

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Перельмутер Михаил Натанович

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ
ПО ГРАНИЦАМ СОЕДИНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 01.02.04

механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

МОСКВА-2015

Содержание

Введение	7
Глава 1. Трещины с взаимодействием берегов на границе соединения материалов	19
1.1. Модели трещины со связями в концевой области	20
1.2. Коэффициенты интенсивности напряжений для трещин на границе соединения материалов	29
1.3. Модель концевой области трещины на границе соединения материалов	37
1.3.1. Адгезионное соединение полимеров	41
1.3.2. Композиционные материалы, армированные волокнами	47
1.3.3. Феноменологические законы деформирования связей между берегами трещины	54
1.4. Термофлуктуационная модель кинетики связей в механике разрушения	60
Глава 2. Методы расчета напряженно-деформированного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений при учете взаимодействия берегов трещин на границе соединения материалов 66	66
2.1. Расчет напряженно-деформированного состояния на границе соединения материалов и в концевой области прямолинейной трещины. Постановка задачи	68
2.1.1. Система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для задач о трещине со связями с нелинейной диаграммой деформирования на границе соединения материалов	72
2.1.2. Раскрытие трещины с учетом связей и расчет напряжений на границе соединения материалов	76
2.1.3. Коэффициенты интенсивности напряжений для прямолинейной трещины с взаимодействием берегов на границе соединения полуплоскостей	80

2.2.	Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения для задачи о трещине со связями в концевой области, на границе соединения материалов. Численное решение	83
2.2.1.	Коллокационная схема с полиномиальной аппроксимацией	86
2.2.2.	Методика решения для связей с нелинейной диаграммой деформирования	89
2.2.3.	Кинетика связей в концевой области трещины на границе соединения материалов. Шаговая по времени схема расчета	92
2.2.4.	Сходимость численного алгоритма. Сравнение с численно-аналитическими и экспериментальными результатами	98
2.3.	Области конечного размера. Граничные интегральные уравнения для задач о трещинах со связями в концевой области на границах соединения материалов	104
2.3.1.	Граничные интегральные уравнения для кусочно-однородных областей с трещинами на границах соединения материалов	104
2.3.2.	Аппроксимация переменных задачи и моделирование асимптотических распределений перемещений и напряжений вблизи трещин	109
2.3.3.	Формирование дискретного представления граничных интегральных уравнений при наличии трещин со связями между подобластями	117
2.4.	Сопоставление результатов расчетов методами сингулярных интегро-дифференциальных и граничных интегральных уравнений	124
2.4.1.	Трещина со связями в концевой области, на границе соединения материалов. Раскрытие трещины и усиления в связях	127
2.4.2.	Коэффициенты интенсивности напряжений для трещин со связями в концевой области на границе соединения материалов	130

Глава 3. Задачи для трещин с концевой областью на границе соединения материалов	133
3.1. Прямолинейная трещина с линейно-упругими связями в концевой области, на границе соединения материалов	134
3.1.1. Напряженно-деформированное состояние в концевой области трещины. Влияние механических свойств материалов и связей	135
3.1.2. Трещина со связями в концевой области при действии растягивающих и сдвиговых внешних нагрузок	152
3.2. Прямолинейная трещина на границе соединения материалов со связями с нелинейной диаграммой деформирования	157
3.2.1. Сходимость численного решения. Влияние формы кривой деформирования связей	158
3.2.2. Напряженное состояние в концевой области трещины со связями с нелинейной диаграммой деформирования	171
3.3. Области конечного размера. Трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов	176
3.3.1. Дуговая трещина со связями в концевой области, на границе соединения включения и матрицы	177
3.3.2. Взаимодействие трещин со связями в концевой области с препятствиями и границами раздела сред	182
3.3.3. Трещина со связями в концевой области, на границе неидеального соединения материалов	188
Глава 4. Критерий формирования и роста трещин со связями в концевой области, на границе соединения материалов	196
4.1. Нелокальный критерий квазистатического роста трещин со связями в концевой области	198
4.1.1. Трещина на границе соединения материалов. Критерий разрушения	201
4.1.2. Режимы квазистатического роста трещин	206
4.1.3. Трещина с малой концевой областью. Эквивалентность критериев разрушения	208

4.2.	Нелокальный критерий разрушения. Трещина с постоянными напряжениями в связях. Аналитическое исследование	210
4.2.1.	Докритический рост трещины. Начальный разрез, свободный от связей	216
4.2.2.	Докритический рост трещины. Трещина, заполненная связями	219
4.2.3.	Квазистатический рост трещины со связями в концевой области	225
4.3.	Анализ предельных случаев. Сопоставление критериев разрушения	231
4.3.1.	Модели когезионного типа	232
4.3.2.	Трещина с малой концевой областью	237
4.3.3.	Сопоставление силового и энергетического критериев роста трещин	241
Глава 5.	Анализ трещиностойкости соединений материалов	248
5.1.	Коэффициенты интенсивности напряжений и энергетические характеристики трещины при нелинейном законе деформирования связей	248
5.1.1.	Влияние механических свойств материалов и связей на коэффициенты интенсивности напряжений	249
5.1.2.	Энергетические характеристики трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов	256
5.2.	Трещиностойкость соединений материалов при различных законах деформирования связей в концевой области трещины	263
5.2.1.	Применение нелокального критерия квазистатического роста трещин при различных законах деформирования связей в концевой области трещины	264
5.2.2.	Моделирование трещиностойкости соединений материалов. Линейно-упругие связи	273
5.2.3.	Моделирование трещиностойкости соединений материалов. Связи с нелинейной диаграммой деформирования	285
5.3.	Кинетика связей в концевой области трещины. Формирование дефектов на границе соединения материалов	292

5.3.1.	Анализ термофлуктуационной модели кинетики связей в концевой области трещины	292
5.3.2.	Формирование трещин из зоны ослабленных связей на границе соединения материалов	298
5.3.3.	Термофлуктуационная модель разупрочнения нанокomпозиционных материалов	305
Заключение	309
Приложение	312
Литература	328

Введение

Структуры, содержащие соединения различных материалов, распространены в природе и широко используются в технических конструкциях. Сцепление материалов в соединениях может быть адгезионным, механическим или комбинированным, однако механико-математическое моделирование процессов разрушения соединений разной природы основывается на общих подходах механики деформируемого твердого тела, механики и физики разрушения. Качество соединения существенно зависит от физико-механических и химических свойств соединяемых материалов, структуры межфазного адгезионного слоя, а также от геометрических характеристик поверхности соединяемых материалов (шероховатость, наличие дефектов). Управление механическими свойствами соединений материалов является важнейшей задачей во многих технических приложениях. В современных высокотехнологичных аэрокосмических конструкциях широко используются композиционные материалы; детали с тонкими покрытиями и соединения тонких слоев различных материалов являются основой современной электроники. Во всех случаях важнейшими механическими характеристиками соединений материалов является их прочность, трещиностойкость и долговечность, оптимизация которых является важнейшей частью проектирования.

При производстве и эксплуатации структур с адгезионными и комбинированными соединениями происходит образование дефектов и трещин, расположенных преимущественно на границах соединения материалов (как в межфазном слое, так и на границах этого слоя с соединяемыми материалами), что может привести к потере эксплуатационных свойств таких структур. Причиной возникновения дефектов являются различия в физико-механических свойствах соединяемых материалов и адгезива, наличие дефектов на поверхностях соединяемых материалов, воздействие термомеханических нагрузок и агрессивных сред, наличие остаточных напряжений, недостат-

ки технологии изготовления [1–4]. Формирование дефектов зависит также от характерных особенностей строения межфазных адгезионных слоев в соединениях материалов различной природы: полимеров, металлов и керамики [5–10].

Одним из важнейших направлений моделирования разрушения материалов является разработка и использование различных вариантов моделей трещины, учитывающих нелинейные процессы разупрочнения материала вблизи вершины (фронта) трещины (модели зоны процесса разрушения).

При малом (по сравнению с характерным размером трещины) размере зоны процесса разрушения нет необходимости в ее явном моделировании при решении конкретных задач механики разрушения - в этом случае состояние предельного равновесия трещины полностью определяется критическим коэффициентом интенсивности напряжений (или его энергетическим аналогом), являющимся постоянной материала. Детальное моделирование зоны процесса разрушения становится необходимым, если размер этой зоны сравним с характерным размером трещины. Одна из возможностей механико-математического моделирования зоны процесса разрушения состоит в рассмотрении её как части трещины и в явном приложении к поверхностям трещины в этой зоне сил сцепления, сдерживающих раскрытие трещины (модель концевой области трещины). Важным достоинством такого подхода является возможность моделирования нелинейного поведения материала в концевой области трещины в линейной постановке задачи.

Впервые модели концевой области трещины предложены Г.И. Баренблаттом [11, 12], М.Я. Леоновым, В.В. Панасюком [13, 14] и Д. Дагдейлом [15] для хрупкого и упруго-пластического разрушения однородных материалов. В рамках этих моделей полагается, что между поверхностями трещины в концевой области действуют силы сцепления, сдерживающие раскрытие трещины, и в состоянии предельного равновесия силы сцепления таковы, что коэффициент интенсивности напряжений от совместного действия внеш-

них нагрузок и сил сцепления равен нулю и, соответственно, напряжения в вершине трещины ограничены. Отметим, что в модели [11, 12] вводятся допущения, что размер зоны действия сил сцепления мал по сравнению с размером трещины, и при росте трещины форма и размер концевой области трещины сохраняются неизменными (гипотеза автономности), тогда как в модели, предложенной в работах [13–15], не накладывается ограничение на размер концевой области, а силы сцепления полагаются постоянными. В неоднородных материалах, при наличии границ раздела фаз, подкрепляющих волокон и частиц, процессы деформирования и разрушения вблизи края трещины включают в себя несколько физических механизмов. В таких случаях используются модели концевой области трещины с учетом сингулярности напряжений в вершине трещины в состоянии предельного равновесия, развитие которых связано с исследованием трещиностойкости керамических и композиционных материалов [16–19]. Разнообразные варианты моделей с силами сцепления в концевой области трещины применяются для описания процессов разрушения как для однородных изотропных [18, 20–25], так и трансверсально изотропных [26, 27] и ортотропных [28] материалов. Модели формирования и развития трещин, основанные на рассмотрении трещины с концевой областью, позволяют объединить подходы механики и физики разрушения для исследования процессов разрушения на разных масштабных уровнях при различных внешних воздействиях.

Актуальность работы связана с широким использованием в современных конструкциях и изделиях адгезионных соединений и композиционных материалов. В таких материальных структурах процесс разрушения не локализован вблизи края трещины, в этот процесс вовлекается достаточно большая часть трещины, размер зоны процесса разрушения может быть сравним с характерным размером трещины, причем при изменении размера этой зоны возможна реализация различных механизмов разрушения. Ввиду этого, для моделирования формирования и развития трещин на границах соединения

материалов эффективно использование модели трещины с силами сцепления (связями) в концевой области, с учетом сингулярности напряжений в вершине трещины, что позволяет учитывать многомасштабную структуру соединительного слоя между материалами, наличие подкрепляющих частиц и волокон. Однако, модели и методы исследования процессов разрушения вдоль границ соединения материалов с учетом адгезионных связей и иных механизмов сцепления материалов разработаны недостаточно. Необходима разработка моделей формирования и развития трещин вдоль границ соединения материалов, а также методов расчета напряженно-деформированного состояния для соединений различных материалов с учетом адгезионных связей и возможного трещинообразования.

Задачи исследования состоят в разработке моделей формирования и развития трещин вдоль границ соединения материалов и методов расчета процессов разрушения слоистых структур, а также в решении новых задач механики разрушения для трещин с концевой областью на границе соединения материалов и включают следующие этапы, детально рассмотренные в работе:

- моделирование концевой области трещины на границе соединения материалов с учетом взаимосвязи нормальной и касательной мод деформирования и кинетики связей, многомасштабности структуры соединительного слоя между материалами, наличия подкрепляющих частиц и волокон, а также установление законов деформирования связей между поверхностями трещины в концевой области для различных типов материалов;
- разработку методов расчета напряженно-деформированного состояния в концевой области и вблизи вершины (фронта) трещины на границе соединения материалов, а также методов расчета коэффициентов интенсивности напряжений для трещин на границе соединения материалов с учетом нелинейных законов деформирования связей и кинетики

связей в концевой области трещины;

- разработку и применение нелокального критерия развития трещин, учитывающего затраты энергии на деформацию связей в концевой области трещины, а также кинетику связей, и позволяющего анализировать продвижение как вершины трещины, так и края её концевой области под действием внешних нагрузок и усилий, возникающих в связях.

Научная новизна. В работе впервые получены следующие результаты:

- на основе рассмотрения зоны процесса разрушения как концевой области трещины разработаны модели формирования и роста трещин вдоль границ соединения материалов, учитывающие взаимосвязь нормальной и касательной мод деформирования, многомасштабность структуры соединительного слоя между материалами, наличие подкрепляющих частиц и волокон, а также термофлуктуационную кинетику адгезионных связей;
- разработаны методы решения задач механики разрушения для трещин на границе соединения материалов с концевой областью, размер которой не является малым по сравнению с характерным размером трещины, включающие расчет напряженно-деформированного состояния таких структур и коэффициентов интенсивности напряжений, а также оценку долговечности связей в концевой области трещины, основанную на термофлуктуационной теории разрушения;
- получена система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для исследования напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины на границе соединения полуплоскостей из различных материалов, позволяющая определять нормальную и касательную составляющие усилий в связях при нелинейном законе деформирования связей и учете термофлуктуационной кинетики связей;
- разработана методика численного решения указанной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для связей с нелинейной диа-

граммой деформирования и с учетом кинетики термофлуктуационного распада связей;

- выполнено исследование решения системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при различных законах деформирования связей в концевой области трещины и различных механических свойствах материалов; выделены безразмерные параметры, содержащие физико-механические характеристики задачи, определяющие решение указанной системы уравнений;

- разработана методика численного решения граничных интегральных уравнений задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородных структур конечных размеров с учетом взаимодействия берегов криволинейных трещин на границах подобластей;

- разработаны алгоритмы и компьютерные программы, реализующие численное решение сингулярных интегро-дифференциальных и граничных интегральных уравнений для структур, содержащих трещины с концевой областью на границе соединения материалов;

- предложен вариант нелокального критерия квазистатического роста трещин, учитывающий работу по деформированию связей и термофлуктуационную кинетику связей в концевой области трещины; в рамках указанного критерия сформулированы и исследованы режимы квазистатического развития трещины с концевой областью;

- получены в квазистатической постановке решения ряда новых задач механики разрушения для трещин с концевой областью на границе соединения материалов, включая задачи с криволинейными трещинами; установлено хорошее согласование результатов, полученных на основе разработанных автором методов расчета напряженно-деформированного состояния и критериев формирования и развития трещин с известными экспериментальными данными.

Методы исследования. В работе использованы аналитические и численные методы механики деформируемого твердого тела и механики разрушения. Для исследования напряженного состояния в концевой области прямолинейной трещины на границе соединения полуплоскостей из различных материалов используется метод сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Для определения напряженно-деформированного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений в телах конечных размеров с криволинейными трещинами на границе соединения материалов используется метод граничных интегральных уравнений в прямой формулировке с фундаментальным решением Кельвина. Методы численного решения сингулярных интегро-дифференциальных и граничных интегральных уравнений основаны на кусочно-полиномиальной дискретизации уравнений и применении варианта метода переменных параметров упругости для решения задач с нелинейной диаграммой деформирования связей.

Достоверность и обоснованность результатов. Результаты получены с использованием моделей и методов расчета, основанных на механике деформируемого твердого тела и механике разрушения. Результаты численного моделирования сопоставлены с известными аналитическими решениями, экспериментальными и расчетными данными.

Личное участие автора заключалось в построении механико-математических моделей формирования и развития трещин вдоль границ соединений материалов, в исследовании этих моделей, в постановках задач моделирования разрушения вдоль границ соединения материалов, в разработке базовых интегро-дифференциальных уравнений для описания моделей разрушения, а также в разработке алгоритмов и компьютерных программ для численного решения интегро-дифференциальных и граничных интегральных уравнений, в проведении расчетов и в анализе результатов этих расчетов.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования разработанных моделей и методов расчета для исследования процессов формирования и развития трещин вдоль границ соединения материалов, а также оценки трещиностойкости соединений материалов. Разработанные алгоритмы и компьютерные программы могут быть использованы для расчета теплового и напряженно-деформированного состояния кусочно-однородных конструкций, а также расчета коэффициентов интенсивности напряжений для трещин на границах соединения различных материалов, с учетом взаимодействия берегов трещин.

Публикации результатов исследования и апробация работы. Основные результаты диссертации опубликованы в журналах из списка ВАК и международных рецензируемых журналах [29–47], а также препринтах [48–55], сборниках научных статей [56–62] и трудах конференций [63–76].

Основные положения диссертации и работа в целом докладывались и обсуждались на ряде российских и международных конференций и семинаров, включая следующие: Всероссийские съезды по теоретической и прикладной механике (VIII съезд, Пермь, 2001; IX и X съезды, Нижний Новгород, 2006, 2011); ICTAM – Международные конгрессы по теоретической и прикладной механике (ICTAM2000, Чикаго; ICTAM2004, Варшава; ICTAM2008, Аделаида; ICTAM2012, Пекин); Международные конференции по разрушению (ICF2005, Турин; ICF2009, Оттава; ICF2013, Пекин); Европейские конференции по разрушению (ECF14, 2002, Краков; ECF16, 2006, Александрополис; ECF17, 2008, Брно; ECF18, 2010, Дрезден; ECF19, 2012, Казань; ECF20, 2014, Трондхейм); Международные конференции по методам граничных элементов (Брешиа, 2000 и 2011; Грац, 2006; Флоренция, 2014); Международная конференция по вычислительной механике деформируемого твердого тела (Москва, 2006); Конференции немецкого общества механиков - GAMM (2007, Цюрих; 2008, Бремен); III Международная научно-техническая конференция “Авиадвигатели XXI века”(Москва, 2010); III, IV и V

Международные конференции “Деформация и разрушение материалов и наноматериалов” (Москва, 2009, 2011, 2013); Международная конференции по самовосстанавливающимся материалам (ICSHM, Бат, 2011); III Всероссийская конференция “Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций”, посвященная 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова (2014, Новосибирск); The International Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics” (Russia, St. Petersburg, 2002, 2010); Семинар академика Горячевой И.Г. (НИИ механики МГУ, Москва, 2014); семинар “Механика деформирования и разрушения материалов и конструкций” под руководством чл. корр. РАН Гольдштейна Р.В. (ИПМех РАН, Москва, 2015); семинар академика Морозова Н.Ф. (ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, 2013, 2015).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка литературы.

В **главе 1** рассмотрены варианты описания зоны процесса разрушения трещины на основе модели трещины с взаимодействием берегов (концевой области трещины). В разделе 1.1 рассмотрены известные варианты модели трещины со связями в концевой области. В разделе 1.2 приведены основные положения механики трещин, расположенных на границе или вблизи соединения материалов, и методы определения коэффициентов интенсивности напряжений, используемые в работе. В разделе 1.3 рассмотрены математическое описание модели трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов, а также микромеханические и феноменологические законы деформирования связей. В разделе 1.4 предложен основанный на термофлуктуационной теории разрушения метод анализа кинетики связей в концевой области трещины.

В **главе 2** рассмотрены методы определения напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины и вблизи ее вершины, на границе соединения материалов. В разделе 2.1 рассмотрена методика получе-

ния сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для исследования напряженно-деформированного состояния в концевой области прямолинейной трещины, на границе соединения двух полуплоскостей из различных материалов с использованием функций влияния; получены выражения для определения раскрытия трещины вне зоны связей и напряжений на границе соединения материалов за вершиной трещины, а также выражения для расчета коэффициентов интенсивности напряжений, при учете связей в концевой области трещины. В разделе 2.2 рассмотрена методика численного решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для случаев линейно-упругих и нелинейных связей в концевой области трещины, с учетом термофлуктуационной кинетики распада связей. В разделе 2.3 рассмотрены применение метода граничных интегральных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния вблизи трещин (криволинейных в общем случае) со связями в концевой области, на границе соединения материалов в областях конечного размера, вычисления модуля коэффициентов интенсивности напряжений для такого рода трещин и методика численного решения граничных интегральных уравнений. В разделе 2.4 выполнено сопоставление результатов расчетов методами сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и граничных интегральных уравнений для прямолинейной трещины на границе соединения материалов.

В главе 3 приведены результаты решения ряда задач для трещин с концевой областью, на границе соединения материалов, полученные методами сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и граничных интегральных уравнений. В разделе 3.1 методом сингулярных интегро-дифференциальных уравнений выполнено исследование модели трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов, для прямолинейной трещины с линейно-упругими связями. В разделе 3.2 рассмотрены эффекты, связанные с нелинейным деформированием связей в концевой области трещины. В разделе 3.3 приведены решения ряда новых задач для трещин

со связями в концевой области, на границе соединения материалов, включая криволинейные, полученные методом граничных интегральных уравнений для областей конечного размера.

В **главе 4** для исследования предельного равновесия трещины с концевой областью предложен вариант нелокального критерия формирования и роста трещин с энергетическим условием продвижения вершины трещины, учитывающим работу по деформированию связей в концевой области трещины и кинематическим условием разрыва связей на краю концевой области трещины. В разделе 4.1 формулируются основные положения критерия, рассмотрены режимы квазистатического роста трещин вдоль границы соединения материалов, а также предельный случай трещины с малой концевой областью. В разделе 4.2 выполнено аналитическое исследование применения нелокального критерия для случая постоянных напряжений в связях, детально рассмотрены режимы докритического и квазистатического роста трещин. В разделе 4.3 приведены результаты анализа предельных случаев для трещины, заполненной связями, и трещины с малой концевой областью, а также выполнено сопоставление предложенного критерия разрушения и известного силового критерия разрушения для трещин с концевой областью.

В **главе 5** выполнено исследование энергетических характеристик концевой области трещины, рассмотрены эффекты упрочнения, вызванные присутствием связей в концевой области трещины, на границе соединения материалов, а также влияние кинетики связей в концевой области трещины на характеристики трещиностойкости. В разделе 5.1 рассмотрено влияние механических свойств материалов и связей на коэффициенты интенсивности напряжений и энергетические характеристики трещины с концевой областью. В разделе 5.2 рассмотрена методика применения нелокального критерия формирования и развития трещин со связями в концевой области, а также приведены результаты исследования трещиностойкости соединений материалов при различных законах деформирования связей в концевой об-

ласти трещины. Приведены оценки характеристик адгезионного сопротивления соединений материалов. Рассмотрено сопоставление с известными численными и экспериментальными результатами. В разделе 5.3 рассмотрено применение термофлуктуационной модели кинетики связей в концевой области трещины. Долговечность связей в концевой области трещины определяется с учетом неоднородного распределения напряжений в концевой области трещины. Выполнено исследование термофлуктуационной модели кинетики связей. Рассмотрена термофлуктуационная модель разупрочнения нанокпозиционных материалов. Расчеты выполнены с использованием разработанного автором комплекса компьютерных программ для исследования напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины с учетом нелинейных законов деформирования связей и кинетики связей.

В **Приложении** приведено: 1) вывод интегро-дифференциальных уравнений для прямолинейной трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов; 2) методика вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов; 3) методики вычисления интегралов при дискретизации системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, при расчете перемещений вне зоны связей, при расчете коэффициентов интенсивности напряжений и скорости потребления энергии связями; 4) оценка точности численного решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений; 5) вычисление параметров энергетического условия разрушения. В **Заключении** приведены основные результаты диссертации. Работа содержит 356 страниц, в том числе 170 иллюстраций и 8 таблиц; список литературы включает 296 наименований.

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность члену-корреспонденту РАН Р.В. Гольдштейну за постоянную поддержку и плодотворные обсуждения в ходе выполнения работы.

Глава 1

Трещины с взаимодействием берегов на границе соединения материалов

Выбор модели разрушения при анализе процесса развития трещин по границе соединения материалов зависит от физико-механических свойств и структуры материалов. В структурно-неоднородных материалах (адгезионных соединениях, композиционных материалах, горных породах), при наличии вблизи трещины границ раздела фаз, областей с нарушенной структурой (пластических зон, микротрещин, пор), при воздействии физических полей и агрессивных сред, в процесс разрушения вовлекается достаточно большая область вблизи вершины трещины; процесс разрушения определяется различными (как правило, нелинейными) механизмами, реализующимися на разных расстояниях от края трещины (многомасштабное разрушение). Размер зоны процесса разрушения меняется при развитии трещины и не является малым в сравнении с характерным размером трещины. В таких случаях трещиностойкость материала зависит от характерного размера трещины и возникает необходимость детального моделирования зоны процесса разрушения.

Варианты описания зоны процесса разрушения (концевой области трещины) рассмотрены в разделе 1.1. В разделе 1.2 приведены основные положения механики трещин, расположенных на границе или вблизи соединения материалов, используемые в работе. Математическое описание модели трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов, а также микромеханические и феноменологические законы деформирования связей приведены в разделе 1.3. Кинетика связей под действием внешней нагрузки, основанная на термофлуктуационной теории разрушения, рассмотрена в разделе 1.4. Материал главы основан на работах [29, 39, 40, 48–52, 56, 57].

1.1. Модели трещины со связями в концевой области

Зону процесса разрушения можно рассматривать как некоторый слой толщины H и длины d , примыкающий к трещине и содержащий материал с частично нарушенными связями между его отдельными структурными элементами (рис. 1.1a). Одна из возможностей моделирования такого слоя состоит в рассмотрении его как материала с физико-механическими свойствами, отличающимися от свойств остальной части тела. В качестве критерия разрушения (роста трещины) в такой модели слоя используется условие, связанное с накоплением повреждений в слое или достижением предельных деформаций слоя [77–83]. В последнем случае характерная зависимость напряжений в слое σ от его поперечного удлинения δ имеет вид, как на рис. 1.1b, где $\delta = \delta_m$ - соответствует переходу от упруго-пластического деформирования слоя к его разупрочнению и разрыву, при $\delta = \delta_{cr}$. Если толщина слоя мала по

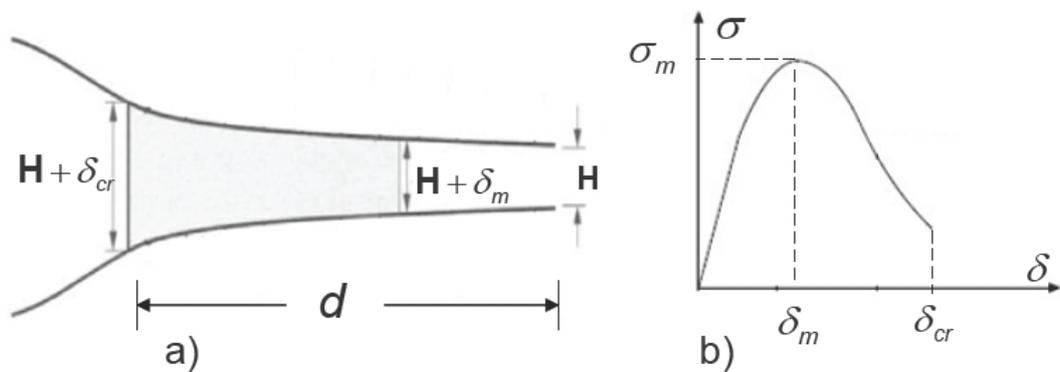


Рис. 1.1. (а)- Модель зоны процесса разрушения как слоя; (б) - кривая деформирования слоя

сравнению с его длиной ($H/d \ll 1$), то другая возможность моделирования такого слоя состоит в рассмотрении его как части трещины, примыкающей к ее вершине (концевой области) и в явном приложении в концевой области к поверхностям трещины сил сцепления, сдерживающих её раскрытие. Вершина такой модифицированной трещины совпадает с передней кромкой концевой области. Физическая природа сил сцепления зависит от структуры материала, а также от размеров трещины и концевой области. На малых рас-

стояниях от края трещины преобладает непосредственное межмолекулярное взаимодействие, а на относительно больших расстояниях от края трещины возможно преобладание “механических” связей, создаваемых, например, подкрепляющими волокнами в композиционных материалах или звеньями полимерных цепей, соединяющими поверхности трещины в адгезионных соединениях.

Для моделирования действия сил сцепления в концевой области трещины используются два основных подхода: 1) приложение к поверхностям трещины дискретных значений сил сцепления (например, при использовании дискретных или решеточных моделей трещины [84, 85], или когда расстояние между подкрепляющими частицами или волокнами сравнимо с характерным размером трещины или концевой области [86]); 2) рассмотрение непрерывного распределения сил сцепления в концевой области трещины [18].

Модели трещины с силами сцепления в концевой области можно, с математической точки зрения, условно (так как физическая природа сил сцепления может быть одинакова в обоих случаях) разделить на два типа по форме представления напряжений в вершине трещины в состоянии предельного равновесия:

1) суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) от действия внешних нагрузок и сил сцепления в концевой области, определяющий сингулярную асимптотику напряжений в вершине модифицированной трещины, полагается равным нулю, следствием чего является ограниченность и непрерывность напряжений в вершине трещины (рис. 1.2а);

2) суммарный КИН в вершине модифицированной трещины не равен нулю, т.е. предполагается сингулярное поле напряжений в вершине трещины (рис. 1.4а).

Кроме указанного математического различия, имеются различия в физико-механическом описании материала в концевой области трещины, при-

водящие к различной трактовке сил сцепления в концевой области и к различным критериям развития трещин в этих моделях, хотя силы сцепления для обеих моделей зависят, как правило, от раскрытия трещины в концевой области и от окружающих условий (наличия физических полей, агрессивных сред и т.п.). Эта зависимость содержит в неявной форме информацию о микроструктуре материала в концевой области трещины.

Модели первого типа называются **когезионными моделями концевой области трещины** [11, 12, 14]. Эти модели применяются для однородных материалов, если процессы продвижения вершины трещины и формирования сил сцепления взаимосвязаны и определяются одним физическим механизмом. Например, при учете узких зон пластичности или областей нарушенных межчастичных связей в однофазных, пластичных или хрупких материалах. Когезионная зона в этих случаях является моделью механического поведения материала вблизи вершины трещины. Следствием равенства нулю коэффициента интенсивности напряжений в когезионной модели является непрерывность напряжений и плавное смыкание берегов трещины в её вершине. Отметим, что вершина трещины в этом случае совпадает с передним краем концевой области (см. рис. 1.2а).

Первоначально модели когезионного типа предложены как вариант силового подхода к решению задач механики разрушения, позволяющий исключить рассмотрение бесконечных напряжений в вершине трещины (критерий разрушения хрупких тел, учитывающий распределение когезионных сил в малой зоне у края трещины, см. [11, 12]) или как модель разрушения при идеальной пластичности или хрупкости с постоянными напряжениями в концевой области трещины [13–15]. Критерием разрушения в последнем случае является достижение критического раскрытия трещины δ_{cr} на краю концевой области (см. рис. 1.2а).

Кривая деформирования связей в когезионной модели является, как правило, неубывающей функцией раскрытия трещины в концевой области с

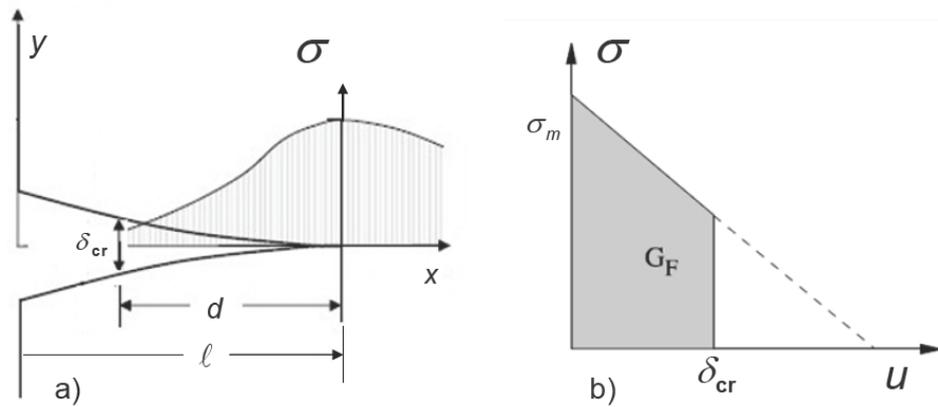


Рис. 1.2. **(а)** - Когезионная модель концевой области трещины; **(б)** - кривая деформирования когезионных связей

ненулевым значением в вершине трещины (при нулевом раскрытии трещины), соответствующим прочности материала σ_m [24]. Напряжения на краю концевой области при критическом раскрытии трещины δ_{cr} , соответствующем разрыву связи, могут быть, в зависимости от типа материала, не равными нулю (см. рис. 1.2b), а площадь под кривой деформирования связей определяет работу разрушения. Отметим, что, при описании кривой когезионных связей, существенно наличие ненулевых напряжений в вершине трещины, что является очевидным следствием непрерывности напряжений в вершине трещины и может быть также показано аналитически (см. главу 2).

Варианты когезионной модели позволяют рассматривать нелинейные эффекты в концевой области трещины и являются заменой линейной механики разрушения. Эти модели получили широкое применение для решения различных задач механики разрушения без наложения ограничений на размер концевой области трещины после развития численных методов решения задач механики, в первую очередь, метода конечных элементов [20, 24]. При этом в качестве критерия разрушения используются два условия: условие критического раскрытия трещины на краю концевой области (или условие критической деформации) и условие достижения предельных напряжений в вершине трещины [20]. Выполнение критериальных условий для концевой

области трещины достигается итерационным путем, причем, при численной реализации алгоритмов, условие плавного смыкания берегов трещины специально не накладывается [87]. Модель применялась как для однородных, [21, 24, 88] так и для кусочно-однородных [89, 90] и градиентных материалов [91].

В работах [92–95] выполнено сравнение когезионной модели (на примере модели Баренблатта) и линейной механики разрушения и показано, что, при малом, по сравнению с длиной трещины, размере когезионной зоны, эти подходы эквивалентны (независимо от формы когезионной кривой), и критический поток энергии в вершину трещины G_{Ic} определяется как (см. рис. 1.2b):

$$G_{Ic} = G_F = \int_0^{\delta_{cr}} \sigma(u) du,$$

где δ_{cr} - критическое раскрытие трещины на краю когезионной зоны.

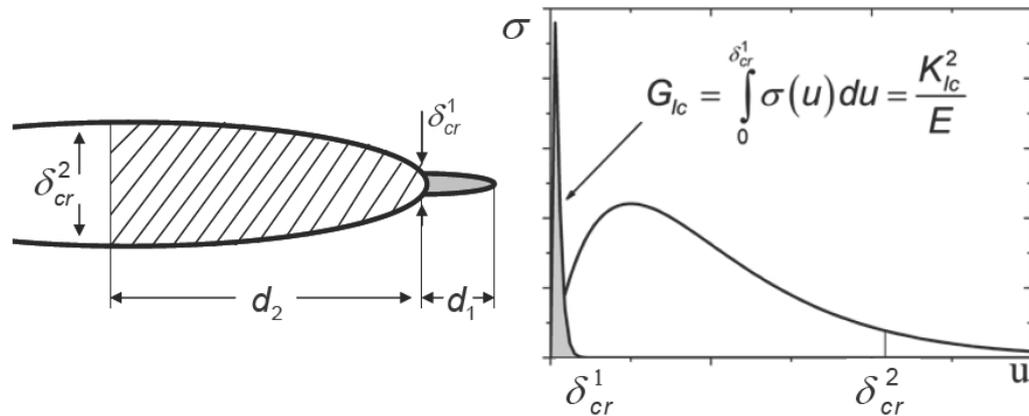


Рис. 1.3. (а) - Двухуровневая когезионная зона; (б) - двухуровневая когезионная кривая.

