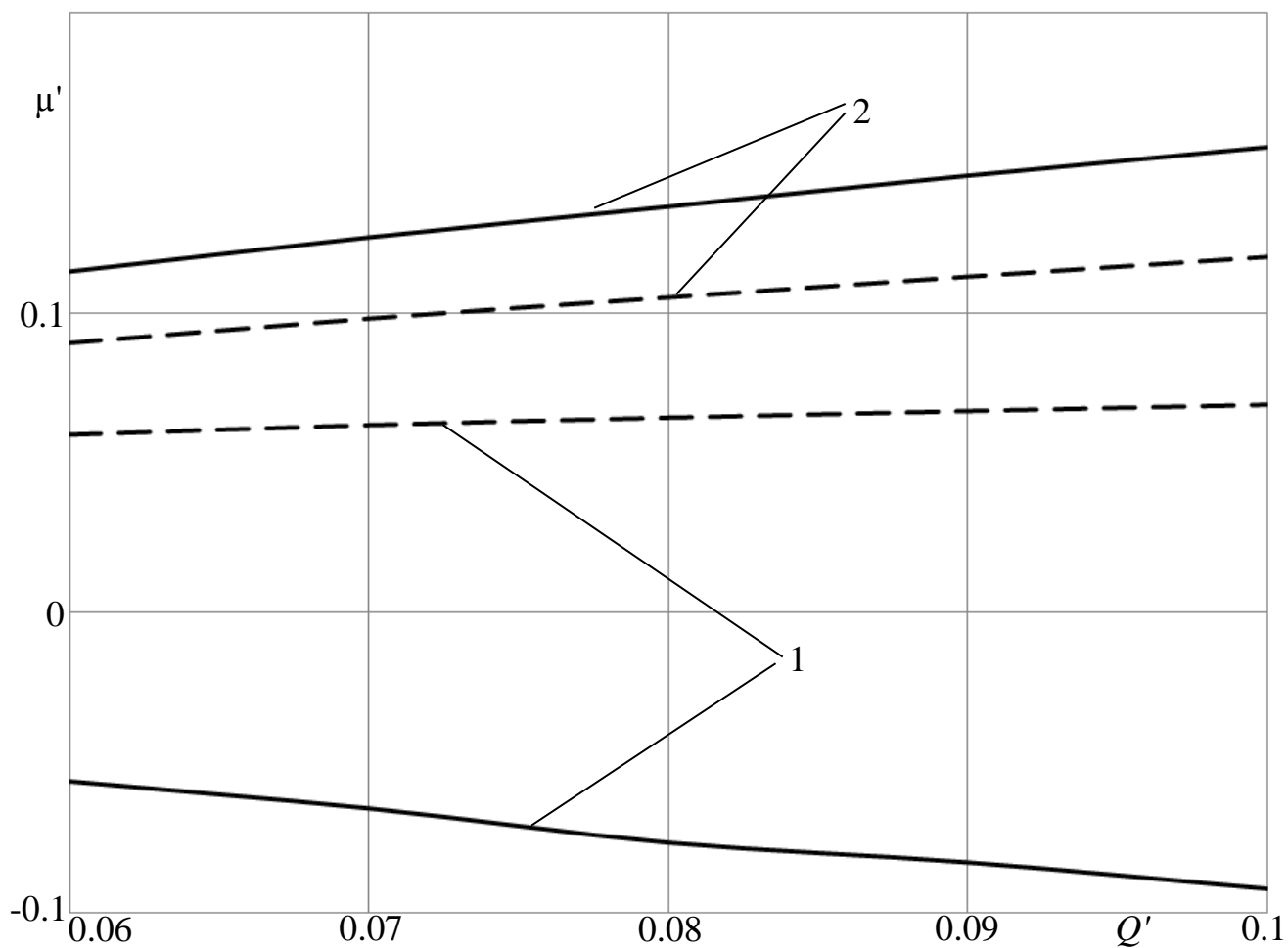


Рис.3.6 Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки при $c = 3$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$ и $V' = 3$ (сплошная линия), $V' = 6$ (пунктирная линия), $l' = 3$

