

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Аунг Наинг Со

**ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНО ПОДВИЖНОМ СОСУДЕ И
СОСУДЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ДНА И СТЕНОК**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.
Калиниченко Владимир Анатольевич

Москва - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. ОБЗОР ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В СОСУДАХ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС КАК СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ – МОДЕЛЬ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА	11
1.1. Задачи о колебаниях жидкости ограниченного объема с позиций гидродинамического эксперимента	11
1.2. Параметрический резонанс как способ возбуждения волн	22
1.2.1. Теоретическая модель волн Фарадея.....	23
1.2.2. Экспериментальная установка ПР-2М	26
Глава 2. ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В ПОДВИЖНОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ	31
2.1. Постановка эксперимента.....	31
2.2. Результаты и обсуждение	32
2.2.1. Волны Фарадея в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде	33
2.2.2. Волны Фарадея в подвижном в горизонтальном направлении сосуде	35
2.2.3. Вязкое затухание волн	40
2.3. Оценка частотного сдвига	41
2.4. Маятник как механический аналог волны Фарадея	46
Заключение.....	51
Глава 3. ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ С ПЛАСТИНАМИ-ДЕМПФЕРАМИ	53
3.1. Постановка задачи и параметры течения	53
3.2. Постановка эксперимента.....	57
3.3. Картина осциллирующего течения при наличии пластин-демпферов	58
3.4. Влияние пластин-демпферов на резонансные зависимости	69
3.5. Критическое перекрытие сосуда.....	76
3.6. Коэффициент затухания волн в сосуде с пластинами-демпферами.....	76
Заключение.....	82
Глава 4. ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В СОСУДЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ НЕРЕГУЛЯРНОСТЯМИ ДНА	84
4.1. Постановка задачи и методы	84
4.1.1. Эксперимент.....	84
4.1.2. Численно-аналитический метод.....	86
4.2. Результаты и обсуждение	90
Заключение.....	98
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ	99
ЛИТЕРАТУРА	100

АННОТАЦИЯ

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию поверхностных волн Фарадея. Этим термином в гидродинамике определяют стоячие волны, возбуждаемые при параметрическом резонансе в жидкости, подверженной вертикальным колебаниям. В работе методами экспериментальной гидродинамики исследованы гравитационные волны Фарадея на свободной поверхности однородной жидкости при наличии локальных особенностей на дне и боковых стенках прямоугольного сосуда. Впервые в условиях лабораторного эксперимента реализовано параметрическое возбуждение стационарных гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Исследование колебаний жидкости со свободной поверхностью в закрепленных и подвижных сосудах – традиционная задача гидродинамики, имеющая большое прикладное значение.

В инженерной практике широко используются конструкции, в которых имеются объемы жидкости со свободной поверхностью; например, топливные баки объектов авиационной и ракетно-космической техники, резервуары для транспортировки жидкостей, а также для хранения нефтепродуктов и сжиженных газов, водонапорные башни и т.д. Жидкость, частично заполняющая полости, значительно влияет на движение всей системы; особенно, когда масса жидкости сравнима с массой системы. Взаимное влияние движений жидкости и твердого тела может существенно изменить форму движения системы.

Одним из примеров сложного динамического взаимодействия в системе тело – жидкость является классическая задача Л.Н. Сретенского (1951) о колебании жидкости в подвижном сосуде. Теоретический анализ горизонтальных поступательных колебаний прямоугольного сосуда с жидкостью позволяет оценить суммарное давление стоячих поверхностных волн на стенки сосуда и получить уравнение его движения. Однако, до настоящего времени отсутствуют экспериментальные результаты о динамике сосуда с жидкостью, на свободной поверхности которой имеются волны стационарной амплитуды. Дефицит лабораторных исследований в данном направлении объясняется сложностью постановки самого эксперимента, поскольку необходимо обеспечить возбуждение стоячих волн стационарной амплитуды в сосуде, имеющем горизонтальную степень свободы.

Одна из актуальных задач авиационно-космической техники, гражданского строительства, ядерной технологии, транспортировки

нефтепродуктов морским и наземным транспортом - управление демпфированием колебаний жидкой фазы с целью минимизации ее воздействий на стенки сосуда. В условиях резонанса возникающие значительные гидродинамические силы и моменты приводят к потере устойчивости движения и даже разрушению транспортных средств.

Для управления колебаниями используются различные демпфирующие устройства, изучению действия которых посвящено большое число экспериментальных, теоретических и численных работ. Как правило, в качестве демпферов используются горизонтальные и вертикальные перегородки в виде пластин, установленных нормально к боковым стенкам или дну, и частично или полностью перекрывающие продольное или поперечное сечение сосуда с жидкостью. При колебаниях жидкости на кромках пластин периодически образуются и срываются вихри, обеспечивающие более высокое демпфирование по сравнению с вязким затуханием. Современные теории позволяют рассчитать только небольшую часть вихревого течения вблизи кромки демпфера. В экспериментальных исследованиях, направленных на оценку эффективности устройств подавления колебаний в осциллирующих сосудах, общая картина течения не изучалась, и механизмы подавления не детализировались.

Исследование процессов взаимодействия длинных поверхностных волн с препятствиями на дне - одно из наиболее интересных приложений гидродинамики, океанологии и лимнологии. Колебания жидкости в каналах, проливах, водоемах и заливах представляют существенное по масштабам гидрофизическое явление и часто проявляются как низшие моды стоячих волн, известных как сейши. В рамках классической теории свободных колебаний жидкости в замкнутых бассейнах получены решения для узкого класса задач, описывающих сейши водоемов прямоугольного сечения с горизонтальным дном. Теоретическая оценка периода и положения узловых линий сейш в реальных водоемах практически не

осуществима из-за сложности донного рельефа. Отметим отсутствие работ, в которых рассматривались бы стоячие волны в удлиненных бассейнах с отдельными возвышениями или понижениями дна, хотя указанная геометрия характерна, например, для сейш в озере Байкал с двумя подводными хребтами.

Объектом исследования в диссертации являются стоячие гравитационные поверхностные волны, возбуждаемые в колеблющемся в вертикальном направлении прямоугольном сосуде с жидкостью. **Предмет исследования** – особенности волновых движений жидкости при наличии дополнительной горизонтальной степени свободы сосуда или локальных особенностей дна или боковых стенок сосуда.

Цель работы - экспериментальное исследование важных малоизученных эффектов в стоячих поверхностных волнах на свободной поверхности однородной жидкости при параметрическом резонансе. Определены следующие **задачи**:

1. Изучение стационарных стоячих волн в неподвижном и подвижном в горизонтальном направлении сосуде при параметрическом резонансе; исследование параметрического резонанса физического маятника на тележке в качестве механического аналога волн Фарадея в подвижном сосуде.
2. Исследование картины течений и демпфирования волн в сосуде с вертикальными пластинами на боковых стенках.
3. Исследование влияния топография дна в виде отдельных возвышений на характеристики стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде.

Методы исследований. Параметрический резонанс в жидкости использовался как способ генерации стоячих поверхностных гравитационных волн в прямоугольном сосуде. Изучение поверхностных волн Фарадея проводилось на специально созданной установке, позволяющей сообщать сосуду с жидкостью гармонические колебания в

вертикальном направлении с заданной частотой и амплитудой. Основным способом наблюдений является регистрация волновых процессов жидкости посредством современных методов видеозаписи. Характеристики волн определялись при обработке материалов видеосъемки колебаний свободной поверхности жидкости. Интерпретация полученных результатов проводилась на основании представленных теоретических моделей. Достоверность результатов подтверждается данными прямых наблюдений.

На защиту выносятся:

1. Исследование возбуждения гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы и изучение связанных колебаний сосуда с жидкостью.
2. Исследование влияния поперечных пластин-демпферов на параметры стоячих поверхностных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде.
3. Исследование влияния топографии дна на частоты и формы стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Впервые в условиях лабораторного эксперимента реализовано параметрическое возбуждение стационарных гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы. Получены экспериментальные результаты, демонстрирующие эффект дополнительной горизонтальной степени свободы сосуда на резонансные характеристики стационарных волн Фарадея. Проведено сравнение опытных данных с имеющейся теоретической моделью связанных горизонтальных колебаний сосуда с жидкостью при наличии на ее поверхности свободных волн. Исследован частотный сдвиг при совместном волновом движении жидкости и горизонтальных колебаниях сосуда; результаты сравниваются с

экспериментальными данными. Для волн Фарадея в подвижном в горизонтальном направлении сосуде исследован их механический аналог – параметрические колебания физического маятника, точка подвеса которого имеет дополнительную горизонтальную степень свободы.

2. Исследовано влияние установленных под углом к боковым стенкам поперечных пластин-демпферов на параметры стоячих поверхностных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде. Методами трассерной визуализации волнового течения показано, что демпфирующее действие вертикальных пластин (установленных в узле стоячей волны) обусловлено переносом волновой энергии в систему трехмерных нестационарных вихрей по всей глубине жидкости. Впервые исследовано влияние поперечных пластин-демпферов на характер реструктуризации суспензии с первоначально однородной концентрацией в поле поверхностных волн Фарадея. Получены количественные оценки эффективности действия пластин по изменению вида и частотному смещению резонансных зависимостей параметрически возбуждаемых волн. Оценена величина критического перекрытия сосуда, отвечающая полному подавлению волнового движения жидкости.
3. Исследовано взаимодействие длинных поверхностных волн в прямоугольном сосуде с препятствиями на дне исследовалось посредством лабораторного эксперимента, для интерпретации результатов которого использовалась численно-аналитическая модель сейш. Получен новый результат, показывающий влияние одиночного возвышения на наклонном дне на частоты и формы колебаний. При подходящем выборе положения возвышения можно добиться существенного подавления стоячих поверхностных волн. Теоретически и экспериментально показано,

что в случае двух возвышений на горизонтальном дне вариации расстояния между ними приводит к существенному изменению как частот, так и форм свободной поверхности для исследуемых волновых мод.

Практическая и научная значимость работы.

1. Выявленные в работе особенности возбуждения волн Фарадея в подвижном в горизонтальном направлении сосуде и сосуде с локальными особенностями дна и стенок являются основой для проверки существующих и разработки более адекватных гидродинамических моделей.
2. Полученные в работе результаты по вихревому демпфированию волн Фарадея могут найти применение при разработке конструктивных элементов, используемых для подавления колебаний топлива в баках ракет и жидких углеводородов в танках при транспортировке нефтепродуктов.
3. Установленные в диссертации закономерности взаимодействия длинных поверхностных волн в прямоугольном сосуде с препятствиями на дне могут быть использованы в геофизических приложениях – при интерпретации данных натурного эксперимента по сейшам в естественных водоемах сложной геометрии.
4. Использование в работе волн Фарадея как объекта исследования подтверждает эффективность параметрического резонанса как способа генерации стоячих поверхностных волн для экспериментальной гидродинамики.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Область исследования диссертационной работы соответствует пункту 14 «Линейные и нелинейные волны в жидкостях и газах» Паспорта специальности 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы».

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных и российских конференциях: Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях» (Санкт-Петербург, июнь 2013; Калининград, июнь 2015); IV, V и VI Международные научные школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, ноябрь 2013; Москва, ноябрь 2014; Калининград, июнь 2015); Международная научная конференция «Физико-математические проблемы создания новой техники» (Москва, ноябрь 2014); Международная научная школа молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосферах» (Москва, ноябрь 2015); Студенческая научная весна МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, апрель 2013; апрель 2014; май 2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 работ, включая 4 статьи в журналах из списка ВАК [*Калиниченко, Нестеров, Со* (2015); *Калиниченко, Со* (2015); *Калиниченко, Со, Чашечкин* (2015); *Со, Сысоева* (2016)], 3 статьи в сборниках научных статей, 9 тезисов международных конференций. В этих работах экспериментальные исследования и обработка результатов выполнены диссертантом, обсуждение и анализ осуществлен совместно с научным руководителем диссертационной работы и соавторами.

Глава 1. ОБЗОР ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В СОСУДАХ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС КАК СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ – МОДЕЛЬ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

В обзоре представлен ряд малоисследованных гидродинамических задач, связанных с колебаниями однородной жидкости в прямоугольном сосуде. Приводится описание экспериментальной установки, используемой для параметрического возбуждения колебаний жидкости – поверхностных волн Фарадея. Этим термином в гидродинамике определяют стоячие волны, возбуждаемые при параметрическом резонансе в жидкости, подверженной вертикальным колебаниям. Обсуждаются основные результаты теоретической модели [*Нестеров (1969)*], используемой при постановке лабораторных опытов, в которых параметрический резонанс в жидкости применялся как способ возбуждения стоячих волн.

1.1. Задачи о колебаниях жидкости ограниченного объема с позиций гидродинамического эксперимента

Исследования динамики жидкости в неподвижном или колеблющемся сосуде имеют большое значение для решения как фундаментальных, так и многих прикладных задач [*Микишев, Рабинович (1971); Ibrahim (2005); Колесников (2003)*]. С теоретической точки зрения задача о волнах в сосудах различной формы при различных способах возбуждения также представляет значительный интерес, и этот раздел волновой гидродинамики в определенном смысле стал классическим [*Ламб (1947); Сретенский (1977); Моисеев, Румянцев (1965); Черноусько (1969)* и др.].

В инженерной практике широко используются конструкции, содержащие большие объемы жидкости со свободной поверхностью – топливные баки объектов авиационной и ракетно-космической техники, резервуары для транспортировки жидкостей, а также для хранения нефтепродуктов и сжиженных газов, водонапорные башни и т.д. Жидкость,

частично заполняющая полости, значительно влияет на движение всей системы, особенно, когда масса жидкости сравнима с массой системы.

При моделировании сложного динамического взаимодействия в системе тело – жидкость применяется методика, позволяющая вместо анализа сложной реальной конструкции рассматривать сосуд с жидкостью, имеющий эквивалентные демпфирующие, инерционные и упругие элементы. В качестве примера на рис. 1.1 приведена схема конструкции [Ibrahim, Barr (2003)], определяющая водонапорную башню или топливный бак ракеты при горизонтальном или вертикальном возбуждении.

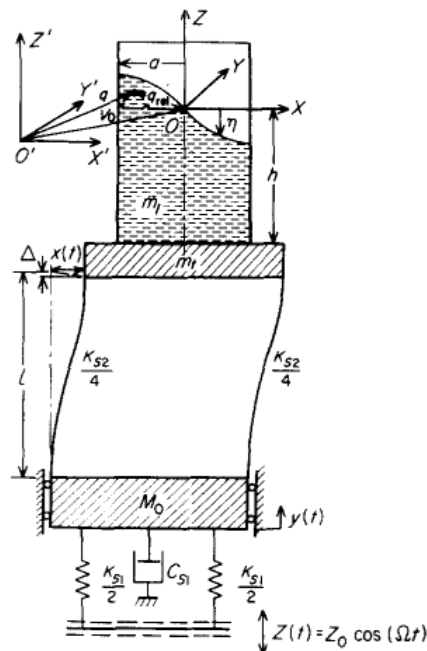


Рис. 1.1. Расчетная схема при анализе связанных колебаний жидкости в водонапорной башне или топливном баке ракеты [Ibrahim, Barr (1975)]

В экспериментальной гидродинамике горизонтальные колебания сосуда с жидкостью обычно используются для возбуждения стоячих волн [Chester, Banes (1968); Bredmose, Brocchini, Peregrine, Thais (2003); Букреев, Чеботников (2015)]. В этом случае имеем вынужденные волновые движения жидкости, частота которых в точности равна частоте колебаний сосуда, а высота волны может быть рассчитана в рамках линейной модели [Сретенский (1977)]. Отметим, что при горизонтальных перемещениях

сосуда на свободной поверхности жидкости возбуждаются только нечетные волновые моды.

Теоретически задача о горизонтальных поступательных колебаниях прямоугольного сосуда с жидкостью рассмотрена Л.Н. Сретенским в 1951 г. [Сретенский (1951; 1977)]; позднее близкая по постановке задача решена Н.Н. Моисеевым [Моисеев (1952)]. В литературе эту задачу часто называют задачей Л.Н. Сретенского. В указанных работах вычислено суммарное давление стоячих поверхностных волн на стенки сосуда и составлено уравнение его движения. Обобщения задачи Л.Н. Сретенского на случай двухслойной жидкости проведены в [Акуленко, Нестеров (1994)] – рис. 1.2.

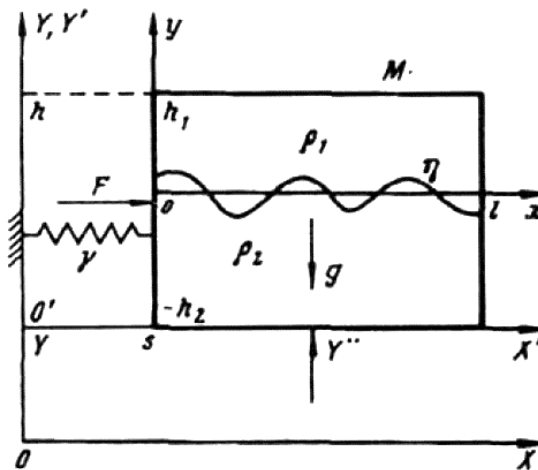


Рис. 1.2. Обобщение задачи Л.Н. Сретенского на случай горизонтальных перемещений прямоугольного сосуда с двухслойной жидкостью [Акуленко, Нестеров (1994)]

До настоящего времени отсутствуют экспериментальные результаты о динамике сосуда с жидкостью, на свободной поверхности которой имеются волны стационарной амплитуды. Автору известна лишь одна работа [Herczycki, Weidman (2012)], в которой приведены данные о связанных колебаниях прямоугольного сосуда с жидкостью, стоячие волны на свободной поверхности которой возбуждались вручную с последующим измерением характеристик задачи на стадии затухающих волновых движений жидкости. Дефицит лабораторных исследований в данном

направлении объясняется сложностью постановки самого эксперимента, поскольку необходимо обеспечить возбуждение стоячих волн стационарной амплитуды в сосуде, имеющем горизонтальную степень свободы.

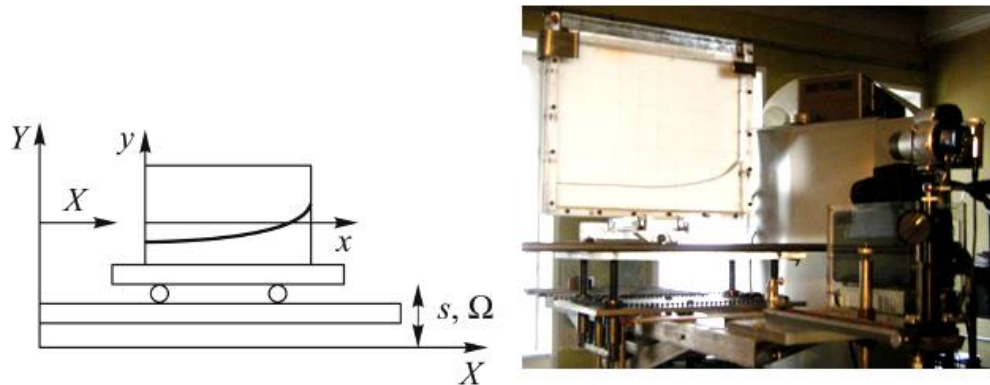


Рис. 1.3. Постановка эксперимента при решении задачи Л.Н. Сретенского [Калиниченко, Со (2015)]

Указанная проблема решена в работе [Калиниченко, Со (2015)], где задача Сретенского Л.Н. была экспериментально реализована, причем исследовались близкие к свободным стационарные волны Фарадея на поверхности однородной жидкости в прямоугольном сосуде, который имел возможность свободно перемещаться в горизонтальном направлении.

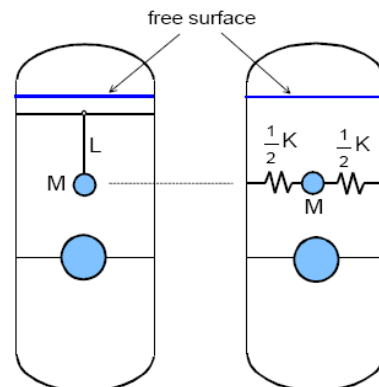


Рис. 1.4. Механические аналоги – маятник и тело на пружине – при моделировании колебаний жидкости со свободной поверхностью [Dodge (2000)]

С целью упрощения задачи о взаимодействии подвижного сосуда – колеблющейся жидкости часто рассматриваются их механические аналоги – маятник или точечная масса с упругими связями, рис. 1.4. Так, вынужденные колебания сферического маятника использовались как

механическая аналогия движения жидкости в контейнерах различной геометрической формы [*Колесников (2003); Ibrahim (2005); Abramson (1966)*]. Указанные работы имели аэрокосмическое приложение – исследование колебаний топлива в ракетных баках.

Обыкновенный плоский маятник может рассматриваться как классическая механическая нелинейная система, с помощью которой моделируются колебания жидкости в подвижном сосуде – рис. 1.5. Отметим, что различные маятниковые модели использовались при исследовании колебаний жидкости со свободной поверхностью.

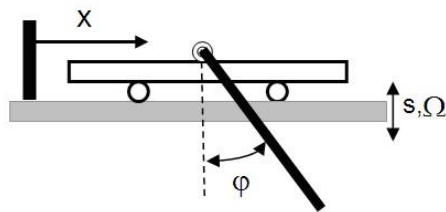


Рис. 1.5. Параметрический маятник на тележке как механический аналог первой волновой моды в прямоугольном сосуде (рис. 1.3) при моделировании колебаний жидкости со свободной поверхностью [*Со (2013)*]

Управление демпфированием колебаний с целью минимизации воздействий жидкости на стенки сосуда - одна из практических задач авиационно-космической техники, гражданского строительства, ядерной технологии, транспортировки нефтепродуктов морским и наземным транспортом [*Abramson (1966); Sarpkaya (2010); Ibrahim (2005)*]. В условиях резонанса возникающие значительные гидродинамические силы и моменты приводят к потере устойчивости движения и даже разрушению транспортных средств [*Krata (2013); Рабинович (2006); Елизарова, Сабурин (2013)*].

Для управления колебаниями используются различные демпфирующие устройства, изучению действия которых посвящено большое число экспериментальных, теоретических и численных работ, детальный обзор которых приведен в [*Ibrahim (2005)*]. Как правило, в

качестве демпферов используются горизонтальные и вертикальные перегородки в виде пластин, установленных нормально к боковым стенкам или дну, и частично или полностью перекрывающие продольное или поперечное сечение сосуда с жидкостью [Abramson (1966); NASA Techn. Rep. SP-8031 (1969); Микишев, Рабинович (1971)].

В реальных конструкциях жидкостных ракет для обеспечения их динамической устойчивости применяются различные демпферы колебаний жидкости в топливных баках, среди которых наиболее распространенными являются демпферы в виде радиальных или кольцевых ребер (рис. 1.6).

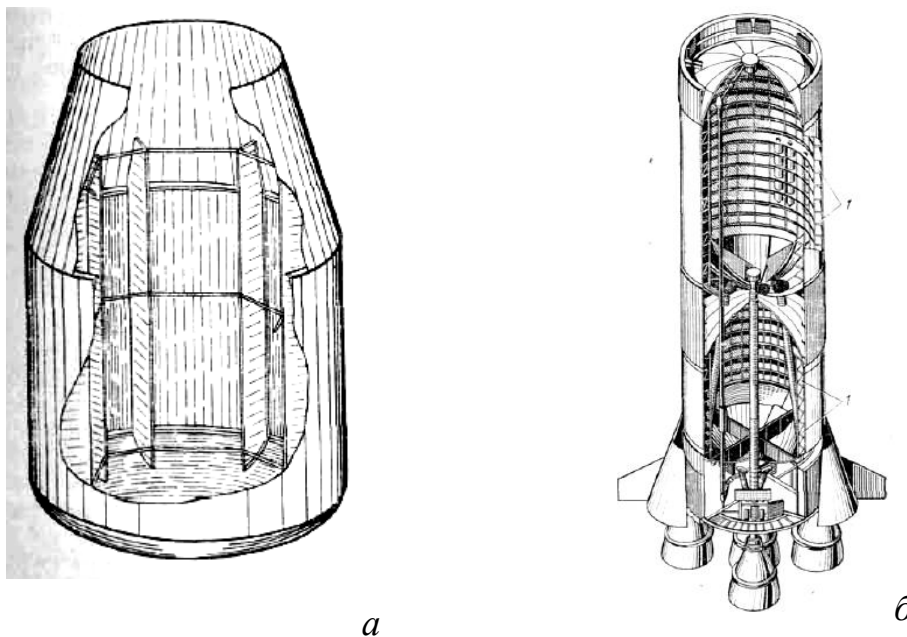


Рис. 1.6. Демпфер колебаний жидкости в виде радиальных (а) и кольцевых (б) ребер, установленные в баках первой ступени ракеты-носителя Сатурн V [Микишев (1978)]

Уже первые эксперименты [Keulegan, Carpenter (1958)] показали, что коэффициент сопротивления длинной прямоугольной пластины определяется относительной амплитудой колебаний потока и практически не зависит от числа Рейнольдса. Полученные результаты использовались для оценки коэффициента демпфирования колебаний жидкости в цилиндрических баках с кольцевой горизонтальной перегородкой [Miles (1958)] и с системой вертикальных радиальных пластин-ребер [Микишев

(1978)]. На практике оценка демпфирующего действия конструктивных элементов состоит в определении логарифмического декремента соответствующей волновой моды [Мукишев (1978)]. В [Goudarzi et. al. (2010)] приведена оценка эффективности вертикальных и горизонтальных демпфирующих пластин, установленных в прямоугольном сосуде с жидкостью – рис. 1.7. При интерпретации данных эксперимента по оценке логарифмического декремента использовался численно-аналитический подход на основе эмпирических соотношений [Keulegan, Carpenter (1958)].

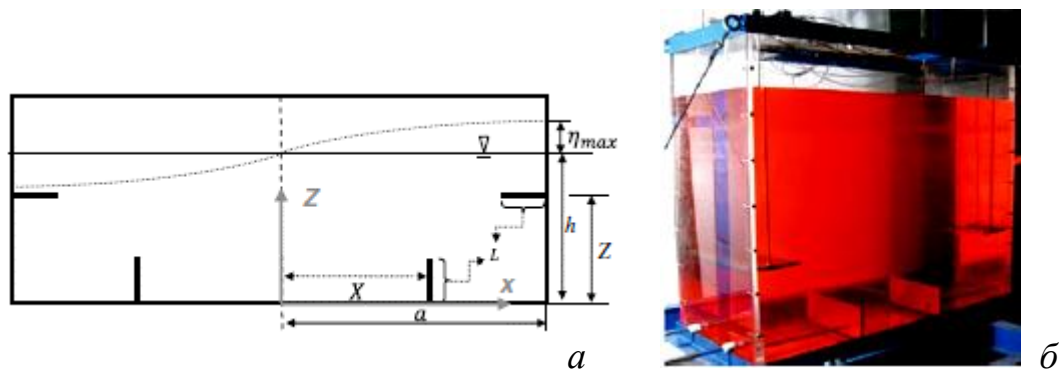


Рис. 1.7. Прямоугольный сосуд с пластинами-демпферами: модель (а) и эксперимент (б) [Goudarzi et. al. (2010)]

Как известно, при колебаниях жидкости на кромках пластин периодически образуются и срываются вихри, обеспечивающие более высокое демпфирование по сравнению с вязким затуханием. Современные теории позволяют рассчитать только небольшую часть вихревого течения вблизи кромки демпфера [Бужинский (1998); Gavrilyuk, Lukovsky, Trotsenko, Timokha (2006)]. В экспериментальных исследованиях, направленных на оценку эффективности устройств подавления колебаний в осциллирующих сосудах, общая картина течения не изучалась, и механизмы подавления не детализировались. Отметим также результаты лабораторных и натурных экспериментов [Елкин, Зацепин (2013); Зырянов (1995)] по периодическому вихреобразованию и динамике вихревых структур, имеющих геофизические приложения.

Волновое движение жидкости в сосудах различной формы часто рассматривается как чисто колебательное. Однако измерения поля скорости в реальных волнах показывают наличие ненулевых компонент усредненной по времени скорости практически во всех точках жидкости. Значения скорости этого стационарного течения существенно меньше максимальной скорости основного волнового движения; однако вследствие кумулятивного эффекта эти стационарные течения должны учитываться при изучении процессов переноса многокомпонентных примесей, динамики загрязнения и перемещения донных осадков. Для таких вторичных стационарных течений жидкости, совершающей волновые движения, в литературе используются тождественные по значению термины «волновой перенос», «массоперенос» или «волновой дрейф».

Массоперенос в стоячих поверхностных волнах предсказан в [Rayleigh (1884)] как следствие нелинейности и вязкости, а рассчитан в [Longuet-Higgins (1953); Dore (1976)] для волн на свободной поверхности однородной жидкости. В [Любимов, Любимова, Черепанов (2003); Ng (2004); Martin, Vega (2006)] циркуляционные течения ячеистого типа в стоячих поверхностных волнах исследовались теоретически. Необходимость учета в теоретических моделях трехмерной структуры периодических пограничных слоев, являющихся источником завихренности и определяющих вторичные течения жидкости, подчеркивается в [Чашечкин, Кистович (2004); Чашечкин, Приходько (2007)].

Основные положения модели [Longuet-Higgins (1953)] подтверждены лабораторным экспериментом [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2008)] - для двумерных поверхностных гравитационных волн Фарадея имеется система вторичных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости между дном сосуда и свободной поверхностью. Наряду с колебаниями с частотой волны частицы жидкости медленно перемещаются в соответствии с этими циркуляционными течениями, горизонтальный масштаб этих циркуляционных ячеек составляет четверть длины волны.

Отметим отсутствие каких-либо вторичных течений на свободной поверхности жидкости – движение частиц определялось свойствами стоячей волны на временном интервале порядка 20 ее периодов. Подчеркнем также, что и для теоретической модели [Longuet-Higgins (1953)], и для эксперимента [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2008)] предполагалось одномодовое волновое движение жидкости в частотном диапазоне ниже 2-3 Гц при длине волны более 30 см.