Модели второго типа будем далее называть **модели трещины со связями в концевой области** (по терминологии работы [18] - bridged crack models). Модели такого типа используются, если процессы деформирования и разрушения в концевой области включают в себя несколько физических механизмов, например, в адгезионных соединениях или композиционных материалах, где продвижение вершины трещины и формирование сил сцепления

обусловлены различными механизмами. Материалы в этом случае рассматриваются как многофазные и многомасштабные, с учетом вклада каждой фазы и масштаба (от масштаба атомных связей до масштабов адгезионного слоя, волокон, матрицы) в трещиностойкость соединения.

Основой для модели трещины со связями в концевой области является когезионная модель, которая может быть также использована для описания многомасштабного взаимодействия между берегами трещины, если когезионная кривая состоит, например, из двух частей, соответствующих различным физическим механизмам ограничения раскрытия трещины (см. рис. 1.3а,б). Условие конечности напряжений в вершине трещины можно представить в этом случае так:

$$K_{\infty} - K_b^{(1)} - K_b^{(2)} = 0, \quad (1.1)$$

где K_{∞} - КИН от действия внешних нагрузок, $K_b^{(1)}$ и $K_b^{(2)}$ - КИН, обусловленные взаимодействием между берегами трещины в частях d_1 и d_2 когезионной зоны.

Во многих материалах часть когезионной зоны, примыкающая в вершине трещины, мала по сравнению с длиной трещины и размером второй части когезионной зоны ($d_1 \ll d_2$, $d_1 \ll \ell$), а также предельные раскрытия трещины на соответствующих частях зоны удовлетворяют условию $\delta_{cr}^1 \ll \delta_{cr}^2$. В этом случае можно полагать, что, при монотонном нагружении, первая часть когезионной зоны находится в состоянии предельного равновесия и, следовательно, вклад этой части когезионной зоны в трещиностойкость материала не зависит от длины трещины и является постоянной величиной:

$$K_b^{(1)} = K_{Ic} = \sqrt{EG_{Ic}}, \quad G_{Ic} = \int_0^{\delta_{cr}^1} \sigma(u) du \quad (1.2)$$

С учетом этого предположения можно представить условие конечности напряжений (1.1) для когезионной зоны, состоящей из двух частей, как условие

предельного равновесия в **модели трещины со связями в концевой области**, при допущении сингулярного поля напряжений в вершине трещины ($K_b \equiv K_b^{(2)}$) [18]

$$K_\infty - K_b = K_{Ic} \quad (1.3)$$

При таком описании концевой области трещины полагается (т.к. $d_1 \ll d_2$ и $\delta_{cr}^1 \ll \delta_{cr}^2$), что $d_1 = 0$ и $\delta_{cr}^1 = 0$ и рассматривается только часть кривой деформирования связей на участке от $u = 0$ до $u = \delta_{cr} \equiv \delta_{cr}^2$, а вклад части когезионной зоны, примыкающей к вершине трещины, полагается постоянным.

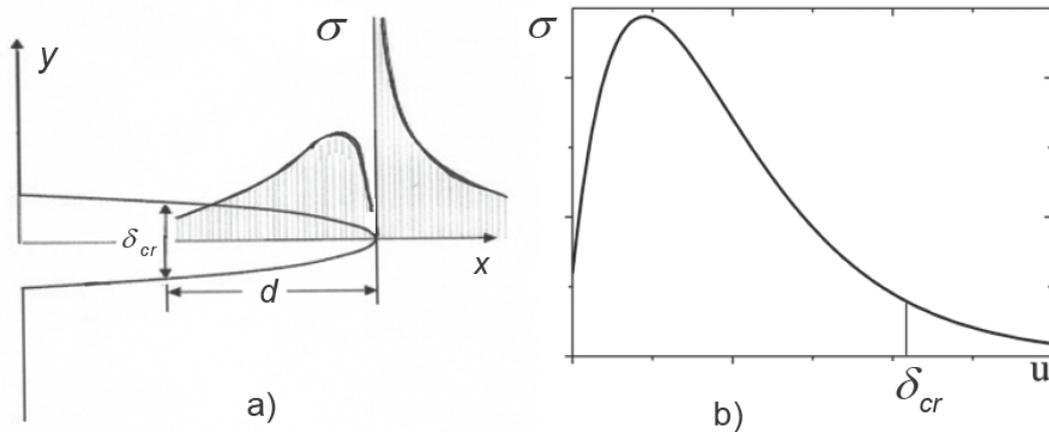


Рис. 1.4. **(а)** - Модель трещины со связями в концевой области; **(б)** - кривая деформирования связей в концевой области трещины

Таким образом, когезионная модель трещины является частным случаем модели трещины со связями в концевой области при $K_{Ic} = 0$ (рассмотрении когезионной кривой, соответствующей только одному масштабу взаимодействия между берегами трещины). В рамках когезионной модели трещины с когезионной кривой, состоящей из нескольких частей, для различных масштабов деформирования связей, моделирование является достаточно трудоемким, требующим при численном решении дискретизации разного масштаба в когезионной зоне, тогда как модель трещины со связями в концевой области, при некоторых допущениях, может быть успешно применена для решения таких задач. Преимуществом модели трещины со

связями в концевой области при учете сингулярности поля напряжений в её вершине является также возможность использования аппарата линейной механики разрушения и, соответственно, рассмотрения нелинейных процессов в концевой области трещины при решении задачи в линейной постановке.

Модель трещины со связями в концевой области широко применяется при оценке трещиностойкости различных видов композиционных материалов как искусственных [17, 86, 96–98], так и природного происхождения [99, 100]. Задачи, связанные с восстановлением поврежденных конструкций, также приводят к рассмотрению модели трещины со связями в концевой области [101, 102]. Новые направления применения модели трещины со связями в концевой области возникают при анализе эффективности композиционных материалов, содержащих специальные компоненты (например, капсулы со специальной “залечивающей жидкостью” или волокна, которые также могут содержать специальную жидкость или обладать эффектом памяти формы [103–105]), которые обеспечивают самовосстановление материала при образовании трещин [71, 74].

Далее в работе для трещин, расположенных на границе соединения различных материалов, используется обобщенная **модель трещины со связями в концевой области**. В рамках модели полагается, что концевая область трещины может содержать связи нескольких уровней, действующие на различных масштабах длины трещины. Для фиксированной длины трещины суммарный вклад в трещиностойкость связей всех уровней, кроме последнего, является постоянным, а область их действия является малой, по сравнению с размером трещины и областью действия связей последнего уровня. Термины “концевая область”, “силы сцепления” и “связи” далее относятся только к связям последнего уровня; коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины не полагаются равными нулю. При рассмотрении концевой области последнего уровня исходим из следующих допущений:

1) процесс разрушения локализован в концевой области трещины, которая является её частью и может быть сравнима с размером всей трещины (в частности, связи могут полностью заполнять трещину);

2) к берегам трещины в концевой области приложены распределенные силы сцепления (связи), зависящие от раскрытия трещины, в соответствии с законом деформирования связей, который определяется физической природой взаимодействия между берегами трещины и может изменяться при увеличении расстояния до ее вершины;

3) материал вне трещины полагается линейно-упругим, и деформация материала за вершиной трещины происходит совместно с волокнами (слоем адгезива) без нарушения его сплошности.

Исследование формирования и развития трещин в композиционных материалах и адгезионных соединениях на основе модели трещины со связями в концевой области состоит из следующих основных этапов:

1) формулировка модели концевой области трещины на границе соединения материалов, установление законов деформирования и кинетики связей между берегами трещины в концевой области;

2) анализ напряженно-деформированного состояния в концевой области и вблизи вершины трещины; определение коэффициентов интенсивности напряжений с учетом связей в концевой области трещины;

3) применение критерия развития трещины при учете возможности продвижения вершины трещины и края концевой области под действием внешних нагрузок и усилий, возникающих в связях.

Указанные этапы подробно рассмотрены далее в работе.

1.2. Коэффициенты интенсивности напряжений для трещин на границе соединения материалов

Первые решения задач для трещин, расположенных вблизи или на границе соединения изотропных материалов, получены в рамках линейной теории упругости в работах [106–112]. Для иллюстрации общих эффектов, возникающих при рассмотрении трещин на границе соединения материалов, запишем, следуя результатам работ [109, 110] и [113], решение двумерной задачи теории упругости для прямолинейной трещины, расположенной на линии соединения двух полуплоскостей из различных материалов $|x| \leq \ell, y = 0$ (см. рис. 1.5). На берегах трещины заданы граничные условия в напряжениях. Напряжения за вершиной трещины на линии соединения материалов ($|x| \geq \ell, y = 0$), при действии на удаленной границе равномерно распределенных растягивающих и сдвиговых напряжений σ_0, τ_0 (или напряжений берегах трещины $-\sigma_0, -\tau_0$), имеют вид:

$$\sigma_{yy}(x) + i\sigma_{xy}(x) = \left[-T \pm \frac{(x + 2\ell\beta i)}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left(\frac{x - \ell}{x + \ell} \right)^{i\beta} \right] (\sigma_0 + i\tau_0), \quad i^2 = -1, \quad (1.4)$$

где $T = 0$ при нагрузке на удаленной границе и $T = -1$ при нагрузке на поверхности трещины, верхний знак соответствует $x > \ell$, а нижний - $x < -\ell$. Разность компонент перемещений верхнего и нижнего берегов трещины при $x \leq \ell, y = 0$ (компоненты вектора раскрытия трещины, $u_{\infty x, y}$) определяются как:

$$u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x) = \frac{A}{4\text{ch}(\pi\beta)} \sqrt{\ell^2 - x^2} \left(\frac{\ell - x}{\ell + x} \right)^{-i\beta} (\sigma_0 - i\tau_0), \quad (1.5)$$

где $k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ или $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1 + \nu_{1,2})$ для плоской деформации или плоского напряженного состояния, соответственно, $\nu_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ -коэффициенты Пуассона и модули сдвига материалов подобластей 1 и 2,

$$A = \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \quad (1.6)$$

Параметр β в выражениях (1.4)-(1.5) определяет степень различия механи-

ческих свойств материалов подобластей:

$$\alpha = \frac{\mu_2 k_1 + \mu_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2}; \quad \beta = \frac{\ln \alpha}{2\pi} \quad (1.7)$$

Отметим, что для однородного тела и несжимаемых материалов $\beta = 0$, при изменении порядка следования материалов, знак β меняется на противоположный; наибольшей величины этот параметр достигает, если один из материалов абсолютно жесткий, а другой имеет нулевой коэффициент Пуассона ($\mu_2 \rightarrow \infty, \nu_1 = 0$) $\beta = \ln 3/2\pi \approx 0.175$.

Параметры α и β могут быть также выражены через параметры Дундурса, см. [114], где показано, что напряжения в теле, состоящем из двух изотропных материалов, зависят только от двух безразмерных параметров:

$$\omega = \frac{\mu_2(k_1 + 1) - \mu_1(k_2 + 1)}{\mu_2(k_1 + 1) + \mu_1(k_2 + 1)}, \quad \varepsilon = \frac{\mu_2(k_1 - 1) - \mu_1(k_2 - 1)}{\mu_2(k_1 + 1) + \mu_1(k_2 + 1)} \quad (1.8)$$

Используя второй параметр из (1.8) можно записать:

$$\alpha = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

Основным отличием решений (1.4)-(1.5) от решения аналогичной задачи в однородном теле является наличие осцилляций компонент напряжений и перемещений, частота которых неограниченно возрастает при приближении к краю трещины. Например, при действии только растягивающих напряжений σ_0 на удаленной границе, нормальные напряжения за вершиной трещины $x > \ell, y = 0$ имеют вид:

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} [x \cos \varphi - 2\beta \ell \sin \varphi], \quad \varphi = \beta \ln \left(\frac{x - \ell}{x + \ell} \right) \quad (1.9)$$

Осцилляции напряжений в (1.9) возникают при $|\varphi| < \pi/2$, что реализуется вблизи вершин трещины, $x \rightarrow \pm \ell$. Оценки длины зоны осцилляций дают $\delta = |\ell - x| \approx 10^{-4} \ell$ при наибольшем значении параметра $\beta = 0.175$ [109, 115, 116]. В реальных материалах ($\beta < 0.1$) эта зона значительно меньше и не превышает размера области пластического течения вблизи края трещины.

Составляющая раскрытия трещины по нормали к ее поверхности, при совместном действии растяжения и сдвига, имеет вид:

$$u_{\infty y}(x) = \frac{A \sqrt{x^2 - \ell^2}}{4\text{ch}(\pi\beta)} [\sigma_0 \cos \varphi - \tau_0 \sin \varphi], \quad \varphi = \beta \ln \left(\frac{\ell - x}{\ell + x} \right) \quad (1.10)$$

Если растяжение преобладает над сдвигом ($\sigma_0 > \tau_0$), то зоны осцилляций перемещений малы по сравнению с длиной трещины, и взаимопроникновением берегов трещины, обусловленным этим, можно пренебречь. Если же сдвиговая нагрузка велика ($\tau_0 \gg \sigma_0$), то зона взаимопроникновения берегов трещины (зона отрицательных значений $u_{\infty y}(x)$) существенно возрастает и достигает половины длины трещины, при действии только сдвиговой нагрузки ($\sigma_0 = 0$). В работах [108, 117] для исключения взаимопроникновения берегов трещины предложено вводить области контакта вблизи края трещины. Модели, основанные на этой идее, развиты в работах [118, 119] (см. также литературу, указанную в обзоре [120]). При действии внешних растягивающих нагрузок размеры контактных областей, получаемых в рамках этих моделей, малы, как и в исходной модели с осцилляцией перемещений. При совместном действии растяжения и сдвига у краев трещины образуются области, размеры которых сопоставимы с длиной трещины при преобладании сдвиговой нагрузки [121, 122]. Другой подход, позволяющий устранить некорректное поведение перемещений вблизи края трещины, основан на рассмотрении специального межфазного слоя между материалами [123, 124].

Количество аналитических или численно-аналитических решений задач о трещинах на границе соединения материалов крайне ограничено, причем всем решениям (за исключением задачи антиплоского сдвига) присущи осцилляции, подобные (1.9) и (1.10). Задачи в двумерной постановке рассмотрены в работах, указанных в начале этого раздела. Задача для полубесконечной трещины на границе соединения двух упругих слоев из различных материалов при действии растяжения и изгиба в плоскости рассмотрена в работе [125]. Решения осесимметричной задачи о дискообразной трещине на гра-

нице соединения изотропных материалов получены в работах [126–129] для механической и термической нагрузок, причем явные аналитические выражения получены только для распределений напряжений в малой окрестности края трещины и КИН. В трехмерной постановке задача о полубесконечной трещине рассматривалась в работе [130], а задача об эллиптической трещине на границе соединения материалов решена в работе [131] численно-аналитическим методом.

Взаимопроникновение берегов трещины вблизи вершины, полученное при решении задачи, исходя из линейной теории упругости, приводит к необходимости рассмотрения задачи в нелинейной постановке [113]. Решение задачи для трещины на границе соединения сред с различными механическими свойствами в рамках нелинейной теории упругости дает асимптотику напряжений без осцилляций вблизи вершины, а асимптотику перемещений, не имеющих осцилляций, - при определенных ограничениях, накладываемых на упругие постоянные соединенных материалов [132].

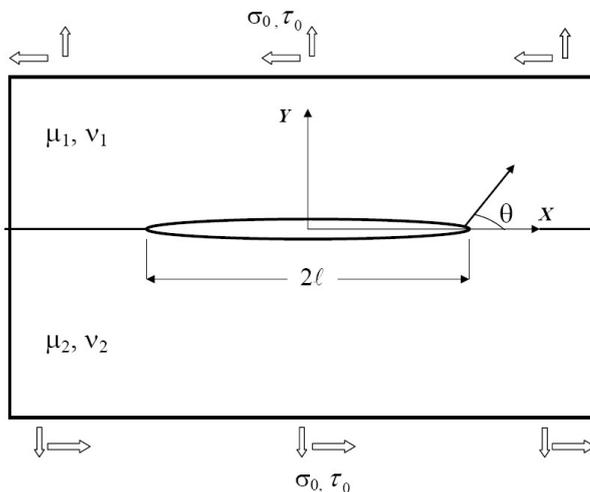


Рис. 1.5. Трещина на границе соединения материалов

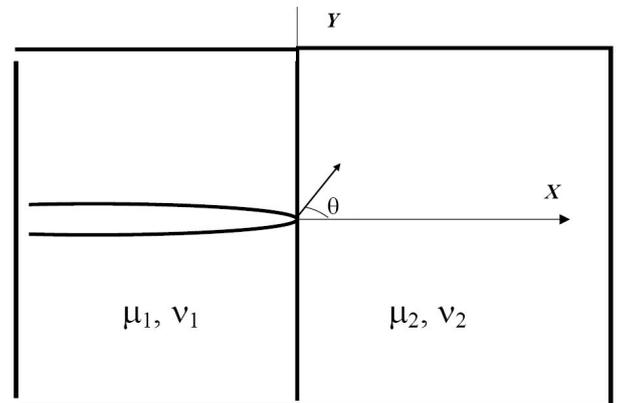


Рис. 1.6. Трещина, перпендикулярная границе соединения материалов

Коэффициенты интенсивности напряжений в вершине (вдоль фронта) трещины, используемые для описания процессов разрушения, определяются

как [133]:

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} f(r) \sigma_{jk}(r), \quad (1.11)$$

где r - расстояние по нормали до контура (края) трещины, $f(r) \rightarrow 0$ и $\sigma_{jk}(r)$ - соответствующая компонента тензора напряжений, стремящаяся к бесконечности при $r \rightarrow 0$.

Для однородного тела обычно выбирается $f(r) = \sqrt{2\pi r}$. Определение (1.11) для трещины на границе соединения материалов неприменимо, т.к. приводит к логарифмически бесконечным коэффициентам интенсивности напряжений.

Рассмотрим варианты выбора функции $f(r)$ для трещины на границе соединения материалов, позволяющие получить конечные значения КИН. В работах [111] и [115] функция выбирается в форме:

$$f(r) = C \sqrt{2\pi r} r^{-i\beta},$$

где $C = 1/\sqrt{\pi} ch(\pi\beta)$ (см. [111]) или $C = 1$, (используются обозначения работы [115]).

Выбор функции $f(r)$ в такой форме приводит к значениям КИН с размерностью вида МПа $\cdot \sqrt{\text{м}} \cdot \text{м}^{-i\beta}$, и, соответственно, КИН становится функцией выбранных единиц измерения, и понятие КИН теряет физический смысл.

Предложенный в [108, 117] выбор функции $f(r)$ в форме

$$f(r) = C \sqrt{2\pi r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-i\beta} \quad (1.12)$$

является более удобным, позволяющим получить КИН такой же размерности, как и в однородном теле. В (1.12) $C = 1$ (см. [108]) или $C = 1/ch(\pi\beta)$ (см. [134]), r_0 - характерный линейный размер задачи, см. анализ выбора этого параметра в работе [115].

При использовании функции $f(r)$ в виде (1.12) представления для асимптотических распределений напряжений у края плоской пространственной

трещины (первый член разложения) имеют вид [135]:

$$\sigma_{kj}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\operatorname{Re} \left(K \hat{r}^{i\beta} \right) \mathbf{H}_{kj}^I(\theta) + \operatorname{Im} \left(K \hat{r}^{i\beta} \right) \mathbf{H}_{kj}^{II}(\theta) + K_{III} \mathbf{H}_{kj}^{III}(\theta) \right], \quad (1.13)$$

где $k, j \equiv x, y, z$, $\hat{r} = r/r_0$, функции $\mathbf{H}_{kj}^{I,II}(\theta)$ определяют угловое распределение напряжений и зависят также от биупругой постоянной β , функция $\mathbf{H}_{kj}^{III}(\theta)$ совпадает с аналогичной функцией для антиплоского сдвига для однородного тела, K_{III} - КИН для случая аниплоского сдвига, определяется так же, как для однородного тела.

Комплексный КИН в (1.13) определяется как

$$K = K_I + iK_{II} \quad (1.14)$$

При $\theta = 0$ (см. рис. 1.5) напряжения на линии соединения областей можно представить в виде:

$$\sigma_{yy}(r) + i\sigma_{xy}(r) = \frac{(K_I + iK_{II})}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-i\beta}, \quad \sigma_{yz}(r) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (1.15)$$

где $\sigma_{yy}(r)$, $\sigma_{xy}(r)$ - растягивающие и сдвиговые напряжения на продолжении трещины, напряжения $\sigma_{yz}(r)$ соответствуют антиплоскому сдвигу.

При таком определении КИН значения $K_{I,II}$ зависят от выбора параметра r_0 .

Отметим также, что модуль КИН

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (1.16)$$

не зависит от выбора формы представления функции $f(r)$.

При $r_0 = 2\ell$ для рассмотренной задачи о прямолинейной трещине на границе соединения материалов КИН определяется так [115]:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \left(\sigma_{yy}(r) + i\sigma_{xy}(r) \right) \left(\frac{r}{2\ell} \right)^{-i\beta}, \quad (1.17)$$

где $\sigma_{yy}(r)$, $\sigma_{xy}(r)$ -напряжения на продолжении трещины (см. (1.4)), 2ℓ - длина трещины, $r = x - \ell$ - расстояние до вершины трещины, $x \geq \ell$.

Полагая в (1.4) $x = r + \ell$, подставляя это выражение в (1.17) и переходя к пределу, получаем:

$$K_I + iK_{II} = (\sigma_0 + i\tau_0)(1 + 2i\beta) \sqrt{\pi \ell}, \quad (1.18)$$

откуда следует, что

$$K_I = (\sigma_0 - 2\beta\tau_0) \sqrt{\pi \ell}, \quad K_{II} = (2\beta\sigma_0 + \tau_0) \sqrt{\pi \ell} \quad (1.19)$$

Здесь проявляется общий для трещин на границе соединения материалов эффект - оба КИН, K_I и K_{II} , зависят как от нормальной, так и от касательной нагрузок.

Раскрытие у края плоской пространственной трещины (разность перемещений поверхностей трещины при $\theta = \pm\pi$) имеет вид [135]:

$$\Delta u_y(r) + i\Delta u_x(r) = \frac{A(K_I + iK_{II})}{2(1 + 2i\beta) \operatorname{ch}(\pi\beta)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{i\beta}, \quad (1.20)$$

$$\Delta u_z(r) = 2BK_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \quad B = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \quad (1.21)$$

Выражения (1.20) и (1.21) используются в разделе 2.3.2 для вычисления модуля КИН на границе соединения материалов.

Для оценки относительной величины растягивающих и сдвиговых напряжений на границе соединения материалов используются фазовые углы, определяемые как [135, 136]:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{K_{II}}{K_I}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{K_{III}}{K_I} \quad (1.22)$$

Отметим, что, как и КИН, углы ψ и φ зависят от выбора величины r_0 .

Для трещин, расположенных на границе соединения анизотропных материалов, асимптотическое поведение перемещений и напряжений вблизи края трещины подобно (1.13), (1.20) и (1.21) с соответствующим учетом анизотропии свойств материалов [137–139].

Взаимодействие трещины с границей соединения материалов тесно связано с изучением торможения трещины на границе раздела сред. Задача о полубесконечной трещине, расположенной перпендикулярно границе соединения материалов, с нагрузкой, нормальной ее поверхности, впервые рассмотрена в работе [140], где получена асимптотика напряжений на продолжении трещины. Аналогичная задача для трещины конечной длины рассмотрена в работе [141]. Распределение напряжений за вершиной трещины (рис. 1.6) определяется выражением:

$$\sigma_{kj}(r, \theta) = Hr^{-\lambda} f_{kj}(r, \theta, \lambda, \omega, \varepsilon), \quad (1.23)$$

где $k, j = x, y$, $0 < \lambda < 1$ - показатель асимптотики напряжений, функции f_{kj} определяют угловое распределение напряжений, ω, ε - параметры Дундурса (см.(1.8)), H - КИН с размерностью, связанной с параметром λ , который определяется из решения трансцендентного характеристического уравнения и зависит от граничных условий задачи и соотношений между упругими характеристиками сопряженных тел. Если материал тела с трещиной более жесткий, чем соседний, то $0.5 < \lambda < 1$, в противном случае $0 < \lambda < 0.5$, [142]. В зависимости от свойств материалов возможны различные сценарии развития трещины: развитие по границе соединения материалов, прохождение в сопряженную среду или торможение трещины. Анализ различных конфигураций трещин, выходящих на границу соединения материалов, и критериев их развития выполнен в [143–146].

Если на тело с трещиной действует как внешняя нагрузка, так и нагрузка на берегах трещины, то напряжения на продолжении трещины в двумерном случае определяются, в предположении линейности задачи, так:

$$\sigma_{yy}(\delta) + i\sigma_{xy}(\delta) = \left(\sigma_{yy}^{ext}(\delta) + \sigma_{yy}^{int}(\delta) \right) + i \left(\sigma_{xy}^{ext}(\delta) + \sigma_{xy}^{int}(\delta) \right), \quad (1.24)$$

где $\sigma_{yy,xy}^{ext}(\delta)$ - напряжения на продолжении трещины от действия внешних нагрузок (например, σ_0 и τ_0), $\sigma_{yy,xy}^{int}(\delta)$ - напряжения на продолжении трещины от действия напряжений, приложенных на берегах трещины.

Исходя из (1.17) и (1.24), получаем:

$$K_I + iK_{II} = (K_I^{ext} + K_I^{int}) + i(K_{II}^{ext} + K_{II}^{int}), \quad (1.25)$$

где $K_{I,II}^{ext}$ - КИН от действия внешних напряжений, $K_{I,II}^{int}$ - КИН от действия напряжений, действующих на берегах трещины. Для однородного тела при растягивающей нагрузке из (1.25) следует известный результат [14]:

$$K_I = K_I^{ext} + K_I^{int} \quad (1.26)$$

Ввиду ограниченной возможности применения аналитических методов, для решения задач с трещинами на границе соединения материалов (расчета полей напряжений и перемещений вблизи трещины и определения КИН) широко используются численные методы, см. например [147, 148] и цитированную там литературу.

1.3. Модель концевой области трещины на границе соединения материалов

Когезионные модели концевой области трещины, расположенной на границе соединения материалов, рассматривались для различных законов деформирования связей в ряде работ: в [89, 149, 150] напряжения в концевой области полагались постоянными и не зависящими от раскрытия трещины (задача рассматривалась в рамках модели Дагдейла [15]); в работах [81, 151] и [90] рассматривались трапециевидная и билинейная зависимости между напряжениями в связях и раскрытием трещины в предположении малой концевой области; полиномиальные феноменологические кривые деформирования адгезионных связей рассматривались в работах [152–154]. Отметим, что модели трещины на границе соединения материалов со связями в концевой области, при учете сингулярности напряжений в вершине трещины, не рассматривались.

Рассмотрим трещину, расположенную на границе (в общем случае криволинейной) соединения материалов (рис. 1.7) и выделим часть трещины длины d , примыкающую к её вершине (концевую область трещины), в которой поверхности трещины взаимодействуют, так что это взаимодействие сдерживает раскрытие трещины. Опишем взаимодействие берегов трещины в рамках механической модели, не выделяя конкретных причин взаимодействия. Ввиду различия упругих свойств соединенных материалов в связях

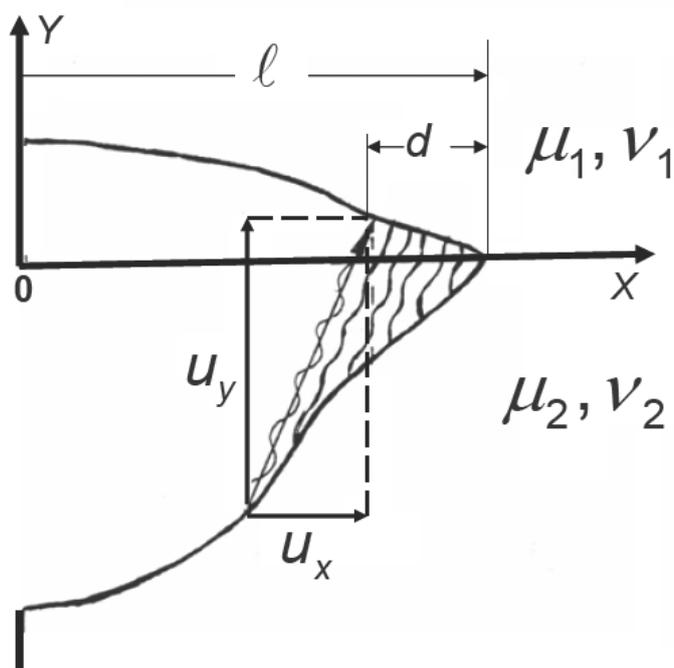


Рис. 1.7. Трещина со связями в концевой области, на границе соединения материалов

между берегами трещины, возникают, даже при одноосном растяжении, усилия $Q(x)$, имеющие нормальную $q_y(x)$ и касательную $q_x(x)$, составляющие:

$$Q(x) = q_y(x) - iq_x(x) \quad (1.27)$$

К берегам трещины приложены нормальные и касательные напряжения численно равные $q_y(x)$ и $q_x(x)$, соответственно.

Учитывая характерную для трещин на границе соединения материалов зависимость раскрытия трещины от расстояния до вершины трещины и биупругой постоянной β (см. (1.5))

$$u_{\infty,x,y}(x) \sim \left(\frac{\ell - x}{\ell + x} \right)^{-i\beta}, \quad (1.28)$$

представим усилия $Q(x)$ в концевой области трещины в форме:

$$Q(x) = q_y(x) - iq_x(x) = (p_y(x) - ip_x(x)) \left(\frac{\ell - x}{\ell + x} \right)^{-i\beta}, \quad (1.29)$$

где функции $p_{y,x}$ будут являться неизвестными при анализе напряженно-деформированного состояния в концевой области (см. раздел 2.1), а выражение

$$\sigma(x) = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (1.30)$$

определяет модуль вектора усилий в связях $\sigma(x)$.

Компоненты раскрытия трещины, расположенной на границе между двумя различными материалами, $u(x, 0) \equiv u(x)$ запишем по аналогии с выражением (1.27):

$$u(x) = u_y(x) - iu_x(x), \quad (1.31)$$

где $u_{y,x}(x)$ - проекции раскрытия трещины на оси координат OX и OY (рис. 1.7).

Соотношение, связывающее компоненты раскрытия трещины и усилия в связях (закон деформирования связей), представим, без потери общности, в форме квазилинейных зависимостей:

$$u_y(x) - iu_x(x) = c_y(x, \sigma)q_y(x) - ic_x(x, \sigma)q_x(x), \quad (1.32)$$

где функции $c_{y,x}(x, \sigma)$ можно рассматривать как эффективные податливости связей, зависящие от положения связи вдоль концевой области.

Эффективные податливости связей в (1.32) определяются из соображений размерности так:

$$c_{y,x}(x, \sigma) = \gamma_{1,2}(x, \sigma) \frac{H}{E_b}, \quad (1.33)$$

где $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$ - безразмерные функции, H - линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов, E_b - эффективный модуль упругости связей.

Отметим, что, при постоянных значениях функций $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$, выражение (1.33) является линейно-упругим законом деформирования связей, одинаковым для всех точек концевой области трещины. Зависимость функций $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$ от координаты вдоль концевой области трещины соответствует переменной податливости связей. Зависимость этих функций от усилий в связях возникает при нелинейном законе деформирования связей (см. раздел 2.2.2). Отметим также, что рассмотрение различных моделей концевой области трещины приводит к необходимости введения, кроме длины концевой области, дополнительного линейного размера (H - в данном случае), характеризующего жесткость связей в концевой области трещины [78, 155–157]. Функциональную зависимость между модулем вектора раскрытия трещины (раскрытием трещины)

$$U(x) = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad (1.34)$$

и модулем вектора усилий в связях (1.30) можно представить в форме:

$$U(x) = c(x, \sigma)\sigma(x), \quad (1.35)$$

где $c(x, \sigma)$ - приведенная жесткость связей, определяемая выражением:

$$c(x, \sigma) = \frac{\sqrt{(c_x q_x)^2 + (c_y q_y)^2}}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \quad (1.36)$$

В рассматриваемой модели размер концевой области трещины d не предполагается малым по сравнению с длиной трещины, а усилия в связях $q_{y,x}(x)$ зависят как от принятого закона деформирования связей, так и от размера концевой области и подлежат определению из решения краевой задачи, при заданной внешней нагрузке и известном законе деформирования связей.

Представленное выше описание взаимодействия берегов трещины на границе соединения материалов позволяет рассматривать широкий круг кривых деформирования для различных материалов.

Кривые деформирования связей между берегами трещины, как правило, нелинейны, содержат начальный участок квазилинейного деформирования и

один или несколько участков разупрочнения, возникающего после достижения предельной нагрузки, а площадь под кривой деформирования связей пропорциональна работе разрушения (определяет вклад связей между берегами трещины в трещиностойкость материала). Использование в расчетных исследованиях таких зависимостей, полученных экспериментально, позволяет обосновано прогнозировать трещиностойкость соединений материалов. Экспериментальное определение кривых деформирования связей для конкретных пар материалов на основе прямых и непрямых методов измерений является достаточно трудоемким [158–162]. Возможен также комбинированный подход к получению таких кривых с определением вида функциональной зависимости между раскрытием трещины и усилиями в связях для некоторых групп или пар материалов, исходя из физической модели [57, 163, 164] или феноменологически [81, 151, 152]. Для описания характерных точек таких кривых используются параметры связей, получаемые экспериментально. Варианты кривых деформирования связей такого типа рассмотрены ниже.

1.3.1. Адгезионное соединение полимеров

Значительное повышение прочности адгезионного соединения различных полимеров происходит при использовании в качестве промежуточного слоя между ними специальных полимерных материалов, химически совместимых с каждым из них [165–167]. Молекулы такого молекулярного “клея” проникают в соединяемые материалы и образуют связи, значительно повышающие прочность соединения. При наличии на границе соединения полимеров зоны ослабленных связей или трещины, такие связи заполняют концевую область трещины. Для получения закона деформирования связей в концевой области трещины при квазистатическом нагружении используем подход, предложенный в [167] для связей, образованных пучками молекул полимера со степенью полимеризации N и размером мономерного звена

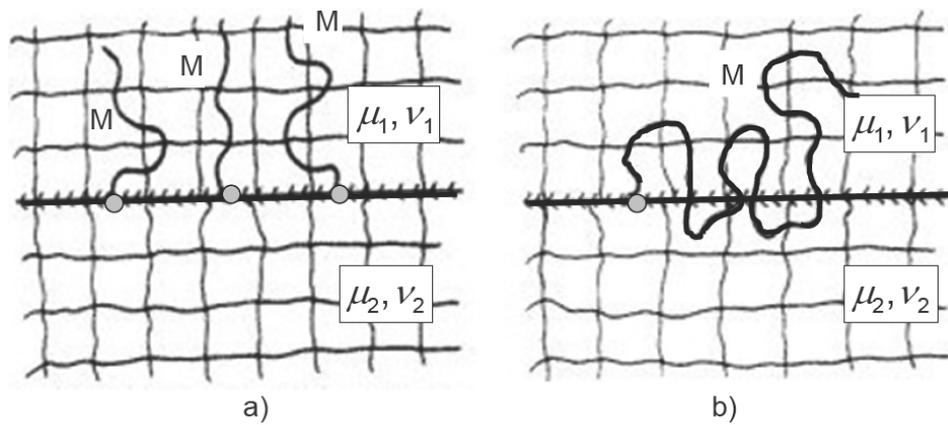


Рис. 1.8. (а) - Однозвенные и (б) - многозвенные связи, образованные молекулами (M) соединительного слоя

a_0 . Будем полагать, что связи деформируются упруго до определенной величины напряжения σ_m и соответствующего этому напряжению раскрытия трещины u_m . При раскрытии трещины $U \geq u_m$ закон деформирования связей становится нелинейным и напряжения в связях при $\sigma \leq \sigma_m$ уменьшаются. Молекулы промежуточного слоя могут образовывать между соединяемыми полимерами, по терминологии [167], однозвенные и многозвенные связи (см. рис. 1.8).