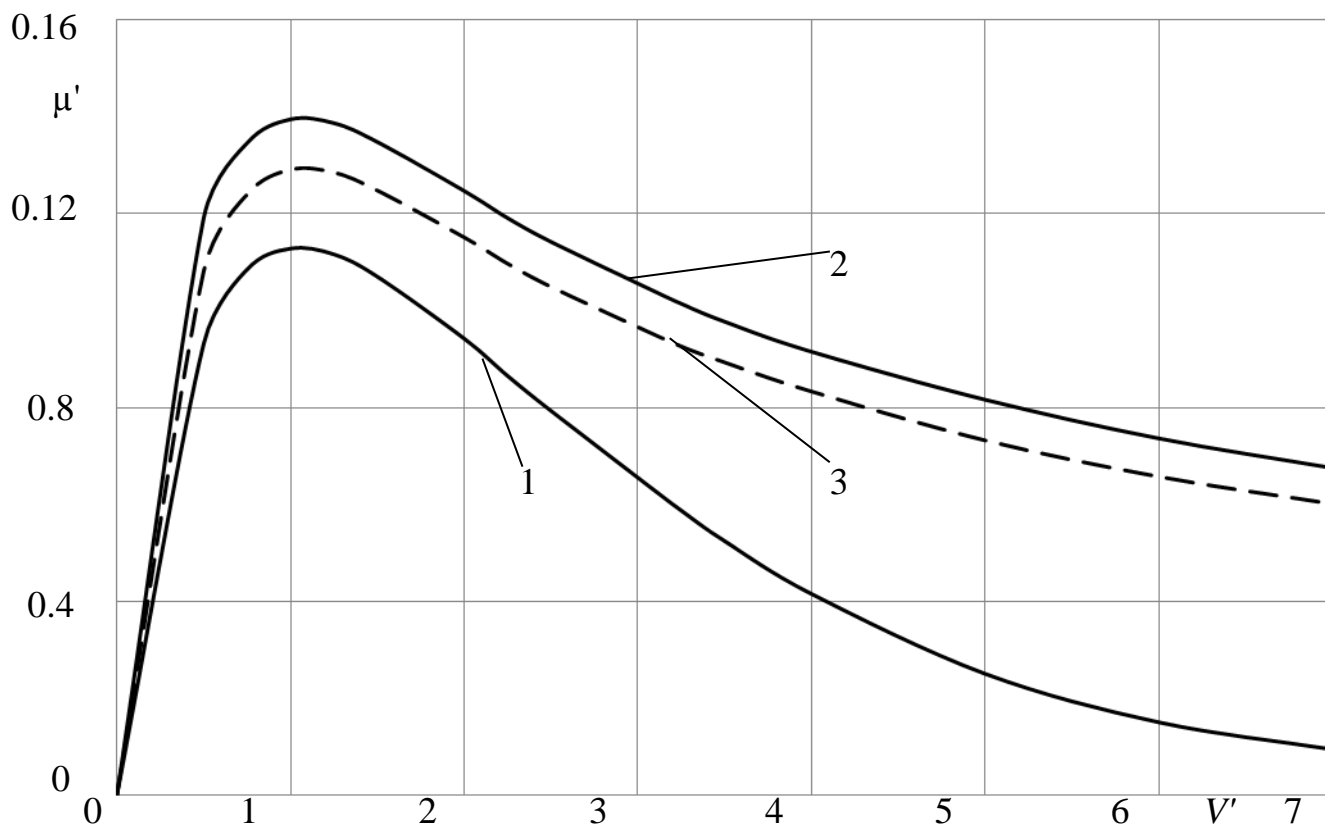


Рис.3.7 Зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от скорости скольжения при $c = 3$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$, $l = 3$, $Q' = 0.08$