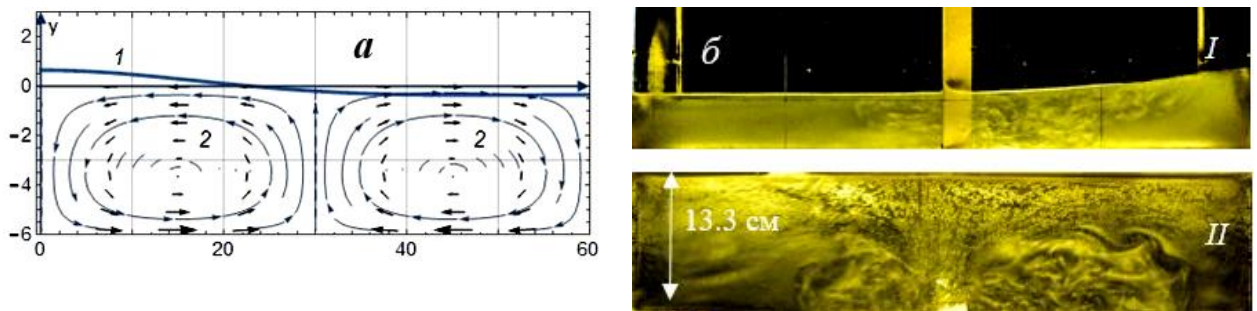


Рис. 1.8. (а) Циркуляционные течения для первой волновой моды в сосуде с гладкими стенками согласно модели [Longuet-Higgins (1953)]; (б) сложные вихревые структуры в стационарных волнах Фарадея при наличии пластины-демпфера шириной $l=3$ см в сосуде длиной 60 см: I, II – виды фронтальный и сверху; $s=2.25$ см, $h=6$ см, период волны $T=1.57$ с [Со, Сысоева (2016)]

Картина качественно меняется в случае капиллярной ряби Фарадея – частотный диапазон свыше 30 Гц, длины волн менее 2 см. В экспериментах [Lukaschuk, Denissenko, Falkovich (2007); Sanli, Lohse, van der Meer (2014)] выявлена кластеризация плавающих частиц под воздействие капиллярных волн - частицы в зависимости от их гидрофильных или гидрофобных свойств дрейфуют в сторону узлов или пучностей стоячей волны. При увеличении частоты до 60 Гц (уменьшение длины волны до 0.4 см) происходит многомодовое возбуждение капиллярных волн Фарадея [Francois, Xia, Punzmann, Ramsden, Shats (2014)] – на свободной поверхности жидкости наблюдаются «осциллоны» как стационарные

структуры в виде кратеров и пиков и двумерные вихревые структурные образования.

Особенности течений в поле стоячей гравитационной поверхностной волны в прямоугольном сосуде при наличии в нем демпфирующих элементов выявлены в [Со, Сысоева (2016); Калиниченко, Со, Чашечкин (2015)] – рис. 1.8 б.

Взаимодействие длинных поверхностных волн с препятствиями на дне – одно из наиболее интересных приложений гидродинамики, океанологии и лимнологии. Колебания жидкости в каналах, проливах, водоемах и заливах представляют существенное по масштабам гидрофизическое явление и часто проявляются как низшие моды стоячих волн. Такие стоячие волны на поверхности мелкой воды известны в литературе как сейши [Сретенский (1936); Defant (1961); Арсеньева и др. (1963); Rabinovich (2009)]. Установлено, что период колебаний основной (первой) моды в зависимости от размеров и формы водоема изменяется в пределах от нескольких минут до нескольких часов. Высота наблюдаемых волн достигает величин от 0.05 до 6 м [Rabinovich (2009)].

В обзоре [Rabinovich (2009)] указаны те немногие геометрические формы водоемов, для которых в рамках классической теории волновых движений жидкости ограниченного объема получены решения для сейшевых колебаний. При оценке периода двумерных сейш в водоеме прямоугольной формы и постоянной глубины часто используется формула Мериана [Defant (1961); Праудмэн (1957)]

$$T_n = 2\pi / \omega_n = 2l / (n\sqrt{gh_o})$$

где T_n и ω_n - период и частота волновой моды номера n ; n - число узлов стоячей поверхностной волны (сейши); l и h_o - длина и глубина бассейна; g - ускорение силы тяжести. Однако погрешности расчета T_n возрастают до 25% при резком нарушении условия постоянства ширины $d = d_0$ и(или)

площади $S = S_o = h_o d_o$ поперечного сечения бассейна [Defant (1961); Арсеньева и др. (1963); Miles (1974)].

Из-за сложной геометрии прибрежной линии и дна для реальных водоемов отсутствуют теоретические оценки периодов и положения узловых линий сейш. Для их нахождения в лимнологии используются различные расчетные методы и схемы [Defant (1961)]. Наиболее продуктивный из них - метод Дефанта, в деталях описанный в [Prigo, Manley, Connell (1996)]. Именно с его помощью проведен анализ первых четырех продольных сейшевых мод озера Байкал [Смирнов и др. (2014)], геометрия дна которого показана на рис. 1.9.

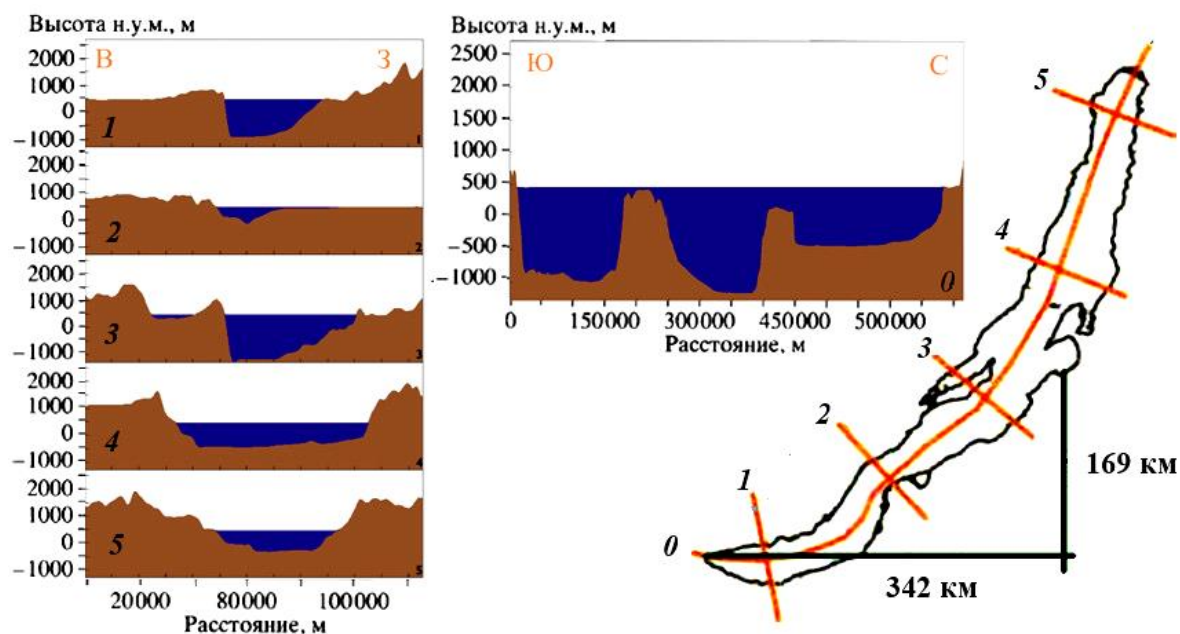


Рис. 1.9. Схема продольного и поперечных разрезов озера Байкал [Шерстьянкин и др. (2006)]

В последние годы разработаны методы расчетов колебаний в сосудах сложной формы (эллиптических [Акуленко, Кумакиев, Нестеров (2001)] или с неровностями дна [Акуленко, Калиниченко, Нестеров (2012)]).

В [Акуленко, Калиниченко, Нестеров (2012)] построена математическая модель сейш, основанная на методе ускоренной сходимости в случае резкого возвышения дна – рис. 1.10 а. Эта модель

использовалась для интерпретации данных лабораторных экспериментов [Калиниченко, Коровина, Нестеров, Со (2014); Калиниченко, Нестеров, Со (2015)] по оценке влияния топографии дна (рис. 1.10 б) на частоты и формы стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде.

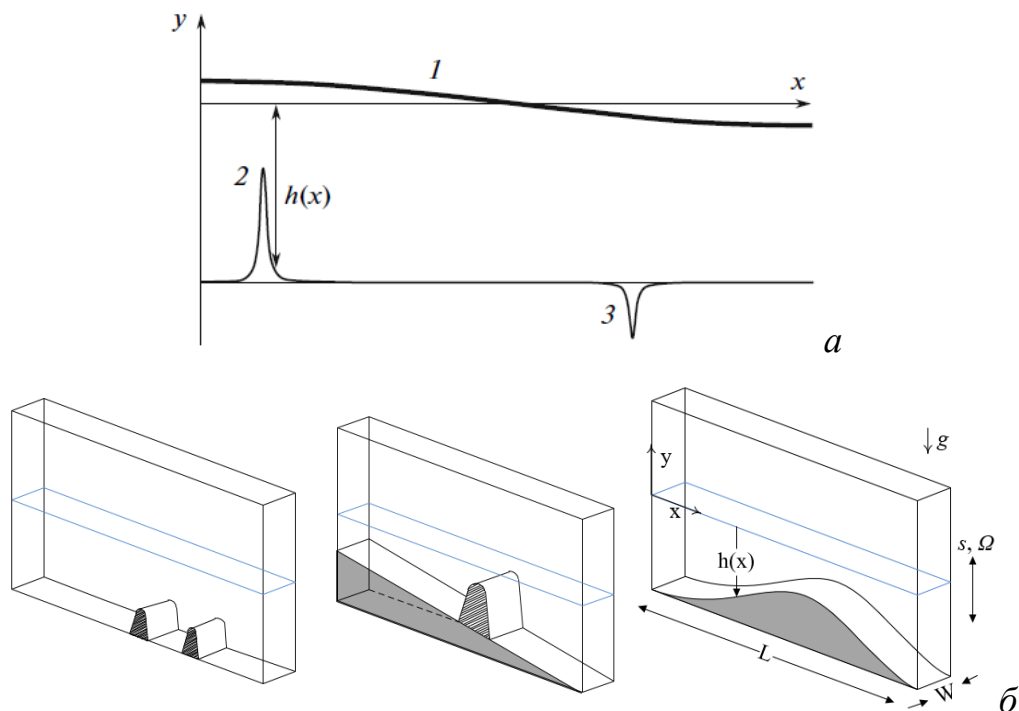


Рис. 1.10. (а) - Модель сейш I в канале над резким локальным возвышением 2 или углублением 3 дна [Акуленко, Калиниченко, Нестеров (2012)] и (б) – экспериментальное моделирование различной геометрии дна [Калиниченко, Коровина, Нестеров, Со (2014); Калиниченко, Нестеров, Со (2015)]

1.2. Параметрический резонанс как способ возбуждения волн

В экспериментальной гидродинамике известны различные способы возбуждения стоячих волн в жидкости. С точки зрения лабораторного моделирования волновых движений жидкости параметрический резонанс может рассматриваться как эффективный способ генерации стоячих волн. Волны Фарадея удобны для экспериментального исследования, поскольку возбуждаются и существуют без каких-либо волнопродукторов – их крутизну можно изменять, варьируя частоту вертикальных колебаний сосуда. Кроме того, возбуждение волн Фарадея происходит при малых

относительных ускорениях сосуда, поэтому их профиль близок к профилю свободных стоячих волн.

Начало исследования параметрического резонанса в жидкости было положено экспериментами Фарадея по возбуждению гравитационно-капиллярных волн на свободной поверхности тонкого слоя жидкости, находящейся на вертикально колеблющейся пластинке [Faraday (1831)]. Lord Rayleigh продолжал серии экспериментов, и подтвердил результаты Фарадея [Rayleigh (1883; 1887)].

Задача о параметрическом возбуждении гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде рассмотрена С.В. Нестеровым [Нестеров С.В. (1969)]. Для решения основных уравнений гидродинамики, записанных в переменных Лагранжа, использовался метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. (1974)], широко применяемый в нелинейной механике.

1.2.1. Теоретическая модель волн Фарадея

Рассмотрим параметрическое возбуждение поверхностных волн в однородной жидкости конечной глубины [Нестеров С.В. (1969)].

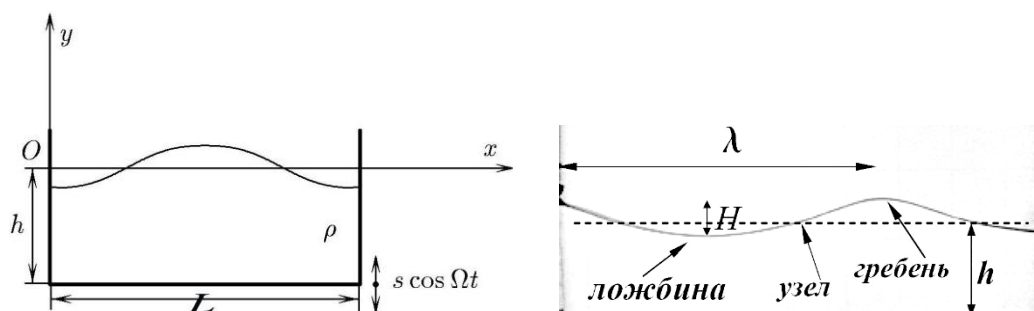


Рис. 1.11. Механизм параметрического возбуждения волн в жидкости и их основные характеристики. Переменный параметр системы – переменное

ускорение силы тяжести: $g^*(t) = g \left(1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos \Omega t \right)$

Пусть прямоугольный сосуд с жидкостью глубины h совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой s и частотой Ω - рис. 1.11. Изучается двумерное движение жидкости.

Рассматривая плоское движение жидкости в вертикально колеблющемся и неподвижном в горизонтальном направлении сосуде, смещение свободной поверхности жидкости может быть задано в виде $y(x,t) = 0.5H(t)\cos kx$. Здесь $H(t)$ - высота стоячей волны; $k = \pi n / L$ - волновое число; n - номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны; L - длина сосуда; x и y - координаты точек свободно поверхности жидкости в системе координат, жестко связанной с сосудом. Тогда, как показано в [Болотин (1956); Benjamin, Ursell (1954); Miles, Henderson (1990)], получим уравнение, определяющее функцию $H(t)$

$$H''(t) + 2bH'(t) + (\omega^2 - \Omega^2 ks \cos \Omega t)H(t) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь действующая между частицами жидкости сила трения пропорциональна их скорости с коэффициентом b ; $\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$ - линейная частота волны; g - ускорение силы тяжести.

Если ввести безразмерную переменную $\tau = \Omega t / 2$ и произвести преобразование $H(\tau) = e^{-\delta\tau} H_1(\tau)$, то функция $H_1(\tau)$ будет удовлетворять уравнению Матье в канонической форме

$$H_1'' + [p - 2q \cos 2\tau]H_1 = 0 \quad (1.2)$$

где $\delta = 2b / \Omega$, $q = 2sk$, $p = (2\omega / \Omega)^2 - \delta^2$.

Предполагается, что в начальный момент времени амплитуда волнового возмущения мала, т.е. $H_1(\tau) \ll 1$. Тогда из анализа уравнения (1.2) следует, что если частота колебаний Ω сосуда принадлежит зоне неустойчивости, определяемой неравенством [Боголюбов (1974); Нестеров (1969)]

$$1 - \sqrt{(2sk)^2 - 4b^2 / \omega^2} < 2\omega / \Omega < 1 + \sqrt{(2sk)^2 - 4b^2 / \omega^2}$$

то тривиальное решение уравнения (1.2) теряет устойчивость, и колебания нарастают по экспоненциальному закону.

Из теоретической модели [Нестеров (1969)], в которой асимптотическое решение нелинейной задачи о поверхностных волнах Фарадея построено в переменных Лагранжа методом Крылова-Боголюбова, резонансные зависимости высоты стационарной волны от частоты параметрического воздействия определяются соотношением

$$k^2 \omega \beta H_{\pm}^2 = 4 \left[\omega - \Omega / 2 \pm \sqrt{(s\omega^2 \Omega / 2g)^2 - b^2} \right] \quad (1.3)$$

Здесь $\beta = \text{th}^{-4} kh (2\text{th}^6 kh + 3\text{th}^4 kh + 12\text{th}^2 kh - 9) / 64$; H_+ отвечает реализуемой в эксперименте устойчивой, а H_- - неустойчивой ветвям резонансной зависимости.

Воспользуемся результатами приближенной теории пограничного слоя и оценим влияние вязкости на процесс параметрического возбуждения волн.

В соответствии с основным положением приближенной теории пограничного слоя [Ламб (1947); Keulegan (1959)] - скорость рассеяния волновой энергии определяется диссипацией ΔE_1 во всем объеме жидкости, потерями ΔE_2 на вертикальных стенках и ΔE_3 на дне сосуда

$$\frac{dE}{dt} = -\Delta E_1 - \Delta E_2 - \Delta E_3,$$

где

$$E(t) = E(0)e^{-2bt} = \frac{\rho g H^2}{16} LW,$$

$$H(t) = H(0)e^{-bt}.$$

При затухании волновой моды номера n на поверхности жидкости глубины h в сосуде заданных размеров ($L \times W$) величины ΔE_1 и ΔE_2 сохраняются, а ΔE_3 определяется структурой дна.

Согласно [Ламб (1947); Keulegan (1959)] коэффициент затухания определяется как

$$b = b_1 + b_2 + b_3 \quad (1.4)$$

где

$$b_1 = 2\nu k^2,$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} \left(\frac{L+W}{LW} + k \frac{L-2h}{L \operatorname{sh} 2kh} \right),$$

$$b_3 = \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} k \frac{1}{\operatorname{sh} 2kh}.$$

Здесь ν - кинематическая вязкость жидкости; коэффициенты b_1 , b_2 и b_3 определяют диссипацию волновой энергии во всем объеме жидкости, на передней и задней стенках и дне сосуда, соответственно.

1.2.2. Экспериментальная установка ПР-2М

Стенд ПР-2М (Параметрический Резонанс – вариант 2 Модернизированный), разработанный и созданный в ИПМех РАН, предназначался для исследования нелинейных эффектов в стоячих гравитационных поверхностных и внутренних волнах, возбуждаемых при параметрическом резонансе в жидкости [Калиниченко, Нестеров, Секерж-Зенькович (2015)] – рис. 1.12.

Объектом экспериментальных исследований на стенде ПР-2М являются волны, возбуждаемые в колеблющемся в вертикальном направлении сосуде с жидкостью; переменным параметром для исследуемой гидродинамической системы является переменное поле тяжести в системе отсчета, связанной с колеблющимся сосудом – рис. 1.11.

Поскольку характеристики возбуждаемых волн зависят от частоты и амплитуды колебаний сосуда, основными требованиями к лабораторной установке являются строго вертикальные колебания и возможность изменения частоты и амплитуды этих колебаний.

Для обеспечения вертикальных колебаний сосуда с жидкостью используется кривошипно-шатунного механизм, посредством которого вращательное движение вала электродвигателя преобразовывалось в возвратно-поступательное движение грузовой площадки.



Рис. 1.12. Общий вид экспериментальной установки ПР-2М

В состав ПР-2М входят (см. блок-схему на рис.1.13):

- электродвигатель постоянного тока П-11 (0,45 кВт; 2200 об/мин);
- редуктор;
- кривошипно-шатунный механизм;
- блок питания и управления;
- грузовая площадка с вертикальными непроводящими.

Электропривод обеспечивает возвратно-поступательное движение грузовой площадки с заданной частотой, которая регулируется изменением напряжения питания электродвигателя. В ходе эксперимента при фиксированной амплитуде колебаний сосуда имеется возможность изменения частоты колебаний в диапазоне $0.3 < \Omega/2\pi < 5$ Гц.

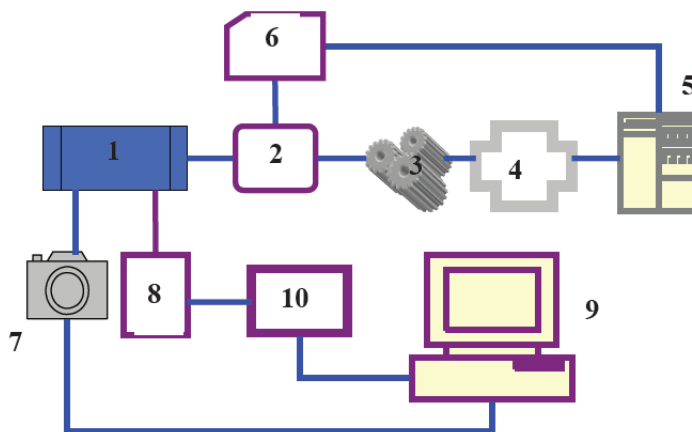


Рис. 1.13. Блок-схема и спецификация стенда ПР-2М: 1 – сосуд с испытуемыми жидкостями; 2 – кривошипно-шатунный механизм; 3 – редуктор; 4 – Электродвигатель постоянного тока (П11); 5 – блок питания и управления; 6 – устройство регистрации периода колебаний сосуда; 7 – цифровая фотокамера (DimageZ); 8 – скоростная камера VS-FAST; 9 – ПК (персональный компьютер); 10 - контроллер ввода изображения VS2001

Устройство кривошипношатунного механизма позволяет изменять радиус кривошипа, а следовательно, и амплитуду колебаний сосуда в диапазоне $0.03 < s < 7.50$ см.

Грузовая площадка допускает установку сосудов различной формы общей массой до 40 кг.

При конструировании ПР-2 выдвигались следующие требования: движения сосуда с жидкостью должны быть максимально приближены к вертикальным и являться гармоническими.

Вследствие неизбежной малой асимметрии установки происходит нарушение характера движения, а именно, направление, вдоль которого происходит колебательное движение сосуда, составляет некоторый угол с вертикалью. По смещению лазерного луча, отраженного от вертикально установленного на грузовой площадке зеркала, было найдено, что этот угол составляет величину порядка $8'$.

Нарушение гармоничности колебаний сосуда может происходить вследствие неустойчивости вращения привода и разбалансировки кривошипа. Неустойчивость вращения контролируется по показаниям частотомера, и эксперименты прекращаются, если отклонения от среднего значения периода колебаний превышают 5×10^{-3} с. Разбалансировка устраняется уравниванием плеч кривошипа.

Для оценки гармоничности колебаний сосуда при сбалансированном кривошипе для различных значений частоты Ω и амплитуды s была проведена запись движения грузовой площадки ПР-2М. Получено, что коэффициенты при высших гармониках не превышают величину 0,02 см, а относительная ошибка представления колебаний сосуда гармонической функцией или коэффициент нелинейных искажений не превышает 5%.

Точность измерения периода вертикальных колебаний сосуда характеризуется отклонением от среднего значения 3×10^{-3} с, причем эта величина зависит от неустойчивости вращения привода установки ПР-2М. Неустойчивость вращения в основном определяется скачками напряжения питания.

Для регистрации волновых движений жидкости используются цифровая фото/видеосъемка (DIMAGE Z2, 24-30 к/с и Cannon Power Shot SX50 HS) с последующей компьютерной обработкой в среде ImageJ-1.46r. Оценки показали, что точность измерения пространственных характеристик волн по материалам фото и видеосъемки оценивается величиной 1 мм (среднеквадратическая ошибка), причем среднее значение H в каждом

режиме рассчитывалось по 8-10 измеренным в моменты максимального развития волны последовательным значениям разности между высотой ее гребня и впадины.

Экспериментальное значение коэффициента затухания b оценивалось следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась первая волновая мода $n=1$. Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений жидкости. Измерения смещения свободной поверхности жидкости от положения равновесия по материалам кино/видеосъемки производились с точностью 0.1 см. Величина b определялась как

$$b = \frac{1}{T} \ln \frac{H_m}{H_{m+1}} \quad (1.5)$$

где $T=2\pi/\omega$ - период волны, H_m и H_{m+1} - значения высоты волны, взятые через период колебаний.

Технические характеристики стенда ПР-2М представлены ниже

Диапазон частот колебаний сосуда	0.1-0.5 Гц
Амплитуда вертикальных колебаний сосуда	0.03-7.5 см
Угловые смещения по горизонтали	не более 8'
Коэффициент нелинейных искажений вертикальных колебаний сосуда	5%
Точность измерения периода колебаний	3×10^{-3} с
Допустимая масса сосуда с жидкостью	до 50 кг
Точность измерения пространственных характеристик волновых движений	1 мм

Глава 2. ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В ПОДВИЖНОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ

Экспериментально исследованы горизонтальные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью, вызванные первой модой стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея. Проведено сравнение данных экспериментов по связанным горизонтальным колебаниям сосуда со случаем параметрического возбуждения волн Фарадея в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде. Полученные опытные данные сопоставляются с результатами имеющихся теоретических моделей.

Исследованы параметрические колебания физического маятника в виде однородного стального цилиндра как механического аналога волн Фарадея в случае дополнительной горизонтальной степени свободы точки подвеса маятника.

По материалам главы опубликованы работы [Co (2013); *Калиниченко, Со* (2013а; 2013б; 2015); *Kalinichenko, Soe* (2014)].

2.1. Постановка эксперимента

Волновые движения жидкости исследовались в прямоугольных сосудах следующих размеров ($L=50$ см, $W=4$ см) и ($L=50$ см, $W=10$ см). Массы сосудов равны $m_2=7.55$ и 7.60 кг, соответственно. Изучалась первая волновая мода $n=1$ на свободной поверхности воды глубины $h=5-20$ см в условиях основного резонанса Фарадея, когда частота возбуждаемых волн в 2 раза меньше частоты Ω колебаний сосуда. Амплитуда вертикальных колебаний сосуда оставалась неизменной $s=1.3$ или 2.25 см.

Длина волны первой моды $\lambda=2L=100$ см, т.е. реализуемые в эксперименте волновые режимы соответствуют случаю длинных волн или мелкой воды - $h/\lambda=0.05-0.2$.

Для обеспечения исследуемых в экспериментах горизонтальных перемещений сосуда с жидкостью использовалась рельсовая тележка (масса $m_3=1.3$ кг), свободно перемещающаяся по двум горизонтальным стальным

рельсам. Прямоугольные сосуды устанавливались на тележку (рис. 2.1). Плавность хода тележки обеспечивалась пятью подшипниками качения. При указанной массе тележки измеренный динамометрическим методом коэффициент трения качения покоя не превышал 0.02.

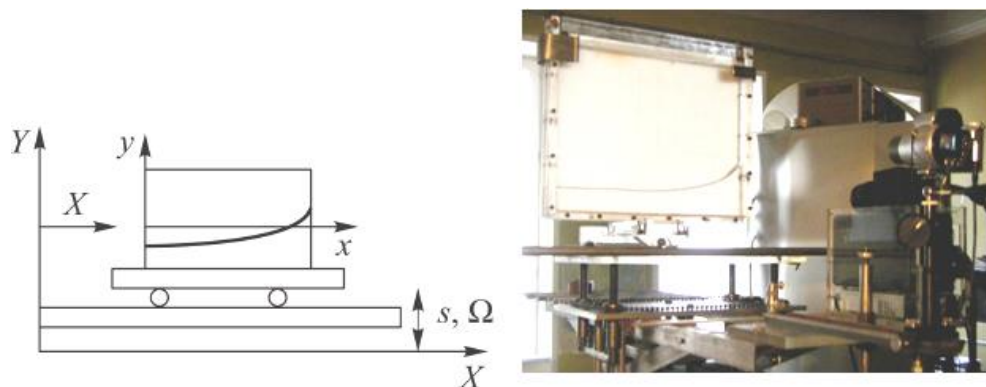


Рис. 2.1. Постановка эксперимента при решении задачи Л.Н. Сретенского

В экспериментах с маятником однородный стальной цилиндр диаметром 1.5 см, длиной 50.2 см и массой $m_4=688$ г (вместе с электродвигателем $m_5=2880$ г) жестко крепился к горизонтальной оси обесточенного электродвигателя. Как и в волнах Фарадея, исследовался основной параметрический резонанс. Точность измерения угла φ отклонения маятника при обработке видеоматериалов составляла 0.5° . Измеренная собственная частота маятника $\omega=5.28\pm 0.12$ с⁻¹, приведенная длина $l=35.1$ см. Для обеспечения исследуемых в экспериментах горизонтальных перемещений физического маятника также использовалась рельсовая тележка на пяти подшипниках качения.

2.2. Результаты и обсуждение

Рассматривая плоское движение жидкости в вертикально колеблющемся и подвижном в горизонтальном направлении сосуде и используя абсолютную (X, Y) и подвижную (x, y) системы координат (рис. 2.1), потенциал скоростей частиц жидкости может быть представлен как $\Phi = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2$. Здесь потенциальная функция φ описывает волновое

движение жидкости, а φ_1 и φ_2 определяют ее твердотельное поступательное движение в вертикальном и горизонтальном направлениях вместе с сосудом, соответственно. Далее такое представление используется для интерпретации данных эксперимента.

2.2.1. Волны Фарадея в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде

Пусть сосуд колеблется в вертикальном направлении и зафиксирован в горизонтальном: $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 = 0$.