Обозначим число однозвенных связей на единицу поверхности соединения материалов (плотность связей) R_1 , а плотность многозвенных связей - R_2 . В общем случае возможно присутствие обоих типов связей. Сегмент полимерной цепи между материалами деформируется упруго до тех пор, пока действующая на него растягивающая сила f не достигнет критической величины

$$f^* = \frac{kT}{a_0}, \quad (1.37)$$

где k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура.

При $f \leq f^*$ напряжение в связях σ прямо пропорционально раскрытию трещины U (κ - жесткость связей):

$$\sigma = \kappa U \quad (1.38)$$

При $f = f^*$ начинается процесс вытягивания связей из материала. За-

висимость напряжений в связях от раскрытия трещины запишем, исходя из уравнения (4.1) работы [167],

$$\sigma(u) = \sigma_1^* + \frac{\sigma_2^*}{(1 + \xi)^2}, \quad \xi = \frac{U - u_m}{h^*}, \quad (1.39)$$

где $h^* = a_0 \sqrt{N}$, σ_1^* и σ_2^* критические напряжения начала вытягивания связей из материала, определяемые как

$$\sigma_1^* = f^* R_1, \quad \sigma_2^* = f^* R_2 \sqrt{N} \quad (1.40)$$

Из (1.38) и (1.40) следует, что критическое напряжение, при котором происходит изменение характера деформирования связей, определяется выражением

$$\sigma(u_m) = \sigma_m = \sigma_1^* + \sigma_2^*, \quad (1.41)$$

а раскрытие трещины, соответствующее изменению характера деформирования связей,

$$u_m = \frac{\sigma_m}{\kappa} \quad (1.42)$$

Оценим жесткость связей κ , образованных пучками полимерных молекул. Пусть f_{cr} - сила, необходимая для разрыва полимерной цепи, а $u_{cr} \sim \vartheta a_0$ - критическое удлинение мономерного звена при разрыве ($\vartheta \leq 1$). Тогда полное удлинение полимерной цепи

$$u_{cr}^* \sim N u_{cr} \sim \vartheta N a_0 \quad (1.43)$$

Жесткость полимерной цепи определяется как:

$$S_1 = \frac{f_{cr}}{u_{cr}^*} \cong \frac{f_{cr}}{\vartheta N a_0} \quad (1.44)$$

Другая оценка жесткости полимерной цепи следует из энергетических соображений [168]:

$$S_2 = \frac{3kT}{N a_0^2} \quad (1.45)$$

Критическая сила для разрыва полимерной цепи составляет $f_{cr} \approx 1 \cdot 10^{-9}$ Н [169]. При $a_0 \sim 0.5 \cdot 10^{-9}$ м, $N = 400$ и $T = 400^\circ\text{K}$ и $\vartheta = 1$ (оценка по верхней границе) получаем $S_1 = 0.5 \cdot 10^{-2}$ Н/м и $S_2 = 0.55 \cdot 10^{-4}$ Н/м. Можно полагать, что фактическая жесткость полимерной цепи S изменяется в интервале

$$S_2 < S < S_1$$

Удельная жесткость связей κ (жесткость на единицу площади поверхности), необходимая в (1.38),

$$\kappa = SR, \quad R = R_1 + R_2 \sqrt{N} \quad (1.46)$$

где R - плотность связей на участке соединения материалов до начала выдерживания связей.

В модели концевой области трещины, рассмотренной в разделе 1.3, податливость связей определяется выражением (см. (1.33) при $\gamma_{1,2} = 1$):

$$c_{x,y} = \frac{H}{E_b} \quad (1.47)$$

Из выражений (1.46) и (1.47) получаем оценку для эффективного модуля упругости связей:

$$E_b = SH(R_1 + R_2 \sqrt{N}) \quad (1.48)$$

Величина раскрытия трещины, соответствующая изменению закона деформирования связей, определяется так:

$$u_m = \frac{f^*}{S} \quad (1.49)$$

Рассмотрим оценки параметра H , связанного с толщиной зоны неоднородности на границе соединения полимерных материалов. Толщина слоя неоднородности на границе соединения плохо смешиваемых полимеров со степенями полимеризации $N_1 \approx N_2 \approx N$ определяется как [168, 169]:

$$\omega_1 = 2a_0 \sqrt{\frac{N}{6}}$$

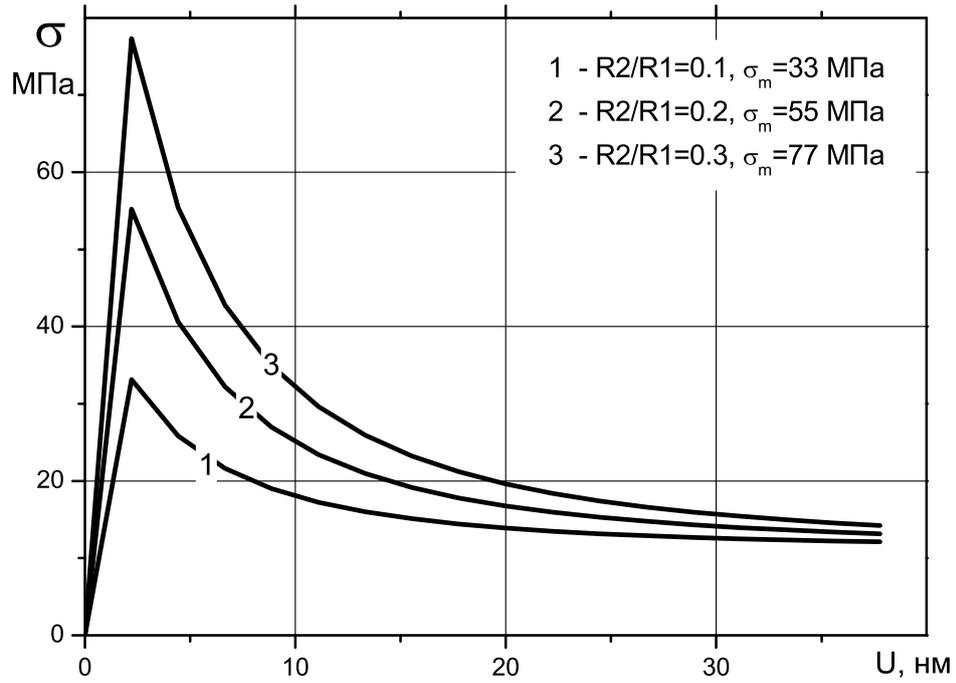


Рис. 1.9. Кривые деформирования многозвенных связей в концевой области трещины, $u_m = 2.21$ нм, $S = 0.005$ Н/м, $T = 400$ К

При наличии промежуточного слоя полимера-усилителя адгезии толщина слоя неоднородности может возрасти до величины $\omega_2 \cong a_0 N$. Ввиду этого, принимаем эту верхнюю границу в качестве оценки величины параметра H

$$\omega_1 < H \cong a_0 N$$

Получим оценки модуля упругости связей при заданных значениях плотностей связей $R_1 = 1 \cdot 10^{18}$ м⁻², $R_2 = 0.1 R_1$ [170]. При заданных выше параметрах полимерной цепи и жесткости связей, определяемых выражениями (1.44) и (1.45), получаем:

$$E_{2b} < E_b < E_{1b},$$

где $E_{1b} = 1.1 \cdot 10^9$ Па, $E_{2b} = 1.2 \cdot 10^7$ Па. Отметим, что величина E_{1b} близка к модулю упругости однородного полимера.

В итоге, кривые деформирования связей определяются выражением:

$$\sigma(U) = \begin{cases} \frac{f_{cr}}{\vartheta N a_0} (R_1 + R_2 \sqrt{N}) U, & U < u_m \\ f^* \left(R_1 + \frac{R_2 \sqrt{N}}{\left(1 + \frac{U - u_m}{h^*}\right)^2} \right), & U \geq u_m \end{cases} \quad (1.50)$$

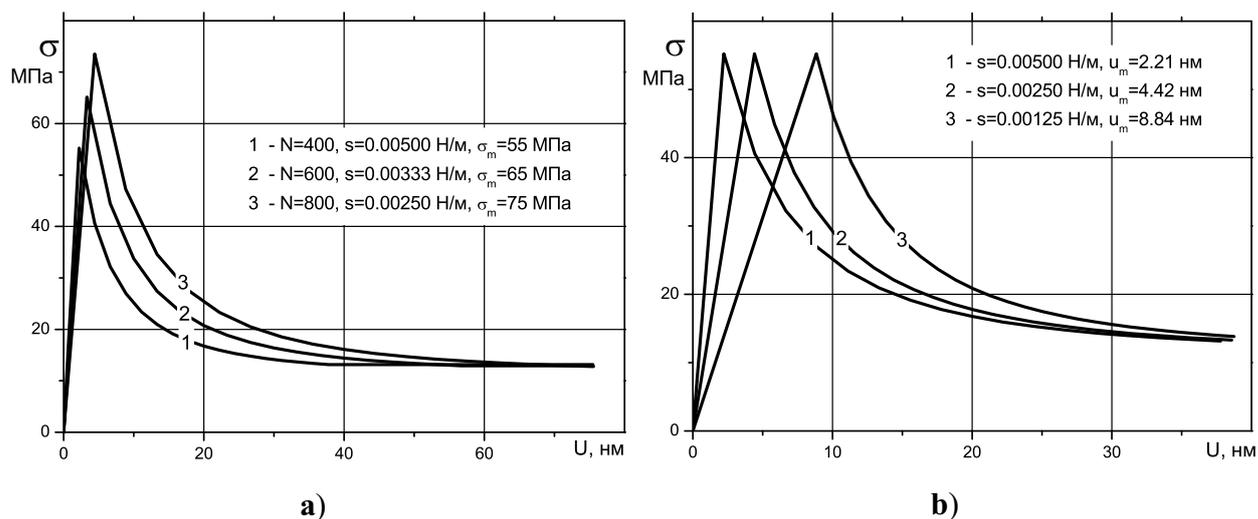


Рис. 1.10. Кривые деформирования многозвенных связей, **(а)** - изменение степени полимеризации; **(б)** - изменение жесткости связи, $T = 400\text{K}$

Рассмотрим кривые деформирования связей в концевой области трещины, на границе соединения материалов, полученные на основе рассмотренной выше модели, при следующих значениях исходных данных: 1) $T = 400^\circ\text{K}$ - температура материалов; 2) $R_1 = 1 \cdot 10^{18}\text{м}^{-2}$ - плотность однозвенных связей на единицу площади поверхности; 3) $\alpha = R_2/R_1 = 0.1; 0.2; 0.3$ - относительная плотность многозвенных связей на границе соединения материалов; 4) $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-9}\text{м}$ - размер мономерного звена молекулы полимера; 5) $f_{cr} = 1 \cdot 10^{-9}\text{Н}$. Жесткость полимерной цепи оценивалась по верхней границе из выражения (1.44). В этом случае раскрытие трещины u_m , соответствующее изменению закона деформирования связей (см. (1.42)), можно представить как

$$u_m = \frac{f^*}{f_{cr}} N a_0 \quad (1.51)$$

Кривые деформирования связей для $N = 400$ (жесткость связей $\kappa = 0.005\text{Н/м}$) приведены на рис.1.9. Параметр u_m при фиксированном значении степени полимеризации постоянен, а жесткость связей и предельная величина упругих напряжений возрастают при увеличении числа многозвенных связей (см. (1.40)). Кривые деформирования связей при фиксированном количестве многозвенных связей ($\alpha = 0.2$) и различных степенях полимери-

зации (следовательно, различной жёсткости связей) приведены на рис.1.10а. Увеличение степени полимеризации N приводит к уменьшению жесткости связей на линейно-упругом участке деформирования, возрастанию предельных напряжений в связях и увеличению предельного раскрытия трещины u_m . Уменьшение жесткости полимерной цепи S , при соответствующем уменьшении величины f_{cr} (при $N = 400, \alpha = 0.2$), приводит к возрастанию участка линейно-упругого деформирования связей при постоянной величине максимальных упругих напряжений σ_m , (см. рис.1.10b). При $U \rightarrow \infty$ все связи становятся однозвенными и напряжение в связях стремится в величине $\sigma_1^* = f^* R_1$.

Полученные кривые использованы для анализа зависимости трещиностойкости адгезионного соединения полимеров на модели трещины с концевой областью (см. главу 5).

1.3.2. Композиционные материалы, армированные волокнами

Механические свойства армированных композиционных материалов зависят, в первую очередь, от величины контактного взаимодействия между материалом-матрицей и армирующими элементами. В традиционных композиционных материалах средние размеры армирующих элементов обычно превышают (1 – 10) мкм. В нанокompозитах по крайней мере один из характерных размеров армирующих элементов имеет порядок нанометров.

Исследованию контактной прочности на границе волокна и матрицы в композиционных материалах посвящено значительное количество работ, в большинстве которых используется с различными модификациями модель сдвиговой прочности, предложенная в [171, 172]. В этой модели рассматривается нагружение образца нормальными напряжениями, которые передаются волокнам посредством сдвиговых напряжений, возникающих на границе соединения волокон и матрицы. При анализе взаимодействия между берегами трещины в армированном волокнами композиционном материале

установлено [164, 173], что напряжение в волокне $\sigma(u)$, соответствующее раскрытию трещины в концевой области u , определяется, при постоянной величине сдвиговых напряжений между волокном и матрице, как

$$\sigma(u) \sim \sqrt{u}$$

Уменьшение размеров армирующего наполнителя до нанодиапазона приводит к существенному повышению удельной поверхности взаимодействия между наполнителем и матрицей, к изменению характера их взаимодействия от макроуровня к молекулярному уровню и, соответственно, увеличению адгезии. Например, использование углеродных нанотрубок в качестве наполнителя в матрице позволяет получить высокопрочные нанокомпозиты с хорошим адгезионным взаимодействием между нанотрубками и полимером [174]. Для улучшения адгезионного взаимодействия между нанотрубками и матрицей возможно применение специальной химической обработки поверхности нанотрубок (функционализации) [175, 176]. Передача сдвигового напряжения к нановолокнам происходит в некотором пограничном слое, соединяющем нановолокно и окружающую его матрицу, причем граничные сдвиговые напряжения изменяются вдоль оси нановолокна. Результаты численного моделирования методом молекулярной динамики выдергивания углеродной нанотрубки из полимерной матрицы [177, 178], а также результаты аналогичных экспериментов [179], подтверждают это предположение.

Ниже рассматривается механическая модель взаимодействия между нанотрубками и матрицей в предположении, что зона адгезионного взаимодействия нанотрубок и матрицы представляет собой тонкий промежуточный слой между этими фазами, который обладает сопротивлением только по отношению к действию сдвиговых напряжений и имеет заданную кривую деформирования. Напряженно-деформированное состояние нанотрубки и слоя на границе соединения нанотрубки и матрицы рассматривается как одноосное при следующих допущениях:

1) нанотрубка представляет собой цилиндрическое волокно с прямолинейной осью длины L_c , погруженное в матрицу;

2) смещения вдоль оси нанотрубки при действии внешних нагрузок вдоль этого направления много больше остальных компонент смещений нанотрубки и матрицы;

3) между нанотрубкой и матрицей имеется промежуточный соединительный слой, который обладает сопротивлением только по отношению к действию сдвиговых напряжений.

Полагая, что сдвиговые напряжения в промежуточном слое зависят от толщины этого слоя (H_1) и осевого смещения нанотрубки (u), запишем

$$\tau_i = \kappa_1 f(u), \quad \kappa_1 = \frac{G_1}{H_1}, \quad (1.52)$$

где $f(u)$ заданная функция осевых смещений нанотрубки, G_1 - модуль сдвига промежуточного слоя. Примем, в первом приближении, что на начальном

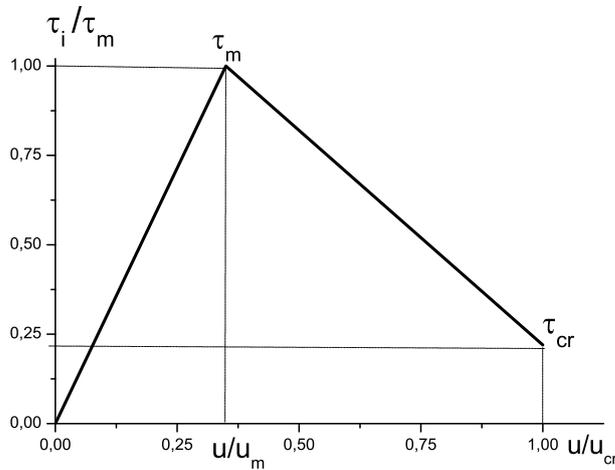


Рис. 1.11. Билинейная кривая деформирования промежуточного слоя

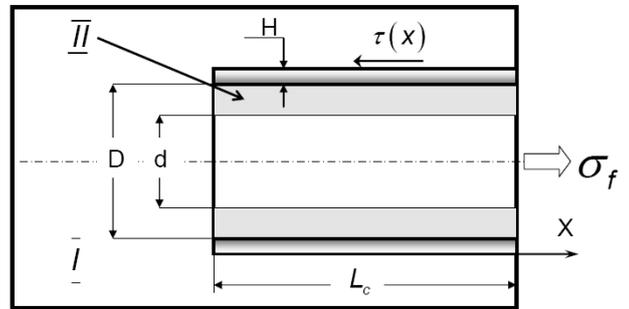


Рис. 1.12. Нанотрубка (II) в матрице (I) под действием внешней нагрузки σ_f и сдвигового напряжения $\tau(x)$, H - толщина промежуточного слоя, D и d - внешний и внутренний диаметры нанотрубки

этапе деформирования ($u \leq u_m$) сдвиговые напряжения пропорциональны осевым смещениям нанотрубки:

$$\tau_i = \kappa_1 u, \quad \kappa_1 = \frac{\tau_m}{u_m} = \frac{G_1}{H_1}, \quad (1.53)$$

где u_m , τ_m - параметры, определяющие изменение формы кривой деформирования слоя.

Если же сдвиговые напряжения в промежуточном слое τ_i превосходят заданную величину $\tau_m = \kappa_1 u_m$, то закон деформирования (1.53) изменяется и определяется уравнением:

$$\tau_i = \tau_2 \pm \kappa_2 u, \quad \kappa_2 = \frac{G_2}{H_2}, \quad (1.54)$$

где H_2 и G_2 - толщина и модуль сдвига промежуточного слоя на участках упрочнения (знак + в (1.54)) или разупрочнения кривой деформации промежуточного слоя, τ_2 - постоянная, зависящая от жесткости промежуточного слоя, $u_m < u \leq u_{cr}$, отслоение нанотрубки от матрицы происходит, если смещение оси нанотрубки достигает критической величины u_{cr} (см. рис.1.11).

Закон деформирования промежуточного слоя запишем, исходя из уравнений (1.52) -(1.54),

$$\tau_i(x) = \begin{cases} \kappa_1 u(x), & 0 < u(x) \leq u_m \\ \tau_2 \pm \kappa_2 u(x), & u_m < u(x) \leq u_{cr}, \\ 0 & u(x) > u_{cr} \end{cases} \quad (1.55)$$

где

$$\tau_2 = u_m (\kappa_1 \mp \kappa_2), \quad \kappa_1 = \frac{G_1}{H_1} = \frac{\tau_m}{u_m}, \quad \kappa_2 = \frac{G_2}{H_2} = \frac{|\tau_{cr} - \tau_m|}{u_{cr} - u_m}. \quad (1.56)$$

Здесь величина u_{cr} - критическое удлинение оси нанотрубки, $\kappa_{1,2}$ - сдвиговые жесткости на участках упрочнения/разупрочнения кривой деформирования. Если толщина промежуточного слоя между нанотрубкой и матрицей является переменной, то сдвиговая жесткость изменяется вдоль оси нанотрубки. В зависимости от значений величин τ_m и τ_{cr} можно рассматривать деформирование, сопровождающееся разупрочнением ($\tau_{cr} < \tau_m$), нижние знаки в (1.55) -(1.56), или упрочнением ($\tau_{cr} > \tau_m$), верхние знаки в (1.55)-(1.56), см. рис.1.11. Упруго-пластическому промежуточному слою между волокном и матрицей соответствует $\kappa_2 = 0$ в (1.55). Механическая модель нанотрубки

в матрице приведена на рис.1.12. Уравнение равновесия бесконечно малого элемента нанотрубки dx при действии нормальных напряжений $\sigma(x)$ в сечении нанотрубки и касательных напряжений $\tau_i(x)$ в промежуточном слое имеет вид:

$$0.25\pi(D^2 - d^2) \frac{d\sigma(x)}{dx} = \pi D \tau_i(x), \quad (1.57)$$

где D , d - внешний и внутренний диаметры нанотрубки (см. рис.1.12).

Полагая, что осевая деформация нанотрубки не превышает пределов линейной упругости, имеем:

$$\sigma(x) = E_f \frac{du(x)}{dx}, \quad (1.58)$$

где E_f - модуль упругости нанотрубки.

Рассмотрим случай кусочно-постоянной сдвиговой жесткости промежуточного слоя. Подставляя уравнения (1.55) и (1.58) в уравнение равновесия (1.56), принимая во внимание закон изменения сдвигового напряжения вдоль оси нанотрубки, а также возможность отслоения нанотрубки и матрицы, получим систему дифференциальных уравнений для определения осевых смещений нанотрубки:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dx^2} - \beta_1^2 u_1 = 0, & 0 < x \leq x_m \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} \mp \beta_2^2 u_2 = R_2, & x_m < x \leq x_{cr} \\ \frac{d^2 u_3}{dx^2} = 0, & x_{cr} < x \leq L_c \end{cases} \quad (1.59)$$

где

$$\beta_{1,2} = \frac{2\delta \sqrt{\mu_{1,2}}}{D}, \quad \mu_{1,2} = \frac{G_{1,2}}{E_f} \frac{D}{H_{1,2}}, \quad R_2 = \frac{4\tau_2 \delta^2}{E_f D}, \quad \delta = \frac{D}{\sqrt{D^2 - d^2}} \quad (1.60)$$

Параметр x_m в (1.59) является координатой точки на оси нанотрубки, в которой закон деформирования промежуточного слоя меняется, согласно уравнению (1.53), а параметр x_{cr} аналогичным образом определяет положение места начала отслоения.

Система дифференциальных уравнений (1.59) имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{-\beta_1 x} & (a) \\
 \begin{cases} u_2(x) = N_1 e^{\beta_2 x} + N_2 e^{-\beta_2 x} - \frac{R_2}{\beta_2^2}, & \tau_{cr} > \tau_m & (b) \\ u_2(x) = N_1 \sin(\beta_2 x) + N_2 \cos(\beta_2 x) + \frac{R_2}{\beta_2^2}, & \tau_{cr} < \tau_m & (c) \end{cases} & (1.61) \\
 u_3(x) &= M_1 + M_2 x & (d)
 \end{aligned}$$

Коэффициенты $C_{1,2}$, $N_{1,2}$ и $M_{1,2}$ зависят от граничных условий и дополнительных условий в точках смены закона деформирования промежуточного слоя. Полагая, что, при действии внешних нагрузок, заданных в виде напряжений или смещений, происходит отрыв нанотрубки в сечении $x = 0$ на расстоянии L_c от места приложения нагрузки, можно рассмотреть различные виды граничных условий для решения системы (1.61) [51]. Свободное от нагрузки после отрыва концевое сечение нанотрубки ($x = 0$) соответствует заданным напряжениям (т.е. $\sigma(x)|_{x=0} = 0$). Можно рассмотреть также другие, соответствующие отрыву, граничные условия на конце нанотрубки $x = 0$: а) условие критической деформации, или б) условие критического удлинения нанотрубки в предельном состоянии. На противоположном конце рассматриваемого участка нанотрубки ($x = L_c$) могут быть также рассмотрены два типа граничных условий: а) силовое условие, соответствующее приложению критических внешних растягивающих нагрузок или б) условие критического удлинения конца нанотрубки. Условия непрерывности и совместности при смене закона деформирования на оси нанотрубки при $x = x_m$ имеют вид:

$$u_m = u_1(x_m) = u_2(x_m), \quad \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=x_m} = \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=x_m}, \quad (1.62)$$

а условия в точке $x = x_{cr}$, определяющие при $u = u_{cr}$ положение начала отслоения нанотрубки, аналогичны (1.62):

$$u_{cr} = u_2(x_{cr}) = u_3(x_{cr}), \quad \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=x_{cr}} = \left. \frac{du_3}{dx} \right|_{x=x_{cr}} \quad (1.63)$$

В зависимости от уровня внешней нагрузки возможно наличие вдоль оси нанотрубки участков с различными законами деформирования. Распределение нормальных напряжений в сечении нанотрубки и касательных напряжений в промежуточном слое также при этом изменяются вдоль оси нановолокна.

Полагая, что связи в концевой области трещины образованы волокнами, взаимодействующими с матрицей, согласно (1.55), а также, что предельное состояние достигнуто (произошел отрыв, и в сечении $x = 0$ напряжения отсутствуют):

$$\sigma(0) = E_f \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.64)$$

и на конце нанотрубки $x = L_c$ приложена нормальная нагрузка:

$$\sigma(L_c) = E_f \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=L_c} = \sigma_f \quad , \quad (1.65)$$

получаем уравнение, связывающее напряжение на конце волокна и его удлинение. С учетом граничных условий (1.64)-(1.65) из общего решения (1.61a) следует:

$$u_1(x) = \frac{\sigma_f}{\beta_1 E_f} \frac{ch(\beta_1 x)}{sh(\beta_1 L_c)} \quad (1.66)$$

Распределение касательных напряжений вдоль оси нанотрубки запишем с учетом соотношений (1.53) и (1.60):

$$\tau_i(t) = \frac{\sigma_f}{2\delta} \sqrt{\mu_1} \frac{ch\left(\frac{2\delta L_c \sqrt{\mu_1}}{D} t\right)}{sh(\lambda_1)} \quad , \quad (1.67)$$

где параметр μ_1 имеет смысл относительной жесткости промежуточного слоя на линейном участке деформирования, см. (1.60).

Нормальные напряжения в сечении нанотрубки с относительной координатой t определяются выражением:

$$\sigma(t) = E_f \frac{du_1}{dx} = \sigma_f \frac{sh(\lambda_1 t)}{sh(\lambda_1)} \quad (1.68)$$

Зависимость напряжения на конце нановолокна от его удлинения u (закон деформирования связи) следует из выражения (1.66), при $x = L_c$:

$$\sigma_f(u) = Ku, \quad K = th(\beta_1 L_c) \frac{2\delta \sqrt{\mu_1}}{D} E_f, \quad (1.69)$$

где K - коэффициент жесткости связи, функция $th(\cdot)$ - гиперболический тангенс, остальные параметры определены в (1.60). При использовании выражения (1.69), связи в концевой области трещины деформируются линейно-упруго до разрыва при достижении предельной вытяжки $u = u_m$, что согласуется с известными экспериментальными результатами [3, 180].

Билинейный закон деформирования сдвигового слоя приводит также к билинейному закону деформирования связей в концевой области трещины.

Случаи деформирования сдвигового слоя с учетом разупрочнения и расслоения подробно рассмотрены в [51].

1.3.3. Феноменологические законы деформирования связей между берегами трещины

Для моделирования напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины удобно представить диаграмму деформирования связей (соотношение между раскрытием трещины и усилиями в связях) в относительно простой аналитической форме, описываемой минимальным количеством определяемых экспериментально параметров:

$$\sigma(s) = \frac{U(s)}{c_B(s)} \Phi(e), \quad e(s) = \frac{U(s)}{u_m} \quad (1.70)$$

Здесь координата s соответствует положению волокна вдоль концевой области трещины. Для прямолинейной трещины на границе соединения материалов $s \equiv x$; $c_B(s)$ - эффективная податливость связей; раскрытие трещины $U(s)$ определяется выражением (1.35); u_m - значение раскрытия трещины, при котором происходит переход от линейного к нелинейному закону деформирования связей:

$$\Phi(e) \equiv 1, \quad e(s) \leq 1 \quad (1.71)$$

$\Phi(\cdot)$ – безразмерная функция, описывающая нелинейную часть кривой деформирования связей. Для линейно-упругих связей на начальном участке

деформирования при $e(s) \leq 1$ имеем (см. соотношение (1.70)):

$$u(s) = c_b(s)\sigma(s), \quad (1.72)$$

где модуль вектора усилий в связях $\sigma(s)$ определяется выражением (1.30). Параметр u_m может зависеть, в частности, от физико-механических характеристик связей и длины трещины. Далее нелинейный участок кривой деформирования связей ($e(s) > 1$) будем представлять монотонной убывающей или возрастающей функцией, конкретный вид которой зависит от типа и характеристик связей в концевой области трещины. Убывающий нелинейный участок кривой деформирования связей соответствует разупрочнению связей при возрастании раскрытия трещины. Представление диаграмм деформирования связей в форме (1.70) облегчает численные эксперименты по исследованию влияния параметров нелинейной части кривой деформирования связей, размера концевой области трещины и величины внешней нагрузки на сходимость итерационного процесса решения системы, а также позволяет получать сравнительные оценки параметров трещиностойкости для различных типов кривых деформирования связей.

Будем исходить из критерия предельной вытяжки связей и полагать, что разрыв связи происходит при достижении ее предельной вытяжки u_{cr} , и этому значению вытяжки связи отвечает натяжение связи σ_{cr} , причем, в зависимости от типа связей, величина σ_{cr} может также равняться нулю. Простейшая кривая такого рода имеет форму билинейной зависимости, восходящий участок которой соответствует упругому деформированию связей до вытяжки u_m с натяжением связи

$$\sigma_m = u_m/c_b(s_m), \quad (1.73)$$

где $c_b(s_m)$ - эффективная податливость связей в точке концевой области с координатой s_m . Если $u(s) > u_m$, то закон деформирования связей описывается линейной зависимостью, определяемой точками с координатами (u_m, σ_m) и

(u_{cr}, σ_{cr}) на плоскости (u, σ) . При условии $\sigma_{cr} < \sigma_m$ эта зависимость является убывающей (разупрочнение), а если $\sigma_{cr} \geq \sigma_m$, то зависимость является возрастающей (линейное упрочнение, соответствующее, например, упруго-пластической деформации связей). Таким образом, билинейная зависимость между натяжением связи $\sigma(x)$ и ее вытяжкой $U(x)$ может быть представлена так:

$$\sigma(u) = \begin{cases} k_B(s)U(s), & 0 \leq U(s) \leq u_m \\ \sigma_{cr} + \frac{\sigma_m - \sigma_{cr}}{u_{cr} - u_m} (u_{cr} - U(s)), & u_m < U(s) \leq u_{cr} \end{cases}, \quad (1.74)$$

где $k_B(s)$ - жесткость связей

$$k_B(s) = 1/c_b(s) \quad (1.75)$$

После введения обозначений:

$$\eta = \frac{u_{cr}}{u_m}, \quad \delta = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_m} \quad (1.76)$$

вторая формула в соотношениях (1.74), с учетом выражения (1.73), преобразуется к виду:

$$\sigma(u) = \frac{u_m}{c_b(s_m)(\eta - 1)} \left[\left(\eta - \frac{U(s)}{u_m} \right) + \delta \left(\frac{U(s)}{u_m} - 1 \right) \right] \quad (1.77)$$

Из зависимости (1.77) получаем значение вытяжки связи u_0 , соответствующее $\sigma(u_0) = 0$ и $\delta < 1$ (разупрочнение):

$$u_0 = u_m \frac{\eta - \delta}{1 - \delta} \quad (1.78)$$

Отметим, что $u_0 \geq u_{cr}$ при $\delta \geq 0$.

По аналогии с рассмотренной выше билинейной зависимостью построим степенные зависимости, описывающие закон деформирования связей на участке $u_m < U(s) \leq u_{cr}$. Будем рассматривать двухзвенные кривые, состоящие из участков упругого деформирования связей и нелинейного убывающего либо возрастающего участка. Полагаем, что нелинейный убывающий

участок кривой деформирования связей - степенная функция, проходящая через точки с координатами (u_m, σ_m) и (u_{cr}, σ_{cr}) на плоскости (U, σ) .

Приведем два типа описания нелинейного убывающего участка кривой деформирования связей.

Тип 1. Рассмотрим зависимость вида (выпуклая убывающая кривая):

$$\sigma(U) = \begin{cases} k_B(s)U(s), & 0 \leq e(s) \leq 1, \quad k_B(s) = c_b^{-1}(s) \\ \sigma_B(1 - \kappa e^n(s)), & 1 < e(s) \leq \eta, \end{cases} \quad (1.79)$$

где n - целочисленный параметр, определяющий кривизну нелинейного участка, $k_B(s)$ - жесткость связей. Из условий прохождения кривой, описываемой нижним соотношением в (1.79), через точки (u_m, σ_m) и (u_{cr}, σ_{cr}) получаем

$$\kappa = \frac{1 - \delta}{\eta^n - \delta}, \quad \sigma_B = \frac{\sigma_m}{1 - \kappa}, \quad \sigma_m = \frac{u_m}{c_b(s)}, \quad \delta = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_m} \quad (1.80)$$

Запишем нижнее соотношение (1.79) при учете равенств: (1.80)

$$\sigma(U) = \frac{u_m(\eta^n - \delta)}{c_b(s)(\eta^n - 1)} \left(1 - e^n(s) \frac{1 - \delta}{\eta^n - \delta} \right) \quad (1.81)$$

Тип 2. Вогнутую убывающую кривую представим в форме:

$$\sigma(U) = \begin{cases} k_B(s)U(s) & , \quad 0 \leq e(s) \leq 1 \\ \sigma_B(\kappa e(s) - 1)^n, & 1 < e(s) \leq \eta, \end{cases} \quad (1.82)$$

откуда, по аналогии с предыдущим случаем, получаем:

$$\kappa = \frac{\sqrt[n]{\delta} - 1}{\sqrt[n]{\delta} - \eta}, \quad \sigma_B = \frac{u_m(\eta - \sqrt[n]{\delta})^n}{c_b(s)(1 - \eta)^n} \quad (1.83)$$

В частном случае $n = 1$ выражения (1.79) и (1.82) совпадают и описывают билинейную зависимость (см. (1.74)):

$$\sigma(U) = \begin{cases} U(s)/c_b(s), & 0 \leq e(s) \leq 1 \\ \frac{u_m}{c_b(s_m)(\eta - 1)} [(\eta - e(s)) + \delta(e(s) - 1)], & 1 < e(s) \leq \eta \end{cases} \quad (1.84)$$

При условии $\sigma_{cr} < \sigma_m$ ($\delta < 1$) эта зависимость — убывающая (разупрочнение), а при $\sigma_{cr} > \sigma_m$ — возрастающая (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей), условие идеальной пластичности выполняется при $\delta = 1$.