3.4 Анализ напряженного состояния под парой инденторов

На основании решения контактной задачи при помощи метода, описанного в Главе 1, был проведен анализ напряженного состояния полупространства, возникающего при скольжении по нему системы из двух жестких инденторов. Исследовались максимальные касательные напряжения, возникающие на поверхности полупространства, а также в плоскости $y=0$. Для расчетов напряженного состояния полупространства использовались решения контактных задач, представленные на рис. 3.4. На рис.3.8 представлены распределения контактного давления под инденторами, рассчитанные при безразмерной скорости их скольжения $V'=3$ (а), соответствующее распределение максимальных касательных напряжений полупространства в плоскости $y=0$ (б) и распределение максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства (в). На рис.3.9 представлены аналогичные результаты для другой скорости скольжения ($V'=6$).

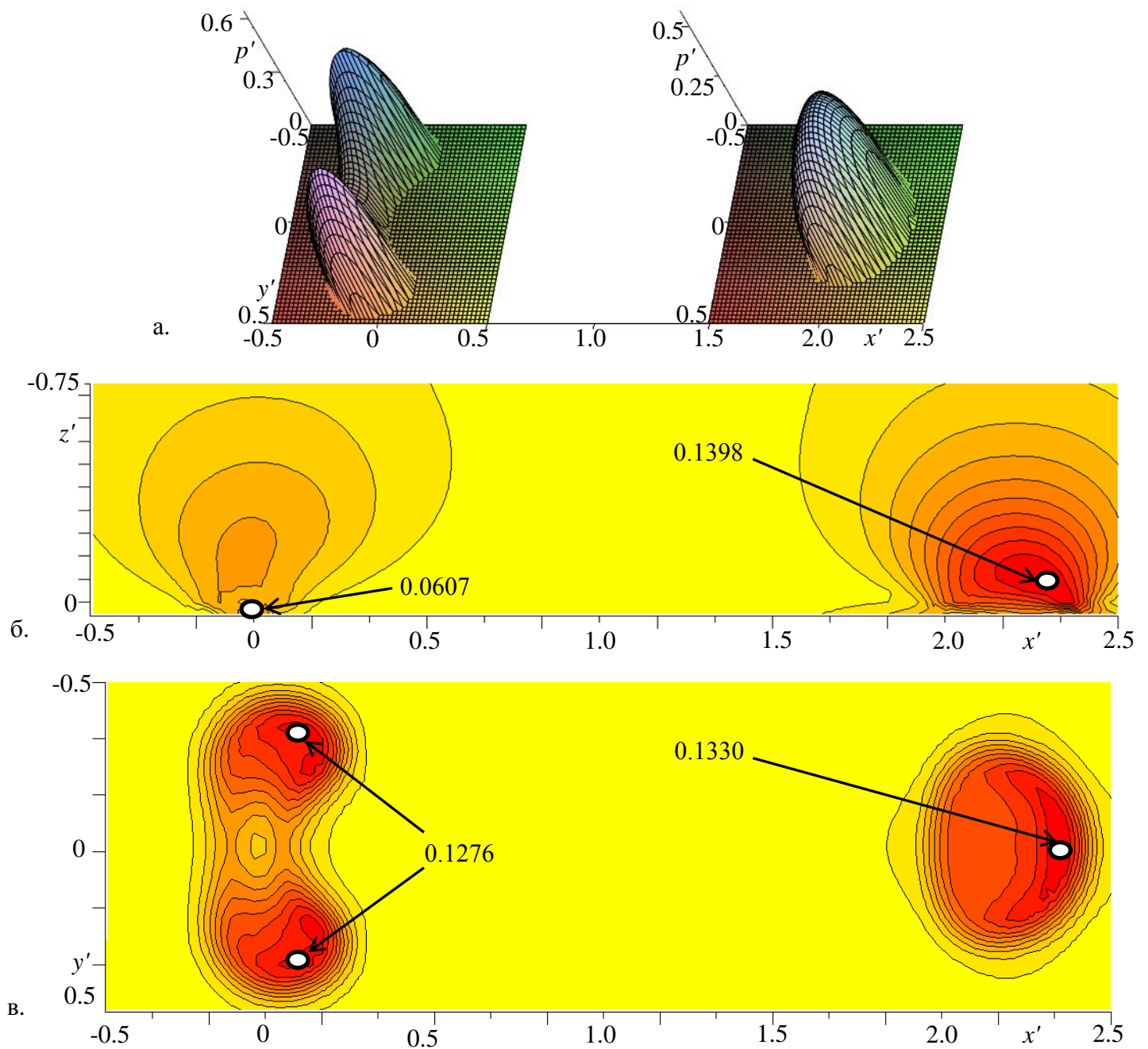


Рис.3.8. Распределение контактного давления (а), максимальные касательные напряжения в сечении (б), максимальные касательные напряжения на поверхности полупространства (в) ($c = 3$, $l' = 2$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$, $V' = 3$).