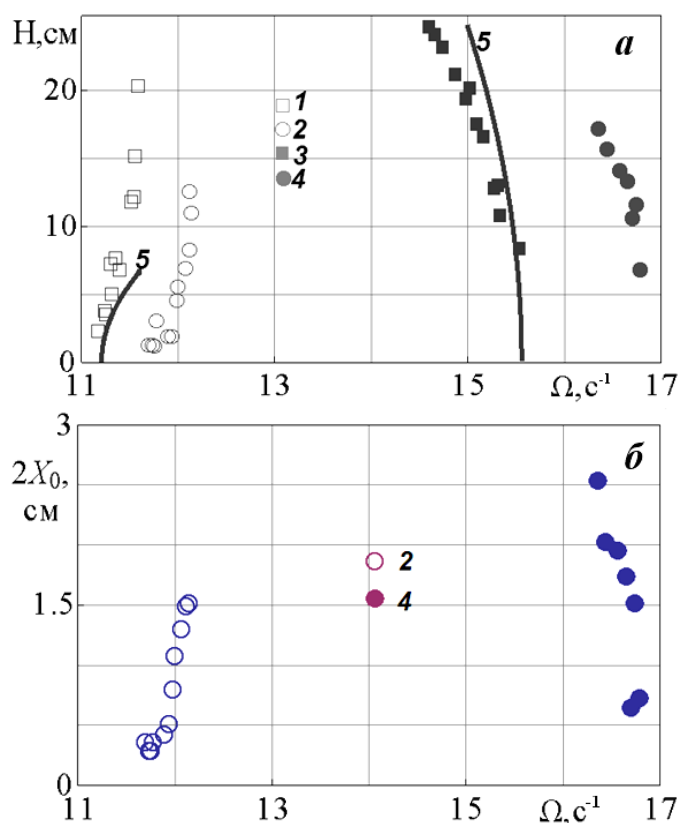


Рис. 2.2. Резонансная зависимость $H(\Omega)$ первой волновой моды ($s=1.3$ см) (а) и зависимость размаха $2X_0$ колебаний тележки от частоты Ω (б): 1,3 – неподвижный в горизонтальном направлении сосуд, $h=10, 20$ см; 2,4 – сосуд на тележке, $h=10, 20$ см; 5 – устойчивая ветвь, рассчитанная по (1.3), модель [Нестеров (1969)]. Сосуд ($L=50$ см, $W=4$ см)

В экспериментах исследовались резонансные зависимости высоты H от Ω . Для интерпретации экспериментальных данных использовались

асимптотические решения нелинейной задачи о поверхностных волнах Фарадея (см. раздел 1.2.1).

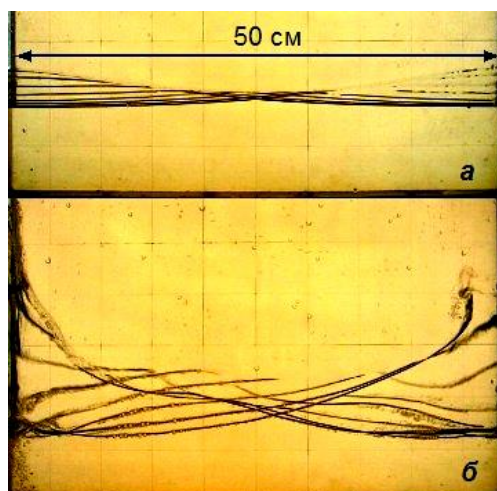


Рис. 2.3. Форма свободной поверхности ($h=10$ см, $s=1.3$ см) при возбуждении первой моды волн Фарадея в неподвижном сосуде ($L=50$ см, $W=4$ см) в течение полупериода волны: *а* - $\Omega=11.26$ с⁻¹; $H=3.7$ см (шаг по времени $T/16$); *б* - $\Omega=11.53$ с⁻¹; $H=22.2$ см (шаг по времени $T/18$)

Экспериментальные (1, 3) и расчетная (5) резонансные зависимости для первой волновой моды в неподвижном сосуде ($X=0$ или $\varphi_2=0$) приведены на рис. 2.2. Видно, что при глубине жидкости $h=10$ см зависимости $H(\Omega)$ соответствуют случаю жесткой восстанавливающей силы ($\beta=-0.801$) - высота волны растет с увеличением частоты колебаний сосуда (1). В случае $h=20$ см величина $\beta=0.060$ положительна, и наклон резонансной зависимости меняется (3) - реализуется параметрическое возбуждение с мягкой восстанавливающей силой. Отметим, что в обоих случаях модель неплохо описывает данные эксперимента до крутизны волны $H/\lambda=0.15$, причем отсутствует смещение измеренных и рассчитанных зависимостей по частоте. Некоторое различие измеренных и рассчитанных значений H связано с нелинейностью наблюдаемых в эксперименте волн, для которых узла стоячей волны как неподвижной точки свободной поверхности не существует.

Приведенные на рис. 2.3 профили соответствуют двум режимам стационарных колебаний свободной поверхности жидкости при частоте вертикальных колебаний сосуда $\Omega=11.26$ и 11.53 с^{-1} , соответственно. Профили получены при наложении 8 и 9 видеокадров (отвечают полупериоду волны). Если в первом случае (а) волна имеет крутизну $H/\lambda=0.04$ и близка к линейной, то при $H/\lambda=0.22$ (б) в значительной степени проявляются нелинейные эффекты – интенсивные колебания узла стоячей волны, асимметрия профиля и отрывы небольших фрагментов жидкости.

2.2.2. Волны Фарадея в подвижном в горизонтальном направлении сосуде

Рассмотрим случай подвижного в горизонтальном направлении сосуда с жидкостью - $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$ (рис. 2.1).

Оценим воздействие колеблющейся жидкости на сосуд. При отсутствии волн гидростатическое давление на торцевые стенки сосуда дает горизонтальную нулевую силу. При наличии на поверхности воды свободных стоячих двумерных волн амплитуда действующей в горизонтальном направлении силы оценивается в первом приближении из интеграла Коши – Лагранжа как $Q_x = HL^2W\rho\omega^2 / \pi^2$. Например, для первой волновой моды $n=1$ высотой $H=10$ см и частотой $\omega=5.04 \text{ с}^{-1}$ на свободной поверхности воды глубиной $h=7$ см максимальное значение силы оценивается как $Q_x=2.6 \times 10^5$ дин. Именно эта сила приводит к колебаниям сосуда в горизонтальном направлении.

Если поместить сосуд с водой на тележку и возбудить первую моду волн Фарадея, то под воздействием сил реакции со стороны колеблющейся жидкости на торцевые стенки вся система совершает периодические перемещения в горизонтальном направлении. Соответствующие резонансные зависимости (2, 4) для первой волновой моды, возбуждаемой в сосуде на тележке при параметрическом резонансе, приведены на рис. 2.2. Аналогично неподвижному сосуду при глубине жидкости $h=10$ см имеем

случай жесткой восстанавливающей силы (2), а при $h=20$ см наклон резонансной зависимости меняется (4).

Сравнение частотного диапазона наблюдаемых в неподвижном и подвижном сосудах волн Фарадея показывает сдвиг резонансных зависимостей в высокочастотную область – рис. 2.2. При $h=10$ см это смещение оценивается как $\Delta\Omega = 0.69 \text{ с}^{-1}$, тогда как для глубины жидкости 20 см частотный сдвиг увеличивается вдвое - $\Delta\Omega = 1.41 \text{ с}^{-1}$.

Характеризующая связанные колебания зависимость размаха $2X_0$ горизонтальных перемещений тележки от частоты Ω вертикальных колебаний сосуда H представлена на рис. 2.2, б. Видно, что увеличение размаха с ростом ($h=10$ см) или уменьшением ($h=20$ см) частоты определяется соответствующим наклоном резонансных зависимостей (рис. 2.2, а), причем значение $2X_0$ больше в случае глубокой жидкости для одинаковой высоты.

Детальный анализ характера горизонтальных колебаний сосуда при параметрическом возбуждении волн и частотного сдвига резонансных зависимостей проведен в серии экспериментов при амплитуде $s=2.25$ см вертикальных колебаний сосуда и глубине жидкости $h=5, 7, 8.5, 10$ и 12 см.

На рис. 2.4, а показаны зависимости $H(\Omega)$ для трех значений глубины жидкости. Если при $h=5$ см (I) дополнительная степень свободы сосуда в горизонтальном направлении практически не влияет на резонансную зависимость, то в случае больших глубин (II и III) наблюдается существенный сдвиг $H(\Omega)$ в высокочастотную область.

Данные о зависимости размаха $2X_0$ колебаний тележки от частоты Ω (рис. 2.4, а) также свидетельствуют об усилении осцилляций сосуда с увеличением глубины.

Можно дать следующую интерпретацию полученным экспериментальным результатам. С ростом глубины жидкости

увеличивается амплитуда силы, действующей в горизонтальном направлении на торцевые стенки сосуда со стороны колеблющейся жидкости. Это воздействие также усиливается с увеличением высоты волны, причем размах колебаний сосуда является линейной функцией H - рис. 2.4, в.

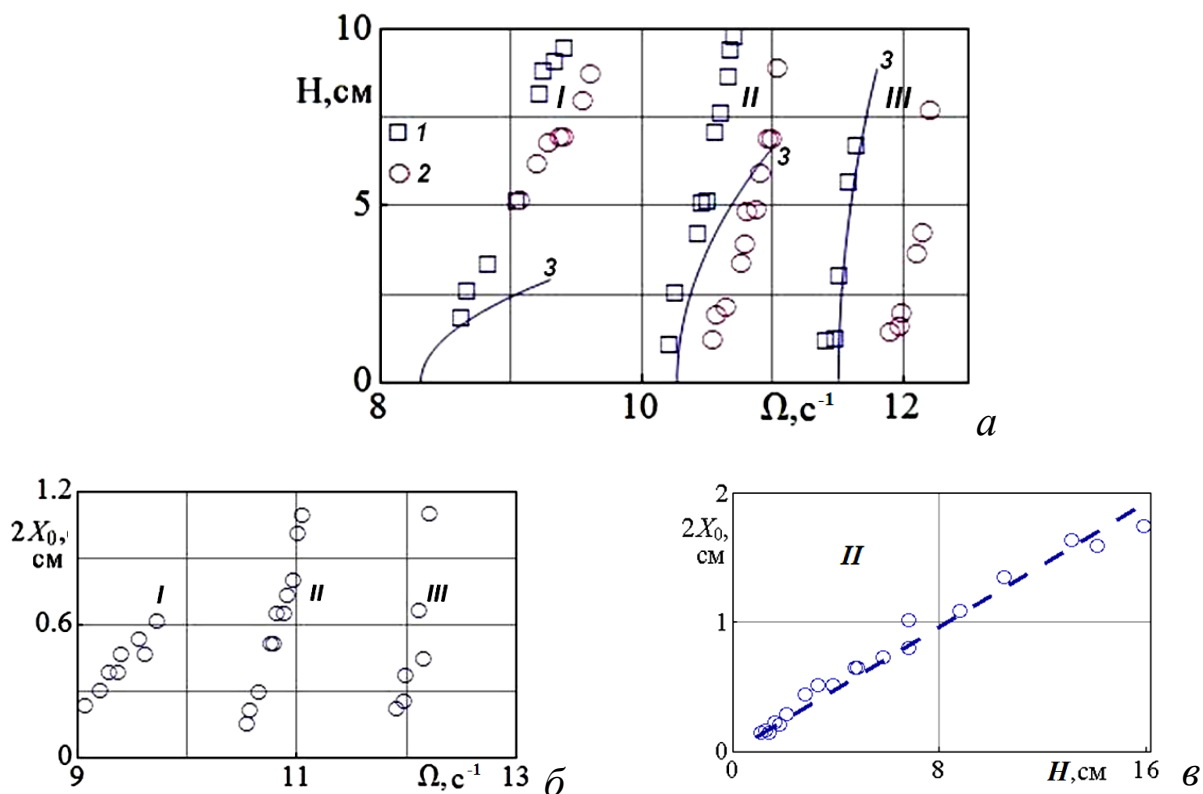


Рис. 2.4. Резонансные зависимости $H(\Omega)$ первой волновой моды (а), зависимости размаха $2X_0$ колебаний тележки от частоты Ω (б) и высоты волны H (в) при $s=2.25$ см: I–III - $h=5, 8.5$ и 12 см; 1,2 – неподвижный и подвижный в горизонтальном направлении сосуд ($L=50$ см, $W=4$ см); 3 – устойчивая ветвь $H(\Omega)$, рассчитанная по (1.3), модель [Нестеров (1969)].

Интерполирующая функция $2X_0 = 0.12H$

Дополнительная горизонтальная степень свободы сосуда с колеблющейся жидкостью приводит к увеличению собственной частоты ω^* рассматриваемой механической системы. Таким образом, при анализе связанных колебаний сосуд – жидкость вместо линейной волновой частоты

$\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$ следует использовать частоту ω^* , зависящую от глубины или массы жидкости.

Эффект дополнительной степени свободы сосуда с колеблющейся жидкостью на резонансные характеристики также исследовался для прямоугольного сосуда размерами ($L=50$ см, $W=10$ см) и массой $m_2=7.6$ кг.

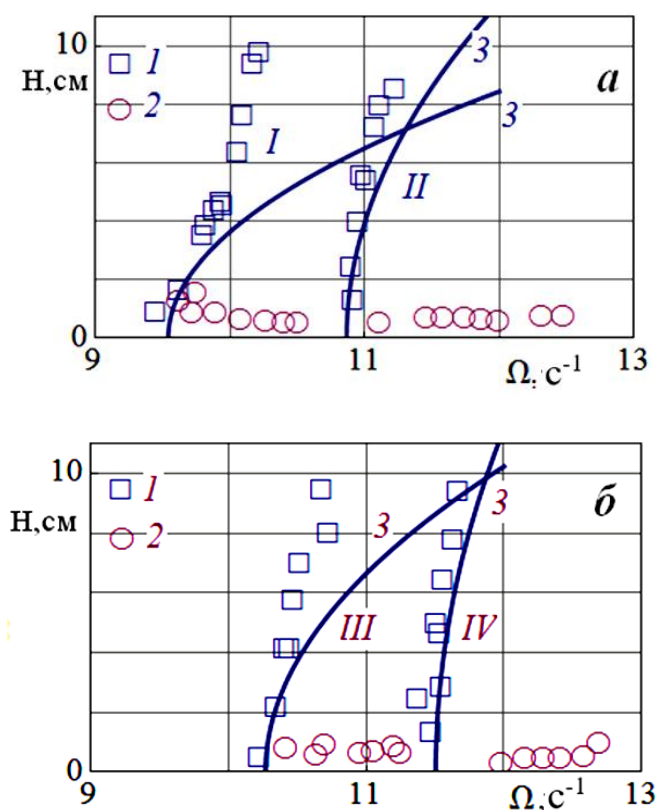


Рис. 2.5. Резонансные зависимости $H(\Omega)$ первой волновой моды от частоты Ω для глубин $h=7$ и 10 см (*a*) и $h=8.5$ и 12 см (*б*) при $s=2.25$ см: *I–IV* - $h=7, 10, 8.5$ и 12 см; *1,2* – неподвижный и подвижный в горизонтальном направлении сосуд ($L=50$ см, $W=10$ см); *3* – устойчивая ветвь $H(\Omega)$, рассчитанная по (1.3), модель [Нестеров (1969)]

Измерены резонансные зависимости $H(\Omega)$ в случаях горизонтально неподвижного и подвижного сосудов.

В случае горизонтально подвижного сосуда эксперименты показали, что во всем диапазоне частоты резонансной зависимости значение высот

наблюдаемых волн порядка $H \sim 1.5$ см (рис. 2.5) при полном отсутствии колебаний сосуда в горизонтальном направлении. Хотя сосуд в этом случае более широкий ($W=10$ см), но имел почти одинаковую массу с рассмотренным выше сосудом ($W=4$ см). При одинаковой глубине ($h=7$ см) и высоте волн ($H=10$ см) у обоих сосудов полученные значения силы давления жидкости на стенки ($Q_x \approx HL^2W\rho\omega^2 / \pi^2$) и силы трения ($F_{тр}=\mu N$) представлены ниже:

Сосуд ($L \times W$) см	Масса сосуда, г	h , см	H , см	Q_x , дин	$F_{тр}$, дин
50×4	7550	7	10	$\sim 2.6 \times 10^5$	$\sim 2.0 \times 10^5$
50×10	7600	7	10	$\sim 6.5 \times 10^5$	$\sim 2.4 \times 10^5$

где $N = (m_1 + m_2 + m_3)g$, m_1, m_2, m_3 - массы жидкости, сосуда и тележки, соответственно; $\rho=1$ г/см³ - плотность воды; $\mu \sim 0.02$ - коэффициент трения качения.

Согласно приведенным оценкам, для обоих сосудов силы давления жидкости превышают силы трения. Однако эти оценки не объясняют отсутствие горизонтальных колебаний сосуда в случае широкого сосуда ($W=10$ см). Малая высота волн $H \sim 1.5$ см также не позволила оценить величину коэффициента затухания для сосуда, имеющего горизонтальную степень свободы. Можно предположить, что вследствие нелинейности задачи о связанных колебаниях сосуда с жидкостью в подвижном широком сосуде диссипативные эффекты проявляются значительно и требуют дальнейших исследований.

Для иллюстрации наблюдаемых в широком сосуде колебаний на рис. 2.6 приведены профили, соответствующие случаям неподвижного и подвижного сосуда ($L=50$ см, $W=10$ см) в режиме стационарных волновых движений жидкости при одинаковой глубине $h=7$ см и одинаковой частоте

вертикальных колебаний сосуда $\Omega=9.89 \text{ с}^{-1}$. Огибающие получены при наложении 169 видеок кадров, соответствующим 10 периодам волны.

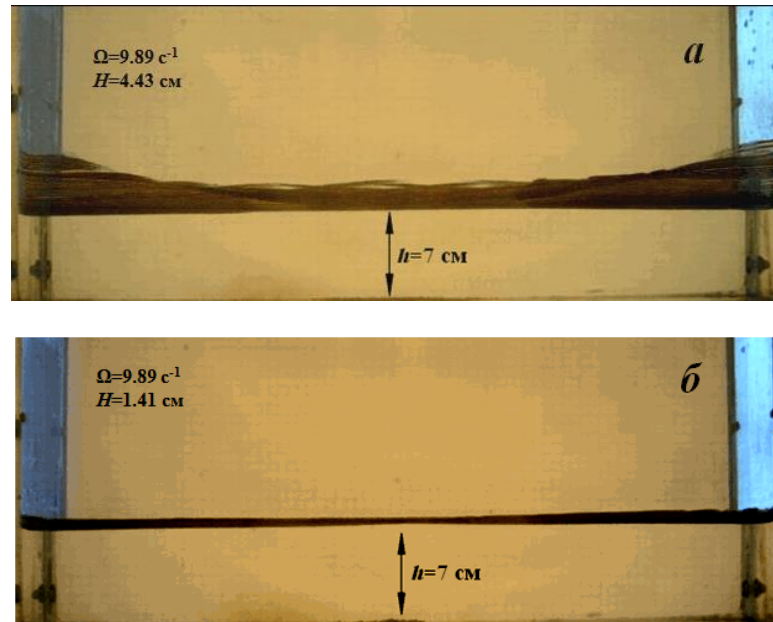


Рис. 2.6. Огибающие свободной поверхности ($h=7 \text{ см}$, $s=2.25 \text{ см}$) при возбуждении первой моды волн Фарадея в горизонтально неподвижном сосуде (*а*) и в подвижном сосуде (*б*). Сосуд ($L=50 \text{ см}$, $W=10 \text{ см}$)

2.2.3. Вязкое затухание волн

Рассмотрим особенности затухания первой моды ($n=1$) стоячих гравитационных волн в горизонтально неподвижном и подвижном в горизонтальном направлении сосудах. В качестве количественной меры диссипативных эффектов используем коэффициент затухания волн (см. разд. 1.2.1).

Влияние дополнительной степени свободы узкого сосуда ($L=50 \text{ см}$, $W=4 \text{ см}$) на коэффициент затухания оценивался при сравнении процессов затухания стационарных волн в неподвижном и подвижном сосудах (см. рис. 2.2 и 2.4).

Для первой волновой моды на свободной поверхности жидкости глубиной h от 5 до 12 см в неподвижном сосуде получены экспериментальные оценки коэффициента затухания $b=0.154-0.086 \text{ с}^{-1}$. Расчет b на основе приближенной теории пограничного слоя (см. раздел 1.2.1) дает $b=0.065-0.056 \text{ с}^{-1}$. Дополнительная горизонтальная степень свободы сосуда приводит к двукратному увеличению значения коэффициента затухания - $b=0.213-0.137 \text{ с}^{-1}$. Ниже приведены соответствующие опытные и расчетные значения коэффициента затухания:

Сосуд (см)	h (см)	ω (с^{-1})	Неподвижный (горизонтально) сосуд		Подвижный (горизонтально) сосуд
			b (с^{-1}) (эксп.)	b (с^{-1}) (теор.)	b (с^{-1}) (эксп.)
50×4×40	5	4.54	0.154	0.065	0.213
	7	5.14	0.118	0.060	0.200
	8.5	5.50	0.096	0.058	0.163
	10	5.85	0.091	0.057	0.150
	12	6.30	0.086	0.056	0.137

2.3. Оценка частотного сдвига

Проведем анализ опытных данных, используя результаты Л.Н. Сретенского о плоских горизонтальных колебаниях прямоугольного сосуда с идеальной жидкостью при наличии на поверхности свободной стоячей волны [Сретенский (1951)]. Указанная задача соответствует случаю $\varphi_1 = 0, \varphi_2 \neq 0$ - рис. 2.7.

Рассмотрим прямоугольный сосуд длиной L и шириной W , заполненный жидкостью до глубины h . Допустим, что сосуд может перемещаться поступательно в горизонтальном направлении по гармоническому закону $X = X_0 \sin \omega_n^* t$. Пусть величина X определяет

положение подвижного сосуда по отношению к неподвижной системе координат. Какими-либо диссипативными эффектами пренебрегаем.

Все дальнейшее рассмотрение основано на теории малых колебаний и на соотношениях теории волн малой амплитуды. Для описания двумерных движений жидкости введем подвижную систему координат Ox , связанную с левой стенкой сосуда; ось Ox направлена вдоль невозмущенной линии свободной поверхности жидкости, а Oy – вертикально вверх.

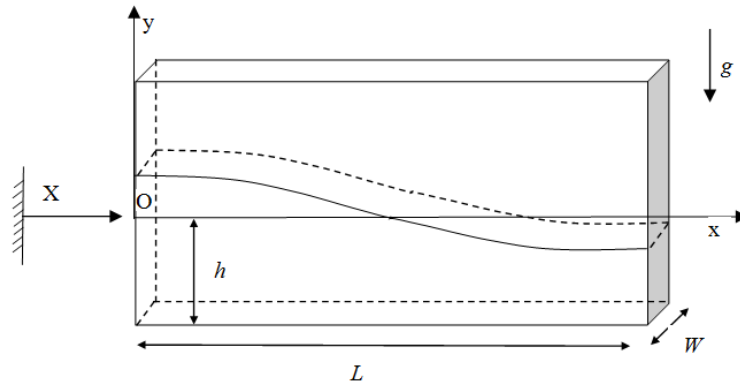


Рис. 2.7. Волна в прямоугольном сосуде, перемещающемся в горизонтальном направлении

Обозначим через $\varphi(x, y, t)$ потенциал скоростей относительного движения жидкости в сосуде. Функция $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям на торцевых стенках и дне сосуда

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0, L} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-h} = 0 \quad (2.1)$$

Кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности жидкости имеют вид

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta \right)_{y=0} + x\ddot{X} = 0$$

Объединяя, получим следующее уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} + x\ddot{X} = 0 \quad (2.2)$$

Используя метод разделения переменных, выразим $\varphi(x, y, t)$ как

$$\varphi(x, y, t) = \psi(x, y) \cdot S(t) \quad (2.3)$$

Удовлетворяющую (2.1) гармоническую функцию $\psi(x, y)$ представим

в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1,2,3..}^{\infty} \operatorname{ch} k_n(y+h) \cdot \cos k_n x \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и используя (2.2), для $S(t)$ получим

$$S(t) = A_n \cos \omega_n^* t$$

$$A_n = \sum_{n=1,2,3..}^{\infty} \frac{D_n X_0 \omega_n^{*3}}{\operatorname{ch} k_n h (g k_n \operatorname{th} k_n h - \omega_n^{*2})}, \quad D_n = - \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{4L}{n^2 \pi^2}$$

Потенциал скоростей

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{n=1,2,3..}^{\infty} \frac{D_n X_0 \omega_n^{*3}}{(g k_n \operatorname{th} k_n h - \omega_n^{*2})} \frac{\operatorname{ch} k_n(y+h)}{\operatorname{ch} k_n h} \cos k_n x \cdot \cos \omega_n^* t \quad (2.5)$$

Уравнение свободной поверхности имеет вид

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{g} \sum_{n=1,2,3..}^{\infty} \left(x X_0 \omega_n^{*2} + \frac{D_n X_0 \omega_n^{*4}}{(g k_n \operatorname{th} k_n h - \omega_n^{*2})} \cos k_n x \right) \sin \omega_n^* t \quad (2.6)$$

Для определения давления жидкости на стенки сосуда используем интеграл Коши – Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gy + x\ddot{X} + \frac{P}{\rho} = 0 \quad (2.7)$$

Из (2.5) и (2.7) получим давление P жидкости на стенки сосуда

$$P = \rho \left(\sum_{n=1,2,3..}^{\infty} \frac{D_n X_0 \omega_n^{*4}}{(g k_n \operatorname{th} k_n h - \omega_n^{*2})} \frac{\operatorname{ch} k_n(y+h)}{\operatorname{ch} k_n h} \cos k_n x + x X_0 \omega_n^{*2} \right) \sin \omega_n^* t - \rho gy$$

Действующая на стенки сила давления жидкости определяется как

$$Q_x = \int_s P \bar{n} \cdot ds, \quad Q_x = \int_0^W \int_{-h}^0 (P)_{x=L} dy dz - \int_0^W \int_{-h}^0 (P)_{x=0} dy dz$$

$$Q_x = \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \left(\frac{8\rho L^2 W X_0 \omega_n^{*4}}{n^3 \pi^3 (g k_n \operatorname{th} k_n h - \omega_n^{*2})} \operatorname{th} k_n h + \rho L W h X_0 \omega_n^{*2} \right) \sin \omega_n^* t \quad (2.8)$$

Уравнение движения сосуда записывается

$$m\ddot{X} = Q_x$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3$; $m_1 = \rho LWh$ и ρ - масса и плотность жидкости; m_2 - масса сосуда; m_3 - масса тележки.

С учетом (2.8) имеем

$$-(m_1 + m)X_0\omega_n^{*2} \sin \omega_n^* t = \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \rho \frac{8L^2WX_0\omega_n^{*4}}{n^3\pi^3(gk_n \operatorname{th} k_n h - \omega_n^{*2})} \operatorname{th} k_n h \cdot \sin \omega_n^* t$$

Для частоты ω_n^* получим следующее уравнение

$$-\frac{M+1}{M\omega_n^{*2}} = \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{8L}{n^3\pi^3h(gk_n - \omega_n^{*2} \operatorname{cth} k_n h)} \quad (2.9)$$

где $M = m_1 / m$.

Представив левую и правую части (2.9), соответственно, как функции $F_1(\omega^{*2})$ и $F_2(\omega^{*2})$, можно найти графически решение этого уравнения относительно ω_n^* .

На рис. 2.8 для первой волновой моды при $h=20$ см частота связанных колебаний определяется пересечением кривых (1) и (2). Видно, что значение ω_1^{*2} смещена вправо относительно собственной частоты первой волновой моды $\omega_1^2 = gk_1 \operatorname{th} k_1 h$. Оценки показывают, что если собственная частота первой волновой моды составляет $\omega_1 = 7.24 \text{ с}^{-1}$, то частота связанных колебаний равна $\omega_1^* = 7.76 \text{ с}^{-1}$, т.е. имеем частотный сдвиг $\Delta\omega_1 = \omega_1^* - \omega_1 = 0.53 \text{ с}^{-1}$.

Этот метод оценки частотного сдвига можно использовать при интерпретации данных эксперимента по связанным колебаниям сосуда на тележке при возбуждении первой моды волн Фарадея.

Частотный сдвиг $\Delta\Omega$ резонансных зависимостей на рис. 2.2, а и 2.4, а связан со смещением собственной частоты следующим образом

$\Delta\omega = \Delta\Omega / 2$. Тогда величина $\Delta\omega$ может быть оценена из эксперимента и из решения (2.9).