Нелинейный возрастающий участок кривой деформирования связей ($u_m < U(s) \leq u_{cr}$) представим в форме (степенное упрочнение, $n \geq 1$):

$$\sigma(U) = \frac{u_m}{c_b(s)} \left(\frac{U(s)}{u_m} \right)^{1/n} \quad (1.85)$$

Отметим, что $\sigma(U) \rightarrow \sigma_m$ (см. (5)), если $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим, в качестве примера, определение параметров билинейной кривой деформирования связей. Полагаем, что связи в концевой области трещины образованы волокнами, состоящими из полимерных молекул с индексом полимеризации N и размером мономерного звена a_0 [57]. Максимальная длина волокна в таком случае составляет $L \sim Na_0$. С учетом этого можно предположить, что при малых деформациях предельная вытяжка связей равна $u_{cr} \sim Na_0$. При заданных N и a_0 ($N=400$ и $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-9}$ м), получим $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$ м. Если изменение закона деформирования связей происходит при значении параметра $\eta = 2$ (см. обозначение (1.80)), то $u_m = 0.5$ и $u_{cr} = 10^{-7}$ м. Натяжение связи σ_m , соответствующее раскрытию трещины, равному u_m , зависит от податливости связей (см.(1.73)). Податливость упругих связей в соотношении (1.72) имеет вид (см.(1.33) при $\gamma(s) \equiv 1$):

$$c_b(s) = \frac{H}{E_b} \quad (1.86)$$

Полагая, что параметры u_{cr} в (1.80) и H в (1.86) пропорциональны, что соответствует упругой деформации связей до разрыва, получим:

$$H = \lambda u_{cr}, \quad (1.87)$$

где λ - коэффициент, зависящий от физико-механических характеристик связей. Вычисляем по формуле (1.86) податливости связей на участке упругого

деформирования для значений $\lambda = 250; 187.5; 125$ ($\lambda \sim N$ для адгезионных соединений на основе полимеров), $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$ м и модуля упругости связей $E_b = 25$ ГПа:

$$c_b = \frac{\lambda u_{cr}}{E_b} = 2 \cdot 10^{-9}; 1.5 \cdot 10^{-9}; 1.0 \cdot 10^{-9} \text{ м} \cdot \text{МПа}^{-1}$$

Из выражения (1.80) следует, что $\sigma_{cr} = \delta \sigma_m$, где максимальные упругие напряжения σ_m определяются соотношением (1.73). Получаем из (1.73) с учетом (1.86)-(1.87):

$$\sigma_{cr} = \frac{\delta}{\lambda \eta} E_b$$

При значениях параметров $\eta = 2$ и $\delta = 0.5$ величины натяжения связи для указанных выше значений λ составляют: $\sigma_{cr} = 25$ МПа; 33.(3) МПа; 50 МПа, соответственно. Билинейные зависимости, полученные для рассмотренного выше примера, приведены на рис.1.13.

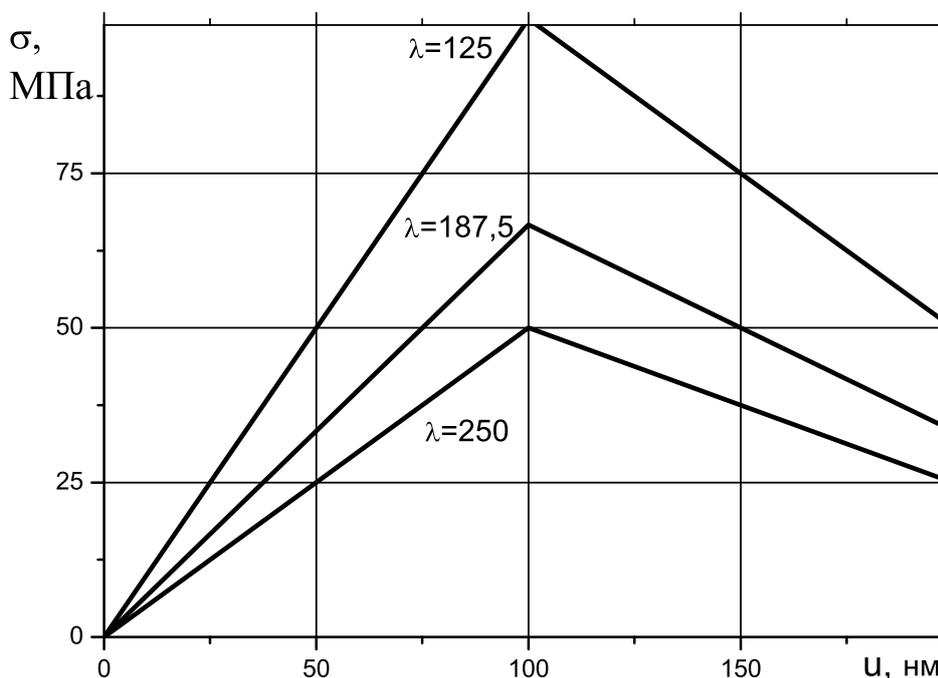


Рис. 1.13. Билинейные кривые деформирования связей, $u_m = 10^{-7}$ м, $u_{cr} = 2u_m$, $\sigma_{cr} = 0.5\sigma_m$

Для построения кривых деформирования связей с нелинейной ветвью по зависимостям (1.79), (1.82) и (1.85) необходимы данные о жесткости линейно-упругого участка деформирования, а также параметры u_m , u_{cr} , σ_{cr} ,

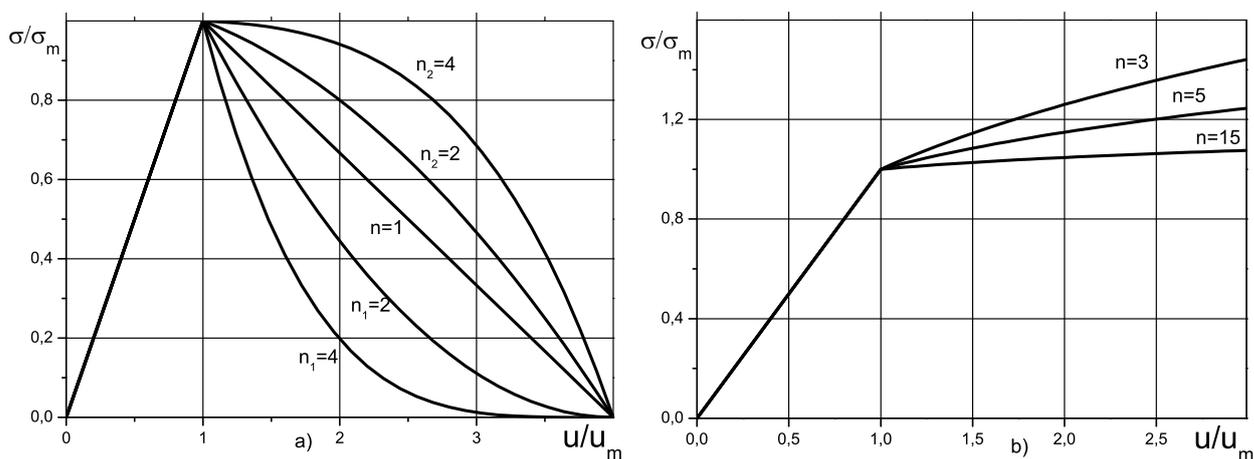


Рис. 1.14. а) Кривые деформирования связей с разупрочнением, $n_2 = 2; 4$ - уравнение (1.79), $n_1 = 2; 4$ - уравнение (1.82); $n = 1$ - билинейная зависимость (1.84), разупрочнение; б) кривые деформирования связей с упрочнением, $u_{cr} = 3u_m$, уравнение (1.85)

n и c_b , определяющие положение и кривизну нелинейной части кривой деформирования. Кривые, качественно отражающие основные закономерности деформирования связей в концевой области трещины, построенные по этим зависимостям, представлены на рис.1.14а (билинейная зависимость, а также выпуклые и вогнутые кривые, полученные по формулам (1.79) и (1.82)) и на рис.1.14б (зависимость с упрочнением, получена по формуле (1.85)). Участок упругого деформирования на этих рисунках соответствует значениям $\lambda = 250$, $c_b = 2 \cdot 10^{-9}$ МПа \cdot м $^{-1}$, $u_m = 10^{-7}$ м (рис.1.13), размер участка нелинейного деформирования определяется условиями: $u_{cr} = 4u_m$ ($\eta = 4$) (рис.1.13 и рис.1.14а, где также $\delta = 0$), $u_{cr} = 3u_m$ ($\eta = 3$) (рис.1.14б).

1.4. Термофлуктуационная модель кинетики связей в механике разрушения

Необходимость разработки долговечных материалов и способов предотвращения преждевременного разрушения явилась стимулом для разработки моделей длительной прочности материалов, учитывающих физические механизмы, лежащие в основе процесса разрушения [181–183]. Модели, основанные на рассмотрении кинетических процессов разрыва химических и

молекулярных связей при воздействии физических полей, получили значительное развитие для полимерных материалов [184–186]. В рамках механики разрушения кинетический подход к анализу роста трещин, основанный на рассмотрении термически активированной кинетики связей в концевой области трещины, предложен в [187, 188], где полагается, что: а) концевая область трещины мала по сравнению размерами тела и длиной трещины; б) продвижение вершины трещины определяется модулем сцепления материала, зависящим от скорости роста трещины; в) временные эффекты существенны только в концевой области трещины, где связи значительно напряжены. Указанный подход был развит с учетом влияния агрессивных сред на кинетику трещин [189, 190].

Отметим, что анализ временных эффектов разрушения, основанный на рассмотрении термофлуктуационных механизмов, возможен для всех типов материалов. Для полимерных материалов, обладающих выраженными реологическими свойствами, применение таких подходов наиболее эффективно. В данной работе кинетическая модель термофлуктуационного разрушения Журкова [181, 182], в сочетании с моделью концевой области трещины, развита и используется для анализа кинетики связей в концевой области трещины и для оценки времени зарождения дефектов на границе соединения материалов. Полагается, что, по крайней мере, один из материалов является полимером, а часть трещины, занятая связями (концевая область), не является малой, по сравнению с длиной трещины.

Анализ кинетики связей в концевой области трещины и оценка времени зарождения дефектов на границе соединения материалов выполняются, исходя из следующих допущений:

- в начальный момент времени на границе соединения существует область ослабленных связей между материалами (это может быть технологический дефект, либо ослабленная зона, вызванная, например, диффузией активной среды);

- плотность связей в указанной области изменяется со временем по термофлуктуационному механизму;

- жесткость связей пропорциональна их плотности в каждой точке концевой области трещины;

- зарождение дефекта происходит вблизи центра области ослабленных связей;

- условием формирования трещины-дефекта является снижение средней плотности связей на соответствующем участке области ослабленных связей до критического значения или увеличение раскрытия трещины до предельной величины.

Использование модели концевой области трещины позволяет рассматривать зону ослабленных связей как трещину, частично или полностью заполненную связями. При действии внешней нагрузки в процессе термофлуктуационного распада связей размер концевой области сокращается, и часть зоны ослабленных связей освобождается от связей, при выполнении соответствующего критериального условия.

Для долговечности большинства материалов, при действии растягивающего напряжения σ , справедлива установленная экспериментально формула [181, 182]:

$$\tau = \mu \tau_0 e^{U(\sigma)/kT}, \quad (1.88)$$

где τ - время разрушения образца, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, $\tau_0 \approx h/kT$ - постоянная порядка периода тепловых колебаний атомов (10^{-13} - 10^{-12} с), h - постоянная Планка, μ - безразмерный коэффициент, зависящий от вида материала (полимер, металл, керамика), $U(\sigma)$ - энергия деструкции связей (энергия активации разрушения).

Функция $U(\sigma)$ для достаточно широкого интервала нагрузок и температур является линейной:

$$U(\sigma) = U_0 - qT - A(\sigma), \quad A(\sigma) = \gamma\sigma, \quad (1.89)$$

где U_0 - энергия активации распада межатомных связей (энергетический барьер разрыва связей), q, γ - структурно-чувствительные параметры, характеризующие тепловые и прочностные свойства материала. Снижение энергетического барьера разрыва связей возможно также при воздействии физических полей и агрессивных сред.

Из выражения (1.89) видно, что величина $A(\sigma)$ уменьшает энергетический барьер разрыва связей и может быть рассмотрена как работа, которую выполняют внешние силы при разрушении тела.

Формула, аналогичная (1.88), справедлива и для среднего времени жизни (долговечности) τ_b нагруженной межатомной связи [181, 182]. Работа внешних сил в этом случае зависит от величины напряжения в связи. Неравномерность распределения напряжений в связях в реальном теле приводит к локальному накоплению повреждений и образованию дефектов. Наиболее интенсивно накопление повреждений происходит в зонах ослабления межатомных (межмолекулярных) связей в материале. Область ослабленных связей в материале (или на границе соединения материалов) будем рассматривать как трещину, заполненную связями, свойства которых изменяются со временем по термофлуктуационному механизму.

Полагаем, что выражение (1.88) является справедливым и для связей в концевой области трещины, но работа $A(\sigma)$, фигурирующая в выражении (1.89), есть работа по деформированию связей, определяемая с учетом неоднородного распределения усилий по связям в концевой области трещины.

Работа по деформированию связи A и долговечность связи τ_b в концевой области прямолинейной трещины, на границе соединения материалов (рис.1.7), будут зависеть от натяжения связи σ_b и координаты x , определяющей положение связи вдоль концевой области, $A = A(\sigma_b, x)$ и $\tau_b = \tau_b(\sigma_b, x)$.

Положим (аналогично [187, 188]), что изменение плотности связей в концевой области трещины во времени $n(x, t)$ описывается уравнением хи-

мического разложения:

$$\frac{dn(x, t)}{dt} = -\frac{n(x, t)}{\tau_b(\sigma_b, x)}, \quad (1.90)$$

где $\tau_b(\sigma_b, x)$ - время до распада межмолекулярной связи, расположенной в концевой области трещины на расстоянии $\ell - x$ от ее вершины (долговечность связи).

Из (1.90) имеем:

$$n(x, t) = n_0 e^{-t/\tau_b(\sigma_b, x)}, \quad (1.91)$$

где $n(x, 0) = n_0$ - начальная плотность связей.

Изменение плотности связей во времени ведет к изменению податливости связей в концевой области трещины. Обозначим жесткость одной молекулярной связи $k_s(x)$. Тогда эффективная жесткость связей на единицу площади концевой области трещины:

$$k(x, t, \sigma_b) = k_s(x) n(x, t) = k_b(x) e^{-t/\tau_b(\sigma_b, x)} \quad (1.92)$$

где $k_b(x) = k_s(x) n_0$ - начальная жесткость связей на единицу площади концевой области трещины.

Из выражения (1.92) следует, что податливости связей в концевой области можно представить в форме:

$$c(x, t, \sigma_b) = c_b(x) e^{t/\tau_b(\sigma_b, x)}, \quad (1.93)$$

где $c_b(\cdot) = 1/k_b(\cdot)$ - функция, определяющая начальную податливость связей в концевой области трещины.

Работа по деформированию связей (на единицу толщины тела) на участке концевой области трещины размером dx определяется выражением [30, 31]:

$$dU(x) = \left[\int_0^{u_x(x)} q_x(u_x) du_x + \int_0^{u_y(x)} q_y(u_y) du_y \right] dx, \quad (1.94)$$

где $u_{x,y}(x)$ - компоненты раскрытия в концевой области трещины в точке с координатой x , $q_{x,y}(x)$ - усилия в связях. Число молекулярных связей на

участке dx равно:

$$dn = n(x, t)dx \quad (1.95)$$

Величину работы на одну внутримолекулярную связь оценим в предположении, что адгезионное соединение образовано цепями полимерных молекул с размером мономерного звена a_m . Будем полагать, что удлинение связи (цепной молекулы) при деформировании в пределах линейной упругости много меньше ее начальной длины, и раскрытие трещины в концевой области на расстоянии $\ell - x$ от вершины трещины приближенно равно длине нагруженной части цепной молекулы, соединяющей берега трещины.

В таком случае число N_n мономерных звеньев между берегами трещины на участке длины dx равно:

$$N_n = \omega dn, \quad \omega = \sqrt{u_x^2(x, t) + u_y^2(x, t)} / a_m, \quad (1.96)$$

где ω - число мономерных звеньев полимерной цепи, образующей связь между берегами трещины.

Получаем работу на одну внутримолекулярную связь:

$$A(\sigma_b, x) = \frac{dU(x)}{\omega dn} \quad (1.97)$$

Представим выражение (1.88) в форме, удобной для выполнения вычислений:

$$\tau_b(\sigma_b, x) = \tau_0 e^{(U_M - A_M(\sigma_b, x))/RT}, \quad (1.98)$$

где $U_M = U_0 N$ - энергия активации 1 моля внутримолекулярных связей, $A_M(\sigma_b, x) = A(\sigma_b, x) N_A$, $R = k N_A$ - газовая постоянная, N_A - число Авогадро.

Методика расчета кинетики связей в концевой области трещины объединена с численным алгоритмом расчета напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины (см. главу 2) и использована для анализа кинетики связей в концевой области трещины (см. главу 5).

Глава 2

Методы расчета напряженно-деформированного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений при учете взаимодействия берегов трещин на границе соединения материалов

Как уже было отмечено, приближенные методы оценки трещиностойкости, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой областью, независимо от типа модели концевой области, неприменимы, если длина концевой области трещины не является малой по сравнению с размером трещины. В таких случаях необходимо прямое моделирование напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины с учетом деформационных характеристик связей и последующим использованием критерия разрушения для анализа роста трещины.

Для прямолинейных трещин, размер которых мал по сравнению с размером конструкции, возможно определение напряженно-деформированного состояния в зоне трещины в предположении, что расчетная область является безграничной. Если усилия в связях не зависят от раскрытия трещины, то задача сводится к определению перемещений берегов трещины и напряжений вблизи трещины при нагрузках, заданных на поверхности трещины. Для случая усилий в связях, постоянных вдоль концевой области прямолинейной трещины, аналитические решения получены для однородных [13–15] и кусочно-однородных [89, 149, 150] и ортотропных [28] безграничных областей. При учете зависимости усилий в связях от раскрытия трещины, даже для безграничных областей, возможно только численное решение задачи.

Для анализа напряженно-деформированного состояния вблизи трещин в безграничных областях используются, преимущественно, сингулярные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, которые могут быть получены исходя из рассмотрения непрерывного распределения дислокаций

[191–193] или с использованием метода функций влияния (функций Грина) для конкретных задач с трещинами [194, 195]. Аналогичные методы применяются также для решения задач со связями в концевой области прямолинейных трещин при учете зависимости усилий в связях от раскрытия трещины в однородном материале: в работах [157, 196, 197] используется дислокационный подход, а в работах [19, 198–200] - подход, основанный на методе функций влияния. Отметим, что при использовании дислокационного подхода для определения раскрытия трещины в концевой области после решения интегрального уравнения требуется вычисление интеграла от плотности дислокаций, тогда как при использовании метода функций влияния раскрытие трещины определяется непосредственно из решения задачи.

Для криволинейных трещин со связями между берегами в областях конечного размера, указанные выше методы неприменимы. Для решения таких задач наиболее эффективно использование метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) требующего при численном решении упругой задачи дискретизации только поверхности тела (ввиду этого, метод ГИУ называют также метод граничных элементов, МГЭ). В последние десятилетия значительное число работ было посвящено применению МГЭ для анализа напряженно-деформированного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины на границе соединения материалов, [201–207]. В этих работах взаимодействие берегов трещины, обусловленное присутствием связей, не рассматривалось. Применение МГЭ (а также МКЭ) к решению задач для трещин со связями ограничено рассмотрением только прямолинейных трещин в композиционных материалах при действии растягивающих нагрузок [208–211].

В данной главе, исходя из метода функций влияния, получены сингулярные интегро-дифференциальные уравнения (СИДУ) для анализа напряженно-деформированного состояния в концевой области прямолинейных

трещин на границе соединения двух полуплоскостей из различных материалов. Рассмотрена методика численного решения СИДУ для случаев линейно-упругих и нелинейных связей в концевой области трещины с учетом термофлуктуационной кинетики распада связей. Рассмотрено также применение метода ГИУ (МГЭ) для анализа напряженно-деформированного состояния вблизи трещин (криволинейных в общем случае) со связями с концевой области на границе соединения материалов в областях конечного размера и вычисления модуля коэффициентов интенсивности напряжений для такого рода трещин.

Материал главы основан на работах [29, 30, 39, 40, 44, 48–50, 54, 61, 65].

2.1. Расчет напряженно-деформированного состояния на границе соединения материалов и в концевой области прямолинейной трещины. Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейную трещину с концевыми областями d_1 и d_2 (равными при одноосном растяжении), расположенную на границе соединения двух полуплоскостей из различных материалов (рис.2.1), при действии внешних однородных нормальной σ_0 и сдвиговой τ_0 нагрузок. При учете принципа суперпозиции, граничные условия на берегах трещины для плоской задачи теории упругости записываются в виде

1) при $-\ell + d_2 < x < \ell - d_1$

$$\sigma_{xy}(x, 0) + i\sigma_{yy}(x, 0) = -(\tau_0 + i\sigma_0) \quad (2.1)$$

2) при $\ell - d_1 \leq x \leq \ell$, $-\ell \leq x \leq -\ell + d_2$

$$\sigma_{xy}(x, 0) + i\sigma_{yy}(x, 0) = (-\tau_0 + q_x(x)) + i(-\sigma_0 + q_y(x)) \quad (2.2)$$

Отметим, что в этих граничных условия усилия в связях различны при $x > 0$ и $x < 0$ (см. (2.22) и (2.23)).

Усилия в связях $q_{y,x}(x)$ подлежат определению из решения задачи при

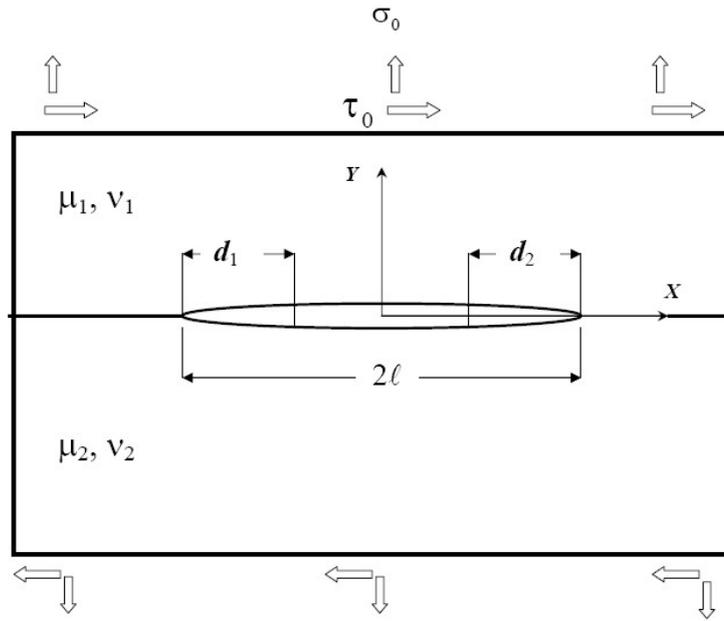


Рис. 2.1. Прямолинейная трещина со связями в концевой области, на границе соединения материалов при действии однородных растягивающих σ_0 и сдвиговых τ_0 нагрузок

внешних нагрузках σ_0, τ_0 и известном законе деформирования связей. В рассматриваемой постановке задачи размеры концевых областей $d_{1,2}$ не предполагаются малыми по сравнению с длиной трещины, а усилия в связях $q_{y,x}(x)$, зависящие как от принятого закона деформирования связей, так и от размера концевой области, имеют форму (1.29).

Раскрытие в концевой области трещины на границе между двумя различными материалами, $u(x, 0) \equiv u(x)$, можно, ввиду линейности задачи теории упругости, представить так:

$$u(x) = u_\infty(x) + u_Q(x) \quad (2.3)$$

$$u(x) = u_y(x) - iu_x(x) \quad (2.4)$$

$$u_\infty(x) = u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x) \quad (2.5)$$

$$u_Q(x) = u_{Qy}(x) - iu_{Qx}(x), \quad (2.6)$$

где $u_\infty(x)$ - раскрытие трещины от действия напряжений $-\sigma_0$ и $-\tau_0$ на берегах трещины (см. выражение (1.5)), $u_Q(x)$ - раскрытие трещины (сближение берегов трещины), обусловленное усилиями $-q_{y,x}(x)$, возникающими в связях при действии внешних нагрузок и приложенными на берегах трещины в

концевой области, компоненты с индексами x, y в (2.4)-(2.6) - проекции соответствующих слагаемых раскрытия трещины на оси координат OX и OY , (см. рис. 1.7).

Выражение (2.3) является исходным для получения интегрального уравнения для определения раскрытия в концевой области трещины в однородном теле при известной функции влияния как при использовании когезионной модели [200, 212], так и при использовании модели со связями в концевой области [17, 19, 173].

При действии растягивающей нагрузки σ_0 по нормали к плоскости трещины в однородном теле в связях возникают только нормальные усилия, и при податливости связей c_y постоянной вдоль концевой области трещины раскрытие трещины в концевой области имеет вид (см. (1.32))

$$u_y(x) = c_y q_y(x) \quad (2.7)$$

При таком нагружении однородного тела раскрытие трещины без связей

$$u_{\infty y}(x) = \frac{4\sigma_0}{E} \sqrt{\ell^2 - x^2} \quad (2.8)$$

Сближение берегов трещины, вызванное усилиями от связей, приложенными к поверхности трещины, определяется выражением (в случае однородного тела концевые области одинакового размера $d_1 = d_2 = d$, усилия в связях $q_y(x)$ -четные функции и интегрирование выполняется с учетом этого на промежутке $\ell - d \leq x \leq \ell$)

$$u_Q(x) = -\frac{4}{\pi E} \int_{\ell-d}^{\ell} G(\ell, x, \xi) q(\xi) d\xi, \quad (2.9)$$

где $G(\ell, x, \xi)$ функция Грина для задачи о прямолинейной трещине в однородном теле

$$G(\ell, x, \xi) = \ln \frac{\sqrt{\ell^2 - x^2} + \sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\sqrt{\ell^2 - x^2} - \sqrt{\ell^2 - \xi^2}} \quad (2.10)$$

Функция $G(\ell, x, \xi)$ получается преобразованием выражения (П.50), полученного в работе [13], с учетом четности усилий в связях $G(\ell, x, \xi) = \Gamma(\ell, x, \xi) + \Gamma(\ell, x, -\xi)$. Подставляя выражения (2.7)-(2.10) в (2.3), получаем интегральное уравнение для усилий в связях

$$c_y q_y(x) + \frac{4}{\pi E} \int_{\ell-d}^{\ell} G(\ell, x, \xi) q_y(\xi) d\xi = \frac{4\sigma_0}{E} \sqrt{\ell^2 - x^2} \quad (2.11)$$

При использовании силового критерия разрушения в рамках модели трещины со связями в концевой области, уравнение (2.11) дополняется условием (1.3), которое в данном случае принимает форму [31]

$$K_{\infty} - K_b = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell} - 2 \sqrt{\frac{\ell}{\pi}} \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{q_y(\xi)}{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}} d\xi = K_{Ic} \quad (2.12)$$

Из последнего выражения получаем

$$\sigma_0 = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \ell}} + \frac{2}{\pi} \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{q_y(\xi)}{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}} d\xi \quad (2.13)$$

Подставляя выражение (2.13) в интегральное уравнение (2.11) получаем

$$c_y q_y(x) + \frac{4}{\pi E} \int_{\ell-d}^{\ell} \Phi(\ell, x, \xi) q_y(\xi) d\xi = \frac{4K_{Ic}}{E \sqrt{\pi \ell}} \sqrt{\ell^2 - x^2}, \quad (2.14)$$

где сингулярное ядро имеет вид

$$\Phi(\ell, x, \xi) = G(\ell, x, \xi) - 2 \sqrt{\frac{\ell^2 - x^2}{\ell^2 - \xi^2}} \quad (2.15)$$

Решение уравнения (2.14) вместе с дополнительным условием, определяющим критическое раскрытие на краю концевой области трещины, позволяет получить распределение усилий в связях и размер концевой области трещины, соответствующий состоянию предельного равновесия [19, 173].

Для когезионной модели трещины итоговый КИН равен нулю, и при $K_{Ic} = 0$ в (2.13) получаем из (2.14) линейное однородное интегральное уравнение. Если для когезионной модели закон деформирования связей выбирается линейно-упругим в форме (2.7), то $q_y(0) = 0$ и уравнение (2.14) с

нулевой правой частью имеет только тривиальное решение $q_y(x) = 0$, что доказывает необходимость наличия ненулевых усилий в вершине трещины при использовании когезионной модели.

Для трещины на границе соединения материалов представления для раскрытия трещины при произвольной нагрузке на ее поверхности (функции Грина) могут быть получены на основе решений, полученных в работах [112, 213]. Однако, для кусочно-однородного тела, более удобный способ получения системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для определения усилий в связях в концевой области трещины основан на использовании производных раскрытия прямолинейной трещины, расположенной на границе соединения материалов [29, 30]. Отметим, что задача о прямолинейной трещине со связями в концевой области на границе соединения анизотропных материалов рассматривалась в работе [214] путем сведения (на основе дислокационного подхода) к системе сингулярных интегральных уравнений, но численные результаты в указанной работе приведены только для соединений изотропных материалов.

2.1.1. Система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для задач о трещине со связями с нелинейной диаграммой деформирования на границе соединения материалов

Получим систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для определения усилий в связях прямолинейной трещины с концевой областью на границе соединения материалов при нагружении постоянными нормальными σ_0 и касательными τ_0 к плоскости трещины напряжениями.

Дифференцируя уравнение (2.3), получаем

$$\frac{du(x)}{\partial x} - \frac{du_Q(x)}{\partial x} = \frac{du_\infty(x)}{\partial x} \quad (2.16)$$

В этом выражении производная раскрытия трещины в концевой области $du(x)/\partial x$ определяется из выражения (1.32), производная раскрытия трещины от действия усилий, приложенных на берегах трещины в концевой обла-

сти $\partial u_Q(x)/\partial x$, будет определена ниже, а производную раскрытия трещины при действии однородных внешних напряжений получаем, исходя из аналитического решения (1.5)

$$\frac{\partial u_\infty(x)}{\partial x} = \frac{\partial u_{\infty y}(x)}{\partial x} - i \frac{\partial u_{\infty x}(x)}{\partial x} = \frac{A}{4\text{ch}(\pi\beta)} \frac{(2\beta\ell i - x) \left(\frac{\ell - x}{\ell + x}\right)^{-i\beta}}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} (\sigma_0 - i\tau_0) \quad (2.17)$$

Используя соотношения (1.32) и (1.33) и переходя к безразмерным переменным (индекс α соответствует слагаемым раскрытия трещины в (2.3))

$$s = \frac{x}{\ell}, \quad u_\alpha(s) = \frac{u_\alpha(x)}{\ell}, \quad (2.18)$$

получим

$$c_0 \frac{\partial}{\partial s} [\gamma_1(s, \sigma) q_y(s) - i\gamma_2(s, \sigma) q_x(s)] - E_b \frac{\partial u_Q(s)}{\partial s} = E_b \frac{\partial u_\infty(s)}{\partial s} \quad (2.19)$$

где параметр c_0 (который будем называть относительной податливостью связей) определяется как

$$c_0 = \frac{H}{\ell} \quad (2.20)$$

Производные раскрытия трещины от действия усилий, приложенных на берегах трещины в концевой области получим, исходя из выражения для производных перемещений берегов трещины при действии произвольных нормальных $q_y(x)$ и касательных $q_x(x)$ усилий на берегах трещины длины 2ℓ , расположенной на границе соединения материалов (см. [113]). Для производных на промежутке $0 < x < \ell$ получаем (см. Приложение):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{Qy}(x)}{\partial x} - i \frac{\partial u_{Qx}(x)}{\partial x} = & \frac{A}{4} \left[\frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)} (q_x(x) + iq_y(x)) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi \sqrt{\ell^2 - x^2}} \left(\frac{\ell - x}{\ell + x}\right)^{-i\beta} \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \left(\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi}\right)^{-i\beta} (q_y(\xi) - iq_x(\xi)) d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Рассмотрим последовательно случаи нагружения нормальными σ_0 (Задача 1) и касательными τ_0 напряжениями (Задача 2).

Задача 1. Нормальные и касательные усилия $q_{x,y}$, возникающие в связях при действии внешних нормальных напряжений σ_0 , а также функции $p_{x,y}$, определяемые выражением (1.29), удовлетворяют следующим условиям симметрии

$$\begin{aligned} q_y(-x) &= q_y(x), & q_x(-x) &= -q_x(x) \\ p_y(-x) &= p_y(x), & p_x(-x) &= -p_x(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Задача 2. При действии внешних касательных напряжений τ_0 условия симметрии для усилий в связях и функций $p_{x,y}(x)$ меняются местами:

$$\begin{aligned} q_y(-x) &= -q_y(x), & q_x(-x) &= q_x(x) \\ p_y(-x) &= -p_y(x), & p_x(-x) &= p_x(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Будем рассматривать концевую область трещины при $x > 0, \ell - d \leq x \leq \ell$. Преобразования выражения (2.21) с учетом условий симметрии (2.22), (2.23) и представления для усилий в концевой области (1.29) приведены в Приложении.

Подставляя в уравнение (2.19) выражения (2.20), (П.10) и (2.17) с учетом замены $s = x/\ell$ и нормировки усилий в связях

$$q_{y,x}(s) = \frac{q_{y,x}(x)}{\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}}, \quad p_{y,x}(s) = \frac{p_{y,x}(x)}{\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}}$$

и выполняя соответствующие преобразования (см. Приложение), получаем нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $p_y(s)$ и $p_x(s)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left[\gamma_1(s, \sigma) q_y(s) - i \gamma_2(s, \sigma) q_x(s) \right] - \frac{\pi \Psi(1 - \alpha)}{2(1 + \alpha)} (q_x(s) + i q_y(s)) + \\ & + \frac{\Psi}{\sqrt{1 - s^2}} \left(\frac{1 - s}{1 + s} \right)^{-i\beta} \int_{1 - \frac{d}{\ell}}^1 \left[R_1(s, t) p_y(t) - i R_2(s, t) p_x(t) \right] dt = \\ & = \frac{\pi \Psi R_\infty (2\beta i - s)}{2ch(\pi\beta) \sqrt{1 - s^2}} \left(\frac{1 - s}{1 + s} \right)^{-i\beta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

где (см. также (1.29))

$$q_y(s) - iq_x(s) = (p_y(s) - ip_x(s)) \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^{-i\beta}, \quad (2.25)$$

$$R(s, t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2 - s^2} \quad (2.26)$$

Для задачи 1

$$R_1(s, t) = sR(s, t), \quad R_2(s, t) = tR(s, t), \quad R_\infty = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}} \quad (2.27)$$

Для задачи 2

$$R_1(s, t) = tR(s, t), \quad R_2(s, t) = sR(s, t), \quad R_\infty = \frac{-i\tau_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}} \quad (2.28)$$

Параметр Ψ в уравнении (2.24) характеризует относительную жесткость связей в концевой области трещины (отношение жесткости связей в концевой области трещины E_b/H к жесткости участка соединения материалов без трещины)

$$\Psi = \frac{AE_b}{2\pi c_0} = \frac{E_b \ell}{2\pi H} \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \quad (2.29)$$

Уравнение (2.24) представляют собой нелинейную систему СИДУ второго рода типа Фредгольма с сингулярным ядром. В случае однородного тела ($\alpha = 1, \beta = 0$) и действия только нормальных напряжений это уравнение совпадает с уравнением, следующим из результатов работы [19].

В уравнении (2.24) и далее в работе функции $p_{x,y}$ и $q_{x,y}$ безразмерных переменных s также являются безразмерными.