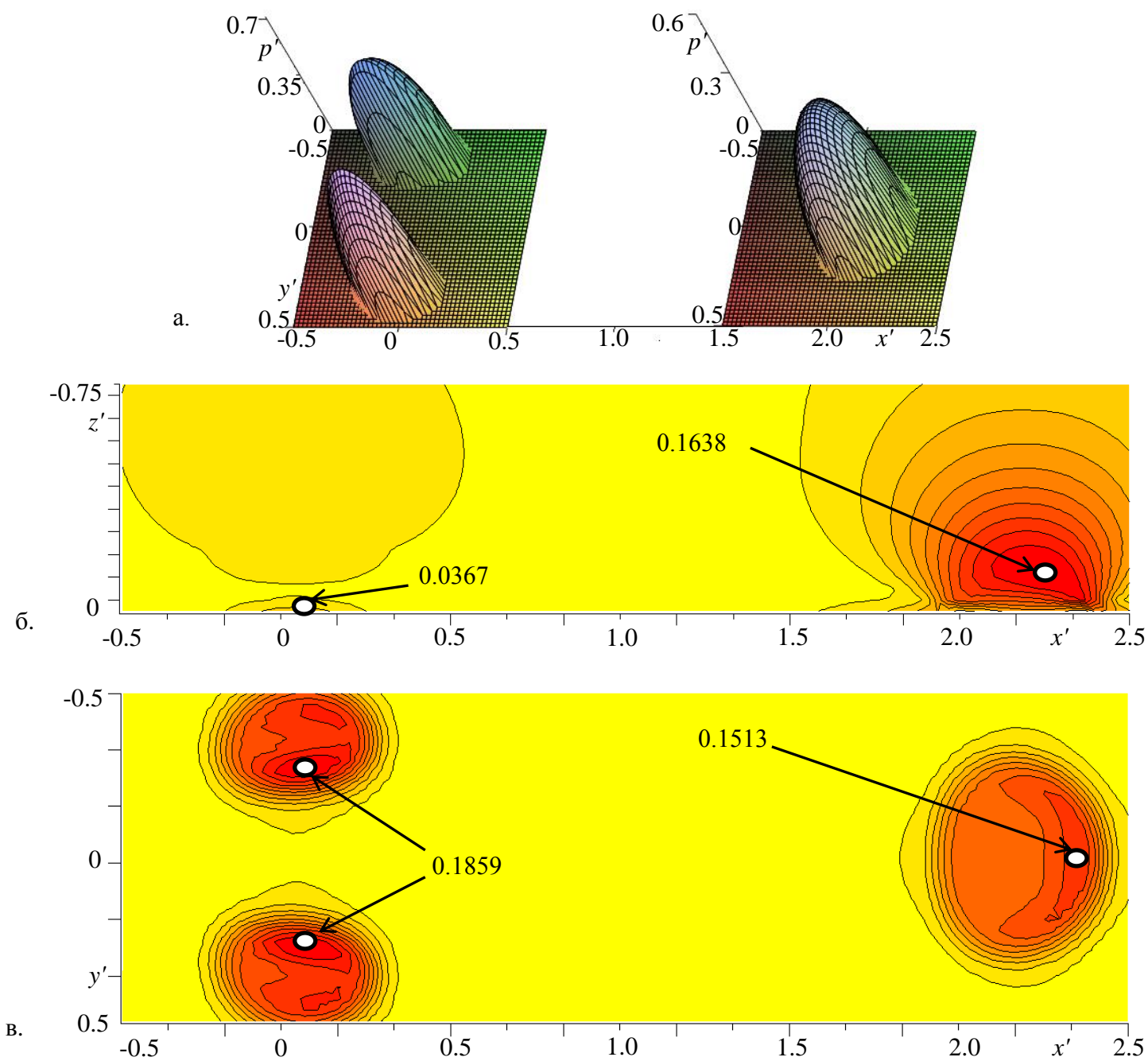


Рис.3.9. Распределение контактного давления (а), максимальные касательные напряжения в сечении (б), максимальные касательные напряжения на поверхности полупространства (в) ($c = 3$, $l' = 2$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$, $V' = 6$).

Пики максимальных касательных напряжений в плоскости $y=0$ (рис.3.8б, 3.9б) находятся под передним индентором на некотором расстоянии от поверхности полупространства, причем в случае большей скорости скольжения значение пика максимальных касательных напряжений больше. В случае меньшей скорости скольжения, пик максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства находится в передней части площадки контакта индентора 2. При увеличении скорости скольжения и разделении площадки контакта заднего индентора пики максимальных касательных напряжений концентрируются под индентором 1.

3.5 Выводы по Главе 3.

Предложен метод решения контактной задачи о скольжении двух инденторов по вязкоупругому полупространству с учетом их взаимного влияния. Исследовано влияние скорости скольжения, а также расстояния между центрами инденторов на контактные характеристики и деформационную составляющую коэффициента трения.

В результате взаимодействия между инденторами площадка контакта заднего индентора смещается назад, возникает падение давления в центре, а при достаточно большой скорости скольжения возникает эффект разделения площадки контакта на две подобласти. Передний индентор в меньшей степени подвержен влиянию соседнего индентора, его площадка контакта незначительно смещена вперед, а распределение контактного давления мало отличается от соответствующего распределения в случае скольжения изолированного индентора.

Обнаружено, что деформационная составляющая коэффициента трения системы инденторов всегда меньше, чем изолированного индентора, а уменьшение расстояния между центрами инденторов приводит к уменьшению деформационной составляющей коэффициента трения.

Деформационная составляющая коэффициента трения переднего индентора больше чем у изолированного на постоянную величину, не зависящую от скорости скольжения. В то же время разница между деформационной составляющей коэффициента трения заднего и изолированного индентора увеличивается с увеличением скорости скольжения.