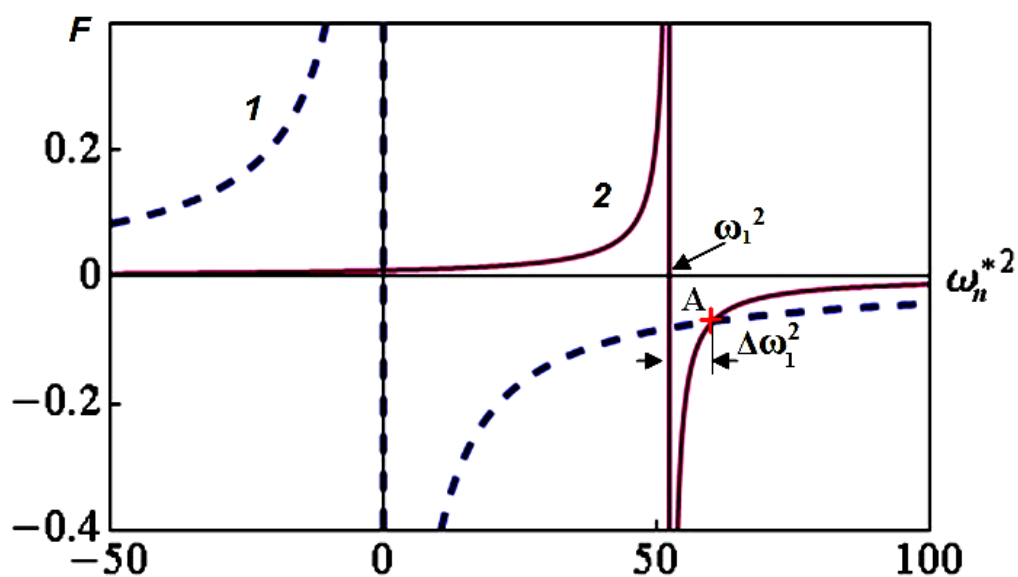


Рис. 2.8. Графическое решение уравнения (2.9) и оценка сдвига частот $\Delta\omega$ по точке A пересечения графиков $F_1(1)$ и $F_2(2)$ для первой моды стоячих волн на свободной поверхности жидкости глубиной $h=20$ см

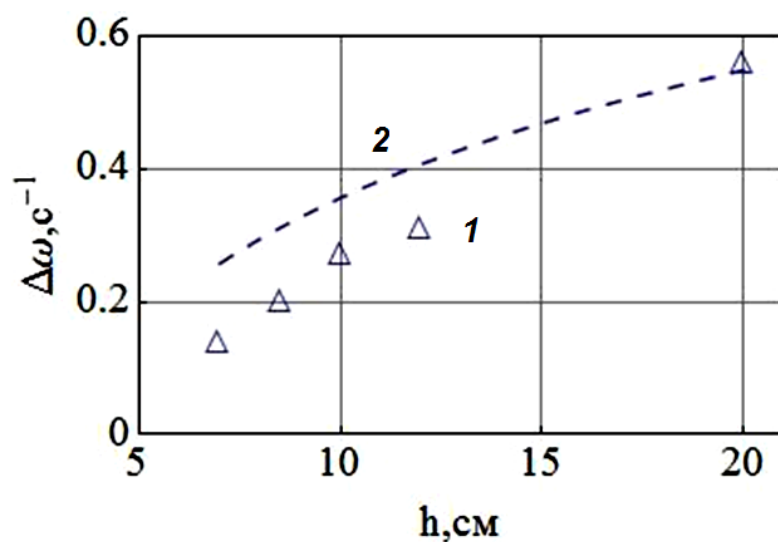


Рис. 2.9. Зависимость частотного сдвига от глубины жидкости: 1 – эксперимент; 2 – графическое решение уравнения (2.9)

Ниже для всех исследованных в условиях эксперимента глубин жидкости h приведены экспериментальные и рассчитанные значения $\Delta\omega$

h , см	7	8.5	10	12	20
$\Delta\omega$, с ⁻¹ (эксперимент)	0.14	0.20	0.27	0.31	0.56
$\Delta\omega$, с ⁻¹ (расчет (2.9))	0.24	0.31	0.36	0.42	0.53

Соответствующие зависимости частотного сдвига $\Delta\omega$ от глубины жидкости h приведены на рис. 2.9.

Несмотря на неплохое соответствие опытных данных (1) и рассчитанной кривой (2), модель [Сретенский (1951)] дает несколько завышенные значения $\Delta\omega$. Возможная причина – диссипативные эффекты в механических узлах системы - трение на осях подшипников, трение качения и т.п.

2.4. Маятник как механический аналог волны Фарадея

Поскольку отсутствуют теоретические оценки резонансных характеристик волн Фарадея в горизонтально подвижном сосуде, то изучалась более простая механическая система - параметрический маятник на тележке (рис. 2.10).

Исследования динамики маятника проводились при различных амплитудах вертикальных колебаний оси $s=0.5, 1.05$ и 2.25 см.

Для оценки эффекта горизонтально перемещающейся тележки приведем сначала результаты для маятника с вертикально колеблющейся и неподвижной по горизонтали точкой подвеса. Уравнение движение физического маятника имеет вид

$$\varphi'' + 2b\varphi' + [\omega^2 + (s\Omega^2 / l)\cos\Omega t]\sin\varphi = 0 \quad (2.10)$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, s и Ω - амплитуда и частота колебаний точки подвеса маятника, b - коэффициент затухания,

определяемый сопротивлением воздуха и потерями на оси, $\omega = \sqrt{g/l}$ - собственная частота малых колебаний маятника.

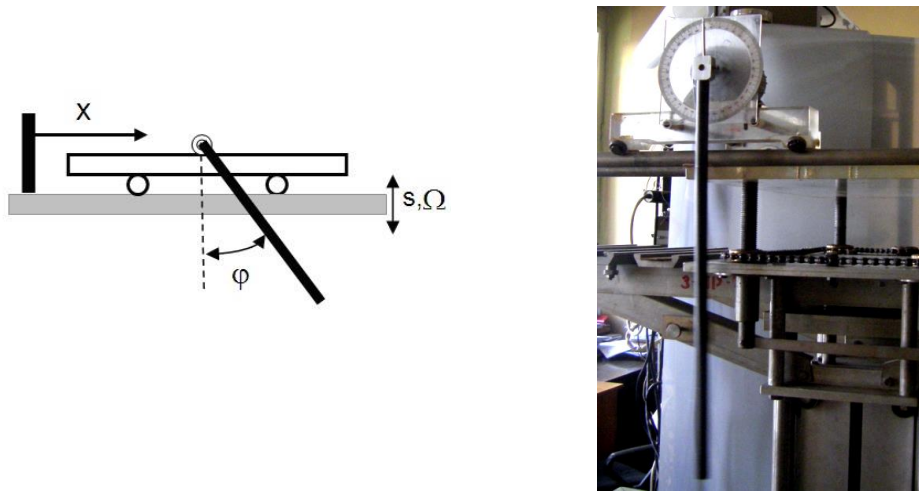


Рис. 2.10. Экспериментальная реализация механического аналога первой волновой моды Фарадея – маятника на тележке при параметрическом резонансе

Параметрическое возбуждение колебаний маятника происходит, если расстройка $\Delta = \omega - \Omega / 2$ удовлетворяет условию $|\Delta| < s\Omega^3 / 8g$.

Амплитуда φ_m стационарных колебаний маятника согласно [Боголюбов, Митропольский (1974); Ху Х., Wiercigroch М. (2007)] определяется как

$$\varphi_{m\pm}^2 = -8(\Omega - 2\omega) / \omega \pm 4\sqrt{(s\Omega^2 / g)^2 - 4(2b / \omega)^2} \quad (2.11)$$

где φ_{m+} отвечает устойчивой, а φ_{m-} - неустойчивой ветви резонансной зависимости.

На рис. 2.11 приведена резонансная зависимость для маятника при $s=1.05$ см. После возбуждения колебаний на частоте $\Omega=11.01$ с⁻¹ их амплитуда равна $\varphi=0.20$ рад. При плавном уменьшении Ω амплитуда монотонно возрастала до максимальной величины $\varphi=2.85$ рад при $\Omega=5.04$ с⁻¹. Дальнейшее уменьшение Ω приводит к срыву колебаний при $\Omega=4.97$

с^{-1} . Рассчитанные по (2.11) ветви резонансной зависимости пересеклись при частоте срыва $\Omega=4.91 \text{ с}^{-1}$. Если после срыва колебаний медленно увеличивать частоту сосуда, то скачкообразное возбуждение колебаний происходит при $\Omega=10.25 \text{ с}^{-1}$. Отметим, что представленная резонансная зависимость соответствует случаю мягкой восстанавливающей силы.

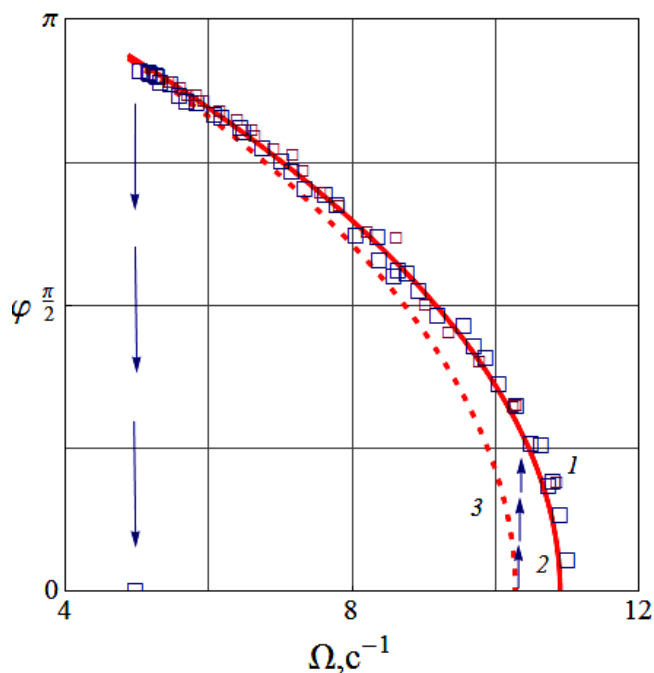


Рис. 2.11. Резонансная зависимость маятника ($s=1.05 \text{ см}$, $x \equiv 0$): 1 – эксперимент; 2, 3 – устойчивая и неустойчивая ветви $\varphi_m(\Omega)$, определяемые (2.11)

Аналогичные результаты получены при изменении экспериментальных условий (для других значений s), что свидетельствует о неплохом соответствии между моделью и экспериментом.

Перейдем теперь к параметрическому резонансу в механической системе, состоящей из движущейся вдоль горизонтальной прямой тележки массы m_5 и подвешенного к ней маятника массы m_4 (рис. 2.10).

Если ввести горизонтальную координату x тележки, динамика плоского движения системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} (m_4 + m_5)\ddot{x} + (m_4 l \cos \varphi)\ddot{\varphi} &= (m_4 l \sin \varphi)\dot{\varphi}^2 - F' \\ (m_4 l \cos \varphi)\ddot{x} + m_4 l^2 \ddot{\varphi} &= -m_4 l (g + s\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi - b\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $F' = \mu[(m_4 + m_5)(g + s\Omega^2 \cos \Omega t) + m_4 l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)]$ - сила трения качения между подшипниками тележками и горизонтальными направляющими; μ - коэффициент трения качения.

Амплитуды отклонения маятника φ и смещения X тележки как функции частоты Ω вертикальных колебаний приведены на рис. 2.12.

При данных параметрах маятника полученные результаты показывают, что наличие тележки не влияет на резонансную зависимость $\varphi(\Omega)$ – рис. 2.12, *а*. Отметим только, что в случае маятника на тележке (2) эксперимент показал затягивание резонансной зависимости в область высоких частот Ω . Кроме того, вблизи частоты срыва колебаний $\Omega = 6.51 \text{ с}^{-1}$ наблюдались перевороты маятника, повторяющиеся через 3-5 периодов. Амплитуда тележки монотонно растет с уменьшением Ω - рис. 2.12, *б*.

Оценивался коэффициент затухания колебаний маятника в диапазоне начальных угловых смещений $\varphi_0 \sim 15-60^\circ$: $b=0.029 \text{ с}^{-1}$. Аналогично для маятника с дополнительной горизонтальной степенью свободы получено значение $b=0.133 \text{ с}^{-1}$. Можно сделать вывод, что дополнительная степень свободы маятника приводит к существенному увеличению (пятикратному) коэффициента затухания без изменения частотного диапазона возбуждения колебаний и без изменения резонансных характеристик системы – рис. 2.11 *а*. Отметим, что аналогичный эффект наблюдался для волн Фарадея при малой глубине жидкости $h=5 \text{ см}$ – рис. 2.4.

На рис. 2.12 также приведены результаты численного решения уравнений движения (2.12); применялась стандартная процедура NDSolve пакета Mathematica. В модели использовались экспериментальные характеристики маятника и тележки. В качестве коэффициента трения качения взята величина $\mu=0.02$. Стационарные значения амплитуд

маятника и тележки (кривая 3 на рис. 2.12 б) получены только для диапазона частот $\Omega=9.125-11.80 \text{ с}^{-1}$.

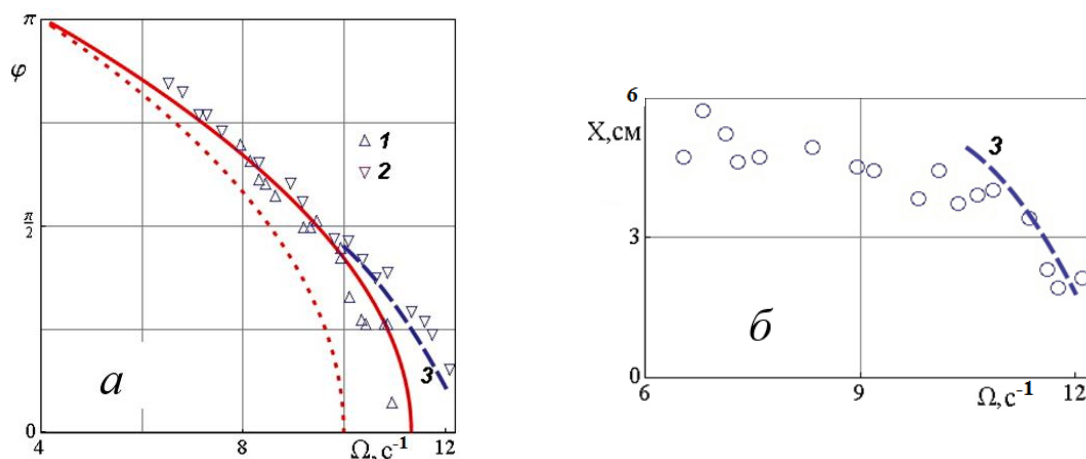


Рис. 2.12. Отклонение маятника (а) и смещение тележки (б) в зависимости от частоты вертикальных колебаний при $s=2.25 \text{ см}$: 1 – маятник ($x \equiv 0$); 2 – маятник на тележке; 3 – численный счет, модель (2.12); 4 – теория (2.11) ($x \equiv 0$)

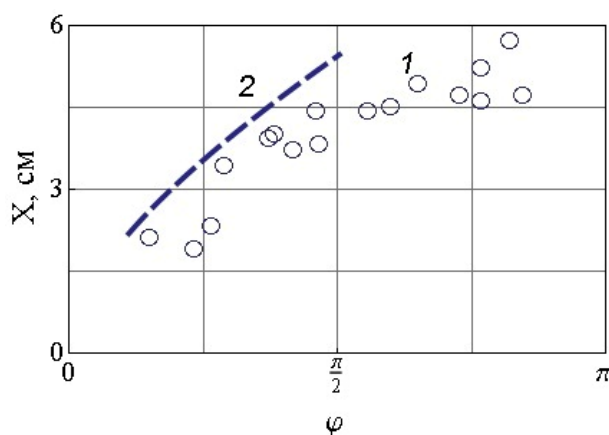


Рис. 2.13. Смещение тележки как функция угла отклонения маятника: 1 – эксперимент; 2 – численное решение уравнений (2.12)

Данные рис. 2.13 описывают взаимосвязь колебаний маятника и тележки. Видно, что с увеличением φ амплитуда тележки также растет и может достигать значительных величин порядка 6 см. Зависимость (2), полученная численным решением системы (2.12) неплохо описывает

данные эксперимента при амплитуде маятника, не превышающей величину $\pi/2$.

Процесс установления стационарных колебаний при различных Ω показан на рис. 2.14. Переходный процесс характерен и для маятника (*а*), и для тележки (*б*). Отметим существенное смещение положения, около которого происходят колебания тележки. Эта особенность движения тележки наблюдалась и в эксперименте.

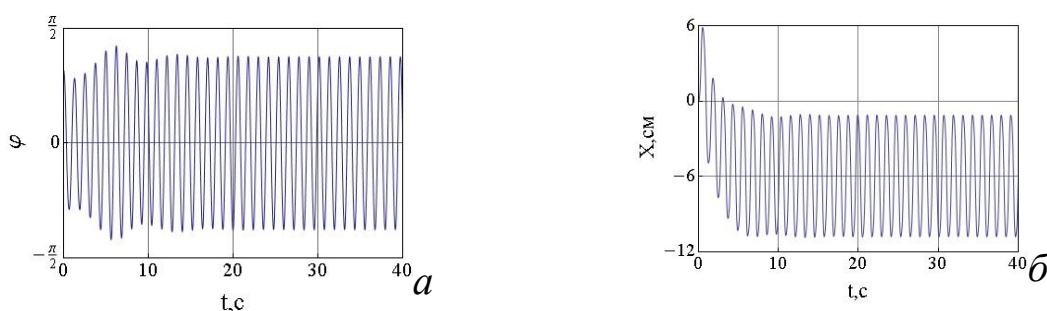


Рис. 2.14. Процесс установление стационарных колебаний системы маятник – тележка; результаты численного решения (2.12): *а, б* - $\Omega=11.80, 10.50 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_0=0.88$ ($x_0=0$)

Заключение

Экспериментально реализовано параметрическое возбуждение гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы. Исследованы горизонтальные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью, вызванные первой модой стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея. Проведено сравнение данных эксперимента по связанным горизонтальным колебаниям сосуда при возбуждении волн со случаем параметрического возбуждения волн Фарадея в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде.

Проведено сравнение опытных данных с имеющейся теоретической моделью связанных горизонтальных колебаний сосуда с жидкостью при

наличии на ее поверхности свободных волн. Исследован частотный сдвиг при совместном волновом движении жидкости и горизонтальных колебаниях сосуда; результаты сравниваются с экспериментальными данными.

Использована аналогия между движением маятника на тележке и связанными колебаниями жидкости в свободном сосуде при параметрическом возбуждении стоячих волн. Рассмотрены резонансные колебания физического маятника и маятника на тележке около нижнего положения равновесия под действием вертикальных колебаний точки подвеса. Проведено сравнение опытных данных с имеющейся теоретической моделью. Особое внимание в экспериментах уделено случаю связанных колебаний маятника на тележке, когда точка подвеса маятника получает дополнительную степень свободы в горизонтальном направлении. Построена и численно исследована модель совместного движения систем; результаты сравниваются с экспериментальными данными. Можно сделать вывод о том, что рассмотренная механическая система - маятник с указанными параметрами может свидетельствовать о результатах исследования волны Фарадея в использованном в данных экспериментах сосуде с жидкостью малой глубиной $h \sim 5$ см.

Глава 3. ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ С ПЛАСТИНАМИ-ДЕМПФЕРАМИ

В настоящей главе экспериментально исследовано влияние поперечных пластин-демпферов, расположенных как нормально, так и под произвольным углом к направлению потока, на параметры стоячих поверхностных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде. Методами трассерной визуализации показано, что демпфирующее действие пластин (установленных в узле стоячей волны) обусловлено переносом волновой энергии в систему трехмерных нестационарных вихрей по всей глубине жидкости. Научный и практический интерес представляют результаты исследования картины волновых течений на свободной поверхности жидкости при наличии пластин-демпферов в сосуде. Проведены количественные оценки эффективности действия пластин по изменению вида и частотному смещению резонансных зависимостей параметрически возбуждаемых волн. Получена универсальная зависимость декремента волны от относительного перекрытия центрального поперечного сечения сосуда.

По материалам главы опубликованы работы [Калиниченко, Со, Сысоева (2015); Калиниченко, Со, Чашечкин (2014; 2015); Со, Сысоева (2016); Kalinichenko, Soe, Chashechkin (2014); Soe, Kalinichenko (2015)].

3.1. Постановка задачи и параметры течения

Рассматриваются стоячие гравитационные волны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном сосуде с вертикальными пластинами–демпферами - рис. 3.1.

Установившиеся двумерные стоячие волн в прямоугольном сосуде на свободной поверхности жидкости глубины h характеризуются частотой $\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$ и высотой H . В случае волн малой крутизны $\Gamma = H / \lambda \ll 1$ колебания жидкости описываются потенциалом скоростей

$$\Phi(x, z, t) = -H \frac{\omega \operatorname{ch} k(z+h)}{2k \operatorname{sh} kh} \cos kx \sin \omega t$$

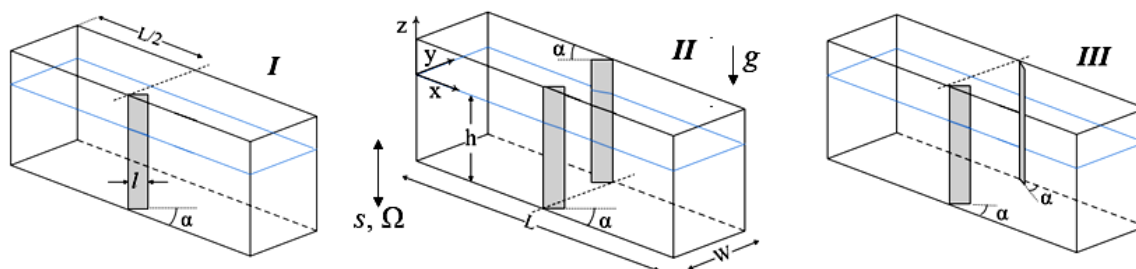


Рис. 3.1. Расположение демпфирующих пластин длиной l , установленных под углом α к боковой стенке: конфигурации I-III – одиночная, параллельная и встречная ориентации пластин

Где $\lambda = 2L/n$ - длина волны; t - время; положение и направление координатных осей (x, z) показаны на рис. 3.1.

Смещение свободной поверхности задается функцией $z(x, t) = 0.5H \cos kx \cos \omega t$, а горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости определяются как

$$u(x, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = H \frac{\omega \operatorname{ch} k(z+h)}{2 \operatorname{sh} kh} \sin kx \sin \omega t,$$

$$w(x, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -H \frac{\omega \operatorname{sh} k(z+h)}{2 \operatorname{sh} kh} \cos kx \sin \omega t$$

Далее рассматривается первая волновая мода $n=1$, для которой узел как неподвижная точка волновой поверхности расположен в центре сосуда $x = L/2$. Рассчитанная амплитуда горизонтальной составляющей скорости жидкости в узле максимальна и составляет

$$U(z) = \frac{H\omega \operatorname{ch} k(z+h)}{2 \operatorname{sh} kh} \approx \frac{H\omega}{2}$$

Предполагается, что эффект демпфирования достигается за счет изменения режима обтекания пластин, при котором энергия волн рассеивается в процессе вихреобразования и формирования тонких

структур. Эти потери энергии максимальны в областях наибольшей горизонтальной составляющей скорости, нормально или под некоторым углом к которой располагаются пластины.

Для определения характерных параметров процесса взаимодействия волнового потока и пластин учтем вязкость жидкости и представим волновое воздействие на пластину в форме

$$F = \Psi(t, T, l, H_1, \lambda, U_o, \rho, \nu)$$

где $T = 2\pi/\omega$ - период волны, H_1 - глубина погружения пластины, $U_o = H\omega/2$ - амплитуда горизонтальной составляющей скорости волнового потока, ρ и ν - плотность и кинематическая вязкость жидкости.

Переходя к безразмерным переменным, получим

$$\frac{F}{\rho U_o^2 l H_1} = \Psi\left(\frac{t}{T}, \frac{U_o T}{l}, \frac{U_o l}{\nu}, \frac{l}{\lambda}\right)$$

Здесь t/T - безразмерное время; $KC = U_o T/l$ - число Келегана-Карпентера [Keulegan, Carpenter (1958)]; $Re = U_o l/\nu$ - число Рейнольдса; l/λ - дифракционный параметр. Безразмерный параметр KC определяет соотношение размаха колеблющейся в горизонтальном направлении частицы жидкости к характерному размеру пластины.

Взаимодействие волнового потока с нормально расположенной пластиной определяется инерционной силой и сопротивлением формы при условии, что характерный размер пластины поперек потока существенно меньше длины волны $l \ll \lambda$ [Keulegan, Carpenter (1958); Graham (1980); Journee, Mssie (2001)]. В настоящее время оценки действия сил возможны только при использовании эмпирических значений коэффициентов присоединенной массы и сопротивления. Отметим также, что сила сопротивления является квадратичной от скорости осциллирующего потока.

Вместо реальной нелинейной силы сопротивления, следуя общепринятой методике [Keulegan, Carpenter (1958); Мукишев (1978);

Journee, Mssie (2001)], введем эквивалентную линейную (по скорости) демпфирующую силу, рассеивающую то же количество энергии волны за период. Тогда скорость рассеяния волновой энергии будет определяться диссипацией ΔE_1 во всем объеме жидкости, потерями ΔE_2 на вертикальных стенках и ΔE_3 на дне сосуда, а также потерями ΔE_4 при обтекании пластин осциллирующим потоком

$$\frac{dE}{dt} = -\Delta E_1 - \Delta E_2 - \Delta E_3 - \Delta E_4$$

$$E(t) = E(0)e^{-2bt} = \frac{\rho g H^2}{16} LW, \quad H(t) = H(0)e^{-bt}$$

С физической точки зрения процесс рассеяния волновой энергии на пластинах-демпферах за счет формирования и срыва присоединенных вихрей можно рассматривать как дополнительный механизм диссипации волн, и к потерям энергии на вязкую диссипацию необходимо добавлять потери на вихревое демпфирование – коэффициент b_4 .

При затухании волновой моды номера n на поверхности жидкости глубины h в сосуде заданных размеров ($L \times W$) величины ΔE_{1-3} сохраняются, а ΔE_4 определяется режимом обтекания пластин и их ориентацией; соответствующий коэффициент затухания b , включает составляющие

$$b^* = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

Здесь в соответствии с приближенной теорией пограничного слоя [*Ламб* (1947); *Keulegan* (1959)] коэффициент затухания волн в сосуде с гладкими стенками оценивается по формуле (1.4) (см. раздел 1.2.1).

Количественные значения полного коэффициента затухания b волн в сосуде с пластинами и без них рассматриваются как интегральные оценки эффективности демпфирующего элемента.

3.2. Постановка эксперимента

Вихревое демпфирование колебаний жидкости изучалось в режиме параметрического возбуждения первой моды ($n=1$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды в прямоугольных сосудах размерами ($L=60$ см и $W=13.3$ см) и ($L=50$ см и $W=10$ см).

Двумерные волновые движения исследовались в режиме основного резонанса Фарадея. При фиксированной амплитуде колебаний сосуда $s=1.25$ и 2.25 см вариации Ω обеспечивали изменения крутизны $\Gamma = H / \lambda$ в пределах $0.004-0.080$ при длине волны $\lambda = 100$ см для сосуда ($L=50$ см и $W=10$ см) и $0.004-0.066$ при $\lambda = 120$ см для сосуда ($L=60$ см и $W=13.3$ см).

В качестве демпфирующих элементов использовались три пары прямоугольных пластин из оргстекла, размеры которых приведены ниже

	длина (см)	ширина l (см)	Толщина (мм)
	28	1.5	2.0
	30	3.0	2.4
	28	4.5	4.3

Пластины устанавливались в центре сосуда ($x=25$ и 30 см; узлы стоячих волн) под углом α к стенке и направлению волнового течения жидкости рис. 3.1. При проведении экспериментов использовались три конфигурации: *I* – одиночная пластина, *II* – с параллельной и *III* – с встречной ориентацией пластин – рис. 3.1.

В опытах число Рейнольдса $Re = U_o l / \nu$, определенное по максимальной колебательной скорости U_o и ширине пластины l (кинематическая вязкость воды $\nu = 0.01$ см²/с) варьировалось в пределах от 10^3 до 10^4 ; дифракционный параметр l / λ не превышал 0.04 . Определяющее продолжительность наблюдений вихревых структур и проведения количественных измерений максимальное безразмерное время

оценивалось как $t/T \sim 300-500$. Число Келегана-Карпентера $KC = U_o T / l$ в условиях эксперимента изменялось от 0.8 до 56. Эффективность демпфирующих элементов оценивалась при различных значениях глубины слоя жидкости: $h=5, 10, 15$ и 20 см (безразмерная глубина h/λ принимала значения от 0.05 до 0.20) в сосуде ($L=50$ см и $W=10$ см); $h=6, 8, 10.2$ и 12 см (значения h/λ от 0.05 до 0.10) в сосуде ($L=60$ см и $W=13.3$ см).

Эксперименты в основном проводились с водопроводной водой ($\rho_f=1$ г/см³; $\nu_f=1$ сСт) или водной суспензией, дисперсная фаза которой состояла из обезжиренных частиц алюминиевой пигментной пудры ПАП-2 (плотность материала 2.7 г/см³), используемые для визуализации структуры течения дисперсные частицы имели пластинчатую форму $30 \times 30 \times 0.5$ мкм³ с эквивалентным диаметром $d_p=10$ мкм, их гидравлическая крупность не превышала 10^{-2} см/с. Концентрация алюминиевых частиц в опытах с суспензиями составляла 300-400 частиц на 1 см³ и практически не влияла на плотность и эффективную вязкость среды. В ряде экспериментов в качестве частиц-трассеров использовались сферические полиэтиленовые сополимеры диаметром 0.3 мм и плотностью 0.95-1.05 г/см³ с гидравлической крупностью 0.98 см/с.

3.3. Картина осциллирующего течения при наличии пластин-демпферов

Рассмотрим влияние пластин-демпферов на картину волнового течения жидкости. В экспериментах с волновым потоком около пластин-демпферов выражен эффект структуризации: в первоначально однородной суспензии взвешенных частиц за время $t/T=0, 28$ формировались области с повышенной и пониженной концентрациями во всем объеме жидкости (рис. 3.2, а). Аналогичные изменения поля концентрации частиц наблюдалась и в осциллирующем течении над профилированным дном [Калиниченко, Чашечкин (2012)].

Более детально эволюция первоначально однородного поля концентрации дисперсной фазы при установлении модальных колебаний в сосуде с двумя расположенными нормально потоку пластинами представлена на рис. 3.2, б.

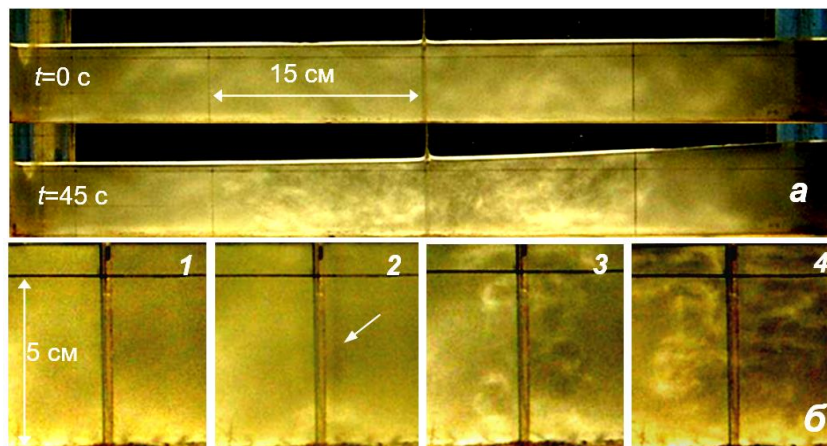


Рис. 3.2. Осциллирующий поток в сосуде ($L=60$ см, $W=13.3$ см) около двух пластин $l=1.5$ см при $\alpha=90^\circ$, период волны $T=1.62$ с: (а) – $t/T=0, 28$; (б) 1-4 – $t/T=0, 2, 4, 8$ и $H=0.5, 0.6, 0.7, 0.9$ см (скорость видеосъемки 15 к/с)

В начально однородном поле концентраций (кадр 1) через два периода волны формируется вертикальный вихревой шнур, внешняя граница которого отмечена стрелкой на кадре 2. Изменение концентрации обусловлено действием однородного по вертикали присоединенного вихря (фотография соответствует предельному положению границы вихря на тыльной стороне пластины). За волновой период наблюдаются два вихря – по одному с каждой стороны пластины, что отражает смену направления течения жидкости.