После решения уравнения (2.24) относительно неизвестных функций $p_y(s)$ и $p_x(s)$, усилия в концевой области трещины определяются из соотношения (2.25)

$$\begin{Bmatrix} q_y(s) \\ q_x(s) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} p_y(s) \\ p_x(s) \end{Bmatrix}, \quad \varphi = \beta \ln \left(\frac{1-s}{1+s} \right) \quad (2.30)$$

Компоненты раскрытия трещины в концевой области (2.4) получаем используя выражения (1.31) и (1.33)

$$u_{y,x}(s) = c_0 \frac{\ell}{E_b} \gamma(s, \sigma) q_{y,x}(s) \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2} \quad (2.31)$$

2.1.2. Раскрытие трещины с учетом связей и расчет напряжений на границе соединения материалов

Определение раскрытия берегов трещины вне концевой области

После решения уравнения (2.24) раскрытие берегов трещины вне концевой области ($0 \leq x_0 < \ell - d$)

$$\Delta u(x_0) = \Delta u_y(x_0) - i \Delta u_x(x_0) \quad (2.32)$$

может быть получено интегрированием выражения (2.16):

$$\Delta u(x_0) = u_\infty(x_0) + \int_{x_0}^{\ell} \frac{\partial u_Q(x)}{\partial x} dx \quad (2.33)$$

Здесь $u_\infty(x)$ - раскрытие трещины без связей под действием внешних однородных растягивающих (σ_0) и сдвиговых (τ_0) напряжений (см. выражение (1.5)), а производная раскрытия трещины ($x > 0$), вызванного наличием связей в концевой области трещины, определяется выражениям (2.21) и (П.10).

Запишем выражения (2.33) для компонент раскрытия трещины вне зоны связей для случая растягивающей нагрузки σ_0 с учетом соотношений (1.29)) и (П.8)-(П.10). После разделения действительный и мнимых частей выражений, получаем

$$\Delta u_y(x_0) = u_{y\infty}(x_0) + \frac{A(1-\alpha)}{4(1+\alpha)} \int_{d-\ell}^{\ell} q_x(x) dx - \frac{A}{2\pi} \int_{x_0}^{\ell} \frac{F_1(x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} dx \quad (2.34)$$

$$\Delta u_x(x_0) = u_{x\infty}(x_0) - \frac{A(1-\alpha)}{4(1+\alpha)} \int_{d-\ell}^{\ell} q_y(x) dx - \frac{A}{2\pi} \int_{x_0}^{\ell} \frac{F_2(x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} dx \quad (2.35)$$

Здесь $u_{y\infty}, u_{x\infty}$ - компоненты раскрытия трещины без связей, при действии растягивающей нагрузки σ_0 (см. (1.5))

$$u_{\infty y}(x_0) = \sigma_0 U(x_0) \cos \phi(x_0), \quad u_{\infty x}(x_0) = \sigma_0 U(x_0) \sin \phi(x_0) \quad (2.36)$$

$$U(x_0) = \frac{A}{4ch(\pi\beta)} \sqrt{\ell^2 - x_0^2}, \quad \phi(x_0) = \beta \ln \frac{\ell - x_0}{\ell + x_0} \quad (2.37)$$

Функции $F_{1,2}(x)$ имеют вид

$$F_1(x) = x \cos \phi(x) I_1(x) - \sin \phi(x) I_2(x) \quad (2.38)$$

$$F_2(x) = x \sin \phi(x) I_1(x) + \cos \phi(x) I_2(x), \quad (2.39)$$

где $I_{1,2}(x)$ определяется так

$$I_1(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi, \quad I_2(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\xi \sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \quad (2.40)$$

При действии сдвиговых нагрузок τ_0 структура формул (2.34)-(2.35) не изменяется. Компоненты раскрытия трещины без связей, при действии сдвиговой нагрузки (см. (1.5))

$$u_{\infty y}(x_0) = -\tau_0 U(x_0) \sin \phi(x_0), \quad u_{\infty x}(x_0) = \tau_0 U(x_0) \cos \phi(x_0), \quad (2.41)$$

Функции $F_{1,2}(x)$ и $I_{1,2}(x)$ для случая сдвиговой нагрузки, с учетом выражений (П.8)-(П.10), принимают вид

$$F_1(x) = \cos \phi(x) I_1(x) - x \sin \phi(x) I_2(x) \quad (2.42)$$

$$F_2(x) = \sin \phi(x) I_1(x) + x \cos \phi(x) I_2(x) \quad (2.43)$$

$$I_1(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\xi \sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi, \quad I_2(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \quad (2.44)$$

При совместном действии растягивающей и сдвиговой нагрузок итоговые перемещения определяются суммированием.

Вычисления по формулам (2.34) и (2.35) выполняются для каждой точки x_0

вне концевой области трещины ($0 \leq x_0 < \ell - d$).

Вычисление напряжений на границе соединения материалов

Напряжения на границе соединения материалов σ_{yy} , σ_{xy} на продолжении трещины ($|x| > \ell$), при действии внешних нагрузок σ_0 , τ_0 и наличии связей между берегами трещины, определяются выражением (см. также 1.24)

$$\sigma_{yy}(x) + i\sigma_{xy}(x) = \left(\sigma_{yy}^{ext}(x) + \sigma_{yy}^{int}(x) \right) + i \left(\sigma_{xy}^{ext}(x) + \sigma_{xy}^{int}(x) \right) \quad (2.45)$$

Здесь σ_{yy}^{ext} , σ_{xy}^{ext} - напряжения на продолжении трещины от действия внешних нагрузок, приложенных на удаленной границе, определяемые выражением (1.4) при $T = 0$); σ_{yy}^{int} , σ_{xy}^{int} - напряжения на продолжении трещины, вызванные усилиями в связях в концевой области трещины.

Напряжения на продолжении трещины от действия нагрузок на берегах трещины $q_x(x)$, $q_y(x)$ (усилий в связях) определяются выражением (см. [113], формула (6.24)), $x > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{int}(x) + i\sigma_{xy}^{int}(x) = \\ \frac{ch(\pi\beta)}{\pi \sqrt{x^2 - \ell^2}} \left(\frac{x - \ell}{x + \ell} \right)^{i\beta} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \left(\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi} \right)^{i\beta} \left(q_y(x) + iq_x(x) \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Преобразуем выражение (2.46) с учетом соотношения (1.29) и свойств функций $q_{x,y}$ и $p_{x,y}$ (2.22) и (2.23). Запишем выражение (1.29) в форме

$$q_y(x) + iq_x(x) = \left(p_y(x) + ip_x(x) \right) \left(\frac{\ell - x}{\ell + x} \right)^{i\beta}$$

и подставим последнее выражение в (2.46)

$$\sigma_{yy}^{int}(x) + i\sigma_{xy}^{int}(x) = \frac{ch(\pi\beta)}{\pi \sqrt{x^2 - \ell^2}} \left(\frac{x - \ell}{x + \ell} \right)^{i\beta} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \left(p_y(x) + ip_x(x) \right) \quad (2.47)$$

Рассмотрим растягивающие нагрузки. Преобразуем интеграл в (2.47) с уче-

том того, что $q_x = q_y = 0$ при $|x| \leq \ell - d$

$$H(x) = \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi = H_1(x) + H_2(x) \quad (2.48)$$

где

$$H_1(x) = \int_{-\ell}^{-\ell+d} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi; \quad H_2(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi$$

Интеграл $H_1(x)$ преобразуем, меняя местами пределы интегрирования, выполнив замену переменной $\xi \rightarrow -\xi$, а также учитывая, что при растяжении $p_x(-\xi) = -p_x(\xi)$:

$$H_1(x) = - \int_{-\ell+d}^{-\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi = - \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) - ip_x(\xi)) d\xi \quad (2.49)$$

Получаем

$$H(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} - \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi + x} \right) p_y(\xi) d\xi + i \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} + \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi + x} \right) p_x(\xi) d\xi \quad (2.50)$$

В итоге, имеем

$$\begin{aligned} H(x) &= H_y^{\sigma_0}(x) + iH_x^{\sigma_0}(x) = \\ &= \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2x\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi + i \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2\xi\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.51)$$

В случае сдвиговых нагрузок τ_0 аналогичные преобразования дают

$$\begin{aligned} H(x) &= H_y^{\tau_0}(x) + iH_x^{\tau_0}(x) = \\ &= \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2\xi\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi + i \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2x\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.52)$$

Интегралы в соотношениях (2.51)-(2.52) не являются сингулярными, т.к. $x > \ell$.

Запишем итоговые выражения для напряжений на продолжении трещины при наличии связей между берегами трещины (см. (2.45)), $x > \ell$, в приведенных ниже формулах для напряжений $\phi(x)$ определяется выражением

$$\phi(x) = \beta \ln \frac{x - \ell}{x + \ell} \quad (2.53)$$

А) Растяжение:

$$\sigma_{xy}(x) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ \begin{array}{l} x \sin \phi(x) + 2\beta\ell \cos \phi(x) + \\ + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi} [\sin \phi(x) H_y^{\sigma_0}(x) + \cos \phi(x) H_x^{\sigma_0}(x)] \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ \begin{array}{l} x \cos \phi(x) - 2\beta\ell \sin \phi(x) + \\ + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi} [\cos \phi(x) H_y^{\sigma_0}(x) - \sin \phi(x) H_x^{\sigma_0}(x)] \end{array} \right\} \quad (2.55)$$

В) Сдвиг:

$$\sigma_{xy}(x) = \frac{\tau_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ \begin{array}{l} x \cos \phi(x) - 2\beta\ell \sin \phi(x) + \\ + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi} [\sin \phi(x) H_y^{\tau_0}(x) + \cos \phi(x) H_x^{\tau_0}(x)] \end{array} \right\} \quad (2.56)$$

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{\tau_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ \begin{array}{l} -x \sin \phi(x) - 2\beta\ell \cos \phi(x) + \\ + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi} [\cos \phi(x) H_y^{\tau_0}(x) - \sin \phi(x) H_x^{\tau_0}(x)] \end{array} \right\} \quad (2.57)$$

Приведенные выше выражения для напряжений за вершиной трещины на границе соединения материалов справедливы при $x > 0$. Выражения для вычисления напряжений при $x < 0$ могут быть получены при изменении знака биупругой постоянной ($\beta \rightarrow -\beta$) в выражениях (2.54)-(2.57).

2.1.3. Коэффициенты интенсивности напряжений для прямолинейной трещины с взаимодействием берегов на границе соединения полуплоскостей

Рассмотрим методику вычисления КИН для одиночной прямолинейной трещины на границе соединения различных материалов при нагружении на удаленной границе нормальными σ_0 (задача 1) и касательными τ_0 (задача 2)

напряжениями, а также с учетом приложенных к берегам трещины усилий, вызванных присутствием связей. Полагаем, что усилия в связях в концевой области трещины известны, например, из решения интегрального уравнения (2.24).

Для трещины, расположенной на границе соединения материалов, значения КИН $K_{I,II}$ связаны с распределением напряжений на ее продолжении (см. выражение (1.17)), а напряжения на продолжении трещины определяются выражением (2.45). Исходя из (1.17) и (2.45) получаем (см. 1.25):

$$K_I + K_{II} = (K_I^{ext} + K_I^{int}) + i(K_{II}^{ext} + K_{II}^{int}), \quad (2.58)$$

где $K_{I,II}^{ext}$ - КИН от действия внешних напряжений, $K_{I,II}^{int}$ - КИН от действия напряжений, возникающих в концевой области трещины.

КИН от действия внешних нормальных σ_0 и касательных τ_0 к плоскости трещины напряжений определяются выражением (1.17). Получим выражения для КИН, вызванных напряжениями на берегах трещины от действия связей. Распределение напряжений на продолжении трещины ($x \geq \ell$) имеет вид (2.46).

Полагаем, как и в (1.17), $x = r + \ell$ в выражении (2.46) и, переходя к пределу $r \rightarrow 0$ (при этом в подынтегральном выражении $x = \ell$), получаем:

$$K_I^{int} + iK_{II}^{int} = -\frac{ch(\pi\beta)}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{+\ell} \left(\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi}\right)^{0.5+i\beta} (q_y(\xi) + iq_x(\xi)) d\xi \quad (2.59)$$

Преобразуем выражение (2.59) с учетом представления для усилий в концевой области (1.29) и условий симметрии (2.22) и (2.23) для задач 1 и 2 (см. Приложение). В итоге получаем:

$$K_I^{int} + iK_{II}^{int} = -2\Sigma_0 \frac{ch(\pi\beta)}{\sqrt{\pi\ell}} \sqrt{\frac{\ell}{\pi}} \int_{1-\frac{d}{\ell}}^1 (F_1(t)p_y(t) + iF_2(t)p_x(t)) dt \quad (2.60)$$

где ядра $F_{1,2}(t)$ определяются выражениями (П.31) и (П.32) для задач 1 и 2

соответственно (см. Приложение), а

$$\Sigma_0 = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2} \quad (2.61)$$

Подставив выражения (1.17) и (2.60) в соотношение (2.58), получаем выражения для КИН для задач 1 или 2:

Задача 1

$$K_I + iK_{II} = \sigma_0 \sqrt{\pi\ell} \left[(1 + 2i\beta) - \frac{2\Sigma_0 \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi\sigma_0} \int_{1-d/\ell}^1 \frac{(p_y(t) + itp_x(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt \right] \quad (2.62)$$

Задача 2

$$K_I + iK_{II} = \tau_0 \sqrt{\pi\ell} \left[(i - 2\beta) - \frac{2\Sigma_0 \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi\tau_0} \int_{1-d/\ell}^1 \frac{(t p_y(t) + ip_x(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt \right] \quad (2.63)$$

Из выражений (2.62)-(2.63) следует, что наличие связей в концевой области трещины приводит к снижению значений КИН и, следовательно, “упрочнению”, зависящему от размера концевой области и свойств связей. В качестве характеристики такого упрочнения будем использовать относительные значения КИН и модуля КИН (коэффициенты упрочнения):

$$K_{r,I}(d/\ell) + iK_{r,II}(d/\ell) = \frac{K_I}{K_I^{ext}} + i\frac{K_{II}}{K_{II}^{ext}}, \quad K_r(d/\ell) = \frac{K_0}{K_0^{ext}} \quad (2.64)$$

где K_0 - модуль КИН при наличии связей в концевой области трещины, а K_0^{ext} - модуль КИН от действия внешних нагрузок:

$$K_0 = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}, \quad K_0^{ext} = \sqrt{\pi\ell(\sigma_0^2 + \tau_0^2)(1 + 4\beta^2)} \quad (2.65)$$

Выделяя действительные и мнимые части в (2.62) и (2.63) получаем выражения для относительных значений КИН ($x > 0$, правая вершина трещины) для задач 1 или 2:

Задача 1 ($K_I^{ext} = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}$, $K_{II}^{ext} = 2\beta \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}$):

$$K_{r,I} = 1 - \frac{2\Sigma_0 ch(\pi\beta)}{\pi\sigma_0} \int_{1-d/\ell}^1 \frac{p_y(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad (2.66)$$

$$K_{r,II} = 2\beta - \frac{2\Sigma_0 ch(\pi\beta)}{\pi\sigma_0} \int_{1-d/\ell}^1 \frac{t p_x(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Задача 2 ($K_I^{ext} = -2\beta\tau_0 \sqrt{\pi \ell}$, $K_{II}^{ext} = \tau_0 \sqrt{\pi \ell}$):

$$K_{r,I} = -2\beta - \frac{2\Sigma_0 ch(\pi\beta)}{\pi\tau_0} \int_{1-d/\ell}^1 \frac{t p_y(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (2.67)$$

$$K_{r,II} = 1 - \frac{2\Sigma_0 ch(\pi\beta)}{\pi\tau_0} \int_{1-d/\ell}^1 \frac{p_x(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Усилия в концевой области трещины и значения КИН вычисляются для задач 1 и 2 независимо и, при совместном действии нормальных σ_0 и касательных τ_0 напряжений, итоговые значения КИН определяются суммированием.

2.2. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения для задачи о трещине со связями в концевой области, на границе соединения материалов. Численное решение

Уравнения (2.24) представляют собой систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами типа Коши. Даже в простейших случаях эти уравнения могут быть решены только численно. Для решения уравнений такого типа используется, в основном, два способа: а) метод разложения по ортогональным функциям [215]; б) метод, основанный на кусочно-непрерывной полиномиальной аппроксимации искомых функций [216, 217]. При использовании первого подхода точки коллокации располагают в нулях ортогональных полиномов, что позволяет эффективно вычислять сингулярные интегралы. Для решения систем уравнений, определенных на

части трещины, более удобным является подход с использованием полиномиальной аппроксимации неизвестных функций.

В данной работе для решения системы СИДУ (2.24) используется коллокационная схема с кусочно-квадратичной аппроксимацией неизвестных функций, которая в сочетании с конечно-элементной схемой дискретизации позволяет свести систему СИДУ к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Если закон деформирования связей является нелинейным, то для определения усилий в связях используется итерационная схема, аналогичная методу упругих решений [218] (о сходимости метода, см. [219], с. 130) в форме метода переменных параметров упругости [220].

Представим систему СИДУ (2.24) в форме удобной для численного решения. Предварительно заметим, что вблизи вершины трещины на границе соединения материалов (дополнительно к (1.28)) при $s \rightarrow 1$ справедливо, как и в однородном теле, асимптотическое представление для компонент раскрытия трещины (1.31) в виде $u_{x,y}(s) \sim \sqrt{1-s}$. С учетом этого, а также соотношений (1.29), представим неизвестные функции $p_{y,x}(s)$ в форме:

$$p_{y,x}(s) = f_{1,2}(s) \sqrt{1-s}, \quad (2.68)$$

где $f_{1,2}(s)$ - новые неизвестные функции.

После подстановки представлений (2.68) в (2.24) и (2.25), дифференцирования по переменной s в левой части системы уравнений (2.24), разделения действительных и мнимых частей уравнений, умножения правой и левой частей итоговых уравнений на величину

$$\sqrt{1-s}/\cos \varphi(s)$$

и алгебраических преобразований (см. Приложение), получаем на промежутке $1 - d/\ell \leq s \leq 1$ нелинейную систему СИДУ относительно новых

переменных задачи - функций $f_{1,2}(s)$

$$T_{ij}(s, \sigma) \frac{df_j(s)}{ds} + W_{ij}(s, \sigma) f_j(s) + \Psi \int_{1-\frac{d}{l}}^1 G_{ij}(s, t) f_j(t) dt = Z_i(s), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.69)$$

где приняты следующие обозначения:

$$T_{ij}(s, \sigma) = (1 - s) \gamma_i(s, \sigma) [\delta_{ij} + \lambda_{ij} \Omega(s)] \quad (2.70)$$

$$W_{ij}(s, \sigma) = \gamma_i(s, \sigma) \left[\delta_{ij} \left(\frac{2\beta}{1+s} \Omega(s) - \frac{1}{2} \right) - \lambda_{ij} \left(\frac{\Omega(s)}{2} + \frac{2\beta}{1+s} \right) \right] - \\ - (1 - s) \left[\frac{\pi \Psi (1 - \alpha)}{2(1 + \alpha)} (\delta_{ij} \Omega(s) - \lambda_{ij}) - \frac{\partial \gamma_i(s, \sigma)}{\partial s} (\delta_{ij} + \lambda_{ij} \Omega(s)) \right] \quad (2.71)$$

$$G_{ij}(s, t) = \frac{(1 - t) \sqrt{1 + t}}{(t^2 - s^2) \sqrt{1 + s}} [s(2 - j) + t(j - 1)] (\delta_{ij} + \lambda_{ij} \Omega(s)) \quad (2.72)$$

$$Z_1(s) = \frac{\pi \Psi}{2 \Sigma_0 ch(\pi \beta) \sqrt{1 + s}} [\sigma_0 (2\beta \Omega(s) - s) + \tau_0 (2\beta + s \Omega(s))] \quad (2.73)$$

$$Z_2(s) = \frac{\pi \Psi}{2 \Sigma_0 ch(\pi \beta) \sqrt{1 + s}} [-\sigma_0 (2\beta + s \Omega(s)) + \tau_0 (2\beta \Omega(s) - s)] \quad (2.74)$$

$$\Omega(s) = \operatorname{tg} \left(\beta \ln \frac{1 - s}{1 + s} \right), \quad \lambda_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \operatorname{sgn}(i - j) \quad (2.75)$$

Здесь δ_{ij} - символ Кронекера, $i, j = 1, 2$. В выражениях (2.73)-(2.74) полагается $\tau_0 = 0$ или $\sigma_0 = 0$ при решении задач 1 и 2, соответственно.

Нелинейная система СИДУ (2.69) дополняется краевым условием, обеспечивающим однозначность решения задачи: $f_{1,2}(1) = C_{1,2}$, где $C_{1,2}$ - постоянные, определяемые физико-механической моделью связей в концевой области трещины.

2.2.1. Коллокационная схема с полиномиальной аппроксимацией

Для дискретизации уравнений (2.69) разместим на участке $\left[\left(1 - \frac{d}{\ell}\right), 1\right]$, содержащем связи в концевой области трещины, M узловых точек с координатами:

$$s_n = \lambda + h(n - 1); \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (2.76)$$

$$M = 2N + 1, \quad N \geq 1, \quad \lambda = 1 - \frac{d}{\ell}, \quad h = \frac{d}{(M - 1)\ell} \quad (2.77)$$

На отрезке $\lambda \leq s \leq 1$ каждые последовательные три узла с номерами $2k-1$, $2k$, $2k+1$ ($k=1, 2, \dots, N$) будем рассматривать как одномерный квадратичный изопараметрический конечный элемент с параметрическими координатами в пределах элемента ($|\eta| \leq 1$)

$$\eta(s) = -1 + \frac{(s - s_{2k-1})}{h} \quad (2.78)$$

Неизвестные функции $f_j(s)$ аппроксимируем разложением по кусочно-непрерывным квадратичным полиномам. Аналогичные представления используем также для аппроксимации функций $\gamma_{1,2}(s, \sigma)$ и вычисления координат произвольной точки на элементе $s^{(k)}(\eta)$.

Для элемента с номером k имеем

$$\begin{Bmatrix} f_j^{(k)}(\eta) \\ \gamma_j^{(k)}(\eta, \sigma) \\ s^{(k)}(\eta) \end{Bmatrix} = N_m(\eta) \begin{Bmatrix} f_{j,n} \\ \gamma_{j,n} \\ s_n \end{Bmatrix}, \quad (2.79)$$

где $n = 2(k - 1) + m$, ($m=1,2,3$) - номер узла в пределах элемента, $f_{j,n}$ - неизвестные значения функций $f_j(s)$ в узлах элемента, $\gamma_{j,n}$ - значения функций $\gamma_{1,2}(s, \sigma)$ в узлах элемента, $N_m(\eta)$ - базисные функции одномерного квадратичного элемента

$$N_1(\eta) = -0.5\eta(1 - \eta), \quad N_2(\eta) = 1 - \eta^2, \quad N_3(\eta) = 0.5\eta(1 + \eta) \quad (2.80)$$

В (2.69), (2.79) и везде ниже по повторяющимся индексам выполняется суммирование.

Выражения для производных функций $f_j(s)$ на элементе имеют вид:

$$\frac{df_j^{(k)}(s)}{ds} = \frac{dN_m(\eta)}{d\eta} \frac{f_{j,2(k-1)+m}}{J_m^k(\eta)}, \quad (2.81)$$

где $J_m^k(\eta) = h$ при выборе координат узлов согласно (2.77).

Производные функций $f_j(s)$ в узлах элемента представим с учетом выражений (2.79)-(2.81). Предварительно заметим, что для узлов с четными номерами $n=2k$ (k -номер элемента) производная в узловой точке s_n однозначно определяется из (2.81). Для узлов с нечетными номерами (кроме первого и последнего) выражение (2.81) дает в узле с номером n два значения производной каждой функции, соответствующих элементам с номерами $(n-1)/2$ и $(n+1)/2$. Будем полагать, что производные функций $f_j(s)$ непрерывны на стыках элементов (в нечетных узловых точках). При таком предположении выражения для производных функций $f_j(s)$ в узлах элемента с номером k принимают вид:

$$\left. \frac{df_j^{(k)}(s)}{ds} \right|_{s=s_n} = \sum_{m=1}^3 D_{m,n}^{(k)} f_{j,2(k-1)+m} \quad (2.82)$$

$$D_{m,n}^{(k)} = \delta_{k,n/2} L_{2,m} + \alpha(\delta_{k,(n-1)/2} \cdot L_{3,m} + \delta_{k,(n+1)/2} \cdot L_{1,m}) \quad (2.83)$$

где $m=1,2,3$ - номера узлов в пределах элемента, n - номер узла, $\delta_{k,n/2}$, $\delta_{k,(n-1)/2}$, $\delta_{k,(n+1)/2}$ - символы Кронекера, $\alpha=0.5$ при $n \neq 1$ и $n \neq M$ и $\alpha=1$ при $n=1$ или $n = M$.

Элементы матрицы $L_{i,m}$ в (2.83) имеют вид:

$$[L] = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} -1.5 & 2.0 & -0.5 \\ -0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.0 & 1.5 \end{vmatrix} \quad (2.84)$$

Вычисление соответствующих производных функций $\gamma_j(s, \sigma)$, определяющих зависимость податливости связей от координаты, выполняется аналогично.

После подстановки выражений (2.79)-(2.83) в (2.69) получаем дискретное представление системы СИДУ

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^3 \left[T_{ij}(s_n, \sigma) D_{m,n}^{(k)} + \alpha \cdot \delta_{2(k-1)+m,n} \cdot W_{ij}(s_n, \sigma) + \varepsilon h \int_{-1}^{+1} G_{ij}(s_n, t^{(k)}(\eta)) N_m(\eta) d\eta \right] \cdot f_{j,2(k-1)+m} = Z_i(s_n) \quad (2.85)$$

В выражении (2.85) $\delta_{2(k-1)+m,n}$ - символ Кронекера, параметр α определяется так же, как в выражении (2.83), $k = 1, 2, \dots, N$ - номера элементов, $m = 1, 2, 3$ - номера узлов элемента.

Обходя последовательно узловые точки $n = 1, 2, \dots, M = 2N + 1$ и выполняя интегрирование на элементах (методика интегрирования описана в Приложении), получаем из уравнения (2.85) систему линейных алгебраических уравнений размерности $2M \times 2M$ для определения неизвестных узловых значений функции $f_j(s_n)$:

$$[A(\sigma)]\{f\} = \{Z\}, \quad (2.86)$$

где $[A(\sigma)]$ - матрица коэффициентов СЛАУ, $\{f\}$ - вектор узловых неизвестных, $\{Z\}$ - вектор правой части СЛАУ.

До решения системы (2.86) выполняется учет граничных условий, соответствующих принятой модели связей. Полагаем, что раскрытие трещины равно нулю в ее вершине: $u_{y,x}(\ell) = 0$, что эквивалентно условию $f_{1,2}(s_M) = 0$ при $s_M = 1$. Граничные условия учитываются путем модификации последних двух строк матрицы $A(\sigma)$: $(A_{ij}(\sigma) = \delta_{ij}, i = 2M - 1, 2M; j = 1, 2, \dots, 2M)$ и соответствующих элементов вектора правой части Z : $(Z_i = 0, i = 2M - 1, 2M)$

Оценка точности изложенной выше методики численного решения системы СИДУ выполнена для сингулярных интегральных уравнений, связанных с полиномами Чебышева и имеющих аналитическое решение (см. Приложение).

2.2.2. Методика решения для связей с нелинейной диаграммой деформирования

Решение задач механики сплошных сред при наличии физической нелинейности обычно выполняется по итерационной схеме, в рамках которой путем последовательных приближений достигается выполнение выбранного критерия сходимости. Существует два основных варианта метода последовательных приближений: метод дополнительных нагрузок (методы начальных напряжений или начальных деформаций, в зависимости от постановки задачи) и метод переменных параметров упругости (метод касательной жесткости). Преимущество метода дополнительных нагрузок состоит в том, что при итерационном решении задачи матрица, соответствующая дискретной формулировке задачи, сохраняется, и на каждой итерации изменяется только вектор правой части матрицы, являющийся вектором нагрузки. При решении системы (2.69) этот подход неприменим, так как правая часть СЛАУ (2.86) не является вектором нагрузки. В данном случае эффективным оказывается метод переменных параметров упругости [220], реализованный в данной работе в форме метода касательной податливости. Первый шаг итерационного процесса состоит в решении уравнения (2.86) для линейно-упругих связей вида (1.70) при выполнении условия (1.71). Последующие итерации выполняются в том случае, если на части концевой области трещины $u(x) > u_m$. Если на вид кривой деформирования связей не накладывается условие (1.71), то первый шаг решения выполняется для податливости, определяемой выражением

$$c(s) = \left(\frac{d\sigma}{dU} \right)^{-1}$$

и происходит переход к итерационному процессу решения.

На каждой итерации выполняется решение уравнения (2.86) для квазиупругих связей вида (1.70) с эффективной податливостью, переменной вдоль концевой области трещины и зависящей от величины модуля вектора

усилий в связях, полученного на предыдущем шаге решения. Вычисление эффективной податливости выполняется подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия в связях, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

На каждой итерации с номером $i \geq 1$ выполняются следующие вычисления:

1°. Расчет узловых значений усилий в связях (см. выражения (1.29) и (2.68)):

$$\begin{Bmatrix} q_{x,n}^{(i)} \\ q_{y,n}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{2n}^{(i)} \\ f_{2n-1}^{(i)} \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} \sin \phi_n & \cos \phi_n \\ \cos \phi_n & -\sin \phi_n \end{vmatrix} \sqrt{1 - s_n}; \quad \phi_n = \beta \ln \frac{1 - s_n}{1 + s_n}, \quad (2.87)$$

где n – номер узла, компоненты вектора $f^{(i)}$ с номерами $2n - 1$ и $2n$ относятся к нормальному и касательному к плоскости трещины направлениям.

2°. Расчет узловых значений проекций раскрытия трещины на оси координат $\{u_x^{(i)}\}$, $\{u_y^{(i)}\}$, модулей векторов раскрытия трещины $u^{(i)}$ и усилий в связях $\sigma^{(i)}$

$$\begin{Bmatrix} u_x^{(i)} \\ u_y^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} c_x^{(i)} & 0 \\ 0 & c_y^{(i)} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} q_x^{(i)} \\ q_y^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

$$u^{(i)} = \sqrt{(u_x^{(i)})^T u_x^{(i)} + (u_y^{(i)})^T u_y^{(i)}}, \quad \sigma^{(i)} = \sqrt{(q_x^{(i)})^T q_x^{(i)} + (q_y^{(i)})^T q_y^{(i)}}, \quad (2.89)$$

где $q_x^{(i)}$, $q_y^{(i)}$ и $c_x^{(i)}$, $c_y^{(i)}$ – векторы размерности M , состоящие из компонент усилий в связях и податливостей связей соответственно.

3°. При выполнении условия перехода в область нелинейной зависимости вида (1.70) в каждой узловой точке выполняется расчет модуля нового вектора усилий в связях $\bar{\sigma}^{(i)}$, определяемого нелинейным законом деформирования связей из соотношения

$$\{\bar{\sigma}^{(i)}\} = \begin{cases} \{\sigma^{(i)}\}, & u_n^{(i)} < u_m \\ \left\{ \frac{u_m}{c_b(s)} \right\}^T \left\{ \Phi \left(\frac{u^{(i)}}{u_m} \right) \right\}, & u_n^{(i)} \geq u_m \end{cases}, \quad (2.90)$$

где n – номер узла в концевой области трещины, $c_b(s)$ – узловые значения эффективной (начальной) податливости связей, определяемые только на первом шаге решения ($i = 1$) из соотношения:

$$\{c_b\} = \left\{ \frac{\sigma^{(1)}}{u^{(1)}} \right\} \quad (2.91)$$

Значения $\sigma^{(1)}$ и $u^{(1)}$ определяются выражениями (2.89).

4°. В каждой узловой точке в предположении, что зависимость между модулем вектора усилий в связях и раскрытием трещины на участке $(0, \bar{\sigma}^{(i)})$ линейна, вычисляются эффективные значения податливостей связей, необходимые на следующей, $(i + 1)$ -й, итерации:

$$\{c_{x,y}^{(i+1)}\} = \left\{ \frac{c_{x,y}^{(i)}}{\alpha^{(i)}} \right\}, \quad \{\alpha^{(i)}\} = \left\{ \frac{\bar{\sigma}^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \right\}. \quad (2.92)$$

Начальная податливость связей может быть постоянной вдоль концевой области трещины, но после начала итерационного процесса податливость связей изменяется вдоль концевой области и зависит от формы кривой деформирования связей.

Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\max |\Delta_n^{(i)}| = \Delta^{(i)} \leq \Delta, \quad \Delta_n^{(i)} = 1 - \frac{\sigma_n^{(i)}}{\sigma_n^{(i-1)}}, \quad (2.93)$$

где $\sigma_n^{(i)}, \sigma_n^{(i-1)}$ – узловые значения модуля вектора усилий в связях, полученные на двух последовательных итерациях, Δ – параметр сходимости, устанавливаемый при расчете. При программной реализации алгоритма принимается, что $\Delta = 10^{-5}$.

Итерационный процесс является сходящимся, если в процессе итерационного решения величина $\Delta^{(i)}$ монотонно убывает. Расходимость решения возникает, если на итерации с номером $i + 1$ выполняется условие $\Delta^{(i+1)} > \Delta^{(i)}$. При выполнении этого условия итерационный процесс заканчивается. Последнее условие используется в разработанной вычислительной программе

в более “мягкой” форме: решение заканчивается, если выполняется неравенство $\Delta^{(i+1)} - \Delta^{(i)} > \theta$, где $\theta = z\Delta$, $z = 10 \div 100$. Выбор соответствующего значения z позволяет избежать остановки решения в случае медленной неустойчивой сходимости. Итерационный процесс оканчивается (до достижения сходимости по условию (2.93)) также, если раскрытие трещины на краю концевой области превышает величину u_{cr} , что соответствует невозможности статического равновесия концевой области для трещины заданной длины.

2.2.3. Кинетика связей в концевой области трещины на границе соединения материалов. Шаговая по времени схема расчета

При оценке времени зарождения дефекта на границе соединения материалов (формирования части трещины без связей) исходим из следующих допущений (ввиду симметрии задачи при одноосном растяжении рассматривается половина трещины, $0 \leq x \leq \ell$):

1) на границе соединения материалов в момент времени $t = 0$ существует начальная область ослабленных адгезионных связей длины ℓ , которая рассматривается как дефект-трещина с концевой областью длины $d(0) \leq \ell$ (связи занимают промежуток $\ell - d(0) \leq x \leq \ell$); если $d(0) < \ell$, то полагается, что в центре дефекта существует зона, свободная от связей (начальная трещина), длины $\ell - d(0)$);

2) плотность связей $n(x, t)$ в концевой области трещины зависит от времени и механических нагрузок, согласно соотношению (1.91);

3) формирование трещины, свободной от связей, в центре зоны ослабленных связей (или увеличение размера начальной трещины, если $d(0) < \ell$) происходит при снижении средней плотности связей до предельного значения на участке концевой области размера $\ell_f \leq d(0)$, примыкающем к ее краю. При выполнении этого условия полагается, что на участке длины ℓ_f связи полностью разорваны и исходная трещина длины ℓ имеет концевую

область длины $d(t_f) = d(0) - \ell_f$, примыкающую к ее вершине, а размер зоны, свободной от связей, равен $\ell - d(0) + \ell_f$. Здесь t_f - время формирования зоны, свободной от связей (время зарождения дефекта).