Деформационная составляющая коэффициента трения заднего индентора может принимать отрицательные значения при достаточно высокой скорости скольжения и расстоянии между центрами инденторов. Обнаружен эффект разделения площадки контакта заднего индентора, который возникает при

достаточно высокой скорости скольжения и малом расстоянии между центрами инденторов.

Заключение

- Разработан метод решения контактной задачи о скольжении гладкого индентора по вязкоупругому полупространству, который позволяет провести анализ влияния формы индентора, касательных напряжений в области контактного взаимодействия, а также вязкоупругих характеристик основания, нагрузки и скорости скольжения на распределение напряжений и силу сопротивления при скольжении с трением жесткого индентора по вязкоупругому полупространству.
- Показано, что общая сила трения не является прямой суммой ее механической и адгезионной составляющих, как это часто принимается при расчете силы сопротивления скольжению деформируемых тел.
- Получены распределения растягивающих-сжимающих и максимальных касательных напряжений внутри полупространства под движущимся индентором, анализ которых показал, что максимумы максимальных касательных напряжений могут локализоваться как под, так и на поверхности в зависимости от величины коэффициента трения, а растягивающие и сжимающие напряжения достигают максимума на поверхности.
- Величина максимумов напряжений растет с увеличением скорости скольжения, она несколько больше для материалов с меньшим значением коэффициента Пуассона. Увеличение коэффициента трения также приводит к росту концентрации напряжений под штампом.
- Предложен метод исследования взаимного влияния инденторов при их скольжении по вязкоупругому полупространству. На основании произведенных расчетов сделаны следующие выводы:
 - скорость скольжения и расстояние между инденторами оказывают существенное влияние на контактные характеристики и силу трения. Обнаружен новый эффект разделения площадки контакта на две подобласти у позади скользящего индентора при уменьшении расстояния между ними.
 - деформационная составляющая коэффициента трения увеличивается у переднего индентора и снижается у заднего в результате их взаимного влияния. Система из двух инденторов имеет деформационную составляющую коэффициента трения ниже, чем изолированный индентор.