С ростом высоты волны вихревые системы теряют устойчивость и распадаются на группы вихрей меньшего масштаба (3), которые отрываются от пластин и отличаются собственным движением во внешнем волновом поле. Структуру вихревых течений характеризует новое долгоживущее поле возмущений концентрации. Светлые линии отвечают границам компактных вихревых элементов.

В дальнейшем размеры областей жидкости, вовлеченной в вихревое движение, увеличиваются, а форма усложняется (4). В целом вихревая компонента течения характеризуется собственными временными и пространственными масштабами. Число Келегана-Карпентера для кадров (1-4) изменяется от 0.95 до 2.02, а формирование и срыв присоединенных вихрей наблюдалось при высоте волны $H > 0.5$ см (2).

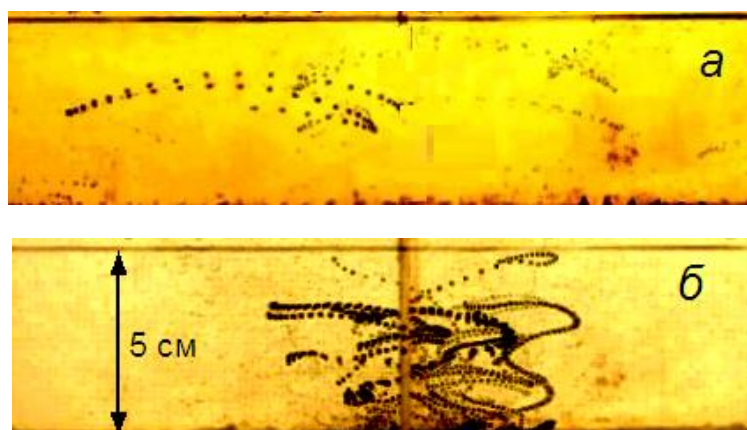


Рис. 3.3. Траектории частиц в сосуде ($L=60$ см, $W=13.3$ см): *а* – с гладкими стенками ($T=1.53$ с, $H=5.8$ см); *б* – с одной пластиной, установленной под углом 90° ($T=1.53$ с, $H=1.2$ см); время съемки 3 с, скорость регистрации – 15 к/с

Внутреннюю структуру течения иллюстрирует рис. 3.3, фотографии которой получены наложением 45 последовательных видеокадров – последовательные изображения частиц-трассеров соответствуют временному шагу $1/15$ с.

В бассейне с гладкими стенками (рис. 3.3, *а*) трассеры, расстояния между которыми характеризуют локальные значения скоростей волнового течения, располагаются вдоль слабоискривленных линий. Отклонение траекторий от горизонтальных обусловлено нелинейными эффектами в стоячей волне крутизной $\Gamma=0.05$ – узел волны колеблется и не является неподвижной точкой свободной поверхности.

Течение около пластины, установленной в центре бассейна (для наглядности оставлена одна пластина), сопровождается существенных усложнением траекторий частиц в границах вихревой области (рис. 3.3, б). Форма траекторий (в которых выделяются петли, винтовые линии, смены направлений) и наблюдаемые пересечения указывают на сложный трехмерный характер течения - результат наложения волнового и вихревого компонентов.

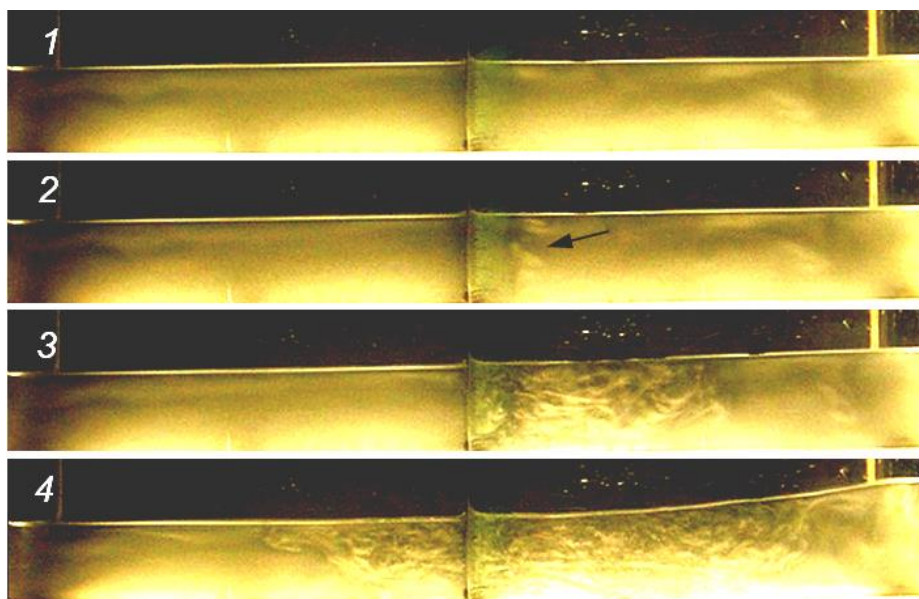


Рис. 3.4. Осциллирующий поток в сосуде ($L=50$ см, $W=10$ см) около одной пластины $l=3$ см при $\alpha=40^\circ$, $h=5$ см, $s=2.25$ см, период волны $T=1.47$ с: 1-4 - $t/T=0, 5, 15, 25$ и $H=0.5, 0.8, 1.4, 2.5$ см (скорость видеосъемки 15 к/с)

Аналогичные вихревые структуры наблюдались при возбуждении волн в более узком сосуде ($L=50$ см, $W=10$ см) с одной пластиной шириной $l=3$ см под углом $\alpha=40^\circ$ к волновому потоку (рис. 3.4) – формирование вертикального вихревого шнура (кадры 1, 2); потеря устойчивости и срыв вихревых систем, рост областей завихренности в горизонтальном направлении (кадры 3, 4). Отметим, что формирование и срыв присоединенных вихрей наблюдалось при высоте волны $H > 0.5$ см (кадр 2).

С увеличением глубины жидкости картина вовлечения жидкости в вихревое движение и соответствующие возмущения поля концентрации в

целом сохранялась, хотя при $h=20$ см область завихренности не охватывала всю толщу жидкости в отличие от случая мелкой воды – кадры 3 и 4 на рис. 3.4.

Изучалось влияние ориентации (рис. 3.1: конфигурации I–III) пластин в осциллирующем сосуде ($L=60$ см, $W=13.3$ см) на общую картину течения. Одновременное исследование вихревых образований по глубине жидкости и на ее свободной поверхности позволило выявить ряд новых эффектов (рис. 3.5–3.7).

В опытах с одной пластиной (конфигурация I) первая сформировавшаяся вихревая пара отчетливо выражена на свободной поверхности (рис. 3.5, кадр 1 а) и менее четко на фронтальном изображении (кадр 1 б), где представлен только левый вихрь с наклонной осью, а изображение основного правого вихря затеняется пластиной. На следующей паре фотографий течение сохраняет структурные формы только на виде сверху (кадр 2 а). На фронтальном изображении левый вихрь занимает обширную структурированную область (кадр 2 б); суспензия во внешней части выступающего из-за пластины правого вихря распределена более равномерно.

Первые несколько колебаний (8 волновых периодов) структуры на виде сверху в центральной части сосуда сохраняют компактную форму с четкой внешней границей. Левый вихрь отделен от порождающей пластиной слоем жидкости с однородным распределением дисперсной фазы (кадр 3 а). Слабоструктурированная полоса присутствует и на фронтальном изображении (кадр 3 б). С течением времени дрейфующая вихревая область достигает левой торцевой стенки сосуда, не перекрывая всю ширину сосуда (кадр 4 а). На фронтальном изображении жидкость слева от пластины полностью занята вихревой структурой (кадр 4 б), тогда как справа часть изображения остается невозмущенной.

Постепенно в левой части структурированная жидкость заполняет всю ширину сосуда (кадр 5 а), а в правой части у тыльной стенки

наблюдается невозмущенное поле концентрации везде за исключением узкого слоя на правой торцевой стенке. Тонкий слой с неоднородным распределением концентрации располагается вдоль всей тыльной стенки. На кадре 5 б тонкие структуры поля концентрации отмечаются во всей области течения.

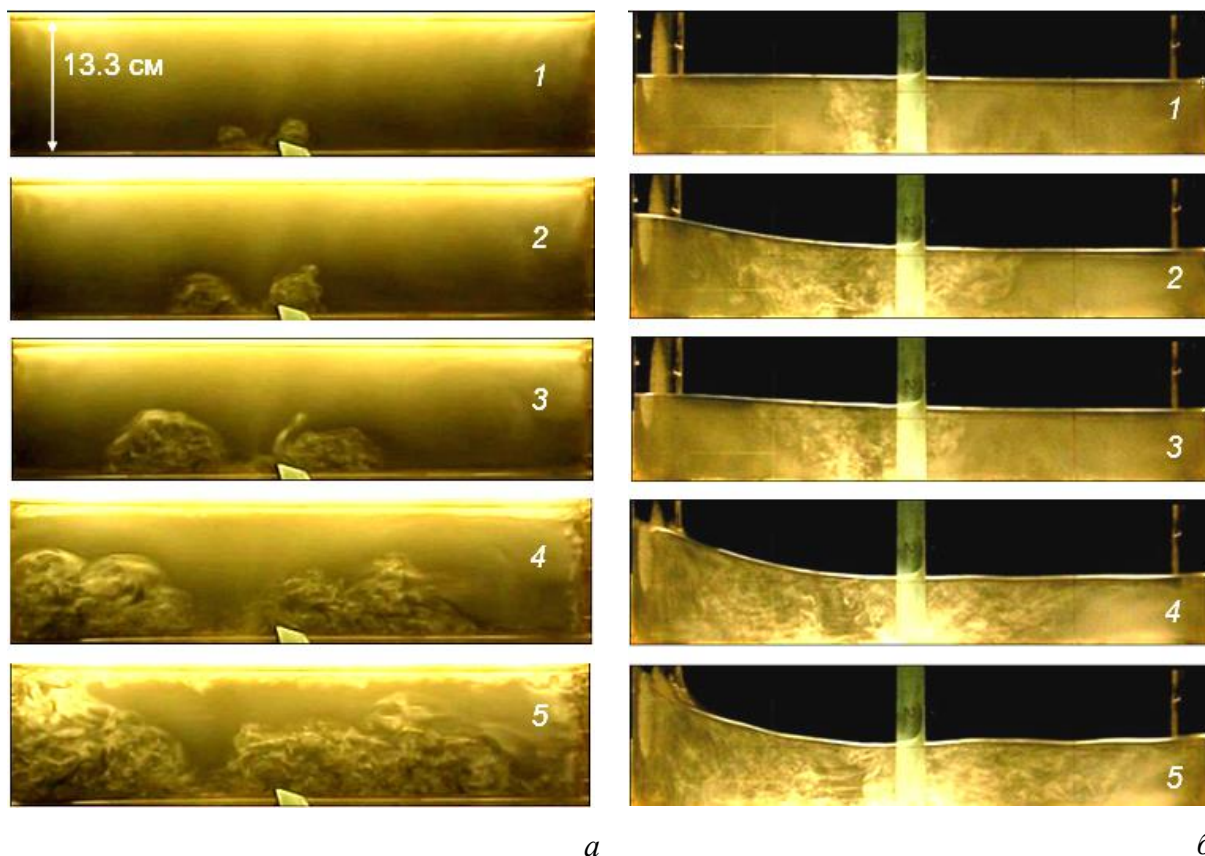


Рис. 3.5. Осциллирующий поток около демпфирующей пластины $l=3$ см в случае конфигурации I , $\alpha=20^\circ$: (а) – вид сверху и (б) – вид спереди; $h=6$ см, $s=2.25$ см, $T=1.55$ с; 1-5 – $H=1.00, 1.72, 3.43, 5.33, 6.24$ см и $t/T=0, 4, 8, 12, 16$

Постановка двух параллельных пластин (конфигурация II) заметно усложняет картину течения – теперь ориентированные в противоположенные стороны вихревые системы образуются и у фронтальной, и у тыльной стенок (рис. 3.6). С началом движения по всей глубине жидкости у кромок пластин формируются вихревые шнуры с

вертикальным расположением границы (кадр 1 б), практически не проявляющиеся на свободной поверхности (кадр 1 а).

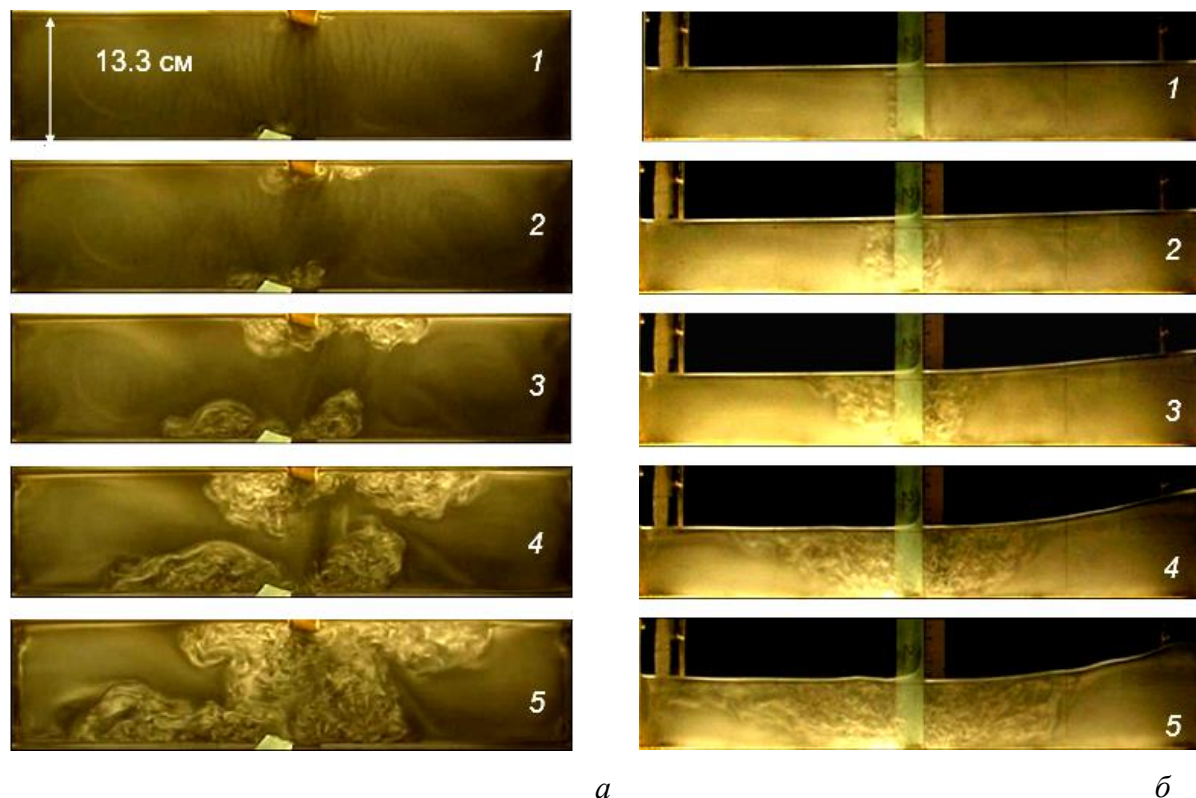


Рис. 3.6. Осциллирующий поток около демпфирующих пластин $l=3$ см в случае конфигурации II, $\alpha=20^\circ$: (а) – вид сверху и (б) – вид спереди; $h=6$ см, $s=2.25$ см, $T=1.60$ с; 1-5 – $H=0.74, 1.01, 2.38, 3.94, 4.59$ см и $t/T=0, 4, 8, 12, 16$

С увеличением высоты волны радиусы шнуров растут (кадр 2 б), и одновременно появляются возмущения поля концентрации у прикрепленных к стенкам и отклоненных сторон пластин в виде четырех разнесенных пятен (кадр 2 а). Светлый тон пятен указывает на захват частиц вихревым течением и локальное повышение концентрации дисперсной фазы. Со временем линейные размеры четырех разнесенных областей вихревого течения растут (кадры 3 и 4).

Отметим, что ширина разделяющего вихревые структуры участка среды с исходной концентрацией постепенно уменьшается, а форма усложняется, поскольку темп роста поперечных размеров двух вихревых

систем у прикрепленных сторон пластин существенно выше, чем у отклоненных сторон. Здесь вихревые системы вытягиваются в продольном направлении (кадры 3 а и 4 а). Внешние фронты вихревых систем теряют однородность и устойчивость. Вначале фронты становятся наклонными (преимущественно в левой части сосуда, кадр 3 б), а затем изрезанными (кадр 4 б). На больших временах вихревые структуры занимают всю центральную часть сосуда и медленно движутся к торцевым стенкам (кадр 5 а). Во фронтальном изображении вблизи пластин выражены горизонтальные полосчатые структуры, указывающие на трехмерность течения (кадр 5 б). Характерная толщина слоев составляет 13 мм, а размер прослоек – 4 мм.

Встречное расположение пластин (конфигурация III) изменяет симметрию и динамику установления общей структуры течения (рис. 3.7). С началом колебаний вихревые структуры около пластин оказываются более выраженными (кадр 1 а) по сравнению с течениями в конфигурации II. Кромка вихря справа от пластин в вертикальной плоскости более четко очерчена, чем слева (кадр 1 б). Ядро вихря визуализирует темная вертикальная полоска, которая присутствует на всех кадрах рис. 3.7, б.

Дополнительная общая особенность структуры – периодичность по всей глубине бассейна с толщиной слоев 3 мм, более выраженная справа от пластин. На виде сверху также наблюдается развитие двух пар разделенных вихревых систем, ассоциируемых с примыкающими и отстоящими сторонами пластин (кадры 1-4 а). Однако вихревые системы растут неравномерно: в области поджатия потока – существенно быстрее. В изображениях свободной поверхности справа от пластин (кадры 2-4 а) также выражена темная полоса – вояд, область пониженной концентрации дисперсной фазы.

Как во всех предыдущих опытах здесь изображение также структурировано – выделяются длинные полосы с шагом 7 мм. В левой

четверти длины сосуда распределение дисперсной фазы не меняется с течением времени (кадр 5 *a*).

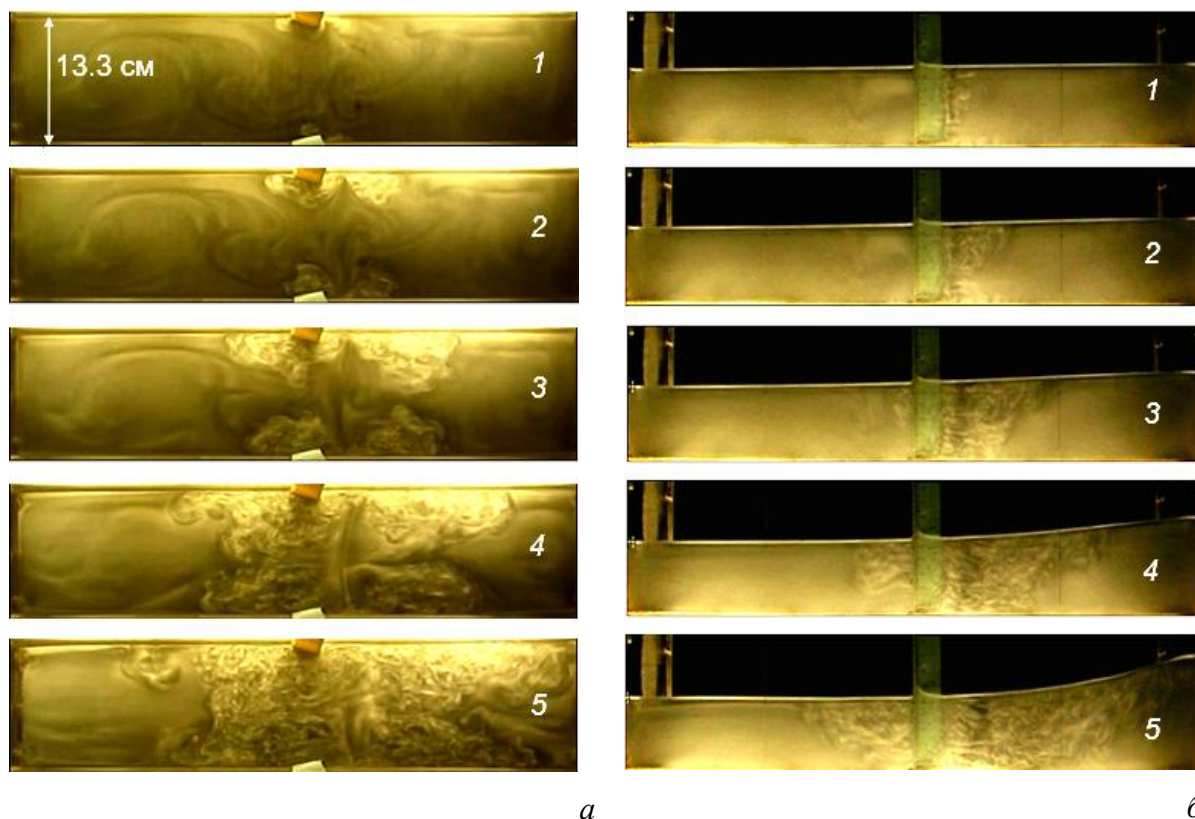


Рис. 3.7. Осциллирующий поток около демпфирующих пластин $l=3$ см в случае конфигурации III, $\alpha=20^\circ$: (*a*) – вид сверху и (*б*) – вид спереди; $h=6$ см, $s=2.25$ см, $T=1.60$ с; 1-5 – $H=0.55, 0.91, 1.55, 2.55, 4.19$ см и $t/T=0, 4, 8, 12, 16$

Для уточнения структуры течения наряду с мелкими практически неразличимыми частицами дисперсной фазы использовались маркеры – сферические частицы полиэтиленового сополимера диаметром 0.3 мм и плотностью 0.95 г/см³, которые не покидали свободную поверхность в течение всего эксперимента. Результаты регистрации положения частиц на свободной поверхности представлены на рис. 3.8.

В сосуде с гладкими стенками частицы вблизи узла движутся по прямолинейным траекториям, параллельным продольным стенкам, устойчиво осциллируя около положения равновесия (рис. 3.8, *a*;

регистрация в течение $\tau = 20$ периодов волны), что согласуется с выводами линейной теории [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2008)].

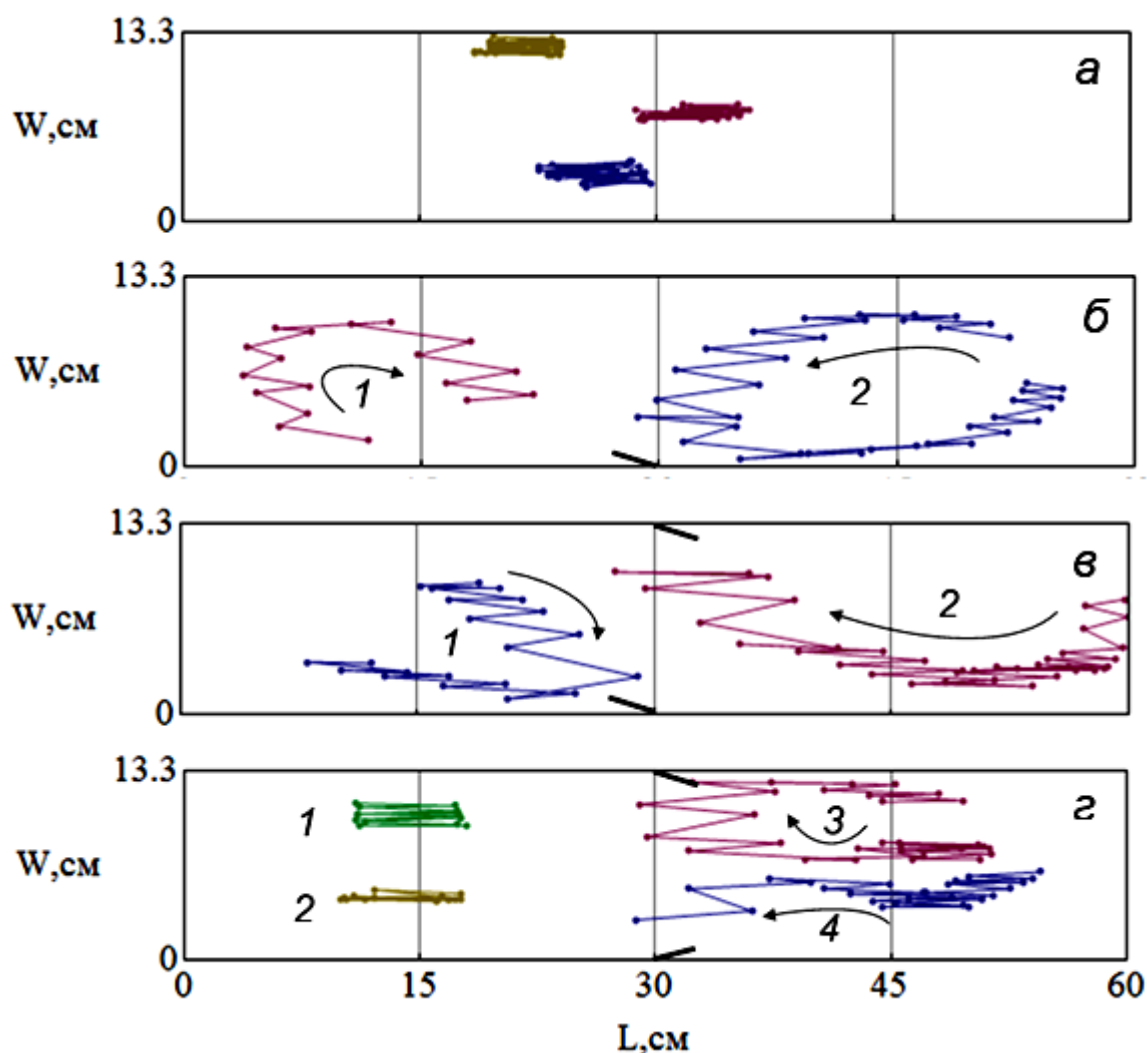


Рис. 3.8. Траектории частиц-трассеров на свободной поверхности жидкости: (а) – гладкие стенки, $H=4.3$ см, $T=1.56$ с, время по пути частиц $t/T=20$; (б) – конфигурация I, $H=4.5$ см, $T=1.57$ с, 1,2 – $t/T=8, 18.5$; (в) – конфигурация II, $H=4.1$ см, $T=1.65$ с, 1,2 – $t/T=10, 18$; (г) – конфигурация III, $H=4.2$ см, $T=1.56$ с, 1-4 – $t/T=7, 7, 14, 18$

Одиночная пластина разделяет волновое течение в сосуде на два изолированных вихря с противоположенными направлениями вращения (рис. 3.8, б; длительность регистрации левого вихря $\tau_l = 8$, правого – $\tau_r = 18.5$). Вихрь меньшего размера располагается в левой части сосуда, что согласуется с возмущенной картиной дисперсной фазы на свободной

поверхности (рис. 3.5, *a*). Согласованное пограничное течение между вихрями занимает всю глубину жидкости, на что указывает темная полоса с обедненной концентрацией дисперсной фазы слева от пластины на всех кадрах рис. 3.5, *б*. Большая длина траектории маркера в правой части сосуда обусловлена продолжительностью его пребывания в поле зрения видеокамеры. Размахи колебаний маркера в центральной части сосуда и у торцевой стенки различаются приблизительно в два раза.

Топология течения в вихревых ячейках в сосуде с параллельными пластинами существенно иная – оба маркера вращаются по ходу часовой стрелки (рис. 3.8, *в*; $\tau_l = 10$, $\tau_r = 18$). Такая картина течения свидетельствует о формировании в центральной части сосуда сдвигового слоя, который проявляется в виде обедненной дисперсной фазой полосы на рис. 3.6, *a* (1-4).

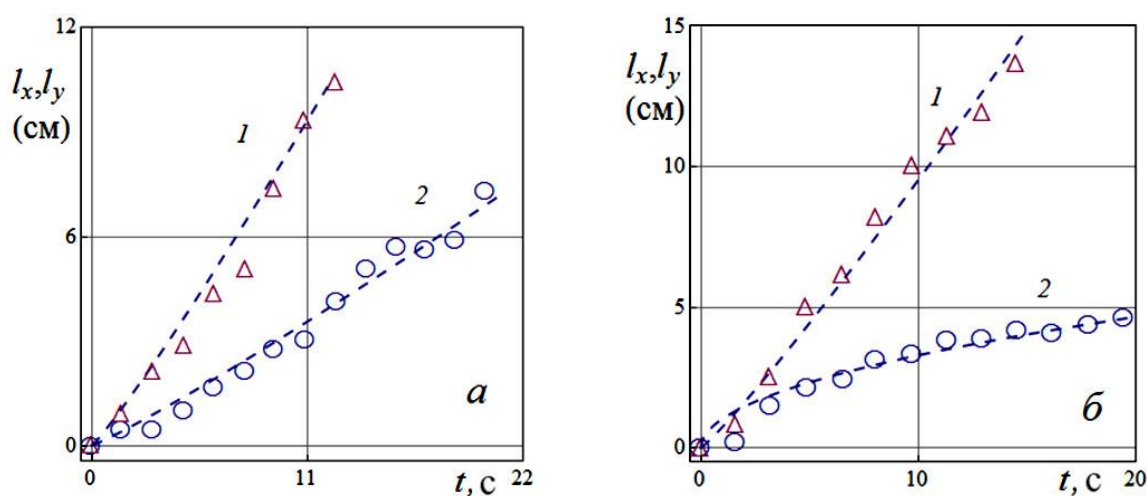


Рис. 3.9. Динамика линейных размеров вихревых систем, наблюдаемых на свободной поверхности жидкости: *a*, *б* – конфигурация I,II; 1,2 – временные зависимости продольного l_x и поперечного l_y размеров вихревых пятен

При встречном расположении пластин картина течения теряет симметрию относительно центра сосуда (рис. 3.8, *г*; $\tau_{1-4} = 7, 7, 14, 18$). Слева траектории маркеров 1, 2 сохраняют свою типичную для сосуда с

гладкими стенками форму прямолинейных отрезков. В правой части маркеры 3, 4 визуализируют два согласованных вихря с противоположенным направлением вращения. Возникающее продольное струйное течение в форме темной полосы на рис. 3.7, а длительное время растягивает вихревые структуры вдоль стенок сосуда.