При выборе длины участка $\ell_f \ll d(0)$ полагаем, что формирование части трещины без связей происходит за один шаг размера ℓ_f . Если длина участка ℓ_f сопоставима с длиной начальной области ослабленных связей ℓ , то формирование части трещины без связей выполняется за M шагов, с шагом приращения длины трещины (сокращения концевой области), равным $\Delta\ell_f = \ell_f/M$. Размер зоны, свободной от связей, после i -го ($i = 1, 2, \dots, M$) шага развития дефекта (сокращения концевой области) составляет $\ell - d_i(t)$, где $d_i(t) = d(0) - i \Delta\ell_f$ - размер концевой области (зоны ослабленных связей). На каждом шаге приращения длины трещины реализуется шаговая по времени схема численного решения СИДУ для трещины с концевой областью. Полагаем, что первый шаг по времени для каждой длины концевой области трещины соответствует начальному моменту времени ($t = 0$). Начальная плотность связей вдоль концевой области трещины на каждом шаге сокращения ее длины полагается постоянной и равной средней плотности связей вдоль концевой области трещины, полученной на предыдущем шаге формирования трещины без связей. Изменение податливости связей вдоль концевой области трещины учитывается, исходя из соотношения (1.93). Относительная податливость связей в концевой области трещины c_0 (см. (2.20)) на каждом шаге приращения длины трещины, свободной от связей, (сокращения длины концевой области трещины) увеличивается в соответствии с уменьшением средней относительной плотности связей в концевой области. Такой подход, основанный на рассмотрении усредненных характеристик плотности связей в концевой области трещины, позволяет упростить алгоритм расчета и повысить устойчивость расчетной схемы. При значительном изменении податливости вдоль концевой области трещины численное решение СИДУ (2.69) становится неустойчивым [39].

Для шага формирования начальной трещины без связей с номером i рассмотрим последовательность вычислений на каждом временном шаге. Пусть $t_{i,f}$ - интервал времени, в течении которого выполняется расчет для размера концевой области трещины $d_{i-1}(t) = d(0) - (i-1)\Delta\ell_f$; по окончании временного расчета на шаге с номером i сокращения длины концевой области трещины (приращения длины начальной трещины без связей) размер концевой области составит $d_i(t) = d_{i-1}(t) - \Delta\ell_f$, где $i \geq 1$ - номер шага приращения длины трещины. Для $i = 1$ полагаем $d_0(t) = d(0)$. Число шагов по времени равно m , длительность одного шага по времени составляет $\Delta t = t_{i,f}/m$. Для каждого момента времени $t_j = \Delta t(j-1)$, $j = 1, 2, \dots, m+1$, выполняются следующие вычисления (при $j = 1$ в начальный момент времени $t_1 = 0$ полагаем, что $q_{x,y}(x, 0) = 0$, $\tau_b^{(i,0)} = \tau_0 e^{U_M/RT}$ и $\gamma_{i,1}(x, 0, \sigma_b) = 1$):

а) определяются долговечность связей $\tau_b^{(i,j-1)}(\sigma_b, x)$ и плотность связей $n_{i,j}(x, t)$ вдоль концевой области трещины длины $d_{i-1}(t)$

$$\tau_b^{(i,j-1)}(\sigma_b, x) = \tau_0 e^{(U_M - A_{M,i,j}(\sigma_b, x))/RT},$$

$$\gamma_{i,j}(x, t_j, \sigma_b) = e^{\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{(\Delta t(j-1))}{\tau_b^{(i,j-1)}(\sigma_b, x)} \quad (2.94)$$

$$n_{i,j}(x, t) = \frac{\bar{n}_i}{\gamma_{i,j}(x, t_j, \sigma_b)},$$

где $A_{M,i,j}(\sigma_b, x)$ - работа деформирования связей в концевой области трещины и \bar{n}_i - “начальная” средняя плотность связей на участке концевой области перед началом расчета по времени для i -го шага формирования части трещины без связей;

б) определяется податливость связей вдоль концевой области трещины длины $d_{i-1}(t)$

$$c_{i,j}(x, t_j, \sigma_b) = c_{0,i} \frac{\ell}{E_b} \gamma_{i,j}(x, t_j, \sigma_b), \quad (2.95)$$

где $c_{0,i}$ - относительная податливость связей на i -ом шаге приращения длины трещины, см. (3.5) и (2.103).

с) выполняется численное решение уравнения (2.69) с использованием коллокационной схемы и кусочно-квадратичной аппроксимации искомых функций на промежутке $\ell - d_{i-1}(t) \leq x \leq \ell$.

Работа деформирования связей (на 1 моль внутримолекулярных связей) $A_{M,i,j}(\sigma_b, x)$ определяется после решения СИДУ, расчета усилий в связях и раскрытия в концевой области трещины (для линейно-упругого закона деформирования связей)

$$A_{M,i,j}(\sigma_b, x) = \frac{N_A W_{i,j}(\sigma_b, x)}{n_{i,j}(x, t_j) \omega_j(x)} \quad (2.96)$$

$$W_{i,j}(\sigma_b, x) = 0.5 c_{i,j}(x, t, \sigma_b) \left[q_x^2(x, t_j) + q_y^2(x, t_j) \right], \quad (2.97)$$

$$\omega_j(x) = \sqrt{u_x^2(x, t_j) + u_y^2(x, t_j)} \Big|_{a_m}$$

Окончание расчета по времени для шага с номером i сокращения длины концевой области выполняется при выполнении одного из условий: снижения относительной плотности связей до предельного значения на участке длины $\Delta \ell_f$ или на краю концевой области в точке с координатой $x_1 = \ell - d_{i-1}(t)$ (см. ниже условие (2.104)) либо достижении предельной вытяжки связей на краю концевой области.

Критерий приращения длины трещины без связей (сокращения длины концевой области трещины), основанный на снижении относительной плотности связей до предельного значения, имеет вид

$$\bar{N}_i(t) \leq \bar{N}_{cr,i} \quad (2.98)$$

где $\bar{N}_i(t)$ средняя относительная плотность связей на i -ом шаге формирования трещины на участке концевой области трещины длины $\Delta \ell_f$, $\bar{N}_{cr,i}$ относительная критическая плотность связей для приращения трещины на шаге i . Критерий предельной вытяжки связей используется в виде [30, 31]

$$u(\ell - d_i(t)) = \delta_{cr}(t), \quad (2.99)$$

где $\delta_{cr}(t)$ - предельная вытяжка связей на краю концевой области трещины, зависящая, в общем случае, от времени.

В зависимости от допущений, принятых при расчете, возможны различные варианты вычисления параметров плотности связей в выражении (2.98). При пошаговом сокращении длины концевой области трещины и введении на каждом шаге нового значения средней плотности связей вдоль оставшейся части концевой области параметры, входящие в критерий (2.98), могут быть определены так

$$\bar{N}_i(t) = \frac{1}{\xi \bar{n}_{i-1}(t)} \int_{S_1}^{S_2} n_{i,j}(s,t) ds, \quad \bar{N}_{cr,i} = \frac{\bar{N}_{cr,i-1}}{\bar{N}_i^b(t)}, \quad (2.100)$$

где

$$S_1 = 1 - \xi_0 + (i-1)\xi, \quad S_2 = 1 - (\xi_0 - i\xi), \quad (2.101)$$

$$\xi = \Delta \ell_f / \ell, \quad \xi_0 = d(0)/\ell, \quad s = x/\ell$$

Здесь при вычислении средней относительной плотности связей $\bar{N}_i(t)$ выполняется нормировка величиной $\bar{n}_{i-1}(t)$ - средней плотностью связей в концевой области трещины, полученной на предыдущем шаге приращения длины дефекта. При $i = 1$ полагаем $\bar{n}_{i-1}(t) = n_0$; $n_{i,j}(s,t)$ - распределение плотности связей вдоль концевой области трещины при окончании шагов по времени; $\bar{N}_{cr,i-1} = n_{cr}/n_0$ при $i = 1$, где n_{cr} - начальная критическая плотность связей, $\bar{N}_i^b(t)$ - средняя относительная плотность связей на части концевой области трещины длины $d_i(t) = d(0) - i \Delta \ell_f$, сформировавшейся после рассматриваемого временного расчета, определяемая как

$$\bar{N}_i^b(t) = \frac{1}{(\xi_0 - i\xi) \bar{n}_{i-1}(t)} \int_{S_2}^1 n_{i,j}(s,t) ds, \quad (2.102)$$

где $\xi_0 - i\xi$ - относительная длина концевой области трещины после окончания шагов по времени, $S_2 = 1 - (\xi_0 - i\xi)$, $S_2 \leq s \leq 1$.

После окончания шагов по времени выполняется переход к следующему шагу приращения длины дефекта (при $M > 1$) и определяются параметры, необходимые перед началом $(i + 1)$ -го шага приращения длины части трещины без связей: $\bar{n}_{i+1}(t)$ - начальная средняя плотность связей и $c_{0,i+1}$ - начальная относительная податливость связей на участке концевой области трещины $d_i(t) = d(0) - i \Delta \ell_f$, сформированном по окончании i -го шага приращения длины дефекта-трещины

$$\bar{n}_{i+1}(t) = \bar{n}_i(t) \bar{N}_i^b(t), \quad c_{0,i+1} = \frac{c_{0,i}}{\bar{N}_i^b(t)} \quad (2.103)$$

Перед началом шагов приращения длины трещины ($i = 1$) полагаем $c_{0,i} = c_0$, где c_0 - начальная относительная податливость в концевой области трещины (см. (2.20)). Пересчет параметров задачи (2.100) и (2.103) при переходе к следующему шагу приращения длины дефекта позволяет учесть изменение податливости связей со временем. Отметим, что при вычислении параметров плотности связей с ростом дефекта из соотношений (2.100) - (2.103) абсолютное значение критической плотности связей, при которой образуется дефект, сохраняется постоянным.

При малой начальной податливости связей в концевой области трещины возможно также использование в качестве критерия сокращения размеров концевой области трещины ограничения на относительную величину плотности связей на краю концевой области в точке с координатой $s_1 = x_1/\ell$

$$\frac{n_{i,j}(s_1, t)}{\bar{n}_{i-1}(t)} \leq \lambda \bar{N}_{cr,i}, \quad (2.104)$$

где $n_{i,j}(s_1, t)$ - плотность связей на краю; $0 < \lambda \leq 1$ - безразмерный параметр, учитывающий скорость распада связей на краю концевой области.

Возможно также использование комбинированного критерия сокращения размеров концевой области трещины: на начальном этапе развития дефекта используются условия (2.98) или (2.104), а после частичного сокращения размеров концевой области и увеличения раскрытия трещины – условие

(2.99).

Время T развития трещины-дефекта вдоль зоны ослабленных связей и скорость роста трещины-дефекта w_i определяются так

$$T = \sum_{i=1}^M t_{i,f}, \quad w_i = \frac{\Delta \ell_f}{t_{i,f}} \quad (2.105)$$

Здесь $t_{i,f}$ - время, необходимое для увеличения части трещины без связей на i -ом шаге приращения ее длины.

2.2.4. Сходимость численного алгоритма. Сравнение с численно-аналитическими и экспериментальными результатами

Сходимость алгоритма при изменении числа узлов в концевой области трещины рассмотрена на задаче для трещины на границе соединения материалов при одноосном растяжении, относительном размере концевой области трещины $d/\ell = 0.2$, относительной податливости связей (2.20) $c_o = H/\ell = 0.1$ (эти параметры примерно соответствуют максимальным усилиям в концевой области трещины, см. подробнее в разделе 3.1.1) и следующих постоянных материалов подобластей: модули упругости $E_1 = 135$ ГПа, $E_2 = 25$ ГПа, коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, модуль упругости связей $E_b = E_2$. Параметр β при выбранных значениях постоянных материалов отрицателен и $|\beta|=0.0509313$. Податливости связей в нормальном и касательном направлениях полагались равными и постоянными вдоль концевой области трещины: $\gamma_1(s) = \gamma_2(s) = 1$. Компоненты раскрытия трещины в концевой области определялись из выражения (2.31) после решения СИДУ (2.69), а раскрытие трещины вне зоны связей определялось из выражений (2.34) и (2.35).

Составляющая раскрытия в касательном направлении вдоль трещины при различном числе элементов вдоль концевой области трещины приведена на рис. 2.2. При количестве элементов вдоль концевой области трещины $N > 8$ различие в результатах незначительное. Так как при одноосном растяжении составляющая раскрытия трещины в направлении приложения

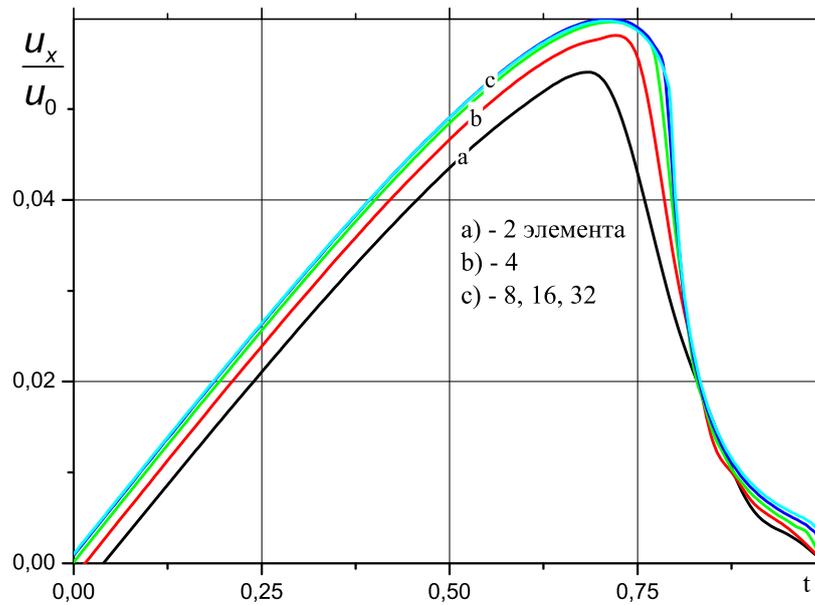


Рис. 2.2. Составляющая раскрытия трещины в касательном направлении, $t = x/\ell$

нагрузки значительно больше раскрытия трещины в касательном направлении и погрешность вычисления этой величины меньше. Значения компонент усилий на краю концевой области при $x = \ell - d$ в зависимости от числа элементов вдоль концевой области приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Усилия на краю концевой области в зависимости от числа элементов

Число элементов	q_x	q_y	$\sigma = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$
2	0.5548539	3.419231	3.463958
4	0.6729051	3.938787	3.995853
8	0.7539312	4.294380	4.360059
16	0.8062497	4.515183	4.586601
32	0.8390133	4.645142	4.720305
48	0.8521494	4.693944	4.770667
64	0.8580080	4.714821	4.792255

В работе [157], рассмотрена задача для трещины со связями в концевой области в однородном материале при одноосном растяжении, получены асимптотические выражения для раскрытия трещины на краю концевой области и КИН с учетом действия связей для случаев относительно “жестких”

и “мягких” связей. Для сопоставления с результатами работы [157] выполнено численное решение СИДУ (2.69) для трещины в однородном материале при одноосном растяжении, в предположении, что модули упругости материалов и связей в концевой области трещины одинаковы.

В Таблице 2.2 приведены нормированные значения раскрытия на краю концевой области трещины $\bar{u} = u(\ell - d) / u_0$ для относительно “жестких” связей ($c_0 < 0.1$), полученные в результате численного решения СИДУ (2.69), а также рассчитанные по асимптотическим формулам для полубесконечной трещины [157]. Асимптотические формулы [157] получены в предположении, что закон деформирования связей имеет вид $\sigma_{yy} = 0.5u E/H$ (u - полное раскрытие трещины в направлении приложения нагрузки), напряжения в связях равны величине внешней нагрузке $\sigma_{yy} = \sigma_0$ и в обозначениях данной работы имеют вид: а) трещина, заполненная связями

$$u(\ell - d) = \frac{2H\sigma_0}{E_b}, \quad \bar{u} = 0.5c_0, \quad c_0 = \frac{H}{\ell} \quad (2.106)$$

б) частичное заполнения трещины связями ($d < \ell$)

$$u(\ell - d) = \frac{2H\sigma_0}{E_b} \sqrt{\frac{\pi(\ell - d)}{H}}, \quad \bar{u} = 0.5c_0 \sqrt{\frac{\pi}{c_0}(1 - t)}, \quad t = \frac{d}{\ell} \quad (2.107)$$

Нормировка выполнена величиной раскрытия в центре трещины в однородном материале без связей $u_0 = 4\sigma_0 E/\ell$ (см. выражение (1.5) при $\beta = 0$, $x = 0$).

В диапазоне относительных податливостей $0.025 \leq c_0 \leq 0.1$ численные результаты удовлетворительно согласуются с расчетом по асимптотическим формулам (2.106)-(2.107) для рассмотренных размеров концевых областей. Для трещины, заполненной связями, численные результаты согласуются с расчетом по асимптотической формуле (2.106) в широком диапазоне относительных податливостей, причем при $c_0 \rightarrow 0$ результаты расчетов практически совпадают с асимптотическим выражением (2.106). При частичном заполнении трещины связями ($d < \ell$) и $c_0 < 0.025$ возникают значительные отклонения от асимптотического выражения (2.107), ввиду существенно

неоднородного распределения усилий в связях в концевой области трещины (см. подробнее в разделе 3.1.1).

Таблица 2.2. Зависимость раскрытия на краю концевой области трещины, $\bar{u} = u(\ell - d)/u_0$ от относительной податливости связей c_0 . Сравнение с асимптотическим решением

относит. податл. $c_0 = \frac{H}{\ell}$	$d/\ell = 1.0$		$d/\ell = 0.5$		$d/\ell = 0.3$	
	работа [157]	уравн. (2.69)	работа [157]	уравн. (2.69)	работа [157]	уравн. (2.69)
0.1000	0.05	0.048	0.198	0.193	0.234	0.224
0.0500	0.025	0.0243	0.140	0.131	0.166	0.157
0.0250	0.0125	0.0123	0.0991	0.0855	0.117	0.106
0.0125	0.00625	0.00623	0.0701	0.0537	0.0829	0.0691
0.0010	0.0005	0.0005	0.0198	0.0065	0.0234	0.0096

Для относительно “мягких” связей ($c_0 \gg 1$) в Таблице 2.3 приведены нормированные значения коэффициента интенсивности напряжений, полученные в результате численного решения СИДУ (2.69), а также рассчитанные по формулам, аппроксимирующим численное решение интегрального уравнения для случая мягких связей в концевой области трещины [157], которые в обозначениях данной работы имеют вид

$$\bar{K} = 1 - \frac{4t}{\pi c_0} + A_t \left(\frac{t}{c_0} \right)^2, \quad t = \frac{d}{\ell} \quad (2.108)$$

Здесь t - относительная длина концевой области трещины, значения коэффициента A_t зависят от длины концевой области трещины [157] и приведены в таблице 2.3.

Удовлетворительное совпадение результатов, полученных на основе численного решения СИДУ (2.69), и результатов работы [157] наблюдается уже при $c_0 \geq 5$, несмотря на то, что выражение (2.108) справедливо для относительно “мягких” связей.

Таблица 2.3. Зависимость нормированных значений коэффициента интенсивности напряжений, $\bar{K} = K/\sigma_0 \sqrt{\pi\ell}$ от относительной податливости связей c_0

относит. податл. $c_0 = \frac{H}{\ell}$	$d/\ell = 1.0$		$d/\ell = 0.5$		$d/\ell = 0.3$	
	работа [157]	уравнение (2.69)	работа [157]	уравнение (2.69)	работа [157]	уравнение (2.69)
	$A_t = 2.11$		$A_t = 1.87$		$A_t = 1.696$	
2	0.891	0.682	0.799	0.789	0.850	0.858
5	0.830	0.829	0.891	0.901	0.930	0.937
10	0.894	0.903	0.941	0.947	0.963	0.967
15	0.925	0.932	0.960	0.964	0.975	0.978
20	0.942	0.948	0.969	0.973	0.981	0.983
25	0.952	0.958	0.975	0.978	0.985	0.987
30	0.960	0.965	0.979	0.982	0.987	0.989
40	0.969	0.973	0.984	0.986	0.991	0.992
50	0.975	0.978	0.987	0.989	0.992	0.993

Таблица 2.4. Раскрытие в центре трещины, заполненной связями и КИН, к сопоставлению с результатами эксперимента [221], $\delta_c \approx 0.3 \cdot 10^{-6}$ м

Число элементов	$u_y(0) \cdot 10^{-6}$ м		$K/\sigma_0 \sqrt{\pi\ell}$	
	п.н.с.	п.д.с.	п.н.с.	п.д.с.
8	0.278	0.276	0.330	0.360
16	0.284	0.282	0.274	0.286
32	0.287	0.285	0.243	0.250
48	0.288	0.286	0.222	0.235
64	0.289	0.287	0.216	0.229

Результаты экспериментального исследования распределений напряжений и раскрытия трещин для различных вариантов описания модели концевой области трещины приведены в ряде работ [221–227]. Для сопоставления расчетных результатов, полученных данной работе, и результатов измерений, используются материалы работы [221], где приведены результаты экспериментального определения раскрытия трещины, заполненной связями, методом просвечивающей электронной микроскопии. Рассматривалась пленка из полистирола (модуль упругости $E = 1.68$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$) с трещиной длиной $2\ell = 2 \cdot 10^{-4}$ м, внешняя нагрузка $\sigma_0 = 30$ МПа. Определенно в эксперименте раскрытие в центре трещины составляет $\delta_c \approx 0.3 \cdot 10^{-6}$ м. Жесткость связей в концевой области трещины, соответствующая экспериментальным результатам [221], получена в работе [228]: $\kappa = 10^8$ МПа/м. Используя известное значение жесткости связей κ , определим относительную податливость связей в концевой области трещины (см. (1.33) и (2.20)), полагаем при этом, что модуль упругости связей равен модулю упругости материала $E_b = 1.68$ ГПа

$$c_0 = \frac{H}{\ell} = \frac{E_b}{\kappa\ell} = 0.168$$

Расчет методом СИДУ выполнен при указанных параметрах материала, концевой области трещины и внешней нагрузки. Рассматривалась пластина с прямолинейной трещиной, состоящая из двух полуплоскостей из одинаковых материалов, $E_1 = E_2$. Податливость связей в направлении, нормальном к приложению нагрузки, полагалась постоянной вдоль концевой области трещины: $\gamma_1(s) = 1$. Результаты расчетов раскрытия в центре трещины и КИН в вершине трещины приведены в таблице 2.4. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Результаты аналогичных расчетов приведены также в работе [228], где получены значения $u_y(0) = 0.280 \cdot 10^{-6}$ м и $K/\sigma_0 \sqrt{\pi\ell} = 0.252$ (для состояния плоской деформации).

2.3. Области конечного размера. Граничные интегральные уравнения для задач о трещинах со связями в концевой области на границах соединения материалов

Для численного анализа напряженно-деформированного состояния областей с трещинами используем прямой метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), который является одним из наиболее эффективных методов решения задач концентрации напряжений и механики разрушения [229]. Конструкция рассматривается как набор однородных подобластей, соединенных по криволинейным границам с трещинами, расположенными между подобластями. Такой подход позволяет рассматривать трещины в однородных телах при несимметричном нагружении [230], а также трещины на границе соединения материалов. Взаимодействие берегов трещины моделируется распределенными усилиями, приложенными к берегам трещины и зависящими от ее раскрытия. Полагается, что концевая область является частью трещины, а коэффициенты интенсивности напряжений определяются в вершине (вдоль фронта) трещины, совпадающей с вершиной (фронтом) концевой области. Приведено сопоставление результатов расчетов методами ГИУ и СИДУ для трещины на границе соединения двух полуплоскостей из различных материалов.

2.3.1. Граничные интегральные уравнения для кусочно-однородных областей с трещинами на границах соединения материалов

При отсутствии массовых сил граничные интегральные уравнения теории упругости для каждой однородной подобласти двумерной или пространственной конструкции имеют вид [229]

$$c_{ij}(p) u_i(p) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(q, p) t_i(q) - F_{ij}(q, p) u_i(q)] d\Gamma(q), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.109)$$

где точки p и q принадлежат границе подобласти Γ , $u_i(q)$ перемещения и $t_i(q)$ усилия на границе подобласти, $c_{ij}(p)$ - функции, зависящие от локальной геометрии в точке p , для гладкой границы $c_{ij}(p) = 0.5\delta_{ij}$.

В ГИУ (2.109) используются фундаментальные решения Кельвина для однородного изотропного тела, которые для двумерных и пространственных задач теории упругости имеют вид [229]

$$G_{ij}(q, p) = C_1 \left\{ C_2 \delta_{ij} \left[(3 - m) \ln r - \frac{m - 2}{r} \right] - r_{,i} r_{,j} \left[(3 - m) + \frac{m - 2}{r} \right] \right\} \quad (2.110)$$

$$F_{ij}(q, p) = \frac{C_3}{(m - 1) r^{m-1}} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (C_4 \delta_{ij} + m r_{,i} r_{,j}) + C_4 (r_{,j} n_i - r_{,i} n_j) \right], \quad (2.111)$$

где $m = 2; 3$, для двумерных и трехмерных задач, соответственно,

$$C_1 = -\frac{1 + \nu}{4\pi E (1 - \nu)}, \quad C_2 = 3 - 4\nu, \quad C_3 = -\frac{1}{4\pi (1 - \nu)}, \quad C_4 = 1 - 2\nu \quad (2.112)$$

В выражениях (2.110)-(2.112) приняты следующие обозначения: E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона материала подобласти и $r = r(q, p)$ - расстояние между точками q и p на границе подобласти

$$r(q, p) = \sqrt{(x_{1q} - x_{1p})^2 + (x_{2q} - x_{2p})^2} \quad (2.113)$$

Дифференцирование в выражениях (2.110)-(2.111) выполняется по координатам точки q

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_{qi}} = \frac{x_{qi} - x_{pi}}{r}$$

Производная по направлению вектора внешней нормали в точке q определяется выражением

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,k} n_k,$$

где n_k - компоненты вектора внешней нормали в точке q .

Выражения (2.110) и (2.112) будут справедливы также для плоского напряженного состояния при замене параметров E, ν на E_1, ν_1

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 + \nu}, \quad E_1 = E (1 - \nu_1^2)$$

На участках идеального контакта подобластей выполняются условия непрерывности для перемещений и равновесия для усилий

$$u_i^k(q) = u_i^n(q), \quad t_i^k(q) = -t_i^n(q) \quad (2.114)$$

Здесь k и n - номера соседних подобластей.

При решении пространственных задач теории упругости возможно рассмотрение анизотропных структур, с использованием фундаментальных решений, учитывающих анизотропию свойств материалов [231]. В этом случае форма ГИУ (2.109) остается без изменений, но фундаментальные решения определяются численно, с учетом анизотропии свойств материалов [63, 232]. Для структур, обладающих осевой симметрией относительно геометрии поверхности и внешних нагрузок, уравнение (2.109) также сохраняет свою форму, но в этом случае Γ есть линия, которая при вращении вокруг оси симметрии Z , образует поверхность S подобласти с осевой симметрией. Индекс i соответствует радиальному направлению r , индекс j - осевому направлению Z подобласти с осевой симметрией. Фундаментальные решения для задачи теории упругости с осевой симметрией представляют собой перемещения $G_{ij}(q, p)$ и усилия $F_{ij}(q, p)$ в точке p в направлении оси Z от действия единичной кольцевой нагрузки в направлении оси r , приложенной в точке q . Выражение для $G_{ij}(q, p)$ получается интегрированием (2.110) при $m = 3$ по окружности для радиальных и осевых нагрузок. Дифференцирование соотношений упругости для выражения $G_{ij}(q, p)$ в цилиндрических координатах относительно r и Z дает выражение для $F_{ij}(q, p)$ в задаче теории упругости с осевой симметрией [229, 233].

Задачи термоупругости рассматриваются в статической или несвязанной квазистатической постановке. Первым этапом решения задачи термоупругости является решение стационарной или нестационарной задачи теплопроводности. Для решения этой задачи используется формулировка ГИУ задачи теплопроводности без вычисления интегралов по объему тела и ша-

говаяя (при решении нестационарных задач) схема расчета по времени [234]. Для нестационарной задачи теплопроводности ГИУ для каждой однородной подобласти конструкции имеет вид

$$c(p)\theta(p, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [\Theta(q, p, t_f, t)\varphi(q, t) - Q(q, p, t_f, t)\theta(q, t)]d\Gamma(q) dt - \int_V Q(q, p, t_f, t_0)\theta_0(q, t) dV(q) \quad (2.115)$$

где $\theta(q, t)$ и $\varphi(q, t)$ температура и тепловой поток на границе подобласти, t - время, t_0 и t_f - начальный и конечный моменты времени, $\Theta(q, p, t_f, t)$ и $Q(q, p, t_f, t)$ - фундаментальные решения для задачи нестационарной теплопроводности [234], $c(p)$ зависит от локальной геометрии в точке p , последнее слагаемое в (2.115) учитывает вклад начального распределения температур θ_0 .

На участках идеального контакта подобластей для температуры и теплового потока, выполняются условия аналогичные (2.114)

$$\theta^k(q, t) = \theta^n(q, t), \quad \varphi^k(q, t) = -\varphi^n(q, t)$$

Результаты решения задачи теплопроводности используются как начальные данные для решения задачи термоупругости.

Для несвязанной квазистатической нестационарной задачи термоупругости ГИУ для каждой однородной подобласти конструкции имеет вид

$$c_{ij}(p)u_i(p, t_f) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(q, p)t_i(q, t) - F_{ij}(q, p)u_i(q, t)]d\Gamma(q) dt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [Z_j(q, p, t_f, t)\varphi(q, t) - R_j(q, p, t_f, t)\theta(q, t)]d\Gamma(q) dt \quad (2.116)$$

В уравнении (2.116) $G_{ij}(q, p)$ и $F_{ij}(q, p)$ - фундаментальные решения статической задачи теории упругости (2.110) и (2.111), $Z_j(q, p, t_f, t)$ и $R_j(q, p, t_f, t)$ - фундаментальные решения для нестационарной задачи термоупругости, учитывающие вклад в напряженно-деформированное состояние температуры и теплового потока [235], $u_i(q, t)$ и $t_i(q, t)$ - перемещения и усилия на

границе подобласти (далее при описании перемещений и усилий переменную t опускаем).

Отметим, что уравнение (2.116) не содержит интегралов по объему тела в случае постоянной начальной температуры.

На участках границ подобластей, содержащих трещины со свободными от связей берегами, перемещения в каждой подобласти рассматриваются как независимые переменные. Дополнительные условия (заменяющие условия (2.114)) вводятся при наличии связей между берегами в концевой области трещины (обобщенный закон деформирования связей)

$$t_i(q) = \kappa_i(q, \sigma) \Delta u_i(q), \quad \Delta u_i(q) = u_i^k - u_i^n, \quad \kappa_i(q, \sigma) = \gamma_i(q, \sigma) \frac{E_b}{H} \quad (2.117)$$

Здесь $i = 1, 2$ соответствует касательному и нормальному к плоскости трещины направлениям (двумерная задача). Полагаем, что система координат определяется в подобласти с меньшим номером M , так что $M = \min(n, k)$, $t_i(q)$ и $\Delta u_i(q)$ - компоненты вектора усилий и раскрытия трещины в локальной системе координат, $\kappa(p, \sigma)$ - жесткость связей в концевой области трещины, зависящая от положения точки p вдоль концевой области трещины и натяжения связей, $\gamma_i(q, \sigma) = 1/\varphi_{1,2}(s, \sigma)$ - безразмерные функции (см. выражение (1.33)). Если жесткость связей в концевой области трещины не зависит от натяжения связи, то зависимости (2.117) определяют линейно-упругий закон деформирования связей.

Другой вариант дополнительных условий на участках соединения подобластей в концевой области трещины соответствует разупрочнению связей

$$t_i(q) = \bar{t}_i - \kappa_i(q, \sigma) \Delta u_i(q), \quad \Delta u_i(q) = u_i^k - u_i^n \quad (2.118)$$

Здесь \bar{t}_i - заданные величины. При жесткости связей, не зависящей от ее натяжения σ , получаем уравнение для линейного разупрочнения, причем параметры \bar{t}_i и κ_i связаны выражением

$$u_i^{cr} = \frac{\bar{t}_i}{\kappa_i} \quad (2.119)$$

где u_i^{cr} - компоненты критической длины связи в нормальном и касательном направлениях.

При решении трехмерных задач к уравнениям (2.117)-(2.118) добавляется еще одно уравнение для тангенциальной компоненты усилий в связях.

2.3.2. Аппроксимация переменных задачи и моделирование асимптотических распределений перемещений и напряжений вблизи трещин

Для численного решения ГИУ используем изопараметрические квадратичные граничные элементы и специальные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение переменных (перемещений и поверхностных усилий) с $m^2 - 1$ узлами, $m = 2, 3$ - для двумерных (плоских и осесимметричных) и трехмерных задач, соответственно. При решении нестационарных задач теплопроводности и термоупругости вводится также дискретизация по времени. Временной интервал (t_0, t_f) разбивается на K_0 участков (временных элементов), на которых функции задач теплопроводности и термоупругости полагаются постоянными. Интегрирование фундаментальных решений ГИУ (2.115) и (2.116) по времени при такой аппроксимации переменных выполняется аналитически.

Дискретизация границ подобластей и аппроксимация переменных позволяет заменить вычисление интегралов по всей поверхности подобласти в ГИУ (2.109), (2.115) и (2.116) суммой интегралов по совокупности граничных элементов, представляющих поверхность подобласти, и получить для каждой точки коллокации p дискретное представление ГИУ. При этом возникает необходимость вычисления интегралов вида

$$J_k(p) = \int_{\Gamma_e} Z(q(\xi), p) N_k(\xi) d\Gamma_e, \quad (2.120)$$

где p - точка коллокации, для которой формируется дискретное представление ГИУ, $|\xi| \leq 1$ - параметрическая координата в пределах элемента, $Z(q(\xi), p)$ -

какая-либо компонента фундаментального решения ГИУ, $N_k(\xi)$ - функция формы узла с номером k ($k = 1, 2, 3$) граничного элемента e .

Сингулярное поведение фундаментальных решений ГИУ проявляется, в основном, при вычислении интегралов вида (2.120) по элементам, содержащим точку коллокации p . Ввиду этого рассматривается два случая расположения точки p : а) $p \notin e$, б) $p \in e$, здесь e - граничный элемент, по которому выполняется интегрирование. В первом случае подынтегральные функции в (2.120) ограничены и интегрирование выполняется по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра с учетом сгущения точек интегрирования в направлении точки коллокации [236, 237].

В двумерной задаче при $p \in e$ фундаментальное решение для перемещений $G_{ij}(q, p)$ содержит слабую логарифмическую особенность и интегралы в дискретном представлении ГИУ, содержащие эту функцию, вычисляются с использованием квадратурной формулы с логарифмической весовой функцией (n - порядок квадратурной формулы)

$$\int_0^1 f(\xi) \ln \frac{1}{\xi} d\xi = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(\xi_i) f(\xi_i) \quad (2.121)$$

В трехмерной задаче фундаментальное решение $G_{ij}(q, p)$ имеет слабую степенную особенность и соответствующие интегралы вычисляются с использованием специального преобразования координат. Фундаментальное решение для поверхностных усилий $F_{ij}(q, p)$ является сильно сингулярным, и вычисление суммы соответствующих интегралов и параметров $c_{ij}(p)$ выполняется косвенным путем, исходя из рассмотрения смещения тела как жесткого целого, см. описание алгоритма численного интегрирования в [236, 237]. Методика вычисления интегралов в дискретной форме ГИУ для задач с осевой симметрией рассмотрена в [233].

Обходя последовательно узловые точки границ всех подобластей, получаем дискретное представление ГИУ. В каждой узловой точке границы

подобласти, не контактирующей с другими подобластями, имеется $2m$ переменных – m перемещений и m поверхностных усилий ($m = 2, 3$). В корректно поставленной задаче m переменных определяется из граничных условий задачи и решение ГИУ (2.109) позволяет найти остальные m неизвестных задачи. В каждой узловой точке на участках соединения двух подобластей имеем $4m$ переменных, из которых $2m$ неизвестных определяются из решения ГИУ, а остальные $2m$ неизвестных исключаются с использованием условий непрерывности и равновесия (2.114) при идеальном контакте подобластей или с использованием закона деформирования связей (2.117)-(2.118) для участков со связями между подобластями. В последнем случае, для трещин со связями, расположенных на границе подобластей, в качестве неизвестных, определяемых из решения ГИУ, выбираем перемещения берегов трещины. Усилия в связях вычисляются исходя из соотношений (2.117)-(2.118) после определения неизвестных узловых переменных.