Литература

1. Александров В. М., Горячева И. Г., Торская Е. В. Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // Докл. РАН. 2010. Т. 430. №. 4. С. 490–493.
2. Александров В.М., Горячева И.Г. Движение с постоянной скоростью распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству // Матер. 5-й Росс. конф. с междунар. Участием “Смешанные задачи механики деформируемого тела”. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. С.23–25.
3. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1961. 537 с.
4. Боуден Ф., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М.: Машиностроение., 1968. 544 с.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264с.
6. Горячева И. Г. Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // ПММ. 1973. Т. 37. С. 877-885.
7. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Скольжение волнистого индентора по поверхности вязко-упругого слоя при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 90–103.
8. Горячева И. Г., Степанов Ф. И., Торская Е. В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству// ПММ. 2015. Т. 79. Вып 6. С.853–863.
9. Горячева И.Г. Контактные задачи в трибологии. – Дисс. докт. физ-мат наук. 1987.
10. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

11. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т.62. № 6. С.1036–1044.
12. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т.43. № 1. С.99–105.
13. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Оценка точности метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов. Машиноведение, 1980. № 1. С. 70–77.
14. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Теоретические основы метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов. Машиноведение, 1979. № 6 С. 66–71.
15. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
16. Ишлинский А. Ю. Теория сопротивления перекатыванию (трение качения) и смежных явлений //Всесоюз. конф. по трению и износу в машинах. 1940. Т. 2. С. 255–264.
17. Крагельский И. В. Трение и износ. // М.: Машиностроение. 1968. 480 с.
18. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с
19. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М: Мир,1974. 339 с.
20. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – 1955. 485 с.
21. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 970 с.
22. Любичева А. Н. Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы неровностей по вязкоупругому основанию винклеровского типа // Трение и износ. 2008 (29). № 2. С. 125—133

23. Любичева А. Н. Численное моделирование скольжения системы сферических инденторов по вязкоупругому телу //Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского. 2011. №. 4/5. С. 2324–2325.
24. Маховская Ю. Ю. Скольжение шероховатых вязкоупругих тел при наличии адгезии //Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского, 2011. №. 4–4.
25. Морозов А.В., Петрова Н.Н., Методика оценки коэффициента трения уплотнительных морозостойких резин//Трение и износ, 2016. №2(37). С. 162–167.
26. Ноздрин М. А., Шептунов Б. В. Модель трения твердого тела с регулярным рельефом и вязкоупругого полупространства //Физика, 2015. №. 12. С. 24–29.
27. Резниковский М. М., Лукомская А. И. Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию //Трение и износ, 2013. Т. 34. №. 2. С. 109–119.
28. Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику. – М. : Физматлит, 2000. 296 с.
29. Солдатенков И.А. К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания. Трение и износ. 2008. Т. 29. № 1. С. 12–21.
30. Степанов Ф.И., Последовательное скольжение двух гладких штампов по вязкоупругому основанию с трением.//ПМТФ. 2015. Т.56. №6. С.158-165.
31. Степанов Ф.И., Торская Е.В., Исследование напряженного состояния при скольжении штампа по вязкоупругому полупространству//Трение и износ. 2016. Т.37. №2. С.12–17.
32. Шептунов Б. В., Горячева И. Г., Ноздрин М. А.. Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию //Трение и износ. 2013. Т. 34. №. 2. С. 109–119.