Изменения продольных l_x и поперечных l_y размеров образующихся вихревых систем на рис. 3.9 описываются простыми степенными закономерностями $l = At^n$ ($[l] = \text{см}$, $[t] = \text{с}$) как и в экспериментах с развитием возмущений над вихревыми рифелями [Калиниченко, Чашечкин (2012)].

Для конфигурации I получено $l_x = 0.67t^{1.1}$, $l_y = 0.25t^{1.1}$ (рис. 3.9, а), при этом измеренная площадь пятна на свободной поверхности квадратично растет со временем – $S_I = 0.38 t^2$. Динамика размеров пятен около двух параллельных пластин неодинакова: длина увеличивается почти по линейному закону $l_x = 0.76t^{1.1}$, а ширина – по корневому $l_y = 1.04t^{0.5}$ (рис. 3.9, б); при этом площадь меняется по линейному закону $S_{II} = 5.02 t$. При встречном расположении пластин варьируются только коэффициенты; характер временной зависимости сохраняется: $l_x = 0.52t^{1.1}$, $l_y = 1.04t^{0.5}$, $S_{III} = 3.87 t$.

3.4. Влияние пластин-демпферов на резонансные зависимости

Рассмотрим влияние пластин-демпферов на резонансные зависимости $H(\Omega)$ параметрически возбуждаемой первой волновой моды. Ранее в экспериментах с поверхностными волнами Фарадея в прямоугольном сосуде с гладкими стенками в качестве интегральной волновой характеристики строилась резонансная зависимость установившейся высоты волны от частоты $H(\Omega)$ вертикальных колебаний сосуда [Калиниченко и др. (1995)]. В опытах с пластинами данная характеристика

также использовалась для оценки эффективности демпфирующих элементов.

Исследуя влияние пластин-демпферов на резонансные зависимости волн в сосуде ($L=60$ см, $W=13.3$ см), сравним сначала характеристики $H(\Omega)$ для сосудов с гладкими стенками и с пластинами, расположенными к стенкам под углом $\alpha=0^\circ$.

Для жидкости глубиной $h=6$ см в сосуде с гладкими стенками и с пластинами $l=4.5$ см, расположенными вдоль боковых стенок $\alpha=0^\circ$, резонансные зависимости $H(\Omega)$ приведены на рис. 3.10. Каждой экспериментальной точке рис. 3.10 отвечает установившийся режим колебаний – при частоте $\Omega/2$ волна характеризуется стационарным значением высоты H . Совпадение данных в пределах погрешности показывает, что при таком размещении пластины практически не влияют на резонансные характеристики. Полученная интерполяционная кривая 4 - $H(\Omega) = \sqrt{-393.8 + 51.6\Omega}$ - рассматривается далее как базовая.

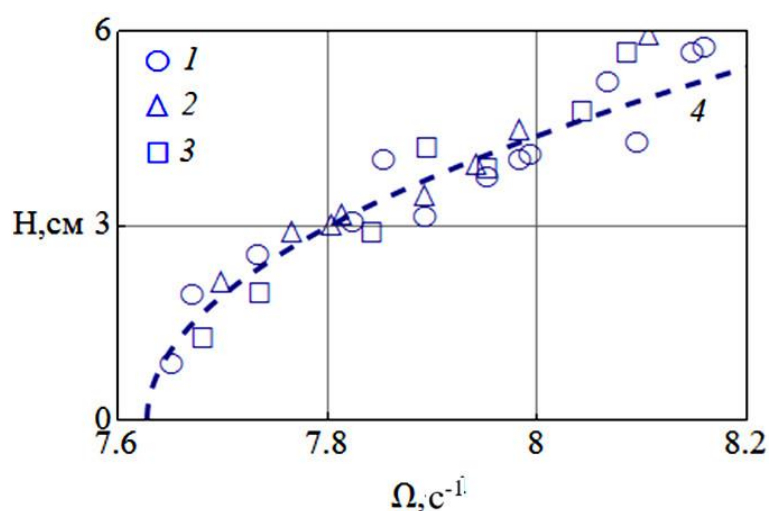


Рис. 3.10 Резонансная зависимость первой волновой моды, $h=6$ см: 1 - гладкие стенки; 2,3 - с пластинами $l=4.5$ см, $\alpha=0$ в соответствии с рис. 3.1 (конфигурация II и III); 4 – базовая кривая

Для оценки влияния пластин-демпферов, как показано на рис. 3.1, исследовались конфигурации I-III. Интенсивность образования вихрей,

нарушающих волновое движение, зависит как от ширины пластины, так и ее углового положения. Общий параметр, учитывающий оба фактора – эффективная ширина пластины $w^* = l \sin \alpha$ или перекрытие канала $W^* = Nw^*$, где N – число пластин. При одинаковом угле α в случае конфигураций *II* и *III* указанные параметры одинаковы, что предполагает аналогичный характер изменения формы резонансных зависимостей. Данный вывод подтверждается графиками $H(\Omega)$ на рис. 3.11. Полученная ранее базовая кривая представлена на рисунке для сравнения.

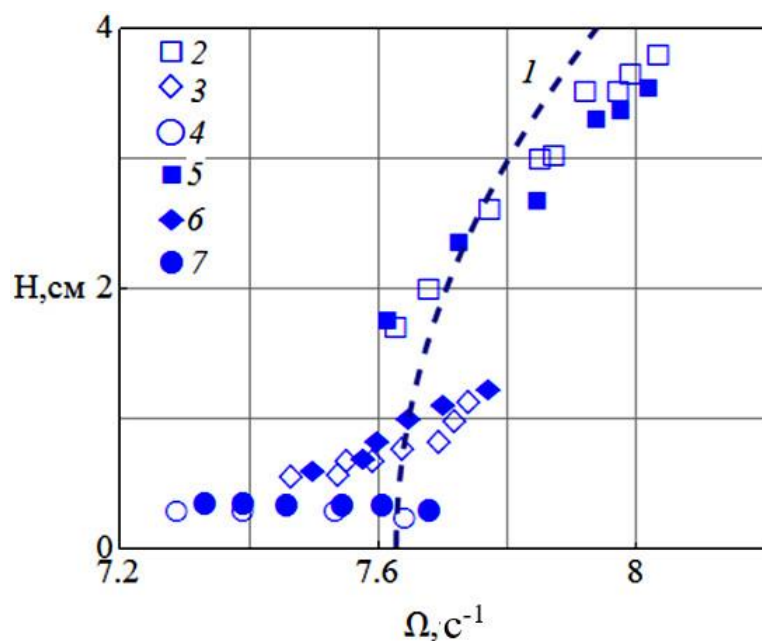


Рис. 3.11. Резонансные зависимости для двух пластин шириной $l = 4.5$ см: 1 – базовая кривая; группы 2-4, 5-7 – конфигурация пластин *II*, *III* (рис. 3.1); наборы 2 и 5, 3 и 6, 4 и 7 – $\alpha = 14, 25, 48^\circ$

Проведенные опыты показали слабое влияние встречной и параллельной ориентаций (конфигурации *II* и *III*) пластин шириной $l = 4.5$ см на форму резонансных зависимостей при $\alpha > 0$ – рис. 3.11. Данные для *II* и *III*, которые на графике обозначены пустыми и заполненными символами, совпадают в пределах погрешности измерений при одинаковых углах α . При малых отклонениях пластин от боковых стенок $\alpha = 14^\circ$ наборы 2 и 5 группируются в окрестности базовой кривой 1. При промежуточных

значениях $\alpha = 25^\circ$ наблюдается смещение зависимостей в область низких частот и четырехкратное уменьшение высот стационарных волн. При $\alpha = 48^\circ$ частотный сдвиг увеличивается, а высота волны (0.3 см) не зависит от частоты колебаний сосуда.

Далее рассматриваются только эффекты демпферов конфигурации II. Демпфирующее действие пластин, расположенных параллельно друг другу в узле волны приводит к изменению резонансных характеристик $H(\Omega)$ и определяется их угловым положением α или шириной перекрытия поперечного сечения сосуда в центральной части.

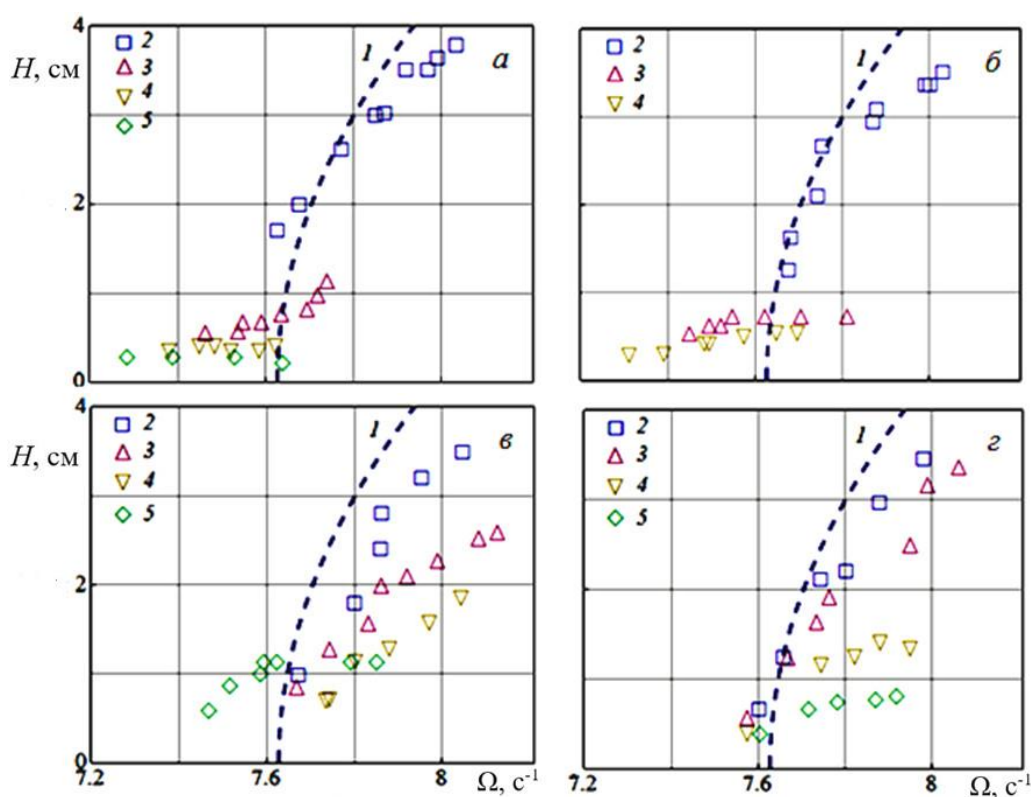


Рис. 3.12. Резонансные зависимости: а – $l = 4.5$ см (конфигурация II), 2-5 – $\alpha = 14, 25, 36, 48^\circ$; б – $l = 3$ см (конфигурация II), 2-4 – $\alpha = 24, 44, 56^\circ$; в – $l = 1.5$ см (конфигурация II), 2-5 – $\alpha = 45, 60, 70, 90^\circ$; г – $l = 3$ см (одиночная пластина – (конфигурация I), 1 – базовая кривая, 2-5 – $\alpha = 35, 44, 56, 90^\circ$

Резонансные кривые для нескольких пластин $l = 4.5, 3$ и 1.5 см приведены на рис. 3.12. На всех графиках четко прослеживается эффект подавления колебаний жидкости как для пар пластин по конфигурации II

(*a-e*), так и в случае одиночной пластины (*z*). Экспериментальные точки на графиках (*a-e*) распадаются на две группы. При малых α точки группируются вблизи базовой кривой *1*. При отклонении пластин больше 25° наблюдается не только существенное подавление колебаний, но и изменение резонансных свойств – уменьшение собственной частоты.

Для широких пластин ($l = 4.5$ и 3 см) максимальное демпфирование (восьмикратное по высоте волны) получено при ориентациях $\alpha = 48$ и 56° , соответственно. При больших значениях угла α волны вообще не возбуждались.

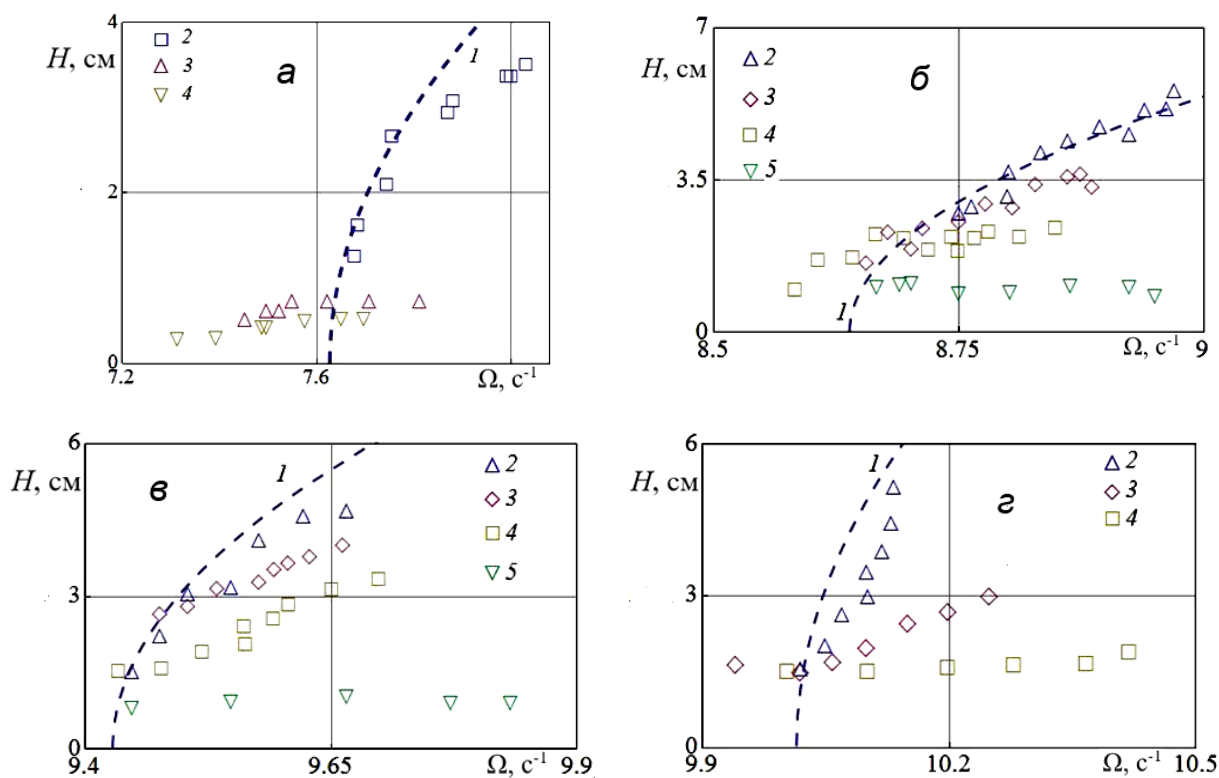


Рис. 3.13. Резонансные зависимости при наличии пары пластин $l = 3$ см с конфигурацией II: (*a*) – $h=6$ см, 2-4 – $\alpha=24, 44, 56^\circ$; (*б*) – $h=8$ см, 2-5 – $\alpha=8, 35, 44, 56^\circ$; (*в*) – $h=10.2$ см, 2-5 – $\alpha=14, 24, 44, 90^\circ$; (*г*) – $h=12$ см, 2-4 – $\alpha=8, 56, 90^\circ$; *1* – базовая кривая

Для пары узких пластин $l = 1.5$ см (*в*) и одиночной пластины $l = 3$ см (*г*) максимальное (трехкратное) демпфирование волновых движений

наблюдалось при поперечном расположении $\alpha=90^\circ$. Установка узкой пластины не приводит к низкочастотному смещению резонансных зависимостей во всем диапазоне значений α .

С увеличением глубины жидкости h расширяется диапазон углов α , в котором удается параметрически возбуждать колебания жидкости (рис. 3.13). В целом резонансные свойства системы сохраняются, собственная частота не меняется. Эффективность пластин-демпферов существенно зависит от углового положения. При малых углах практически не отклоняются от базовой кривой I . При больших α одна из точек попадает в окрестность кривой I , а для остальных высота волны практически не меняется $H \sim 1$ см. Наблюдается значительное подавление по высоте волны, т.е. эффективность демпфирующего действия пластин сохраняется при увеличении глубины жидкости.

Для глубин ($h=6$ и 8 см) максимальное демпфирование получено при ориентациях $\alpha=56^\circ$ и при этом наблюдаемые высоты волн во всем диапазоне неустойчивости $H=0.5$ и 1.1 см, соответственно (a , b). При больших значениях угла α волны вообще не возбуждались. Для глубин ($h=10.2$ и 12 см) (b , z) максимальное демпфирование волновых движений наблюдалось при поперечном расположении $\alpha=90^\circ$ наблюдаемые волны высотой $H=1.0$ и 1.5 см, соответственно.

С целью обобщения представленных выше результатов проведена серия экспериментов по демпфированию волн в сосуде ($L=50$ см, $W=10$ см). Отметим, что в качестве демпфирующих элементов использовалась пара пластин $l=3$ см; конфигурация II .

Резонансные зависимости $H(\Omega)$ для жидкости глубиной $h=5$ и 10 см в сосуде с гладкими стенками и с пластинами приведены на рис. 3.14. Каждой экспериментальной точке рис. 3.14 отвечает установившийся режим колебаний – при частоте $\Omega/2$ волна характеризуется стационарным значением высоты H . Полученные интерполяционные кривые (I)

$H(\Omega) = \sqrt{-368.35 + 43.82\Omega}$ и $H(\Omega) = \sqrt{-3729.15 + 341.5\Omega}$ для волн на свободной поверхности жидкости глубиной $h=5$ и 10 см рассматриваются далее как базовые.

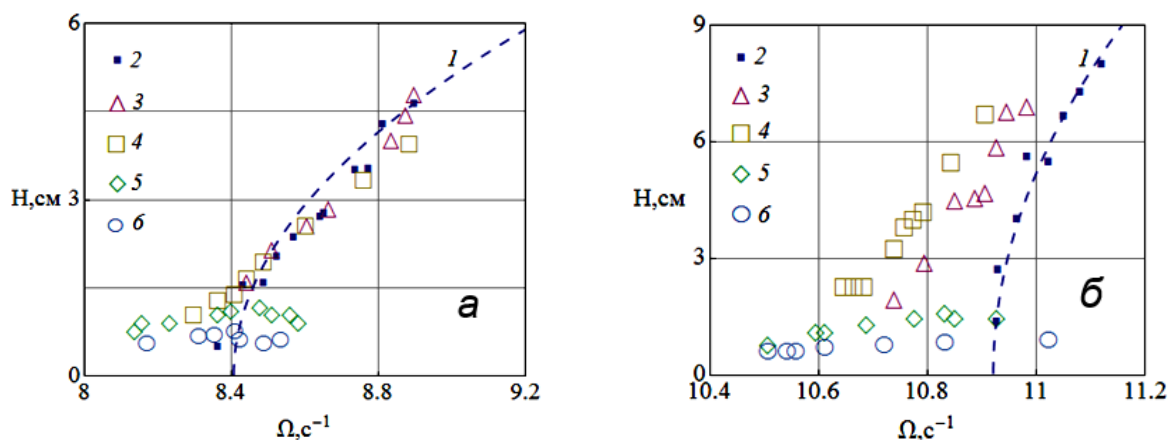


Рис. 3.14. Резонансные зависимости: (а) – $h=5$ см, 3-б - $\alpha=5, 25, 35, 40^\circ$; (б) – $h=10$ см, 3-б - $\alpha=15, 35, 55, 90^\circ$; 1 – базовая кривая, 2 – гладкие стенки

На графиках рис. 3.14 наблюдается существенный эффект подавления колебаний жидкости как для малой глубины $h=5$ см (а), так и в случае большой глубины $h=10$ см (б). При малых α точки группируются вблизи базовой кривой 1. При отклонении пластин больше 35° и 55° (соответственно $h=5$ и 10 см) наблюдается не только существенное подавление колебаний, но и изменение резонансных свойств – уменьшение собственной частоты первой моды.

Для глубины $h=5$ см (а) максимальное демпфирование (тринадцатикратное по высоте волны) получено при ориентации $\alpha=40^\circ$. При больших значениях угла α волны вообще не возбуждались.

Для глубины $h=10$ см (б) максимальное (одиннадцатикратное) демпфирование волновых движений наблюдалось при поперечном расположении $\alpha=90^\circ$. Увеличение глубины до 10 см приводит к низкочастотному смещению резонансных зависимостей во всем диапазоне значений α .

3.5. Критическое перекрытие сосуда

Анализ экспериментальных данных предыдущего раздела позволяет сделать вывод о том, что наибольшее демпфирование достигается при максимальном перекрытии пластинами поперечного сечения сосуда $W^* = 2l \sin \alpha$ и при близком к нормальному по отношению к потоку их расположению. Отметим также наличие критического значения перекрытия сечения сосуда $W_{кр}^* = 2l \sin \alpha_{кр}$, определяющего полное демпфирование колебаний жидкости.

Случай $h=5$ см (рис. 3.14, а) характеризуется критическим значением перекрытия сечения сосуда $W_{кр}^* = 3.86$ см, при котором наблюдалось полное демпфирование колебаний жидкости. Ниже приведены значения критического перекрытия $W_{кр}^*$ в размерном и безразмерном виде для двух сосудов

сосуд (см)	h , см	h/λ	l , см	$\alpha_{кр}$	H , см	$W_{кр}^*$, см	$W_{кр}^* / W$
50×10×40	5	0.05	3	40	0.6	3.86	0.386
60×13.3×30	6	0.05	3	56	0.5	4.97	0.374
60×13.3×30	6	0.05	4.5	36	0.4	5.29	0.398

Видно, что при $h/\lambda=0.05$ имеем практически совпадающие значения критического перекрытия сосуда $W_{кр}^* / W \approx 0.4$, выше которых волновые движения жидкости отсутствуют во всем частотном диапазоне.

3.6. Коэффициент затухания волн в сосуде с пластинами-демпферами

Рассмотрим последовательно влияние пластин-демпферов на коэффициенты затухания волн в сосудах ($L=60$ см, $W=13.3$ см) и ($L=50$ см, $W=10$ см). Для обоих сосудов исследовано влияние глубин на степень затухания. Для каждого значения h полученные экспериментальные данные при наличии пластин сравниваются с данными при их отсутствии.

Сначала исследовано влияние ориентации (конфигураций *II* и *III*) пластин-демпферов, установленных в сосуде ($L=60$ см, $W=13.3$ см) на степень затухания. Данные эксперимента для пары пластин $l=4.5$ см, приведенные на рис. 3.15, показывают одинаковый эффект.

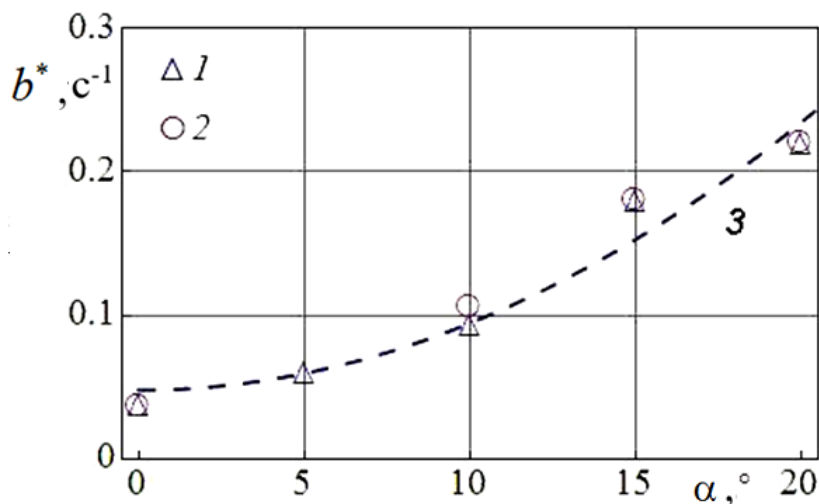


Рис. 3.15. Зависимости коэффициента затухания волн от углового положения пары пластин ($l=4.5$ см): 1,2 – конфигурация пластин *II*, *III*; $h=6$ см, 3 - интерполяционная кривая

Значения коэффициента затухания для конфигураций *II* и *III* практически совпадают во всем диапазоне изменения углов α - рис. 3.15. Линия 3 на графике – интерполяционная кривая, описываемая функцией $b^* = A + B\alpha^2$, где $A=0.048$, $B=0.0005$. Рост b^* отражает влияние вихревой компоненты течения (рис. 3.2, 3.3 и 3.4), в которую переходит часть волновой энергии. Вихри малых масштабов ускоряют диссипацию энергии основного течения.

Сравнительное влияние ширины и углового положения пластин при конфигурациях *I*, *II* на коэффициент затухания b^* иллюстрируют графики на рис. 3.16, а. Наибольший коэффициент затухания (1) обеспечивает пластина шириной $l=4.5$ см. С уменьшением ширины эффективность действия пластин снижается (2, 3).

Отметим, что паре пластин шириной $l=1.5$ см в конфигурации II и одной пластине шириной $l=3$ см (конфигурация I) соответствуют одинаковые угловые зависимости коэффициентов затухания (данные 3, 4).

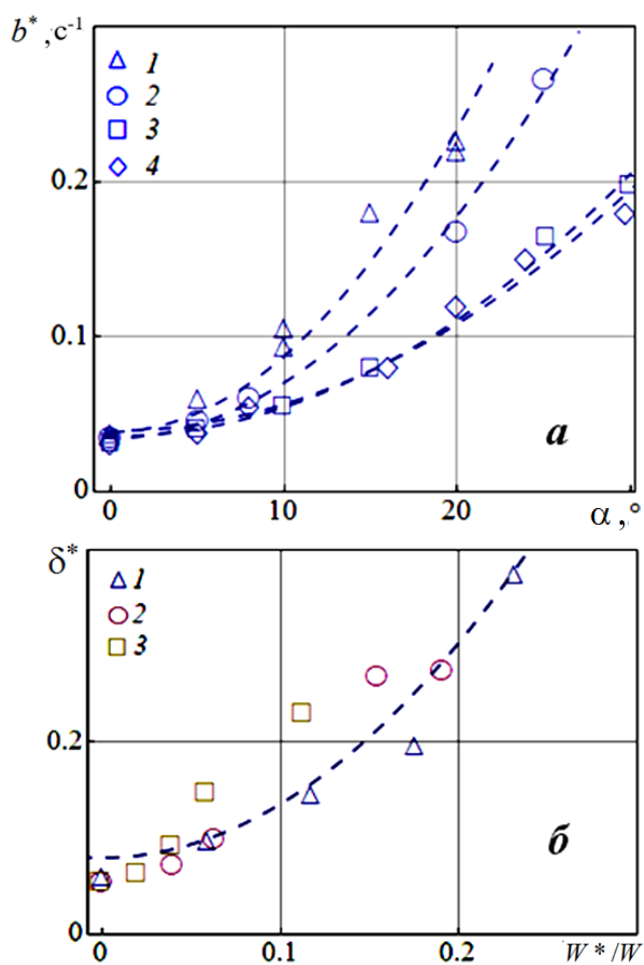


Рис.3.16. Зависимости коэффициента затухания волн от углового положения пластины (а) и декремента от относительного перекрытия W^*/W сосуда ($L=60$ см, $W=13.3$ см) (б): 1-3 – пара пластин $l=4.5, 3, 1.5$ см; 4 – одиночная пластина $l=3$ см; $h=6$ см; $W^*=Nw^*$, где $w^*=l\sin\alpha$ и N – число пластин

Полученные данные описываются интерполяционными зависимостями вида $b^* = A_1 + B_1 \alpha^2$, где для кривых 1-4 значения коэффициентов определены как $A_1=0.0512, 0.0342, 0.0354, 0.0389$ s^{-1} и $B_1=0.00045, 0.00036, 0.00019, 0.00017$ $\text{s}^{-1}/\text{град}$, соответственно. При использовании безразмерных переменных – декремента $\delta^* = b^*T$ (T –

период волны) и относительного перекрытия W^*/W сосуда - все кривые рис. 3.16, а группируются вокруг универсальной зависимости $\delta^* = A_2 + B_2(W^*/W)^2$ ($A_2=0.079$, $B_2=5.602$), представленной на рис. 3.16, б.

Сложный характер взаимодействия волнового потока с пластинами иллюстрирует рис. 3.17, на которой представлены зависимости коэффициента затухания волн от углового положения пластин в сосудах с жидкостью различной глубины h . Наибольшее значение коэффициент затухания достигается при минимальной глубине $h=6$ см. С увеличением h коэффициент демпфирования убывает и достигает минимальных значений при $h=12$ см.