Моделирование асимптотики перемещений вблизи вершины трещины при использовании изопараметрических элементов (для которых функции формы для описания переменных задачи и геометрии поверхности тела одинаковы) выполняется посредством расположения промежуточного узла квадратичного изопараметрического элемента, примыкающего к вершине трещины, на расстоянии от вершины трещины равном 0.25 длины этого элемента. Такой способ моделирования асимптотики перемещений вблизи вершины трещины был первоначально предложен и использован в методе конечных элементов и распространен на задачи, решаемые МГЭ с учетом того, что в последнем случае перемещения и поверхностные усилия моделируются независимо [230, 237]. В данной работе изопараметрические граничные элементы со смещенным промежуточным узлом используются для моделирования асимптотик перемещений и поверхностных усилий для трещин со связями на границе соединения материалов.

Рассмотрим применение таких элементов на примере двумерной зада-

чи. В локальной системе координат с началом в вершине трещины и осью ρ , направленной вдоль граничных элементов, расположенных на берегах трещины ($\theta = \pm\pi$) в зоне связей, или на продолжении трещины за ее вершиной ($\theta = 0$) и примыкающих к вершине трещины, можно записать ($|\xi| \leq 1$, $\rho = 0$ - соответствует положению вершины трещины)

$$\rho(\xi) = N_k(\xi)\rho_k, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0.25L, \quad \rho_3 = L \quad (2.122)$$

где L - длина граничного элемента, примыкающего в вершине трещины (длины граничных элементов при $\theta = \pm\pi$ и $\theta = 0$ полагаем одинаковыми), $\rho_{1,2,3}$ - координаты узлов этого элемента, ξ - параметрическая координата вдоль элемента, N_k - функции формы трехузлового квадратичного элемента

$$N_1(\xi) = -0.5\xi(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2, \quad N_3(\xi) = 0.5\xi(1 + \xi) \quad (2.123)$$

Подставляя выражения (2.123) в (2.122), получаем зависимость локальной координаты вдоль элемента от параметра ρ

$$\frac{\rho(\xi)}{L} = \frac{(1 + \xi)^2}{4}, \quad \xi(\rho) = -1 + 2\sqrt{\frac{\rho}{L}} \quad (2.124)$$

Распределения перемещений u_i и поверхностных усилий t_i на изопараметрическом граничном элементе также описывается выражениями, аналогичными (2.122)

$$u_i(\xi) = N_k(\xi)u_{ik}, \quad t_i(\xi) = N_k(\xi)t_{ik}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.125)$$

Подставляя зависимость (2.124) в первое из выражений в (2.125), получаем распределение перемещений на граничном элементе, примыкающем в вершине трещины, с учетом корневой асимптотики

$$u_i(\rho) = A_{i,1} + A_{i,2}\sqrt{\rho} + A_{i,3}\rho, \quad i = 1, 2 \quad (2.126)$$

где коэффициенты A_{ik} являются функциями узловых перемещений и длины граничного элемента

$$A_{i,1} = u_{1i}, \quad A_{i,2} = \frac{-3u_{1i} + 4u_{2i} - u_{3i}}{\sqrt{L}}, \quad A_{i,3} = \frac{2u_{1i} - 4u_{2i} + 2u_{3i}}{L} \quad (2.127)$$

При дискретизации поверхностей трещины в концевой области ($\theta = \pm\pi$) выполняется сдвиг промежуточных узлов на квадратичных элементах, примыкающих к вершине трещины, что соответствует внесению в дискретную модель асимптотического представления (2.126).

Так как используются изопараметрические граничные элементы, то выражение, аналогичное (2.126), справедливо также и для распределения поверхностных усилий на элементе, расположенном на продолжении трещины за ее вершиной

$$t_i(\rho) = B_{i,1} + B_{i,2} \sqrt{\rho} + B_{i,3} \rho, \quad i = 1, 2, \quad (2.128)$$

тогда как известное асимптотическое распределение напряжений на продолжении трещины имеет вид $t_i \sim \rho^{-0.5}$.

Для внесения асимптотики $t_i \sim \rho^{-0.5}$ в распределение усилий на граничном элементе при $\theta = 0$, умножим правую часть уравнения для распределения усилий (2.128) на специальный множитель (полагаем, что вершина трещины расположена в узле с параметрической координатой $\xi_1 = -1$)

$$\sqrt{\frac{L}{\rho}} = \frac{2}{1 + \xi} \quad (2.129)$$

Тогда второе соотношение в выражениях (2.125) принимает вид

$$t_i(\rho) = \frac{B_{i,1}}{\sqrt{\rho}} + B_{i,2} + B_{i,3} \sqrt{\rho}, \quad i = 1, 2, \quad (2.130)$$

где коэффициенты $B_{i,k}$ зависят от значений узловых усилий и длины граничного элемента

$$B_{i,1} = \bar{t}_{i,1} \sqrt{L}, \quad B_{i,2} = -3\bar{t}_{i,1} + 4\bar{t}_{i,2} - \bar{t}_{i,3}, \quad B_{i,3} = \frac{2\bar{t}_{i,1} - 4\bar{t}_{i,2} + 2\bar{t}_{i,3}}{\sqrt{L}} \quad (2.131)$$

Здесь $\bar{t}_{k,i}$ - модифицированные после преобразования (2.129) значения узловых усилий на граничном элементе, примыкающем в вершине трещины

$$\bar{t}_{i,1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} t_{i,1} \sqrt{\frac{\rho}{L}}, \quad \bar{t}_{i,2} = \frac{t_{i,2}}{2}, \quad \bar{t}_{i,3} = t_{i,3}, \quad i = 1, 2 \quad (2.132)$$

Из выражений (2.129)-(2.130) следует, что преобразование для моделирования асимптотики поверхностных усилий эквивалентно использованию модифицированных функций формы для описания поверхностных усилий на элементе, примыкающем к вершине трещины

$$N_k^{(i)}(\xi) = \frac{2N_k(\xi)}{1 \pm \xi}, \quad i = 1, 2; k = 1, 2, 3, \quad (2.133)$$

где знак в знаменателе определяется в зависимости от ориентации элемента относительно вершины трещины (верхнее значение в формуле (2.133) выбирается, если вершина трещины расположена в узле с параметрической координатой $\xi_1 = -1$, а нижнее – при $\xi_3 = +1$).

Отметим, что осциллирующие множители, присутствующие в асимптотических выражениях (1.4) и (1.5) не включены в описание специальных граничных элементов в вершине трещины, так как модуль КИН

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$$

не зависит от этих параметров.

Модуль КИН на границе соединения материалов может быть определен как из выражения для компонент раскрытия трещины (1.20) ($K_u \equiv K$)

$$K_u = \frac{2ch(\pi\beta) \sqrt{1 + 4\beta^2}}{A} \sqrt{\frac{2\pi(\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2)}{\rho}}, \quad (2.134)$$

так и из первого соотношения в (1.15) по напряжениям близи трещины на ее продолжении ($K_\sigma \equiv K$)

$$K_\sigma = \sqrt{2\pi\rho} \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2} \quad (2.135)$$

Полагая $\rho = 0.25L$ в выражении (2.134), получим КИН по перемещениям промежуточного узла квадратичного граничного элемента, примыкающего к вершине трещины

$$K_u(0.25L) = \frac{4ch(\pi\beta) \sqrt{1 + 4\beta^2}}{A} \sqrt{\frac{2\pi(\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2)}{L}}, \quad (2.136)$$

где $\Delta u_{x,y}$ - компоненты раскрытия трещины в промежуточном узле элемента.

По терминологии, предложенной в [238], это - одноточечная формула для вычисления КИН на основе перемещений.

Другое выражение для вычисления модуля КИН на границе соединения материалов получаем линейной экстраполяцией в вершину трещины ($\rho = 0$) значений модуля КИН, вычисленных в промежуточном узле элемента ($\rho = 0.25L$) и на краю элемента ($\rho = L$)

$$K_u|_{\rho=0} = \frac{4K_u(0.25L) - K_u(L)}{3}, \quad (2.137)$$

где $K_u(L)$ определяется из выражения (2.134) при $\rho = L$.

При использовании на продолжении трещины специальных граничных элементов с учетом асимптотики напряжений модуль КИН можно также определить по значениям усилий на элементе, примыкающем к вершине трещины [238]. Из выражений (2.129)-(2.133) получаем для распределения усилий на элементе, примыкающем к вершине трещины

$$t_i = N_k(\xi) \bar{t}_{ik} \sqrt{\frac{L}{\rho}}, \quad i = 1, 2; k = 1, 2, 3 \quad (2.138)$$

Аналогичное выражение справедливо и для модуля вектора усилий. Таким образом, модуль КИН определяется из выражения (2.135)) (в местной системе координат элемента полагаем $\sigma_{xy} \equiv \bar{t}_{x,1}$ и $\sigma_{yy} \equiv \bar{t}_{y,1}$)

$$K_\sigma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\frac{L}{\rho}} \sqrt{2\pi\rho} \sqrt{\bar{t}_{x,1}^2 + \bar{t}_{y,1}^2} \quad (2.139)$$

Откуда следует, что

$$K_t = \sqrt{2\pi L} \sqrt{\bar{t}_{x,1}^2 + \bar{t}_{y,1}^2} = T_1 \sqrt{2\pi L} \quad (2.140)$$

где $\bar{t}_{x,1}, \bar{t}_{y,1}$ - значения усилий в вершине трещины, полученные с учетом модификации (2.138), $T_1 = \sqrt{\bar{t}_{x,1}^2 + \bar{t}_{y,1}^2}$ - модуль вектора усилий в вершине трещины.

Так же, как и при рассмотрении вычисления модуля КИН по перемещениям, можно получить выражения для модуля КИН, линейно экстраполированные в вершину трещины

$$K_t|_{\rho=0} = \frac{4K_t(0.25L) - K_t(L)}{3} \quad (2.141)$$

Здесь $K_t(0.25L)$ и $K_t(L)$ определяются из выражения (1.15) при $\rho = 0.25L$ и $\rho = L$, соответственно

$$K_t(0.25L) = 0.5 \sqrt{2\pi L} \sqrt{\sigma_{xy,2}^2 + \sigma_{yy,2}^2}, \quad K_t(L) = \sqrt{2\pi L} \sqrt{\sigma_{xy,3}^2 + \sigma_{yy,3}^2} \quad (2.142)$$

где компоненты напряжений определяются во втором $(\sigma_{xy,2}, \sigma_{yy,2})$ и третьем $(\sigma_{xy,3}, \sigma_{yy,3})$ от вершины трещины узлах граничного элемента, примыкающего к вершине трещины.

Переходя к поверхностным усилиям в узлах элемента, получаем

$$K_t(0.25L) = 0.5T_2 \sqrt{2\pi L}, \quad K_t(L) = T_3 \sqrt{2\pi L} \quad (2.143)$$

где $T_{2,3}$ - модули векторов усилий, вычисленные во втором и третьем от вершины трещины узлах граничного элемента.

Из выражения (2.138), записанного для второго узла элемента ($\xi = 0, N_1 = N_3 = 0, N_2 = 1$) следует, что значение поверхностного усилия в этом узле элемента t_i равно удвоенной величине вычисленного узлового значения $\bar{t}_{i,2}$.

С учетом этого, для второго и третьего узла элемента запишем ($i = 1, 2 \equiv x, y$)

$$t_i = 2\bar{t}_{i,2}, \quad T_2 = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = 2 \sqrt{\bar{t}_{x,2}^2 + \bar{t}_{y,2}^2}, \quad T_3 = \sqrt{\bar{t}_{x,3}^2 + \bar{t}_{y,3}^2} \quad (2.144)$$

В итоге, формула (2.141) принимает вид

$$K_t|_{\rho=0} = \frac{4T_2 - T_3}{3} \sqrt{2\pi L} \quad (2.145)$$

Далее, для краткости, будем называть формулы для расчета модуля КИН по перемещениям (2.136) и (2.137) - одноточечная формула (ОПФ) и двухточечная формула (ДПФ), соответственно, а аналогичные одноточечные и

двухточечные формулы при вычислениях модуля КИН по усилиям (2.140) и (2.145) - ОУФ и ДУФ.

Формулы для вычисления модуля КИН, учитывающие усилия во всех узлах элемента, примыкающего к вершине трещины, можно получить из выражений (10) и (2.130). Значение усилий в точке с координатой ρ определяется выражением

$$t_i = \bar{t}_{i,1} \left(\sqrt{\frac{L}{\rho}} - 3 + 2 \sqrt{\frac{\rho}{L}} \right) + \bar{t}_{i,2} \left(4 - 4 \sqrt{\frac{\rho}{L}} \right) + \bar{t}_{i,3} \left(2 \sqrt{\frac{\rho}{L}} - 1 \right) \quad (2.146)$$

следующим из выражения (2.130).

Аналогичное выражение определяет величину модуля усилий. Подставляя соответствующее выражение в (1.15), получим

$$K_\sigma = \left[T_1 \left(1 - 3 \sqrt{\frac{\rho}{L}} + 2 \frac{\rho}{L} \right) + 4T_2 \left(\sqrt{\frac{\rho}{L}} - \frac{\rho}{L} \right) + T_3 \left(2 \frac{\rho}{L} - \sqrt{\frac{\rho}{L}} \right) \right] \sqrt{2\pi L} \quad (2.147)$$

При $\rho = 0, 0.25L, L$ получаем из соотношения (2.147) выражения (2.140) и (2.143).

2.3.3. Формирование дискретного представления граничных интегральных уравнений при наличии трещин со связями между подобластями

Рассмотрим формирование итоговой матрицы СЛАУ, соответствующей системе ГИУ (2.109), в задаче теории упругости для случая конструкции, состоящей из двух подобластей и содержащей трещину со связями в концевой области, занимающую часть границы соединения материалов (рис. 2.1). В этом случае $k = 1$ и $n = 2$ - номера соседних подобластей.

Матричное уравнение для каждой подобласти имеет вид

$$[\mathbf{T}] \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}] \{\mathbf{t}\}, \quad (2.148)$$

где матрицы $[\mathbf{G}]$ и $[\mathbf{T}]$ соответствуют фундаментальным решениям ГИУ (2.110) и (2.111), а $\{\mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{t}\}$ - векторы узловых перемещений и усилий.

Из выражений (2.110)-(2.111) следует, что коэффициенты матриц $[G]$ и $[T]$ значительно различаются по абсолютной величине, ввиду большого значения модуля упругости материалов, что может привести к плохой обусловленности итоговой матрицы. Для приведения коэффициентов матриц $[G]$ и $[T]$ к соизмеримому виду выполним преобразование

$$[\hat{T}] \{\hat{u}\} = [\hat{G}] \{t\} \quad (2.149)$$

Здесь

$$[\hat{T}] = [T] \frac{E}{\Theta}, \quad \{\hat{u}\} = \{u\} \Theta, \quad [\hat{G}] = [G] E, \quad \Theta = \frac{\hat{E}}{\hat{L}}, \quad (2.150)$$

где E - модуль упругости материала подобласти, \hat{L} - средний размер конструкции, \hat{E} - среднее значение модуля упругости конструкции.

После преобразования (2.150) коэффициенты матриц в уравнении (2.149) являются соизмеримыми по величине. Далее везде матрицы и векторы предполагаются нормированными, а дополнительные обозначения опускаем.

Разделим границу каждой подобласти на части, соответствующие внешней границе, идеальному контакту подобластей (условие (2.114)) и концевой области трещины (условие (2.117), которое может быть также использовано и при отсутствии трещины для расчета соединения подобластей связями). В последнем случае возможно отсутствие зоны идеального контакта подобластей. Обозначим подматрицы коэффициентов влияния (ПКВ) и части векторов узловых переменных в дискретном представлении ГИУ (2.109) следующим образом: ПКВ G^{kn} , T^{kn} - соответствуют фундаментальным решениям (2.110)-(2.111) и содержат коэффициенты для подобласти с номером k для участка этой подобласти, контактирующего с подобластью с номером n ; аналогично для частей векторов узловых перемещений u^{kn} и усилий на элементах t^{kn} .

Для каждой из двух подобластей конструкции можно записать матричное уравнение:

подобласть 1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}_c^{12} & \mathbf{T}_s^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{11} \\ \mathbf{u}_c^{12} \\ \mathbf{u}_s^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{11} & \mathbf{G}_c^{12} & \mathbf{G}_s^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^{11} \\ \mathbf{t}_c^{12} \\ \mathbf{t}_s^{12} \end{Bmatrix} \quad (2.151)$$

подобласть 2

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{22} & \mathbf{T}_c^{21} & \mathbf{T}_s^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{22} \\ \mathbf{u}_c^{21} \\ \mathbf{u}_s^{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{22} & \mathbf{G}_c^{21} & \mathbf{G}_s^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^{22} \\ \mathbf{t}_c^{21} \\ \mathbf{t}_s^{21} \end{Bmatrix} \quad (2.152)$$

В уравнениях (2.151)-(2.152) индексы c и s относятся к участкам соединения подобластей с условиями идеального контакта и со связями в концевой области трещины, соответственно. При вычислении ПКВ в (2.151)-(2.152) полагается, что на стыках элементов вектор перемещений является непрерывным, а вектор поверхностных усилий рассматривается с учетом возможной разрывности. Ввиду этого, размерность частей векторов узловых перемещений равна $2M_\alpha^k$, где M_α^k - число узлов на границе каждой подобласти, и соответствующая размерность ПКВ \mathbf{T}^{kn} равна $2M_\alpha^k \times 2M_\alpha^k$. Размерности частей векторов поверхностных усилий определяются как $6N_\alpha^k$, где N_α^k число элементов на границе подобласти. Соответствующая размерность ПКВ \mathbf{G}^{kn} составляет $6N_\alpha^k \times 2M_\alpha^k$. Здесь k - номер подобласти, α - определяет тип участка (внешняя границы, идеальный контакт, участок связей). При использовании квадратичных элементов - $M_\alpha^k = 2N_\alpha^k$.

Запишем уравнения (2.151)-(2.152) в развернутом виде с учетом условий на участках соединения подобластей. На участках идеального контакта подобластей (условие (2.114)) полагаем, что перемещения являются неизвестными, принадлежащими подобласти с бóльшим номером, а усилия являются неизвестными, принадлежащими подобласти с меньшим номером: т.е. в уравнении (2.151) для первой подобласти заменяем \mathbf{u}_c^{12} на \mathbf{u}_c^{21} , а в уравнении (2.152) для второй подобласти заменяем \mathbf{t}_c^{21} на $-\mathbf{t}_c^{12}$. Условия (2.117)

для подобластей имеют вид

$$\mathbf{t}_s^{12} = -\mathbf{K}(\mathbf{u}_s^{12} - \mathbf{u}_s^{21}), \quad \mathbf{t}_s^{21} = -\mathbf{t}_s^{12} \quad (2.153)$$

Получаем:

подобласть 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{11} \times \mathbf{u}^{11} + \mathbf{T}_c^{12} \times \mathbf{u}_c^{21} + \mathbf{T}_s^{12} \times \mathbf{u}_s^{12} = \\ \mathbf{G}^{11} \times \mathbf{t}^{11} + \mathbf{G}_c^{12} \times \mathbf{t}_c^{12} - \mathbf{G}_s^{12} \times \mathbf{K} \times (\mathbf{u}_s^{12} - \mathbf{u}_s^{21}) \end{aligned} \quad (2.154)$$

подобласть 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{22} \times \mathbf{u}^{22} + \mathbf{T}_c^{21} \times \mathbf{u}_c^{21} + \mathbf{T}_s^{21} \times \mathbf{u}_s^{21} = \\ \mathbf{G}^{22} \times \mathbf{t}^{22} - \mathbf{G}_c^{21} \times \mathbf{t}_c^{12} + \mathbf{G}_s^{21} \times \mathbf{K} \times (\mathbf{u}_s^{12} - \mathbf{u}_s^{21}) \end{aligned} \quad (2.155)$$

На участках концевой области трещины непараллельных осей глобальной системы координат коэффициенты влияния в ПКВ преобразуются на каждом элементе к местной системе координат элемента, определяющей ее внешней нормалью, а коэффициенты жесткости связей полагаются заданными в местной системе координат.

Внешние границы подобластей 1 и 2 разделим на участки с неизвестными $(\mathbf{u}_e^{11}, \mathbf{u}_e^{22}, \mathbf{t}_e^{11}, \mathbf{t}_e^{22})$ и заданными $(\bar{\mathbf{u}}^{11}, \bar{\mathbf{u}}^{22}, \bar{\mathbf{t}}^{11}, \bar{\mathbf{t}}^{22})$ перемещениями и усилиями. Соответствующие обозначения использованы и для подматриц этих участков.

Запишем уравнения для подобластей 1 и 2 с учетом объединения коэффициентов ПКВ на участках концевой области трещины:

подобласть 1

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_e^{11} & \bar{\mathbf{T}}^{11} & \mathbf{T}_c^{12} & \mathbf{T}_s^{12} + \mathbf{K}\mathbf{G}_s^{12} & -\mathbf{K}\mathbf{G}_s^{12} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_e^{11} \\ \bar{\mathbf{u}}^{11} \\ \mathbf{u}_c^{21} \\ \mathbf{u}_s^{12} \\ \mathbf{u}_s^{21} \end{array} \right\} = \\
 & = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}_e^{11} & \bar{\mathbf{G}}^{11} & \mathbf{G}_c^{12} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{t}^{11} \\ \bar{\mathbf{t}}^{11} \\ \mathbf{t}_c^{12} \end{array} \right\} =
 \end{aligned} \tag{2.156}$$

подобласть 2

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_e^{22} & \bar{\mathbf{T}}^{22} & \mathbf{T}_c^{21} & \mathbf{T}_s^{21} + \mathbf{K}\mathbf{G}_s^{21} & -\mathbf{K}\mathbf{G}_s^{21} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_e^{22} \\ \bar{\mathbf{u}}^{22} \\ \mathbf{u}_c^{21} \\ \mathbf{u}_s^{12} \\ \mathbf{u}_s^{21} \end{array} \right\} = \\
 & = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}_e^{22} & \bar{\mathbf{G}}^{22} & -\mathbf{G}_c^{22} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{t}^{22} \\ \bar{\mathbf{t}}^{22} \\ \mathbf{t}_c^{12} \end{array} \right\} =
 \end{aligned} \tag{2.157}$$

Объединим уравнения (2.156)-(2.157) в глобальную матрицу с учетом граничных условий на поверхностях подобластей 1 и 2

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{T}_e^{11}] & [\bar{\mathbf{T}}^{11}] & [\mathbf{T}_c^{12}] & [\mathbf{T}_s^{12} + \mathbf{K}\mathbf{G}_s^{12}] & [-\mathbf{K}\mathbf{G}_s^{12}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{T}_c^{21}] & [-\mathbf{K}\mathbf{G}_s^{21}] & [\mathbf{T}_s^{21} + \mathbf{K}\mathbf{G}_s^{21}] & [\mathbf{T}_e^{22}] & [\bar{\mathbf{T}}^{22}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e^{11} \\ \bar{\mathbf{u}}^{11} \\ \mathbf{u}_c^{21} \\ \mathbf{u}_s^{12} \\ \mathbf{u}_s^{21} \\ \mathbf{u}_e^{22} \\ \bar{\mathbf{u}}^{22} \end{Bmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} [\mathbf{G}_e^{11}] & [\bar{\mathbf{G}}^{11}] & [\mathbf{G}_c^{12}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [-\mathbf{G}_c^{21}] & [\mathbf{G}_e^{22}] & [\bar{\mathbf{G}}^{22}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^{11} \\ \bar{\mathbf{t}}^{11} \\ \mathbf{t}_c^{12} \\ \mathbf{t}^{22} \\ \bar{\mathbf{t}}^{22} \end{Bmatrix} \quad (2.158)$$

Перенося ПКВ, соответствующие заданным величинам (граничным условиям), в правую часть уравнения, а ПКВ, соответствующие неизвестным задачи, - в левую часть уравнения, а также перенося соответствующие части векторов перемещений и поверхностных усилий, получим итоговую матрицу для двух подобластей:

$$[\mathbf{A}] \{\mathbf{f}_{ut}\} = [\mathbf{B}] \{\bar{\mathbf{f}}_{ut}\}, \quad (2.159)$$

где приняты следующие обозначения

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_e^{11}] & [-\mathbf{G}_e^{11}] & [\mathbf{T}_c^{12}] & [-\mathbf{G}_c^{12}] & [\mathbf{T}_s^{12} + \mathbf{K}\mathbf{G}_s^{12}] & [-\mathbf{K}\mathbf{G}_s^{12}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{T}_c^{21}] & [\mathbf{G}_c^{21}] & [-\mathbf{K}\mathbf{G}_s^{21}] & [\mathbf{T}_s^{21} + \mathbf{K}\mathbf{G}_s^{21}] & [\mathbf{T}_e^{22}] & [-\mathbf{G}_e^{22}] \end{pmatrix} \\ [\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} [-\bar{\mathbf{T}}^{11}] & [\bar{\mathbf{G}}^{11}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [-\bar{\mathbf{T}}^{22}] & [\bar{\mathbf{G}}^{22}] \end{pmatrix}$$

$$\{\mathbf{f}_{\text{ut}}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e^{11} \\ \mathbf{t}_e^{11} \\ \mathbf{t}_c^{12} \\ \mathbf{u}_c^{21} \\ \mathbf{u}_s^{12} \\ \mathbf{u}_s^{21} \\ \mathbf{u}_e^{22} \\ \mathbf{t}_e^{22} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\mathbf{f}}_{\text{ut}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{11} \\ \bar{\mathbf{t}}^{11} \\ \bar{\mathbf{u}}^{22} \\ \bar{\mathbf{t}}^{22} \end{Bmatrix}$$

Рассмотрим формирование глобальной матрицы для двух подобластей при законе деформирования связей с разупрочнением, см. выражение (2.118)

$$\mathbf{t}_s^{12} = \bar{\mathbf{t}}_s^{12} + K(\mathbf{u}_s^{12} - \mathbf{u}_s^{21}), \quad \mathbf{t}_s^{21} = -\mathbf{t}_s^{12} \quad (2.160)$$

где $\bar{\mathbf{t}}_s^{12}$ - заданные значения.

Пусть деформирование связей в концевой области трещины на границе раздела материалов описывается уравнением (2.160). Учет этой зависимости при формировании глобальной матрицы выполняется следующим образом: 1) в выражении в блоках матриц для участка концевой области изменяем знак коэффициента жесткости на противоположный; 2) в правую часть глобального матричного уравнения заносим коэффициенты, являющиеся произведением ПКВ \mathbf{G}_s^{kn} на заданные значения $\bar{\mathbf{t}}_s^{12}$. В итоге получаем матричное уравнение вида

$$[\mathbf{A}] \{\mathbf{f}_{\text{ut}}\} = [\mathbf{B}] \{\bar{\mathbf{f}}_{\text{ut}}\}, \quad (2.161)$$

где приняты следующие обозначения (вектор неизвестных $\{\mathbf{f}_{\text{ut}}\}$ не изменяется, см. (2.159))

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_e^{11}] & [-\mathbf{G}_e^{11}] & [\mathbf{T}_c^{12}] & [-\mathbf{G}_c^{12}] & [\mathbf{T}_s^{12} - K\mathbf{G}_s^{12}] & [K\mathbf{G}_s^{12}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{T}_c^{21}] & [\mathbf{G}_c^{21}] & [K\mathbf{G}_s^{21}] & [\mathbf{T}_s^{21} - K\mathbf{G}_s^{21}] & [\mathbf{T}_e^{22}] & [-\mathbf{G}_e^{22}] \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} [-\bar{\mathbf{T}}^{11}] & [\bar{\mathbf{G}}^{11}] & [\bar{\mathbf{G}}_s^{12}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [-\bar{\mathbf{G}}_s^{21}] & [-\bar{\mathbf{T}}^{22}] & [\bar{\mathbf{G}}^{22}] \end{pmatrix}, \quad \{\bar{\mathbf{f}}_{\text{ut}}\} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{11} \\ \bar{\mathbf{t}}^{11} \\ \bar{\mathbf{t}}_s^{12} \\ \bar{\mathbf{u}}^{22} \\ \bar{\mathbf{t}}^{22} \end{pmatrix}$$

Объединение столбцов ПКВ \mathbf{G}^{kn} с учетом возможной разрывности поверхностных усилий на стыках элементов и учет граничных условий на внешних участках подобластей позволяет привести уравнение к стандартной матричной форме

$$[\mathbf{A}] \{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{B}\}, \quad (2.162)$$

где матрица $[\mathbf{A}]$ содержит ПКВ $\mathbf{G}^{\text{kn}}, \mathbf{T}^{\text{kn}}$ и для двух (или более) подобластей является блочной, размерность матрицы $2M \times 2M$, здесь M - суммарное число узлов на границах всех подобластей, $\{\mathbf{X}\}$ - вектор узловых неизвестных (перемещений и поверхностных усилий), $\{\mathbf{B}\}$ - вектор, соответствующий правой части уравнения, включает также вклад массовых сил и тепловых воздействий, при их наличии.

После решения СЛАУ (2.162) и восполнения граничных условий с учетом преобразования (2.150) (вектор перемещений определяется как $\{\mathbf{u}\} = \{\hat{\mathbf{u}}\} / \Theta$, где $\{\hat{\mathbf{u}}\}$ - вектор нормированных перемещений, получаемый в результате решения СЛАУ), усилия в связях вдоль концевой области трещины вычисляются исходя из соотношений (2.117) или (2.118).

2.4. Сопоставление результатов расчетов методами сингулярных интегро-дифференциальных и граничных интегральных уравнений

Алгоритм численного решения системы ГИУ (2.109) для кусочно-одно-родного тела с учетом дополнительных условий (2.114) и (2.117) на стыках подобластей включен в программный комплекс для решения двумерных,

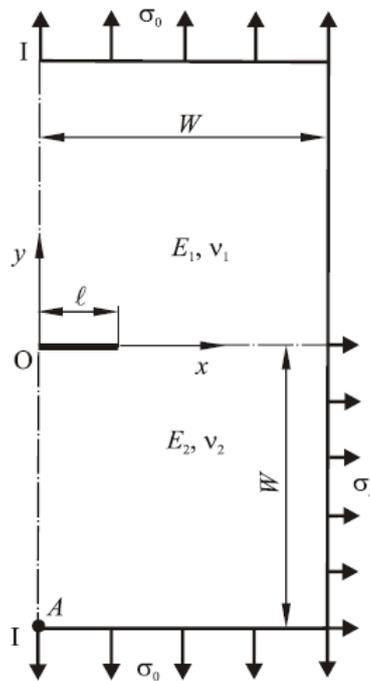


Рис. 2.3. Составная пластина с трещиной на границе соединения подобластей: учет симметрии задачи и граничные условия, $W/\ell = 10$

пространственных и осесимметричных задач упругости и термоупругости [236].

Первый этап анализа результатов расчетов, получаемых на основе численного алгоритма, состоит в оценке их достоверности и точности путем сравнения с известными аналитическими, численными и/или экспериментальными данными. Для трещин на границе соединения материалов со связями в концевой области, при учете зависимости напряжений в связях от раскрытия трещины, как аналитические решения, так и экспериментальные результаты отсутствуют. Ввиду этого, выполнено сопоставление численных результатов, полученных ранее методом СИДУ для трещины со связями, расположенной на границе соединения двух полуплоскостей из различных материалов и результатов, полученных с использованием метода ГИУ. Неизвестными при использовании метода СИДУ являются функции, определяющие раскрытие трещины и напряжения в связях в концевой области трещины. При численном решении СИДУ дискретизация выполняется только

вдоль концевой области трещины. Для сравнения результатов, полученных методами СИДУ и ГИУ, рассмотрена задача об одноосном растяжении плоскости с центральной прямолинейной трещиной, расположенной на границе соединения полуплоскостей из различных материалов. При решении задачи методом ГИУ рассматривалась конечная пластина, состоящая из двух подобластей. Для сравнения с решением методом СИДУ (для бесконечной пластины) при расчете приняты размеры модели $W/\ell = 10$, где W - половина ширины составной пластины. Ввиду симметрии задачи моделировалась только $1/2$ часть пластины (см. рис. 2.3). Внешняя растягивающая нагрузка $\sigma_0 = \sigma_{0y}$ в направлении оси OY прикладывалась на участке $0 \leq x \leq W$, $y = \pm W$. На линии симметрии I-I полагались равными нулю нормальная составляющая перемещений и касательная составляющая усилий. Для исключения движения тела как жесткого целого в точке A (см. рис. 2.3) полагалось равным нулю перемещение в направлении оси OY . Выполнение условий совместности деформаций на границе раздела материалов вдоль оси OX достигалось при приложении дополнительных напряжения (плоская деформация) [112]

$$(\sigma_{xx}^\infty)_2 = \frac{E_2}{E_1} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2} \right] (\sigma_{xx}^\infty)_1 + \left[\frac{\nu_2}{1 - \nu_2} - \frac{E_2 \nu_1 (1 + \nu_1)}{E_1 (1 - \nu_2^2)} \right] \sigma_0 \quad (2.163)$$

В расчетах принималось, что $(\sigma_{xx}^\infty)_1 = 0$. Напряжение $(\sigma_{xx}^\infty)_2$ прикладывалось на границе второй подобласти при $x = W$, $0 \leq y \leq -W$ (см. рис. 2.3).

Сопоставление результатов расчетов методами СИДУ и ГИУ выполнено при следующих параметрах модели трещины с концевой областью на границе раздела материалов: коэффициенты Пуассона материалов $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, модуль упругости связей $E_b = E_2$, состояние плоской деформации. Закон деформации связей принимался в форме (2.117) в предположении, что жесткости связей по направлениям осей координат одинаковы и $\gamma_{1,2} \equiv 1$. Для удобства сопоставления результатов определим относительную жесткость связей κ_0

$$\kappa_0 = \kappa_{1,2}(q, \sigma) \left(\frac{E_2}{\ell} \right)^{-1} = \frac{E_b \ell}{E_2 H}, \quad \kappa_{1,2}(q, \sigma) = \frac{E_b}{H} \quad (2.164)$$

Здесь $\kappa_{1,2}(q, \sigma)$ - жесткость связей в концевой области трещины, одинаковая в нормальном и касательном направлениях и постоянная вдоль концевой области. Расчеты выполнены при различных значениях относительной длины концевой области трещины d/ℓ , отношения модулей упругости материалов E_1/E_2 и относительной жесткости связей κ_0 . При выполнении вычислений полагалось, что $E_b = E_2$, и изменение относительной жесткости связей осуществлялось, при заданной длине трещины, посредством изменения параметра H , см. (2.164). Число узлов при разбиении границы каждой подобласти изменялось от 80 до 100, на линии трещины выбиралось по 40 узловых точек в каждой подобласти.