33. Bowden F. P., Tabor D. Friction, lubrication and wear: a survey of work during the last decade //British J. Appl. Phys. 1966. V. 17. №. 12. P. 1521.
34. Carbone G., Putignano C. A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: theory and experiments //J. Mech. and Phys. Sol. 2013. V. 61. №. 8. P. 1822-1834.
35. Chen, W., Wang, Q., Huan, Z., Luo, X. Semi-analytical viscoelastic contact modeling of polymer-based materials //J. Trib. 2011. V. 133. №. 4. P. 041404.
36. Eldredge K. R., Tabor D. The mechanism of rolling friction. I. The plastic range //Proc. Roy. Soc. London ser. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1955. V. 229. №. 1177. P. 181-198.
37. Felhos D., Xu D., Schlarb A.K., Váradi K., Goda T.. Viscoelastic characterization of an EPDM rubber and finite element simulation of its dry rolling friction //Express Polym. Lett. 2008. V. 2. №. 3. P. 157-164.
38. Flom D. G. Dynamic Mechanical Spectrometry by Means of Rolling Friction Measurements //Analytical Chemistry. 1960. V. 32. №. 12. P. 1550-1554.
39. Flom D. G. Rolling friction of polymeric materials. I. Elastomers //J. appl. phys. 1960. V. 31. №. 2. P. 306-314.
40. Flom D. G. Rolling friction of polymeric materials. II. Thermoplastics // J. appl. phys. 1961. V. 32. №. 8. P. 1426-1436.
41. Flom D. G., Bueche A. M. Theory of rolling friction for spheres // J. appl. phys. 1959. V. 30. №. 11. P. 1725-1730.
42. Goryacheva I.G., Stepanov F.I., Torskaya E.V Effect of friction in sliding contact of a sphere over a viscoelastic half-space //Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, series Computational Methods in Applied Sciences, Springer. 2016, P. 93-103.

43. Graham G. A. C. The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent contact area has any number of maxima and minima //Int. J. Engineering Sci. 1967. V. 5. №. 6. P. 495-514.
44. Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity, Clarendon. 1954.
45. Greenwood J. A., Minshall H., Tabor D. Hysteresis losses in rolling and sliding friction //Proc. Roy. Soc. London ser. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1961. V. 259. №. 1299. P. 480-507.
46. Greenwood J. A., Tabor D. The friction of hard sliders on lubricated rubber: the importance of deformation losses //Proc. Phys. Soc. 1958. V. 71. №. 6. P. 989.
47. Grosch K. A. Rubber Friction and Tire Traction // Chapt. 11, The Pneumatic Tire, A. N. Gent and J. D. Walter, Ed. NHTSA, US DoT. — Washington, D.C. 2005
48. Grosch K. A. The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber //Proc. Roy. Soc. London ser. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1963. V. 274. №. 1356. P. 21-39.
49. Hamilton G. M. et al. Plastic flow in rollers loaded above the yield point //Proc. Inst. Mech. Engineers. 1963. V. 177. №. 1. P. 667-675.
50. Harrass M., Friedrich K., A.A.Almajid A.A/, Tribological behavior of selected engineering polymers under rolling contact, Trib. Int. 2010. V.43. P 635–646.
51. Heinrich G., Klüppel M. Rubber friction, tread deformation and tire traction //Wear. 2008. V. 265. №. 7. P. 1052-1060.
52. Hunter S. C. The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space //J Appl. Mech. 1961. V. 28. №. 4. P. 611-617.
53. Hunter S.C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space. J. Mech. Phys. Solids. 1960.V 8. P. 219–234
54. Kalker J. J. On elastic line contact //J. of Appl. Mech. 1972. V. 39. №. 4. P. 1125-1132.