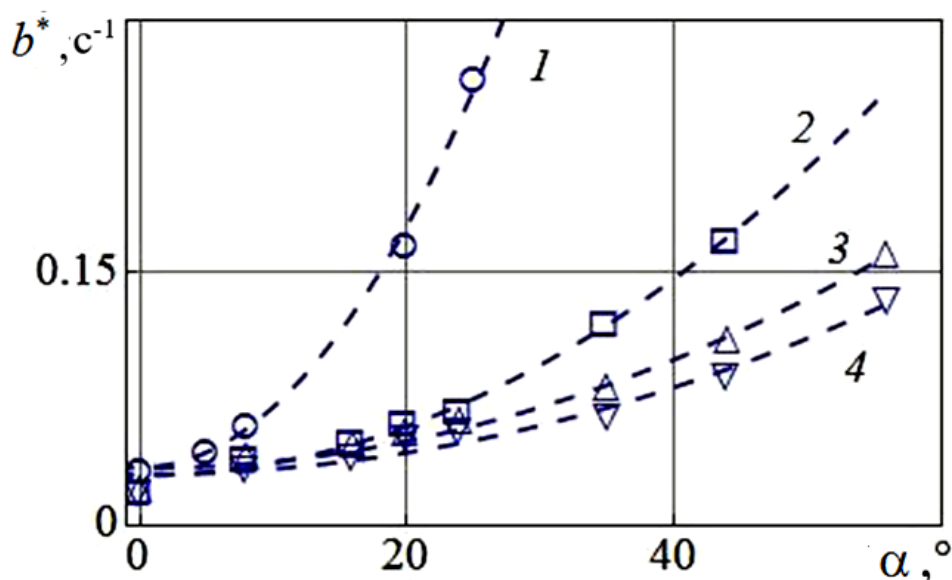


Рис. 3.17. Зависимости коэффициента затухания волн от углового положения пары пластин ($l=3$ см) при различной глубине жидкости h : 1-4 – $h=6, 8, 10.2, 12$ см; конфигурация II

Соответствующие интерполяционные зависимости имеют вид $b^* = A_3 + B_3 \alpha^2$, коэффициенты которых для кривых 1-4 составляют $A_3=0.0342, 0.0293, 0.0337, 0.0300$ с⁻¹ и $B_3=0.00036, 0.00007, 0.00004, 0.00003$ с⁻¹/град, соответственно. Здесь значения A_3 отвечают угловому положению пластин $\alpha=0$ в конфигурации II. Рассчитанный по (1.4) коэффициент затухания стоячих волн на поверхности жидкости глубиной $h=6, 8, 10.2, 12$

см принимает значения $b = b_1 + b_2 + b_3 = 0.0127, 0.0110, 0.0098, 0.0091 \text{ с}^{-1}$. Наблюдаемое на графике уменьшение эффективности демпфирования волнового движения пластинами с увеличением h объясняется неоднородным распределением горизонтальной компоненты скорости жидкости по глубине.

Зависимости коэффициента затухания волн от углового положения пластин $l=3 \text{ см}$ (конфигурация II) в сосуде ($L=50 \text{ см}$, $W=10 \text{ см}$) при различной глубине h представлены на рис. 3.18. Наибольшее значение коэффициента затухания достигается при минимальной глубине $h=5 \text{ см}$. С увеличением h коэффициент демпфирования убывает и достигает минимальных значений при $h=20 \text{ см}$.

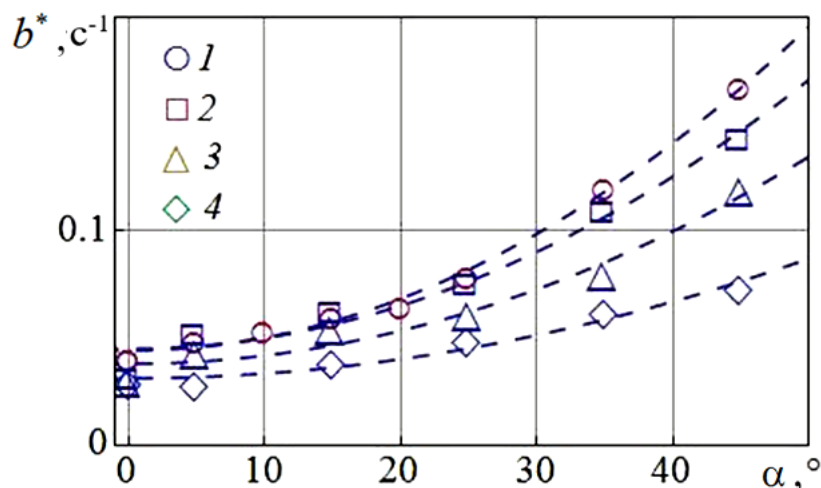


Рис. 3.18. Зависимости коэффициента затухания волн от углового положения пары пластин ($l=3 \text{ см}$) при различной глубине жидкости h : 1-4 — $h=5, 10, 15, 20 \text{ см}$; сосуд ($L=50 \text{ см}$, $W=10 \text{ см}$); (конфигурация II)

Соответствующие интерполяционные зависимости имеют вид $b^* = A_3 + B_3 \alpha^2$, коэффициенты которых для кривых 1-4 равны $A_3 = 0.044, 0.040, 0.038, 0.031 \text{ с}^{-1}$ и $B_3 = 6 \times 10^5, 5 \times 10^5, 4 \times 10^5, 2 \times 10^5 \text{ с}^{-1}/\text{град}$, соответственно. Здесь значения A_3 отвечают угловому положению пластин $\alpha=0$. Соответствующий коэффициент затухания стоячих волн на поверхности жидкости глубиной $h=5, 10, 15, 20 \text{ см}$ в сосуде с гладкими

стенками можно рассчитать по (1.4) в приближении ламинарного пограничного слоя: $b=0.016, 0.010, 0.008, 0.007 \text{ с}^{-1}$.

Наблюдаемое на рисунках 3.17 и 3.18 уменьшение эффективности демпфирования волнового движения пластинами с увеличением h объясняется неоднородным распределением горизонтальной компоненты скорости жидкости по глубине. Эффект демпфирования достигается за счет изменения режима обтекания пластин, при котором энергия волн рассеивается в процессе вихреобразования и формирования тонких структур. Эти потери энергии максимальны в областях наибольшей горизонтальной составляющей скорости, нормально или под некоторым углом к которой располагаются пластины.

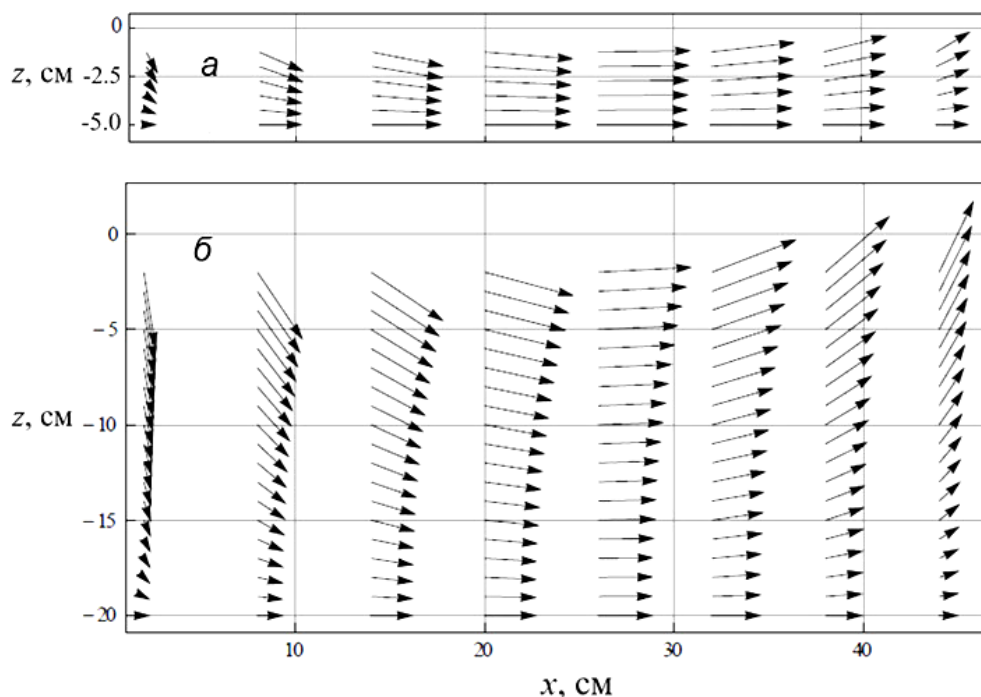


Рис. 3.19. Поле скоростей: $a, б$ – $h=5, 20 \text{ см}$; $T=0.74, 0.43 \text{ с}$; $H=0.8, 2.53 \text{ см}$; $U(0)=2.77, 2.81 \text{ см/с}$

Для первой моды $n=1$ узел как неподвижная точка волновой поверхности расположен в центре сосуда $x=L/2$; амплитуда горизонтальной составляющей скорости жидкости в узле максимальна и составляет $U(z)=0.5H\omega chk(z+h)/shkh$.

Для сосуда с гладкими стенками поле скорости для $h=5$ и 20 см в момент, соответствующий горизонтальному положению свободной поверхности жидкости показаны на рис. 3.19. В случае $h=5$ см (а) скорость частиц жидкости не зависит от глубины жидкости (мелкая вода). Это подтверждается кадрами 2, 3 на рис. 3.4, где наблюдается процесс формирования вихрей и области завихренности по всей длине пластины. При $h=20$ см величина горизонтальной составляющей скорости заметно меняется с глубиной, рис. 3.19, б. Можно предположить, что заметное уменьшение коэффициента затухания для $h=15$ и 20 см на рис. 3.19 объясняется неоднородным распределением горизонтальной составляющей скорости по вертикали, что сказывается на формировании области завихренности и в конечном счете на потери волновой энергии.

Заключение

Исследовано влияние поперечных пластин-демпферов, установленных под углом к боковым стенкам, на параметры стоячих поверхностных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде.

Наблюдения для первой волновой моды показали, что при колебаниях жидкости на кромках пластин периодически образуются и срываются вихри, обеспечивающие более высокое демпфирование по сравнению с вязкой диссипацией.

Методами трассерной визуализации волнового течения показано, что демпфирующее действие вертикальных пластин (установленных в узле стоячей волны) обусловлено переносом волновой энергии в систему трехмерных нестационарных вихрей по всей глубине жидкости.

Впервые исследовано влияние поперечных пластин-демпферов на характер реструктуризации суспензии с первоначально однородной концентрацией в поле стоячих поверхностных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде.

По наблюдениям картины течения в двух проекциях – фронтальной и виде сверху выявлено, что с началом установления стационарных колебаний жидкости для трех исследованных конфигураций расположения пластин и опорного случая сосуда с гладкими стенками первоначально однородная концентрация суспензии нарушается. Тонкая структура течения визуализирует геометрию вихревых компонент течения.

Методами трассерной визуализации волнового течения прослежена структура медленных вихревых течений на свободной поверхности жидкости. Определены симметрии циркуляционных течений при различных конфигурациях пластин-демпферов.

Проведены количественные оценки эффективности действия пластин по изменению вида и частотному смещению резонансных зависимостей параметрически возбуждаемых волн.

Определены значения коэффициента затухания стоячих волн при различных угловых положениях демпфирующих пластин. Коэффициент затухания не зависит от способа ориентации пластин (параллельная или встречная) и определяется эффективным перекрытием поперечного сечения сосуда.

Получена величина критического перекрытия сосуда, отвечающая полному подавлению волнового движения. Рассмотрено также влияние глубины жидкости на демпфирующие свойства пластин-вставок. Показано, что с увеличением глубины коэффициент затухания уменьшается, что связано с неоднородностью поля скорости жидкости по вертикали.

Глава 4. ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В СОСУДЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ НЕРЕГУЛЯРНОСТЯМИ ДНА

В настоящей главе представлены результаты лабораторных экспериментов по оценке влияния топографии дна на частоты и формы стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде, колеблющемся в вертикальном направлении. Детально рассмотрен эффект одного и двух возвышений на горизонтальном дне и линейной отмели. Экспериментально исследовано смещение резонансной зависимости при изменении положения препятствия на линейном наклонном дне. Описан эффект cos-образного дна на формы поверхностных волн и на резонансные характеристики. Для интерпретации данных эксперимента использована основанная на методе ускоренной сходимости математическая модель сейш в случае резкого возвышения [Akulenko, Nesterov (2005)].

По материалам главы опубликованы работы [Калиниченко, Коровина, Нестеров, Со (2014); Калиниченко, Нестеров, Со (2014; 2015); Со (2015); Soe, Kalinichenko, Korovina, Nesterov (2014)].

4.1. Постановка задачи и методы

В приближении длинных волн рассмотрена задача о собственных колебаниях тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в протяженном канале переменной глубины. Дно канала содержит участки изменения глубины жидкости $h(x)$ различного вида - рис. 4.1.

4.1.1. Эксперимент

Для моделирования сейшевых колебаний воды над локальными нерегулярностями дна применялась первая и вторая моды ($n=1, 2$) гравитационных стоячих волн на свободной поверхности жидкости в прямоугольном сосуде размерами ($L=50$ см, $W=4$ см), совершающем гармонические колебания в вертикальном направлении. Возбуждение волн осуществлялось при основном резонансе Фарадея. При фиксированной

амплитуде колебаний сосуда $s=1.1$ и 2.5 см вариации Ω обеспечивали изменения высоты волны H от 0.5 до 2 см. Глубина жидкости во всех экспериментах составляла $h_0=7$ см, что при длинах волны $\lambda=50$ и 100 см первых двух мод $n=1, 2$ определяло значения $h_0/\lambda=0.14$ и 0.07 , соответственно.

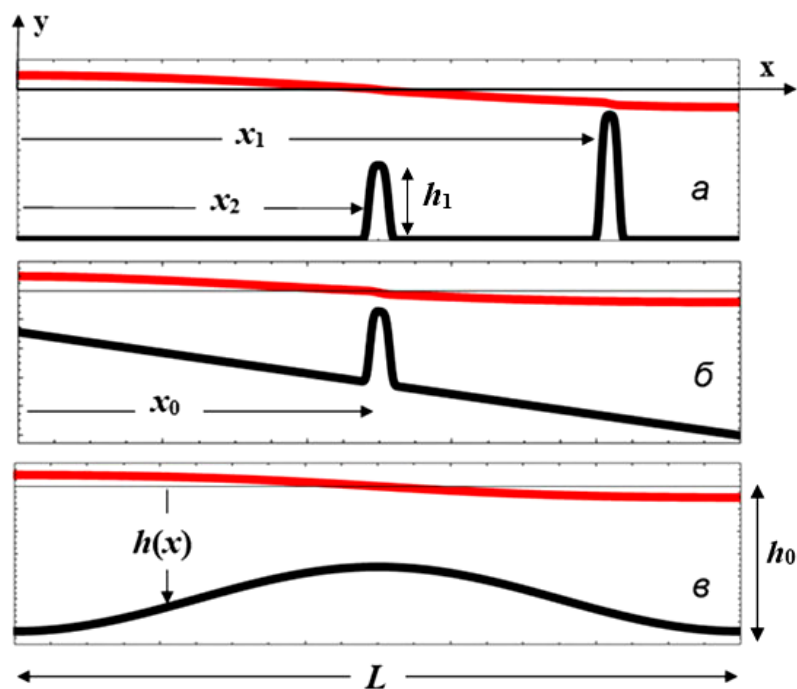


Рис. 4.1. Стоячие волны в канале с различной топографией дна: *а* – два возвышения; *б* – возвышение на линейной отмели; *в* – \cos -образное дно

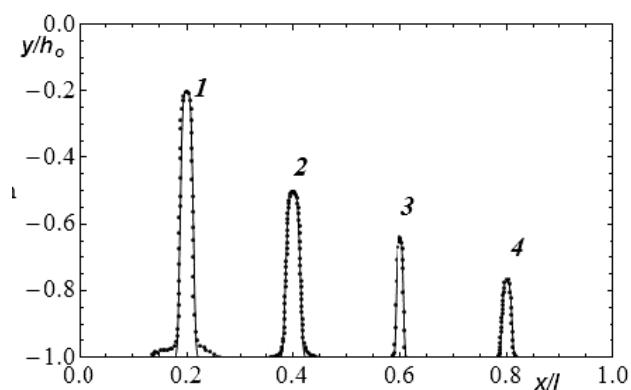


Рис. 4.2. Форма четырех возвышений; показаны результаты оцифровки их профиля и соответствующие графики функций: *1-4* - $h_{1\max}=5.6, 3.6, 2.6, 1.6$ см; $h_0=7$ см

Для выявления эффекта рельефа дна на волны в эксперименте использовались возвышения различных размера и формы (рис. 4.2), изготовленные из 1 мм листовой меди (1, 2) и технического пластилина (3, 4). Поскольку исследовались двумерные колебания жидкости, то все препятствия имели фиксированный поперечный размер 3.9 см и по ширине перекрывали сосуд. Их относительная высота составляла $h_{1\max} / h_0 = 0.8, 0.5, 0.37, 0.23$.

На рис. 4.2 показаны использованные в экспериментах возвышения и графики аппроксимирующих их функций $h_1(x - x_0) / h_0 = -1 + A^* \cdot e^{-B^* \cdot (x - x_0)^4}$. Значения параметров функций для каждого возвышения представлены ниже

Возвышение	Высота $h_{1\max}$ (см)	A^*	B^*
1	5.6	0.80	2.95×10^7
2	3.5	0.50	2.00×10^7
3	2.6	0.37	18.55×10^7
4	1.6	0.23	9.38×10^7

В опытах для выявления эффекта резкого изменения донного рельефа на свойства длинных стоячих волн оценивалась их частота, и строились резонансные зависимости $H(\Omega)$ при изменении положения препятствия. Для минимизации нелинейных эффектов измерения проводились при малой крутизне возбуждаемых волн $\Gamma = H / \lambda \leq 0.04$.

4.1.2. Численно-аналитический метод

При формулировке задачи о собственных колебаниях тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в протяженном водоеме (канале) [Сретенский (1936)] предполагается, что его переменное прямоугольное сечение ортогонально оси (рис. 4.1), и имеет площадь

$$S = S(x) = d h(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

Здесь $d = \text{const}$ - постоянная ширина канала, $h(x)$ - глубина, отсчитываемая от верхнего уровня покоящейся жидкости; соответствующая система координат (x, y) показана на рис. 4.1.

Дно канала может содержать участки резкого изменения (возвышения или углубления), которые должны быть адекватно описаны соответствующими зависимостями $h(x)$. Канал (водоем) предполагается достаточно мелким, что в реальных условиях для определения давления p внутри жидкости позволяет использовать гидростатическое приближение

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0 + g\rho(\eta - y), \quad \eta \geq y \geq -h(x) \\ p(x, t) &= p_0, \quad \eta \leq y \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $\eta = \eta(x, t)$ - возвышение жидкости, ρ - плотность жидкости, y - вертикальная координата, p_0 - постоянное атмосферное давление.

Из соотношения (4.1) находится выражение для градиента давления

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= g\rho \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta \geq y \\ \frac{\partial p}{\partial x} &\equiv 0, \quad y > \eta \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что частицы жидкости в каждый момент времени t остаются в сечении x . Горизонтальная компонента u вектора скорости - функция x, t . Из уравнений Эйлера в линейном приближении следует [Сретенский (1936)]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.3)$$

Отметим, что при выводе уравнения (4.3) использовано выражение (4.2) для $\partial p / \partial x$.

Соответствующее уравнение неразрывности принимает вид [Сретенский (1936)]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(h(x)u)}{\partial x}, \quad t \geq t_o, 0 \leq x \leq L \quad (4.4)$$

Исключив стандартным образом неизвестную u из (4.3) и (4.4), уравнение волновых движений жидкости представляется в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} (h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x}) \quad (4.5)$$

Для решения уравнения (4.5) представляет интерес задача на собственные значения (частоты колебаний жидкости) и собственные функции (профили свободной поверхности) [Сретенский (1936); Defant (1961); Арсеньева и др. (1963); Rabinovich (2009)]. Для волн типа сейш торцы канала $x=0, L$ ограничиваются жесткими вертикальными стенками, на которых выполняются краевые условия непротекания

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad t \geq t_o \quad (4.6)$$

Ищем периодические решения краевой задачи в виде $\eta(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$. После подстановки в (4.5-4.6) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(h(x) \frac{dW}{dx} \right) + \frac{\omega^2}{g} W = 0 \\ W'(0) = W'(L) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Если $h(x) = h_0$, то из (4.7) имеем аналитическое решение, отвечающее соответствующим модам стоячих волн

$$\lambda_n = \frac{\omega^2}{gh_0} = \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2, \quad W_n(x) = A \cos \frac{\pi n}{L} x \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Для решения задачи в случае локальной нерегулярности $h(x) \neq h_0$ на дне воспользуемся высокоточным численно-аналитическим методом ускоренной сходимости [Akulenko, Nesterov (2005)].

Рассматриваемая краевая задача на собственные значения и функции может быть приведена к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(h(x) \frac{dW}{dx} \right) + \lambda_n W &= 0 \\ W'(0) = W'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Здесь x , h - нормированные на L и h_0 горизонтальная координата и глубина, соответственно. Искомый параметр λ_n связан с частотой ω соотношением

$$\lambda_n = \frac{\omega^2 L^2}{gh_0} = (\pi n)^2$$

Для определения собственных значений λ_n и функций $W_n(x)$ задачи (4.8) с граничными условиями типа Неймана (второго рода) применим теорию Штурма-Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [Akulenko, Nesterov (2005)].

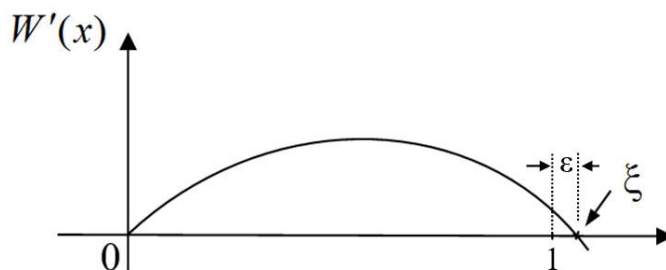


Рис. 4.3. Алгоритм метода ускоренной сходимости [Akulenko, Nesterov (2005)]

Отметим, что решению нулевой моды отвечают $\lambda_0 = 0$, $W_0(x) \equiv \text{const}$, в частности $W_0(x) \equiv 0$. Последующие моды колебаний $n = 1, 2, \dots$ требуют высокоточного решения краевой задачи на собственные значения λ_n и функции W_n и формы $W_n^* = W_n \|W_n\|^{-1}$. Они строятся ниже для используемых в эксперименте локальных неоднородностей, описываемых функциями $h(x) = -1 + f(x - x_0)$.

Алгоритм метода заключается в последовательном уточнении величины λ_n на основе невязки $\varepsilon = 1 - \xi$ ($|\varepsilon| \ll 1$) по оси абсцисс для соответствующего n узла ξ функции $W_n'(x)$ и известной производной $\lambda_n'(\xi)$.

Расчету собственных значений λ_n или частот ω_n сопутствует построение функций $W_n(x)$. Эти функции удовлетворяют граничным условиям с требуемой точностью для заданной функции $h(x) = -1 + f(x - x_0)$ и номера моды n [Akulenko, Nesterov (2005)].

4.2. Результаты и обсуждение

Рассмотрим сначала влияние двух возвышений на горизонтальном дне сосуда на волновое движение жидкости (рис. 4.1, *a*).

Положения возвышений $1, 2$ задавались координатами x_1 и x_2 , при которых определялись частоты волновых мод. В экспериментах x_2 фиксирована, а x_1 варьировалась по длине сосуда.

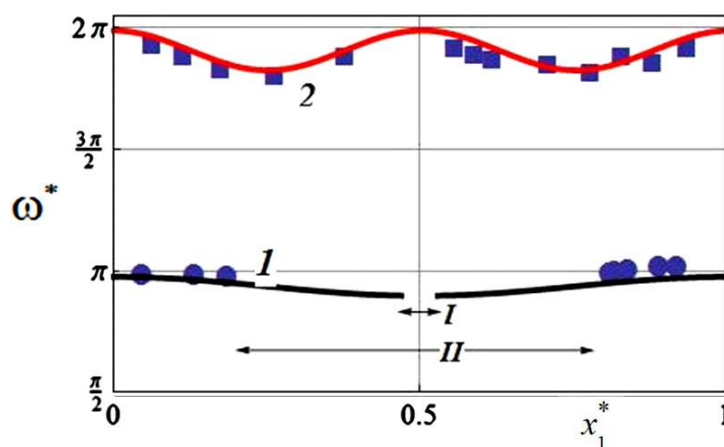


Рис. 4.4. Зависимость частоты первой I и второй 2 волновых мод от горизонтальной координаты x_1^* возвышения: I, II – зоны отсутствия возбуждения первой волновой моды, модель и эксперимент, соответственно

Данные эксперимента и результаты расчетов безразмерной частоты первой и второй волновых мод $\omega_n^* = \omega_n L / \sqrt{gh_0}$ в зависимости от

относительного положения $x_1^* = x_1 / L$ приведены на рис. 4.4. Видно, что при фиксированных положениях малого возвышения $x_2^* = x_2 / L = 0.5$ и 0.43 для $n=1$ и 2 вариации x_1^* приводят к значительным изменениям ω^* .

В случае второй моды перемещение возвышения I от боковой стенки сосуда к его центру приводит сначала к уменьшению частоты, причем минимум достигается под узлами волны. Затем частота увеличивается и достигает максимума при расположении возвышений вблизи центра сосуда. Аналогичный результат дает и численно-аналитическая модель.

Влияние положения возвышения I на частоту первой волной моды проявляется значительно ярче. Так, в эксперименте выявлен диапазон II значений $0.201 < x_1^* < 0.788$ этого возвышения, для которого волновое движение жидкости полностью подавляется. Данный результат свидетельствует о существенном влиянии большого возвышения на геометрию сосуда и связанные с этим условия генерации волны. Результаты численной модели подтверждают выявленный экспериментально эффект, хотя рассчитанный диапазон I подавления волн $0.475 < x_1^* < 0.528$ несколько уже наблюдаемого в опытах.

Наличие локальных возвышений на дне сосуда сказывается не только на частоте волн, но и на волновых профилях. На рис. 4.5 для указанных мод ($n=1, 2$) приведены огибающие свободной поверхности, полученные в экспериментах (a, z) и расчетах (b, d), а также собственных функций $W(x)$ и их производных $W'(x)$ ($в, e$). В случае первой моды $x_1=46$ см, $x_2=25$ см (рис. 4.5, a) измеренная частота волны составляет $\omega_1=4.763$ с⁻¹, соответствующая при ровном горизонтальном дне $\omega_1=4.856$ с⁻¹. Помещенное вблизи правой пучности локальное препятствие обуславливает незначительные возмущения свободной поверхности ($a, б$), тогда как производная собственной функции $W'(x)$ имеет два локальных экстремума ($в$), отвечающих нерегулярностям дна с координатами (x_1, x_2) .

Для второй моды расположение нерегулярностей $x_1=35.5$, $x_2=21.5$ см привело к снижению частоты $\omega_2=8.18$ с⁻¹ по сравнению с гладким дном, для которого $\omega_2=8.49$ с⁻¹. Расположение большого возвышения под узлом стоячей волны приводит к значительным возмущениям свободной поверхности (z , ∂) и к резкому изменению наклона касательной $W'(x)$.

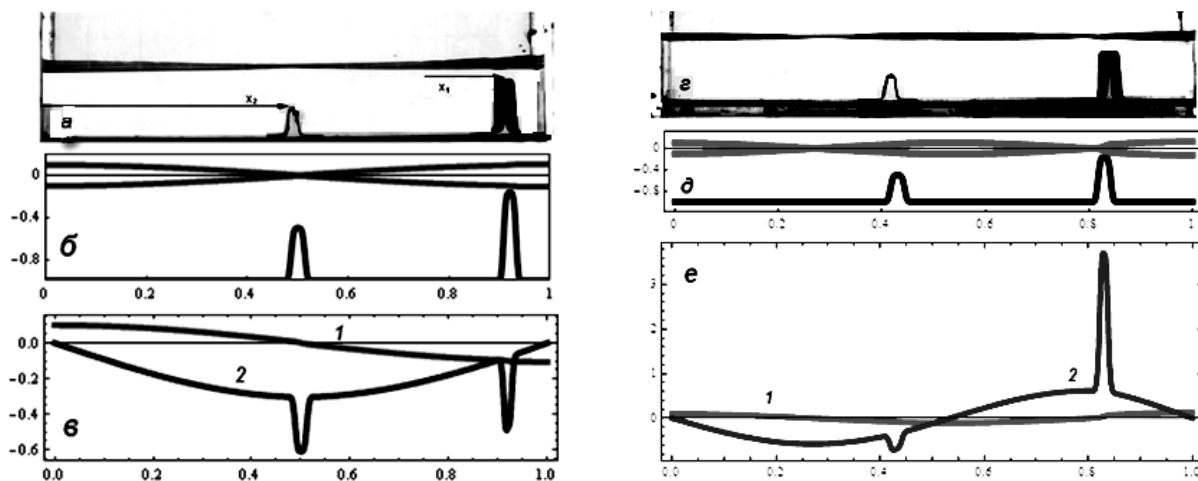


Рис. 4.5. Наблюдаемые в эксперименте (a , z) и рассчитанные ($б$, ∂) огибающие свободной поверхности для первой и второй волновых мод, а также графики ($в$, e) собственных функций $W(x)$ (1) и их производных $W'(x)$ (2): (a - $в$) - $n=1$, $x_1=46$ см, $x_2=25$ см, $\omega_1=4.76$ с⁻¹; ($г$ - e) - $n=2$, $x_1=35.5$ см, $x_2=21.5$ см, $\omega_2=8.18$ с⁻¹; 1,2 - графики функций $W(x)$, $W'(x)$

Проведена серия экспериментов по изучению влияния линейной отмели и расположенного на ней отдельного возвышения – рис. 4.1, б. Отметим, что в данном случае воздействие резкого одиночного возвышения на волновую картину не исследовалось в известной авторам литературе.