55. Kalker J. J. The surface displacement of an elastic half-space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calculation of the contact pressure under a roller // J. of Appl. Math. 1977. V. 19. №. 2. P. 127-144.
56. Koumi K. E. et al. Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space //Int. J. Sol. Struc. 2014. V. 51. №. 6. P. 1390-1402.
57. Koumi K. E., Chaise T., Nelias D. Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity //J. Mech. Phys. Sol. 2015. V. 80. P. 1-25.
58. Kusche S. Frictional force between a rotationally symmetric indenter and a viscoelastic half- space //ZAMM- J. Appl. Math. Mech. 2016.
59. Le Gal A., Yang X., Klüppel M. Evaluation of sliding friction and contact mechanics of elastomers based on dynamic-mechanical analysis // J. chem. phys. 2005. V. 123. №. 1. P. 014704.
60. Le Tallec P., Rahler C. Numerical models of steady rolling for non- linear viscoelastic structures in finite deformations //Int. J. Num. Meth. in Engineering. 1994. V. 37. №. 7. P. 1159-1186.
61. Lee,E.,Radok J. The Contact Problem for Viscoelastic Bodies J. Appl. Mech. 1960. V.27. P. 438–444.
62. Lorenz B., Oh Y. R., Nam S. K., Jeon S. H., and Persson B. N. J. Rubber friction for tire tread compound on road surfaces //J. Phys.: Condensed Matter. 2013. V. 25. №. 9. P. 095007.
63. May W. D., Morris E. L., Atack D. Rolling friction of a hard cylinder over a viscoelastic material //J. Appl. Phys. 1959. V. 30. №. 11. P. 1713-1724.
64. Morland L. W. A plane problem of rolling contact in linear viscoelasticity theory //J. Appl. Mech. 1962. V. 29. №. 2. P. 345-352.

65. Morland L. W. Exact solutions for rolling contact between viscoelastic cylinders //The Quarterly J. Mech. and Appl. Math. 1967. V. 20. №. 1. P. 73-106.
66. Morland L. W. Rolling contact between dissimilar viscoelastic cylinders // The Quarterly J. Mech. and Appl. Math. 1968. P. 363-376.
67. Nasdala L. et al. An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures //Comp. Mech. 1998. V. 22. №. 5. P. 395-403.
68. Padovan J. et al. Alternative formulations of rolling contact problems //Finite elements in analysis and design. – 1992. V. 11. №. 4. P. 275-284.
69. Padovan J., Paramadilok O. Transient and steady state viscoelastic rolling contact //Computers & Structures.1985. V. 20. №. 1-3. P. 545-553.
70. Panek C., Kalker J. J. A solution for the narrow rectangular punch //J. of Elast. 1977. V. 7. №. 2. P. 213-218.
71. Panek C., Kalker J. J. Three-dimensional contact of a rigid roller traversing a viscoelastic half space // J. Appl. Math. 1980. V. 26. №. 3. P. 299-313.
72. Persson B. N. J. Rolling friction for hard cylinder and sphere on viscoelastic solid //The Eur. Phys. J. E. 2010. V. 33. №. 4. P. 327-333.
73. Persson B. N. J. Theory of powdery rubber wear //J. Phys.: Condensed Matter. 2009. V. 21. №. 48. P. 485001.
74. Persson B.N.J., Theory of rubber friction and contact mechanics, J. Chem. Phys. 2001.V.115 P. 3840 -3861.
75. Popov V. L. et al. Generalized law of friction between elastomers and differently shaped rough bodies //Scientific reports. 2014. V. 4.
76. Prescott J., Applied Elasticity, New York, Dover Publications, 1946.
77. Tabor D. A simple theory of static and dynamic hardness // Proc. Roy. Soc. London ser. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1948. V. 192. – №. 1029. P. 247-274.

78. Tabor D. The mechanism of rolling friction. II. The elastic range //Proc. Roy. Soc. London ser. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1955. V. 229. №. 1177. P. 198-220.
79. Tabor D. The rolling and skidding of automobile tyres //Phys. Educ. 1994. V. 29. №. 5. P. 301.