Используемая в экспериментах отмель имела уклон 5:50 или 0.1. На отмели помещались одиночные возвышения 2-4 (рис. 4.2), положение которых задавалось координатой x_0 , отсчитываемой от левой торцевой стенки. Оценивались частота и высота первой волновой моды в зависимости от типа и положения возвышения на отмели.

Рассмотрим изменение волновых колебаний жидкости при различной топографии дна – рис. 4.6.

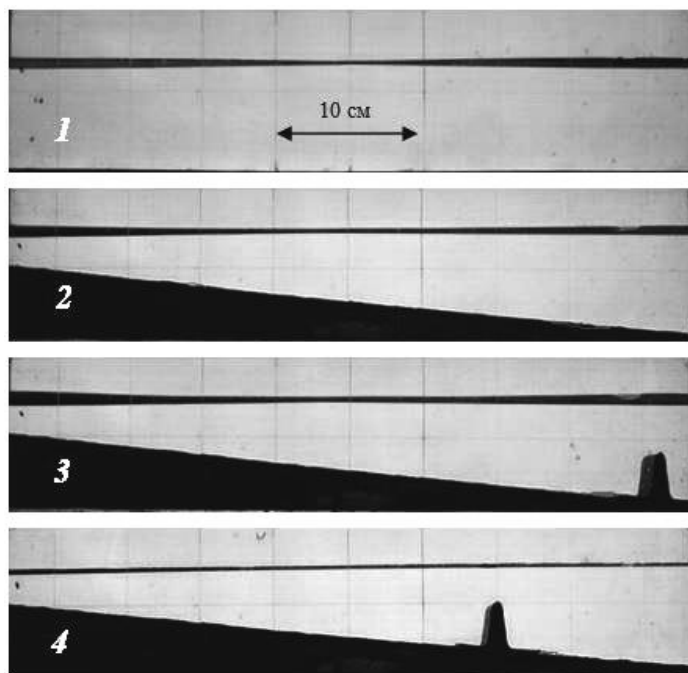


Рис. 4.6. Огибающие свободной поверхности в случае первой волновой моды над горизонтальным дном (1), линейной отмелью (2) и возвышением 2 (рис. 4.2) на наклонной дне (3,4) с координатами $x_0=47, 35$ см

При гладком горизонтальном дне (1) возбуждаемая волна частоты $\omega=4.73 \text{ с}^{-1}$ относится к регулярной первой моде малой крутизны $H/\lambda \approx 0.0086$. Если пучности волны располагаются на торцевых стенках сосуда, то в центре локализуется ее узел.

В случае линейной отмели (2) частота возбуждаемой волны малой крутизны составляла $\omega=3.92 \text{ с}^{-1}$, причем на правой стенке (глубокая вода) высота достигала $H=0.66$ см, а на левой стенке (мелкая вода) - $H=0.95$ см. Пучности также располагаются на торцевых стенках сосуда, однако происходит относительное размытие огибающих в области узла.

При наличии возвышения 2 на наклонном дне $x_0=47$ см волна также имеет малую крутизну и частоту $\omega=3.90 \text{ с}^{-1}$ (3). На правой стенке (глубокая вода) высота достигала $H=0.72$ см, а на левой стенке (мелкая вода) - $H=0.90$ см. Перемещение этого выступа в точку $x_0=35$ см (4) приводит к

дальнейшему уменьшению частоты $\omega=3.80 \text{ с}^{-1}$; высота волны на правой стенке $H=0.21 \text{ см}$ и на левой стенке $H=0.34 \text{ см}$. Анализ огибающих свободной поверхности (построены при наложении волновых профилей за время десяти периодов волны при скорости видеосъемки 15 к/с) в этом случае практически не выявляет узловую точку. Эксперименты показывают, что волна не возбуждается при дальнейшем смещении возвышения к левой боковой стенке сосуда, т.е. при уменьшении x_0 .

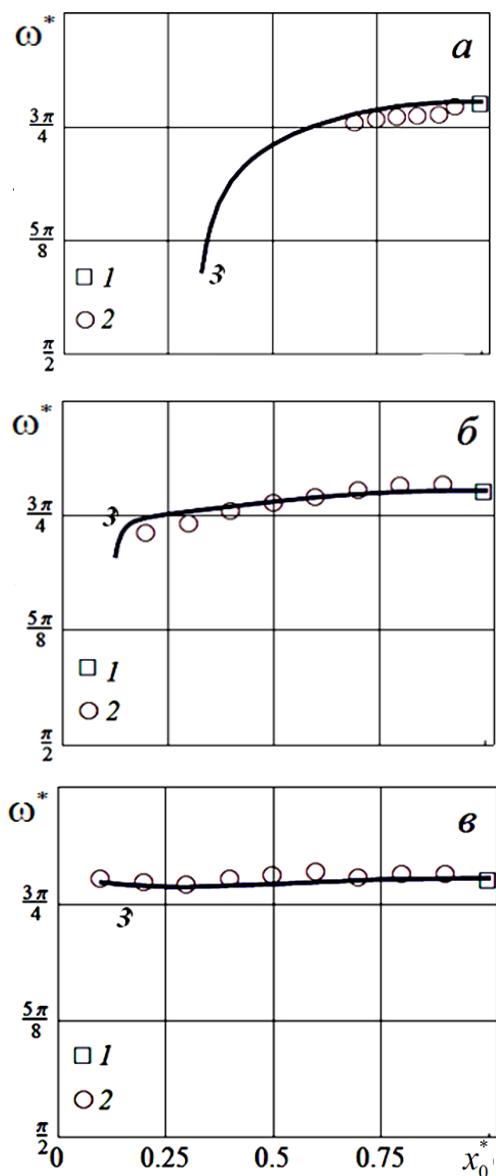


Рис. 4.7. Зависимость частоты первой волновой моды от локализации неоднородности дна: $a-в - h_{1\max} / h_0 = 0.5, 0.37, 0.23$: 1 - линейное наклонное дно; 2 – эксперимент; 3 - результаты расчета

На рис. 4.7 приведены экспериментальные данные 2 зависимости безразмерной частоты ω^* описанной выше первой волновой моды от относительного положения $x_0^* = x_0 / L$ трех возвышений разной высоты. Нормировка проведена на частоту волны в случае гладкого горизонтального дна (рис. 4.6, 1) и на длину сосуда, соответственно. Экспериментальные данные 1 отвечают безразмерной частоте возбуждаемой волны для линейной отмели.

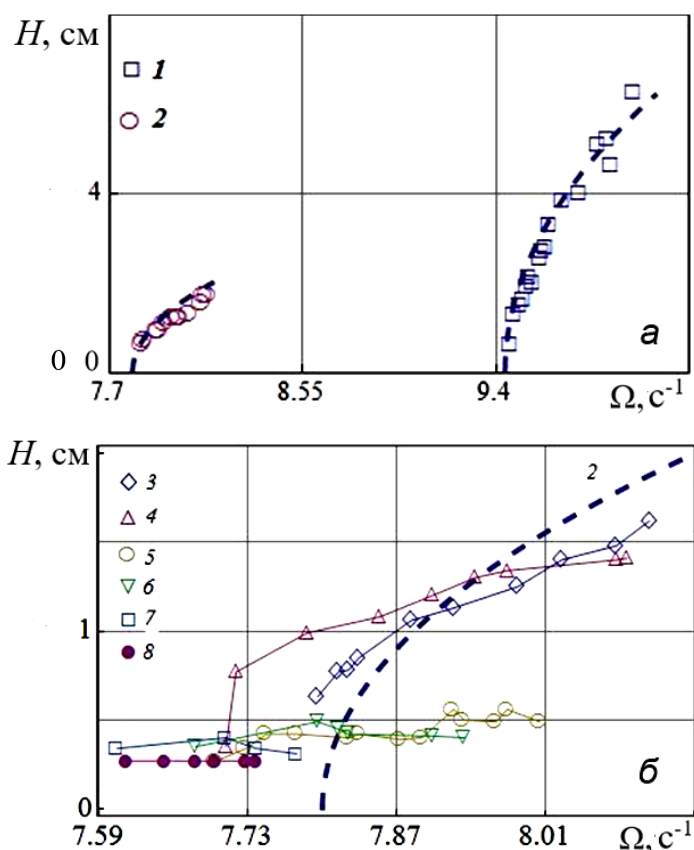


Рис. 4.8. Зависимости $H(\Omega)$ первой волновой моды в случае горизонтального дна и линейной отмели (а), а также при различном положении возвышения высотой $h_{1\max} = 3.6$ см на линейной отмели (б): 1 – горизонтальное дно; 2 – линейная отмель; 3-8 – положение $x_0 = 47, 45, 42.5, 40, 37.5$ и 35 см возвышения на наклонном дне

Видно, что при смещении возвышения от правой торцевой стенки к левой стенке частота уменьшается. Этот результат полностью подтверждает

основной вывод рассмотренной выше теоретической модели. Для количественного сравнения на рис. 4.7 приведена рассчитанная зависимость Z .

Сравнение резонансных зависимостей $H(\Omega)$ первой моды стоячих волн в сосуде с горизонтальным дном и линейной отмелью (рис. 4.8, *a*) показывает значительный относительный сдвиг (15-20%) в низкочастотную область. Отметим также трехкратное уменьшение высоты волн в случае наклонного дна.

Наличие одиночного возвышения на отмели приводит к дополнительному подавлению (на 60-70%) волнового движения жидкости с одновременным уменьшением собственной частоты – (рис. 4.8, *b*).

Исследовался случай топографии дна, при которой глубина жидкости изменялась по гармоническому закону $h(x) = h_0(1 - a \cos \frac{2\pi x}{L})$ ($h_0 = 7.5$ см; $a = 2$ см; $L = 50$ см) – \cos -образное дно (рис. 4.1 *в*).

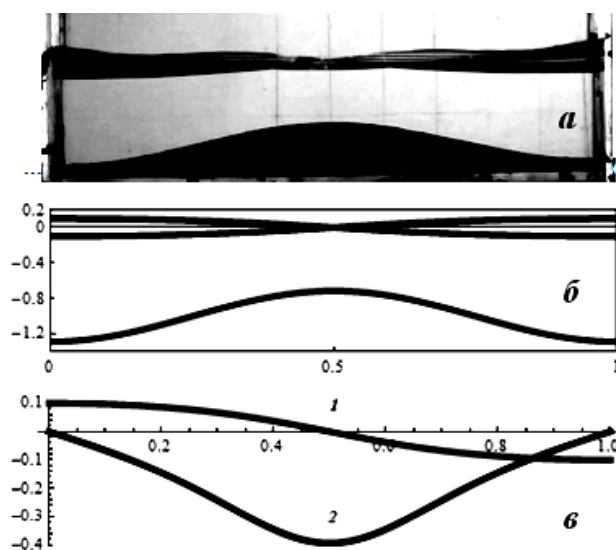


Рис. 4.9. Наблюдаемые в эксперименте (*a*) и рассчитанные (*б*) огибающие свободной поверхности для первой моды, а также график (*в*) собственной функции $W(x)$ (1) и ее производный $W'(x)$ (2): $h_0 = 7.5$ см, $\omega = 4.61$ с⁻¹

На рис. 4.9 приведены огибающие свободной поверхности для первой волновой моды $n=1$, полученные в эксперименте (*a*) и расчете (*б*), а также

собственная функция $W(x)$ и ее производная $W'(x)$. При такой же глубине в случае ровного горизонтального дна частота волны составляет $\omega = 4.85 \text{ с}^{-1}$. Наличие \cos -образного дна в сосуде приводит к уменьшению частоты $\omega = 4.61 \text{ с}^{-1}$. Наблюдаемый в эксперименте профиль волны на поверхности (рис. 4.9 *a*) указывает существенное влияние геометрия дна.

Несмотря на плавное изменение геометрия дна, здесь наблюдались сложные по форме волновые профили при отсутствии четкой локализации узла. Вследствие центральной симметрии геометрии дна имеем одинаковые значения измеренной высоты волны $H = 2.68 \text{ см}$ на левой и правой торцевых стенках сосуда (в отличие от случая наклонного дна, рис. 4.6).

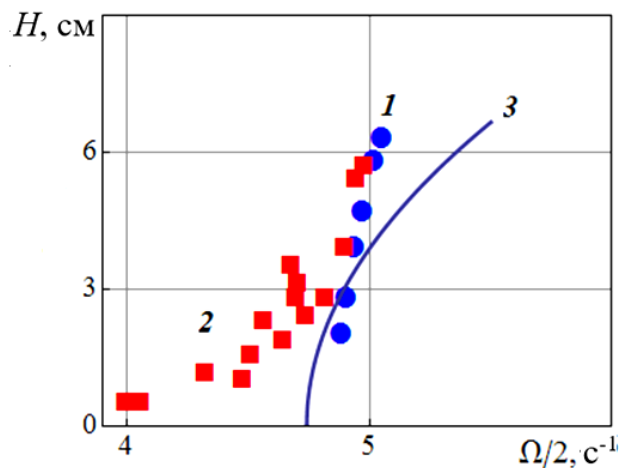


Рис. 4.10. Зависимости $H(\Omega/2)$ первой волновой моды в случае \cos -образного дна (рис. 4.1, *в*): 1- гладкое горизонтальное дно; 2- \cos -образное дно; 3 – расчетная кривая в случае гладкого дна

На рис. 4.10 приведено сравнение резонансных зависимостей $H(\Omega/2)$ первой волновой моды в сосуде с гладким горизонтальным дном и \cos -образным дном. Здесь наблюдается меньше эффект по сравнению со случаем линейной отмели без возвышения (рис. 4.8, *a*).

В начальном зоне зависимости наблюдалось растяжение, т.е. возбуждаемая частота смешается в низкую область на $\sim 15\%$, а при дальнейших увеличении частоты сосуда практически не отличается от

случая гладкого дна; уменьшение высоты волны или подавление колебаний здесь не наблюдается.

Заключение

Представлены результаты лабораторных экспериментов по оценке влияния топографии дна на частоты и формы стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде, колеблющемся в вертикальном направлении.

Взаимодействие длинных поверхностных волн в прямоугольном сосуде с препятствиями на дне исследовалось посредством лабораторного эксперимента, для интерпретации результатов которого использовалась численно-аналитическая модель сейш.

Теоретически и экспериментально показано, что в случае двух возвышений на горизонтальном дне вариации расстояния между ними приводит к существенному изменению как частот, так и форм свободной поверхности для исследуемых мод.

Получен новый результат, показывающий влияние одиночного возвышения на наклонном дне на частоты и формы колебаний. При подходящем выборе положения возвышения можно добиться существенного подавления стоячих поверхностных волн.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Экспериментально реализовано параметрическое возбуждение гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы и изучены связанные колебания сосуда с жидкостью.
2. Исследовано влияние поперечных пластин-демпферов на параметры стоячих поверхностных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде и получено критическое перекрытие сосуда для полностью подавления волн.
3. Исследован эффект топографии дна на частоты и формы стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде и проведено сравнение данных эксперимента с результатами основанной на методе ускоренной сходимости математической модели сейш в случае резкого возвышения.

ЛИТЕРАТУРА

- Акуленко Л.Д., Калининченко В.А., Нестеров С.В.* (2012) Сейши в канале с резким изменением рельефа дна // Изв. РАН. МЖГ. 2012. №3. С. 103-111.
- Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Нестеров С.В.* (2001) Собственные колебания тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 129-142.
- Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* (1994) Параметрическое возбуждение колебаний тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 53-60.
- Арсеньева Н.М., Давыдов Л.К., Дубровина Л.Н., Конкина Н.Г.* (1963) Сейши на озерах СССР. Л.: Изд-во. ЛГУ, 1963. 183 с.
- Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* (1974) Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
- Болотин В.В.* *О движении жидкости в колеблющемся сосуде // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 293-294.*
- Бужинский В.А.*(1998) Вихревое демпфирование колебаний жидкости в резервуарах с перегородками // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 235-243.
- Букреев В.И., Стурова И.В., Чеботников А.В.* (2013) Сейшевые колебания в прямоугольном канале с резким расширением поперечного сечения // Прикладная механика и техническая физика, 2013. Т. 54. № 4 (320). С. 22-31.
- Букреев В.И., Чеботников А.В.* (2015) Волны на воде в продольно колеблющемся контейнере // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 3. С. 140-147.
- Елизарова Т.Г., Сабурин Д.С.* (2013) Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках // Матем. моделирование, 25:3 (2013), 75–88.

- Елкин Д.Н. Зацепин А.Г.* (2013) Лабораторное исследование механизма периодического вихреобразования за мысами в прибрежной зоне моря // *Океанология*. 2013. Т. 53. № 1. с. 29-41.
- Зырянов В.Н.* (1995) Топографические вихри в динамике морских течений // М.: ИВП РАН. 1995. 240 с.
- Калиниченко В.А.* (2009) О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // *Изв. РАН. МЖГ*. 2009. № 4. С. 112-122.
- Калиниченко В.А., Коровина Л.И., Нестеров С.В., Со А.Н.* (2014). Особенности колебаний жидкости в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2014. Вып. 12(36). 14 с. [Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-53688 от 17.04.2013 г. ISSN 2308-6033](#)
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* (2015) Параметрический резонанс в гидродинамическом эксперименте // *Актуальные проблемы механики / Отв. ред. Ф.Л. Черноусько ; Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. - М.: Наука, 2008 - 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. - 2015. (510 с.). С. 140-159.*
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* (1995) Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // *Изв. РАН. МЖГ*. 1995. № 1. С. 122-129.
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* (2014) Влияние топографии дна на волны Фарадея // *Волны и вихри в сложных средах: 5-ая Международная научная школа молодых ученых; 25 – 28 ноября 2014 г., Москва: Материалы школы. (240 с.). – М.: МАКС Пресс. С. 202. ISBN 978-5-317-04861-7.*
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* (2015). Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // *Изв. РАН. МЖГ*. 2015. №4. С. 83-91.

- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* (2008) Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 141-148.
- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* (2010) О срыве параметрических колебаний жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 128-136.
- Калиниченко В.А., Со А.Н.* (2013а). Поверхностные волны в подвижном сосуде // Волны и вихри в сложных средах: 4-я Международная школа молодых ученых: 26-29 ноября 2013 г., Москва: Сборник материалов школы. – М.: МАКС Пресс, 2013. – 164 с. (С. 95) ISBN 978-5-317-04608-8.
- Калиниченко В.А., Со А.Н.* (2013б) Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. 11 с. [Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-53688 от 17.04.2013 г. ISSN 2308-6033](#)
- Калиниченко В.А., Со А.Н.* (2015) Экспериментальное исследование связанных колебаний сосуда с жидкостью // Вест. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2015. №1. С. 13-24. ISSN 1812-3368.
- Калиниченко В.А., Со А.Н., Сысоева Е.Я.* (2015). Стоячие волны в сосуде с пластинами-демпферами // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах: Международная научная школа молодых ученых; 11 – 13 ноября 2015 г., Москва: Сборник тезисов.– М.: МАКС Пресс, 2015. – 164 с. С. 28-31. ISBN 978-5-317-05098-6.
- Калиниченко В.А., Со А.Н., Чашечкин Ю.Д.* (2014) Об одном способе подавления колебаний жидкости в прямоугольном сосуде // Волны и вихри в сложных средах: 5-ая Международная научная школа молодых ученых; 25 – 28 ноября 2014 г., Москва: Материалы школы. (240 с.). – М.: МАКС Пресс. ISBN 978-5-317-04861-7. С. 181.

- Калиниченко В.А., Со А.Н., Чашечкин Ю.Д.* (2015). Вихревое демпирование колебаний жидкости в прямоугольном сосуде // Изв. РАН. МЖГ. 2015. №5. С. 41-53.
- Калиниченко В.А., Чашечкин Ю.Д.* (2012) Структуризация и реструктуризация однородной суспензии в поле стоячих волн // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 6. С. 126-138.
- Калиниченко В.А., Чашечкин Ю.Д.* (2014) Структуризация взвешенных донных осадков в периодических течениях над вихревыми рифелями // Изв. РАН. МЖГ. 2014. №2. С. 95-106. ISSN 0568-5281.
- Князьков Д.Ю.* (2015) Спектр собственных колебаний сейш в протяженных водоёмах со сложной геометрией сечения // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов, 2015. С. 1822-1824.
- Колесников К.С.* (2003) Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
- Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М.* (2012) Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2012. № 58. С. 15-30.
- Ламб Г.* (1947) Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* (2003) Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 215 с.
- Микишев Г.Н.* (1978) Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
- Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* (1971) Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563с.
- Моисеев Н.Н.* (1952) Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85, №4. С. 719-722.

- Нестеров С.В.* (1969) Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3(45). С. 87-97.
- Нестеров С.В.* (1972) Исследование по нелинейной теории гравитационных волн: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 1972. 220 с.
- Праудмэн Дж.* (1957) Динамическая океанография. М.: ИЛ, 1957. 418 с.
- Рабинович Б.И.* (2006) Неустойчивость жидкостных ракет и космических аппаратов. М.: ИКИ РАН, 2006. 40 с. (Ротапринт ИКИ РАН; <http://www.iki.rssi.ru/books/2006rabinovich.pdf>)
- Смирнов С.В., Кучер К.М., Гранин Н.Г., Стурова И.В.* (2014) Сейшевые колебания Байкала // Изв. РАН. ФАО. 2014. Т. 50. № 1. С. 105-116.
- Со А.Н.* (2013). Параметрические колебания маятника на тележке // Молодежный научно-технический вестник. 2013. № 04. 7 с. Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038. ISSN 2307-0609 URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/566982.html>
- Со А.Н.* (2015). Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Волны и вихри в сложных средах: 6-ая Международная научная школа молодых ученых; 21 – 23 июня 2015 г., Калининград: Сборник материалов школы.– М.: МАКС Пресс, 2015. – 196 с. С. 157-158. ISBN 978-5-317-04989-8.
- Со А.Н., Сысоева Е.Я.* (2016) Затухание волн в сосуде с пластинами-демпферами // Изв. РАН. МЖГ. 2016. №1. С. 3-8.
- Сретенский Л.Н.* (1936) Теория волновых движений жидкости. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1936. 303 с.
- Сретенский Л.Н.* (1951) Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1951. № 10. С. 1483–1494.
- Сретенский Л.Н.* (1977) Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.

- Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В.* (2004) Классификация трехмерных периодических течений в жидкости // Доклады АН. 2004. Т. 395. № 1. С. 55-58.
- Чашечкин Ю.Д., Приходько Ю.В.* (2007) Регулярные и сингулярные компоненты течений при вынужденных и свободных колебаниях сферы в непрерывно стратифицированной жидкости // Доклады АН. 2007. Т. 414. № 1. С. 44-48.
- Черноусько Ф.Л.* (1969) Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость // М.: ВЦ АН СССР, 1969. 230 с.
- Abramson H.N.* (1966) The dynamic behavior of liquids in moving containers // NASA SP-106. 1966. 467 p.
- Akulenko L.D., Nesterov S.V.* (2005) High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
- Benjamin T.B., Ursell F.* (1954) The stability of the plane free surface of a liquid in vertical motion // Proc.Roy.Soc. 1954. V. A225.No. 1165. P. 505-515.
- Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D. H., Thais L.* (2003) Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves // J. Fluid Mech. 2003. V. 490. P. 217–249.
- Chester W., Bones J.A. Resonant* (1968) Oscillations of Water Waves. II. Experiment // Proc. R. Soc. Lond. A 1968. V.306. P. 23-39.
- Defant A.* (1961) Physical Oceanography. Vol. 2. Oxford: Pergamon Press, 1961. 598 p.
- Dodge F.T.* (2000). The new dynamic behavior of liquid sloshing in moving containers, Southwest Research Institute, San Antonio.
- Dore B.D.* (1976) Double boundary layers in standing surface waves // Pure Appl. Geophys. // 1976. V. 114. P. 629-637.
- Eswaran M., Saha U.K.* (2011) Sloshing of liquids in partially filled tanks – a review of experimental investigations // Ocean Systems Engineering, Vol. 1, No. 2 (2011) 131-155.

- Francois N., Xia H., Punzmann H., Ramsden S., Shats M.* (2014) Three-dimensional fluid motion in Faraday waves: creation of vorticity and generation of two-dimensional turbulence // *Phys. Rev. X* 4. 2014. V. 4. 021021 (3 p.) DOI: 10.1103/PhysRevX.4.021021.
- Gavrilyuk I., Lukovsky I.A., Trotsenko Yu., Timokha A.N.* (2006) Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions // *J. Eng. Math.* 2006. V. 54. No. 1. P. 71-88.
- Graham J.M.R.* (1980) The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. Pt. 2. P. 331-346.
- Herczyński A., Weidman P.D.* (2012) Experiments on the periodic oscillation of free containers driven by liquid sloshing // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 693. P. 216–242.
- Ibrahim R. A.* (2005) *Liquid sloshing dynamics: theory and applications.* Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
- Ibrahim R.A., Barr A.D.S.* (1975) Autoparametric resonance in a structure containing a liquid, part I: two mode interaction // *Journal of Sound and Vibration* (1975) 42(2), 159-179.
- Ibrahim R.A., Pilipchuk V.N., Ikeda T.* (2001) Recent advances in liquid sloshing dynamics // *Appl. Mech. Rev.* Vol. 54, no 2, March 2001, p. 133-199.
- Journee J.M.J., Massie W.W.* (2001) *Offshore hydrodynamics.* Delft University of Technology. 2001. 570 p.
- Kalinichenko V.A., Soe A.N.* (2014). Faraday waves in a freely moving tank and their mechanical analog // *Потоки и структуры в жидкостях: Международная конференция 25-28 июня 2013 г., Санкт-Петербург: Сборник избранных трудов конференции.* – М.: МАКС Пресс, 2014. – 376 с. С. 152-154. ISBN 978-5-317-04468-8.
- Kalinichenko V.A., Soe A.N., Chashechkin Yu.D.* (2014) Vortex damping of surface waves // *Physical and Mathematical Problems of Advanced Technology Development: Abstracts of International Scientific Conference /*

BMSTU, Moscow, 17-19 November 2014. – Moscow: BSTU, 2014. – 125 p.
C. 18. ISBN 978-5-7038-4071-9

- Keulegan G.H.* (1959) Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6. Pt. 1. P. 33 – 50.
- Keulegan G.H., Carpenter L.H.* (1958) Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // *J. Res. Nat. Bureau Stands.* 1958. V. 60. №5. P. 423-440.
- Krata P.* (2013) The impact of sloshing liquids on ship stability for various dimensions of partly filled tanks // *Int. J. Marine Navigation and Safety of Sea Transportation.* 2013. V.7. No 4. P. 481-489.
- Longuet-Higgins M.S.* (1953) Mass transport in water waves // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1953. V. 245. No. 903. P. 535-585.
- Lukaschuk S., Denissenko P., Falkovich G.* (2007) Nodal patterns of floaters in surface waves // *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2007. V. 145. P. 125–136. DOI: 10.1140/epjst/e2007-00151-6.
- Martin E., Vega J.M.* (2006) The effect of surface contamination on the drift instability of standing Faraday waves // *J. Fluid Mech.* 2006. V.546. P.203-225.
- Miles J. W.* (1974) Harbor seiching // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1974. V. 6. P. 17–33.
- Miles J.W.* (1958) Ring damping of free surface oscillations in a circular tank // *J. Appl. Mech.* 1958. V. 25. No. 2. P. 274-276.
- Miles J.W., Henderson D.* (1990) Parametrically forced surface wave // *Ann. Rev. Fluid Dyn. Palo Alto, Ca.: Annu. Revs Inc.,* 1990. V. 22. P. 143 – 165.
- NASA Technical Report.* (1969)Slosh Suppression – NASA Space Vehicle Design Criteria // *NASA Technical Report SP-8031.* 1969. 36 p.
- Noda H.* (1968) A study on mass transport in boundary layers in standing waves // *Proc.11th Intern. Conf. Coastal Eng. London. ASCE. Washington, DC,* 1968. P. 227–247.

- Prigo R.B., Manley T.O., Connell B.S.H.* (1996) Linear, one-dimensional models of the surface and internal standing waves for a long and narrow lake // *Am. J. Phys.* 1996. V. 64. No. 3. P. 288-300.
- Rabinovich A.B.* (2009) Seiches and harbor oscillations // in *Handbook of Coastal and Ocean Engineering* (ed. by Y.C. Kim). Singapore: World Scientific Publ., 2009. Ch. 9. P. 193-236.
- Rayleigh L.* (1883) On the crispations of fluid resting upon a vibrating support // *Phil Mag* 15, 229-235.
- Rayleigh L.* (1884) On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1884. V. 175. P. 1-21.
- Rayleigh L.* (1887) On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure // *Phil Mag* 24, 145-159.
- Sanli C., Lohse D., Van Der Meer D.* (2014) From antinode clusters to node clusters: the concentration-dependent transition of floaters on a standing Faraday wave // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 89. No. 5. (9 p) [DOI: 10.1103/PhysRevE.89.053011](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.053011).
- Sarpkaya T.S.* (2010) *Wave Forces on Offshore Structures*. Cambridge Univ. Press, 2010. 322 p.
- Soe A.N., Kalinichenko V.A.* (2015). Vortex damping of liquid oscillations in a rectangular tank // *Потоки и структуры в жидкостях: Международная конференция 23-26 июня 2015 г., Калининград: Сборник избранных трудов конференции.* – М.: МАКС Пресс, 2015. – 316 с. С. 233-234. ISBN 978-5-317-04990-4.
- Soe A.N., Kalinichenko V.A., Korovina L.I., Nesterov S.V.* (2014). Features of liquid oscillations in a rectangular container with local irregularities in the bottom // *Physical and Mathematical Problems of Advanced Technology Development: Abstracts of International Scientific Conference / BMSTU,*

Moscow, 17-19 November 2014. – Moscow: BSTU, 2014. – 125 p. C. 11.
ISBN978-5-7038-4071-9.

Xu X., Wiercigroch M. (2007) Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum // Nonlinear Dyn. 2007. V. 47. No.1-3. P 311–320. CCCP, 1936. 303 c.