2.4.1. Трещина со связями в концевой области, на границе соединения материалов. Раскрытие трещины и усилия в связях

Касательная и нормальная составляющие раскрытия трещины получены методами СИДУ и ГИУ ($E_1/E_2 = 50$, $(\sigma_{xx}^\infty)_2 \approx 0.420\sigma_0$) для различных размеров концевой области трещины. Компоненты раскрытия трещины, приведенные на рис.2.4ab, нормированы величиной раскрытия при одноосном растяжении в центре трещины без связей, расположенной на границе соединения материалов (см. выражение (1.5) при $x = 0$ и $\tau_0 = 0$)

$$u_0 = \frac{A\sigma_0\ell}{4ch(\pi\beta)} \quad (2.165)$$

Результаты расчетов обоими методами практически совпадают. Незначительное отличие наблюдается для касательной составляющей раскрытия трещины. Это связано с тем, что максимальные значения нормальной и касательной составляющих раскрытия трещины отличаются почти на порядок и погрешность при расчете малых величин в методе ГИУ возрастает. Отметим также, что компоненты раскрытия вдоль всей длины трещины при использовании метода ГИУ получаются непосредственно из решения задачи, тогда как при решении методом СИДУ для определения раскрытия трещины вне концевой

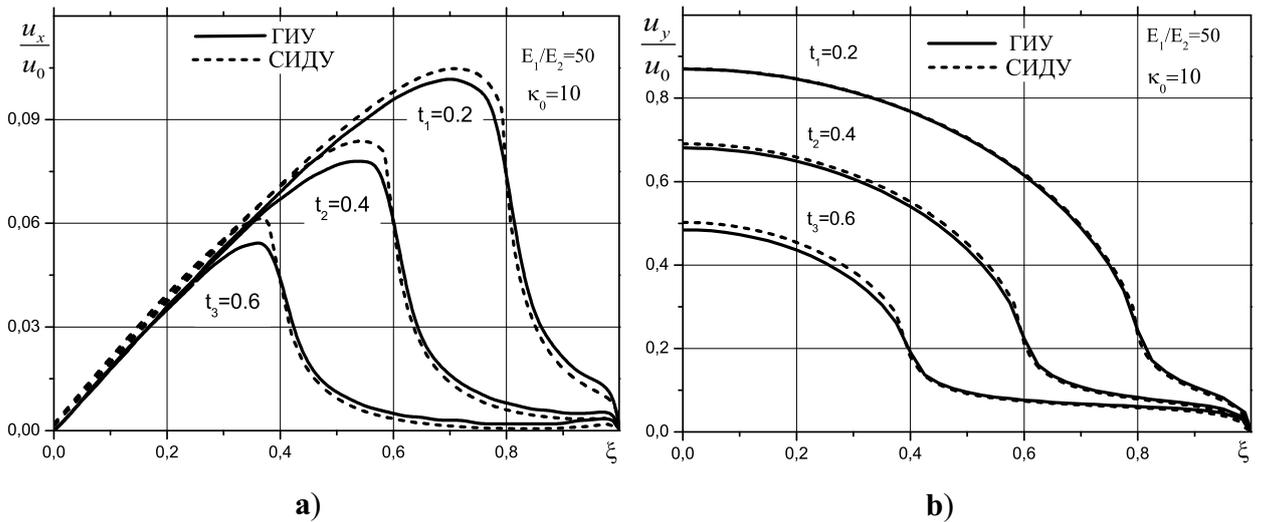


Рис. 2.4. (а) - Касательная и (b) - нормальная составляющие раскрытия трещины со связями в концевой области. Расчет методами ГИУ и СИДУ, $t_i = d_i/\ell$ ($i = 1, 2, 3$), $\xi = x/\ell$

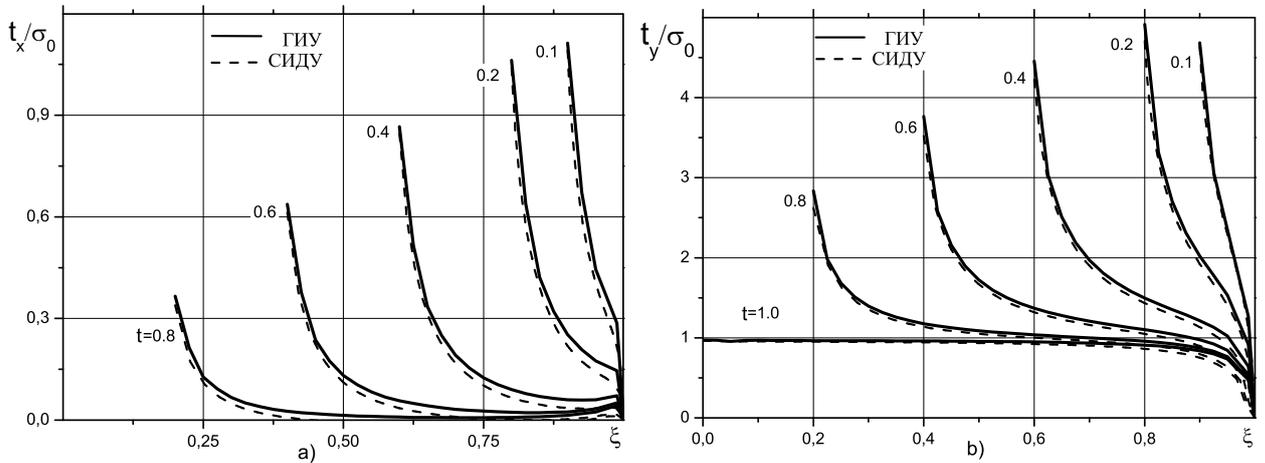


Рис. 2.5. (а) - Касательная и (b) - нормальная составляющие усилий в связях вдоль концевой области трещины. Расчет методами СИДУ и ГИУ, $t = d/\ell$, $\xi = x/\ell$

области требуются дополнительные вычисления. Касательная и нормальная составляющие напряжений в связях вдоль концевой области трещины, полученные методами СИДУ и ГИУ при $E_1/E_2 = 5$, $(\sigma_{xx}^\infty)_2 \approx 0.343\sigma_0$, показаны на рис.2.5ab. Незначительное отличие напряжений наблюдается только на краю концевой области, что связано с методикой определения граничных напряжений при использовании ГИУ. Распределения вдоль концевой области трещины касательных и нормальных усилий в связях ($d/\ell = 0.4$, $E_1/E_2 = 50$) при различных значениях относительной жесткости связей приведены на рис. 2.6ab, демонстрирующих хорошее соответствие результатов расчетов,

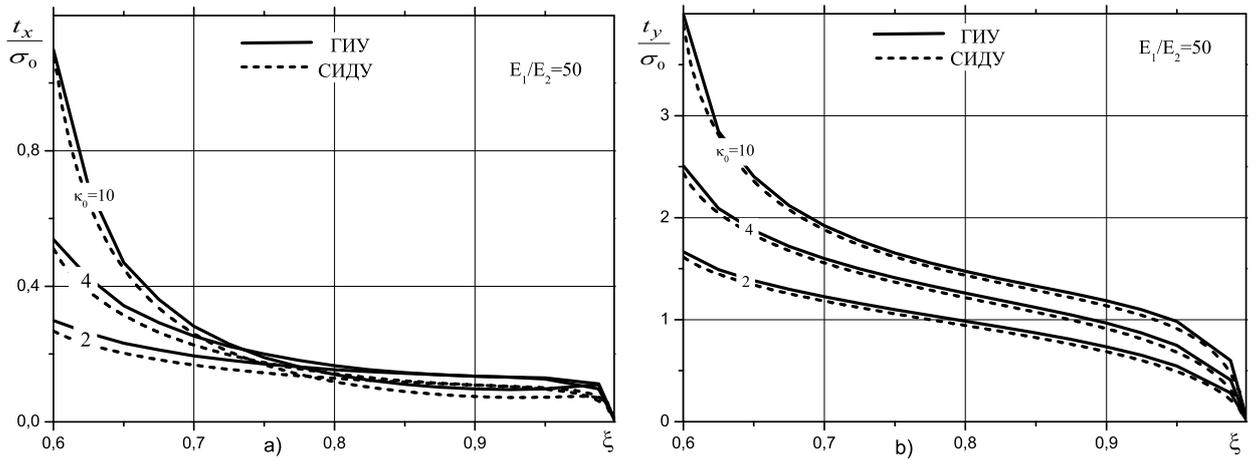


Рис. 2.6. (а)- Касательные и (б) - нормальные усилия в связях вдоль концевой области трещины при различных значениях жесткости связей, κ_0 . Расчет методами СИДУ и ГИУ, $d/\ell = 0.4$, $\xi = x/\ell$

полученных по различным методикам. При возрастании жесткости связей компоненты напряжений в связях также увеличиваются. Площади под кривыми на рис. 2.6ab пропорциональны КИН от действия связей в концевой области трещины K_{Ib} и K_{IIb} , [30]. Изменение соотношения между модулями упругости материалов подобластей не приводит к заметному изменению нормальных усилий в связях, но сдвиговые усилия существенно зависят от этого параметра, см. рис. 2.7.

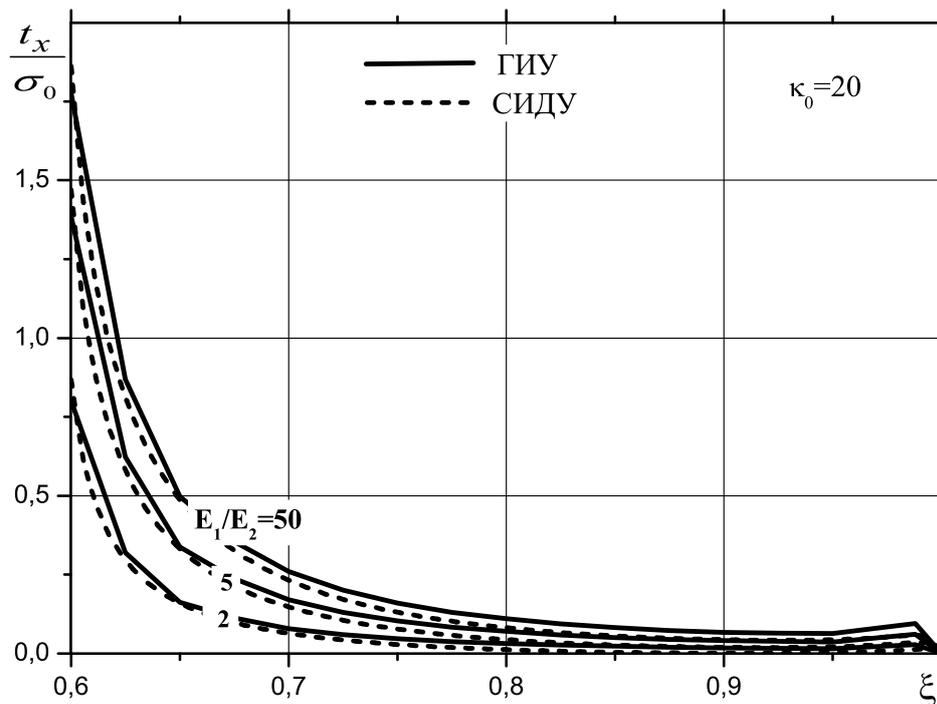


Рис. 2.7. Касательные усилия в связях при различных значениях модулей упругости материалов, $d/\ell = 0.4$, $\xi = x/\ell$

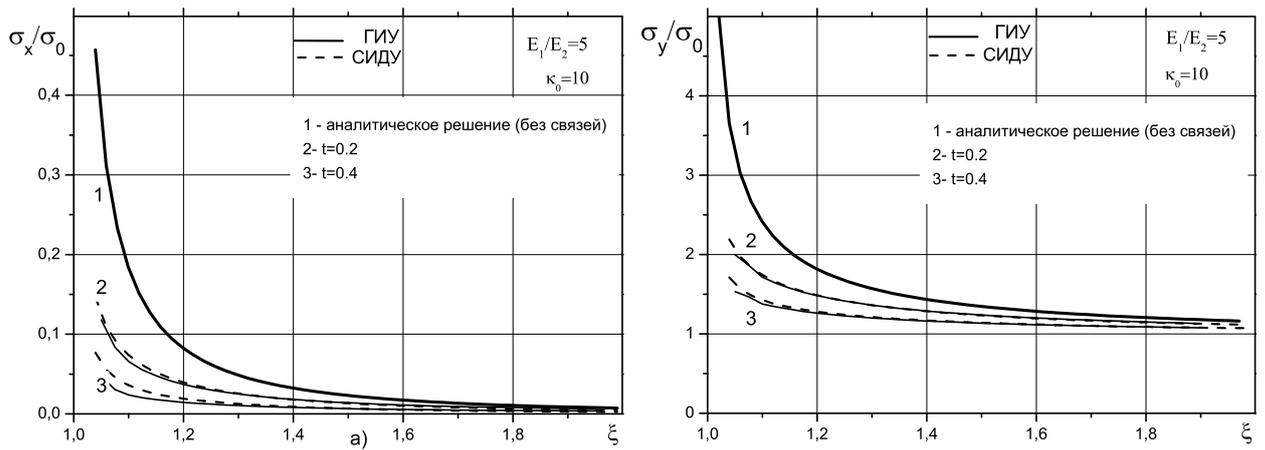


Рис. 2.8. (а) - Касательные и (б) - нормальные (напряжения на границе соединения материалов вблизи вершины трещины на ее продолжении. Расчет методами СИДУ и ГИУ. $\xi = x/\ell > 1$, $t = d/\ell$

Напряжения на границе раздела материалов вблизи вершины трещины на ее продолжении показаны на рис. 2.8ab, где также наблюдаются незначительные отличия напряжений, в точках непосредственно примыкающих к вершине трещины, что связано с методикой моделирования асимптотики напряжений при использовании ГИУ. Отметим также, что при использовании ГИУ нормальная и касательная компоненты тензора напряжений определяются непосредственно из решения ГИУ, тогда как при решении задачи методом СИДУ для определения напряжений на продолжении требуются дополнительные вычисления (см. описание методики расчета напряжений в разделе 2.1.2).

2.4.2. Коэффициенты интенсивности напряжений для трещин со связями в концевой области на границе соединения материалов

Рассмотрим результаты вычисления модуля КИН для трещины со связями на границе раздела материалов. Все расчеты методом ГИУ выполнены при выборе размера элемента, примыкающего к вершине трещины, равным $L = 0,05\ell$. На рис.2.9 приведены зависимости модуля КИН от относительной длины концевой области трещины, полученные по формулам (2.140) и (2.145), использующим значения поверхностных усилий на продол-

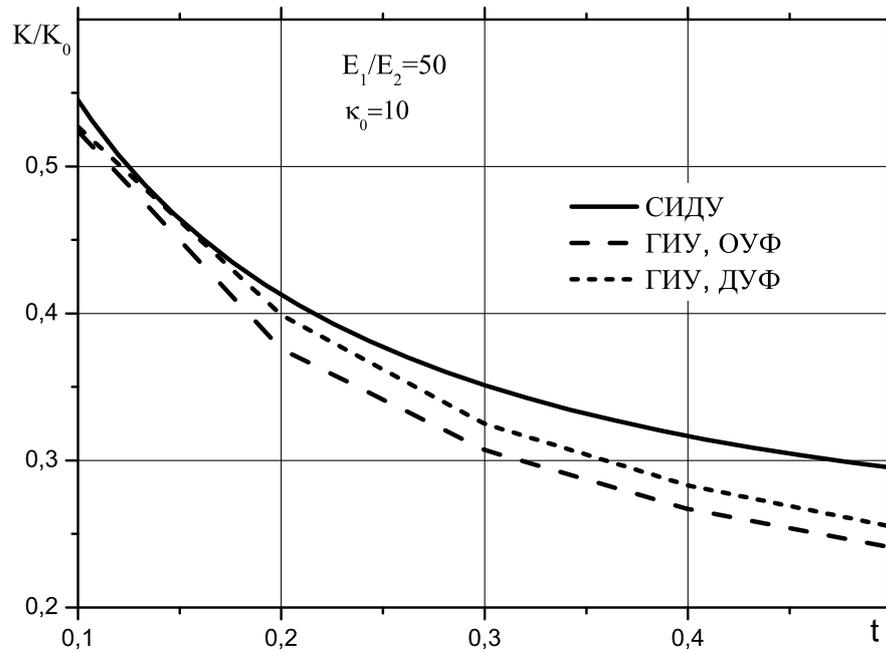


Рис. 2.9. Пластина с трещиной: зависимости модуля КИН от длины концевой области, вычисления на основе поверхностных усилий, $t = d/\ell$, $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi\ell}$

жении трещины. В этом случае (для связей относительно большой жесткости, $\kappa_0 = 10$) различие между результатами, полученными методами СИДУ и ГИУ нарастает с увеличением длины концевой области, что связано с принципиально различными способами, используемыми для определения модуля КИН, см. [30].

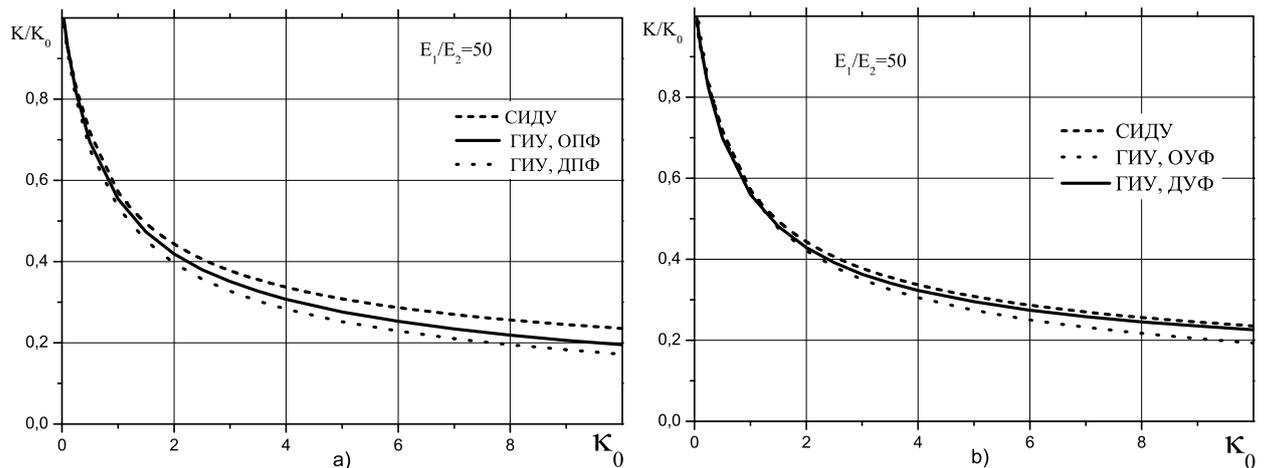


Рис. 2.10. Пластина с трещиной, зависимости модуля КИН от жесткости связей: (а)- расчет на основе раскрытия трещины; (б)- расчет на основе поверхностных усилий. методы СИДУ и ГИУ, $d/\ell = 1$, $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi\ell}$

Так как для трещины, полностью заполненной связями, различие результатов, полученных методами СИДУ и ГИУ, проявляется наиболее силь-

но, то именно этот вариант заполнения концевой области трещины рассмотрен для анализа зависимости модуля КИН от относительной жесткости связей. На рис.2.10а приведены результаты расчета модуля КИН по перемещениям, а на рис.2.10б - по усилиям. Различие между результатами, полученными методами ГИУ и методом СИДУ, нарастает с увеличением жесткости связей. Значения КИН, наиболее близкие к результатам метода СИДУ, если рассматривать последние как “точные”, дает расчет по формуле (2.145) линейной экстраполяции усилий.

Глава 3

Задачи для трещин с концевой областью на границе соединения материалов

В данной главе приведены результаты решения ряда задач для трещин с концевой областью на границе соединения материалов, полученные методами СИДУ и ГИУ.

Анализ модели трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов, выполнен методом СИДУ. Решение СИДУ (2.69) исследовано при различных размерах концевой области трещины, упругих постоянных материалов, параметрах связей, а также разных соотношениях внешних нормальных и сдвиговых напряжений. Рассмотрены также различные типы кривых деформирования связей. Непосредственно из решения СИДУ (2.69) определяются нормальные и касательные напряжения в связях. Раскрытие в концевой области трещины определяется из выражений (2.31), а на части трещины, не занятой связями, - из выражений (2.34) и (2.35). Значения КИН определяются из выражений (2.66) и (2.67).

Задачи для трещин с концевой областью на границе соединения материалов являются многопараметрическими. При линейном законе деформирования связей и заданном относительном размере концевой области d/ℓ распределение напряжений вдоль концевой области трещины определяется параметрами Ψ (см.(2.29)) и β (см. (1.7)), содержащими все основные характеристики рассматриваемой модели. Для связей в концевой области трещины с нелинейной диаграммой деформирования решение СИДУ зависит, помимо указанных выше параметров, от формы кривой деформирования связей, а также величины внешней нагрузки. При определении напряженного состояния в концевой области трещины при нелинейной диаграмме деформирования связей в качестве первого шага итерационного процесса используется решение для линейно-упругих связей.

Использование метода ГИУ позволяет рассматривать задачи в областях конечного размера при наличии системы криволинейных трещин со связями в концевой области, на границах соединения материалов. В данном разделе приведены решения ряда новых задач для трещин со связями на границе соединения материалов, иллюстрирующие возможности разработанной методики и её программной реализации.

Приведенные ниже результаты получены, если специально не указано, при следующих постоянных материалов подобластей: модули упругости $E_1 = 135$ ГПа (металл), $E_2 = 25$ ГПа (полимер), коэффициенты Пуассона материалов $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, модуль упругости связей полагался равным модулю упругости одного из материалов ($E_b = E_2$). Параметр β при выбранных значениях постоянных материалов отрицателен, и $|\beta| = 0.0509313$. Податливости связей в нормальном и касательном направлениях полагались, если специально не указано, равными и постоянными вдоль концевой области трещины: $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ (см. (1.33)).

Все распределения напряжений, представленные ниже, нормированы величиной внешних напряжений (2.61), а распределения перемещений (раскрытия трещины) нормированы величиной раскрытия в центре трещины длины 2ℓ при отсутствии связей (см. выражение (1.5) при $x = 0$).

3.1. Прямолинейная трещина с линейно-упругими связями в концевой области, на границе соединения материалов

Для оценки влияния механических свойств соединенных материалов и связей в концевой области трещины, содержащихся в параметре Ψ (см. (2.29)), выделен ряд безразмерных комплексов, определяющих решение СИДУ для трещины с линейно-упругими связями в концевой области, на границе соединения материалов: при заданных значениях упругих постоянных материалов подобластей и связей, распределение напряжений зависит только от вели-

чины относительной податливости связей (2.20) $c_0 = H/\ell$; при постоянной относительной податливости связей распределение напряжений зависит от соотношения податливостей (1.33) $c_y/c_x = \gamma_1/\gamma_2$, а также от формы функциональных зависимостей $\gamma_{1,2}(s)$. Существенно влияет на решение задачи относительная жесткость соединенных материалов E_1/E_2 , а также величина биупругой постоянной материалов β .

3.1.1. Напряженно-деформированное состояние в концевой области трещины. Влияние механических свойств материалов и связей

Рассмотрим влияние величины относительной податливости связей на напряженно-деформированное состояние в концевой области трещины для задачи об одноосном растяжении двух полуплоскостей из различных материалов с прямолинейной трещиной, расположенной на линии соединения полуплоскостей при действии внешней нагрузки σ_0 , нормальной к плоскости трещины.

Распределения нормальной и касательной составляющих раскрытия трещины при $c_0 = H/\ell = 0.1$ для различных относительных размеров концевой области приведены на рис. 3.1. При возрастании размера концевой области раскрытие трещины уменьшается, причем нормальное раскрытие в центре трещины $x/\ell = 0$ уменьшается практически линейно с возрастанием размера концевой области. При действии внешних нормальных нагрузок нормальное раскрытие в центре трещины примерно на порядок превышает максимальное раскрытие в касательном направлении.

Распределения нормальных и касательных усилий в связях при величине относительной податливости $c_0 = H/\ell = 0.1$ для различных относительных размеров концевой области приведены на рис. 3.2. Ввиду различия упругих постоянных материалов, окружающих трещину, в связях возникают касательные усилия даже при действии нормальных внешних нагрузок. При постоянной вдоль концевой области податливости связей, усилия в свя-

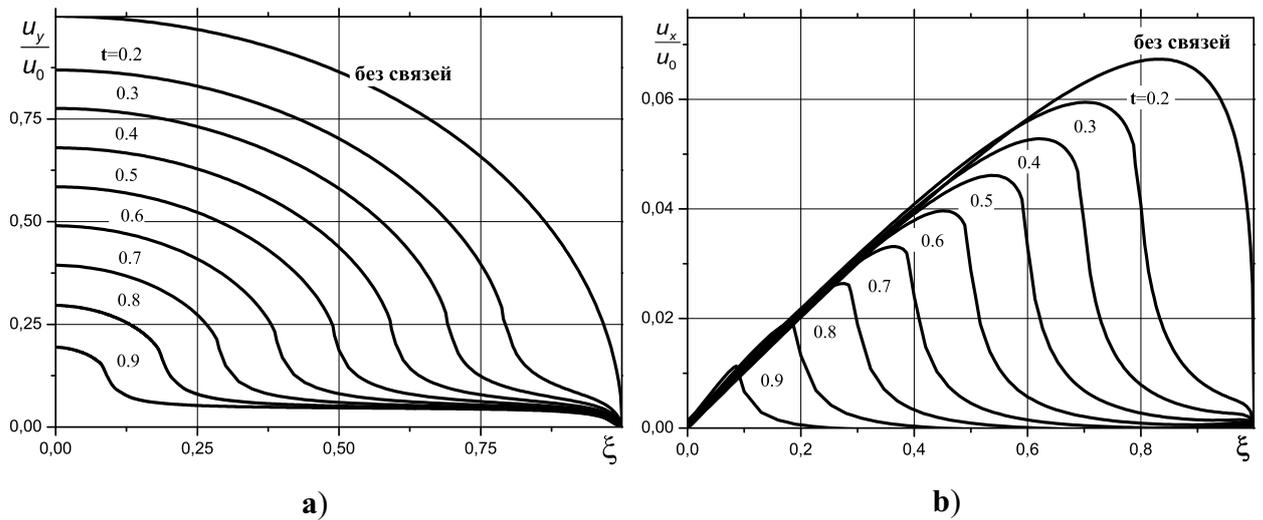
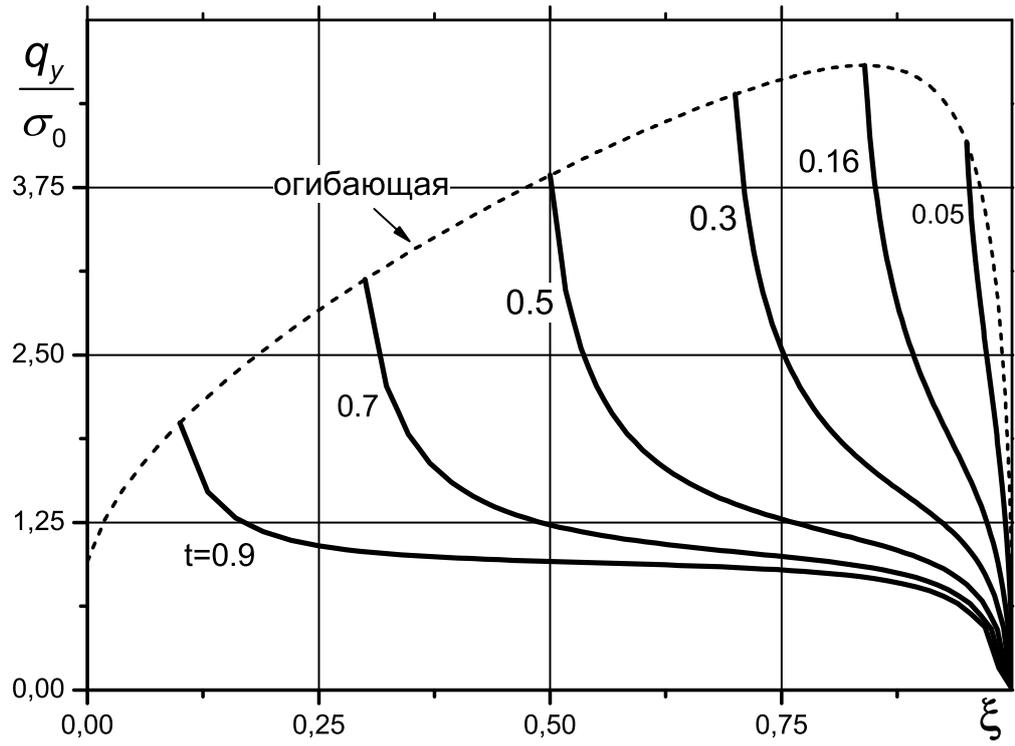


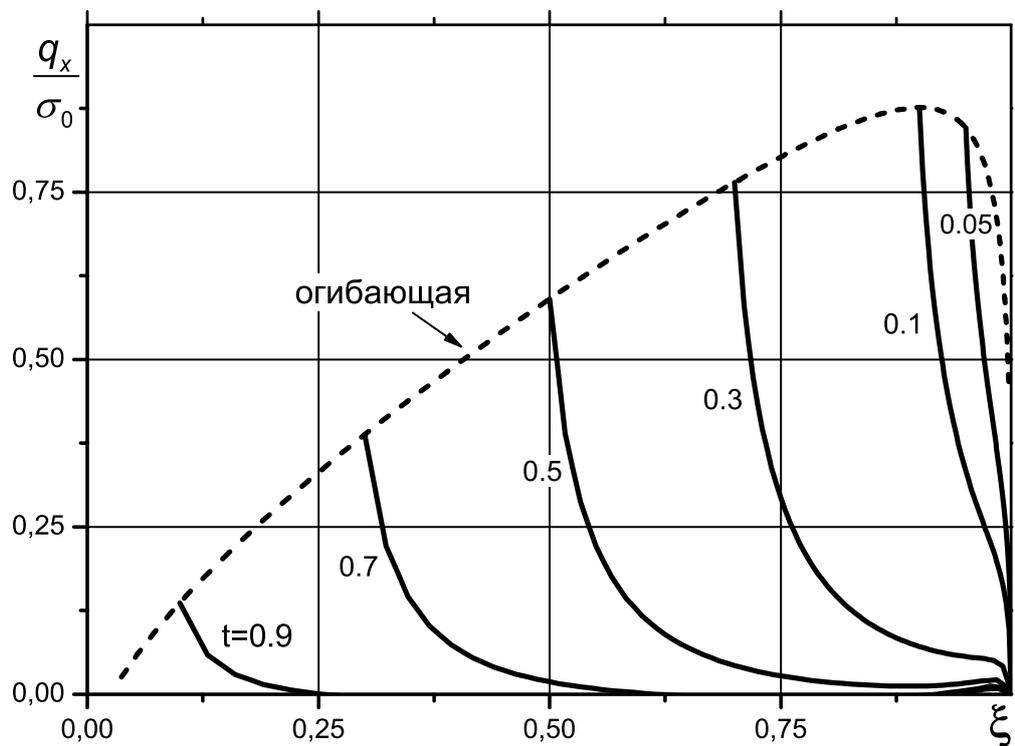
Рис. 3.1. (а) - Касательная и (б) - нормальная составляющие раскрытия трещины со связями в концевой области. Расчет методом СИДУ, $t = d/\ell$, $\xi = x/\ell$, $c_0 = 0.1$

зях всегда максимальны на краю области при $s = d/\ell$, причем этот максимум достигает абсолютного значения при определенной величине параметра $s_m = d_m/\ell$. При снижении относительной податливости связей положение этого абсолютного максимума смещается в сторону меньших значений $s_m = (d_m/\ell)$, а его абсолютная величина возрастает. Например, при $H/\ell = 0.1$ этот максимум достигается при $(d_m/\ell) \approx 0.158$ и составляет $q_y/\sigma_0 = 4,66$ (рис. 3.2а), а при $H/\ell = 0.025$ - $d_m/\ell \approx 0.0682$ и $q_y/\sigma_0 = 9,807$. Характер изменения касательных усилий вдоль концевой области подобен изменению нормальных усилий, но абсолютные значения этой составляющей усилий существенно ниже, а максимальные значения достигаются при меньших размерах концевой области. Например, при $H/\ell = 0.1$ этот максимум достигается при $(d_m/\ell) \approx 0.102$ и составляет $q_x/\sigma_0 = 0,876$, а при $H/\ell = 0.025$ - $(d_m/\ell) \approx 0.0537$ и $q_x/\sigma_0 = 2,568$.

Представление об изменении отношения q_x/q_y на краю концевой области дает рис. 3.3, на котором приведены зависимости этой величины от относительного размера концевой области трещины при $H/\ell = 0.05; 0.10; 0.20$. При уменьшении размера концевой области касательные усилия в связях существенно возрастают, а их значения становятся сравнимыми со значениями нормальных усилий.



a)



b)

Рис. 3.2. (а)- Нормальная и (б) касательная составляющие усилий в связях вдоль концевой области трещины и огibaющая всех таких кривых. Расчет методом СИДУ, $t = d/\ell$, $\xi = x/\ell$, $c_0 = 0.1$

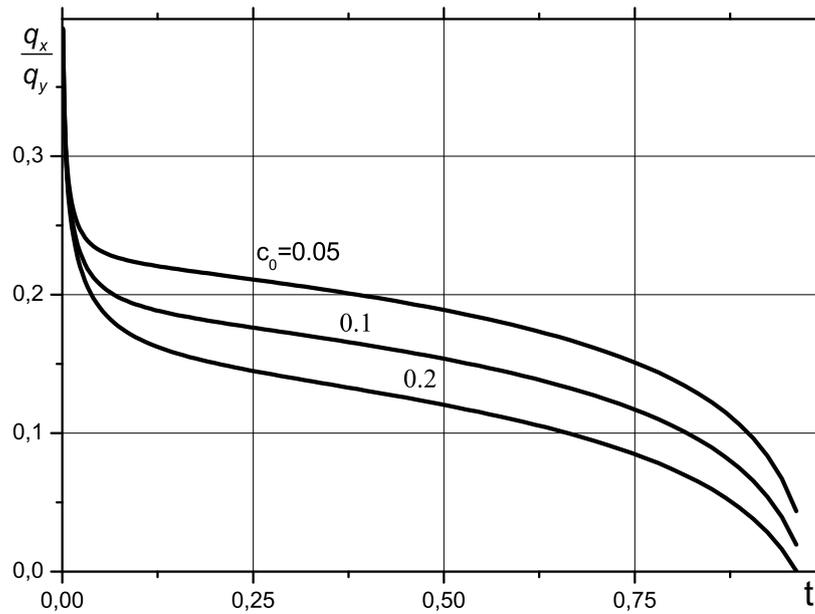


Рис. 3.3. Зависимость отношения касательных и нормальных усилий от размера концевой области трещины, $t = d/\ell$

Отметим, что касательные составляющие векторов раскрытия трещины и усилий в связях (рис. 3.1b и рис. 3.2b) являются нечетными функциями и меняют знак при $x/\ell < 0$.

Зависимости модуля вектора усилий в связях $\sigma(s) = \sqrt{q_y^2(s) + q_x^2(s)}$ и касательных усилий на краю концевой области трещины (фактически, это коэффициенты концентрации напряжений (ККН) на крайней связи) от относительного размера концевой области при различных значениях параметра $c_0 = H/\ell$ приведены на рис. 3.4 и рис. 3.6. При снижении относительной податливости связей ($H/\ell \rightarrow 0$ ($\Psi \rightarrow \infty$)) максимум усилий в связях достигается при меньших размерах концевой области трещины d/ℓ . Абсолютная величина максимума усилий при этом возрастает. Например, при $H/\ell = 0.025$ этот максимум достигается при $s_m = d_m/\ell \approx 0.0654$ и составляет $\sigma/\sigma_0 = 10.136$. При относительно мягких связях ($H/\ell \gg 1$) максимум выражен слабо и усилия на краю концевой области слабо изменяются при изменении ее размера.

Аналогичные зависимости модуля вектора раскрытия трещины u и касательной составляющей раскрытия трещины u_x на краю концевой обла-

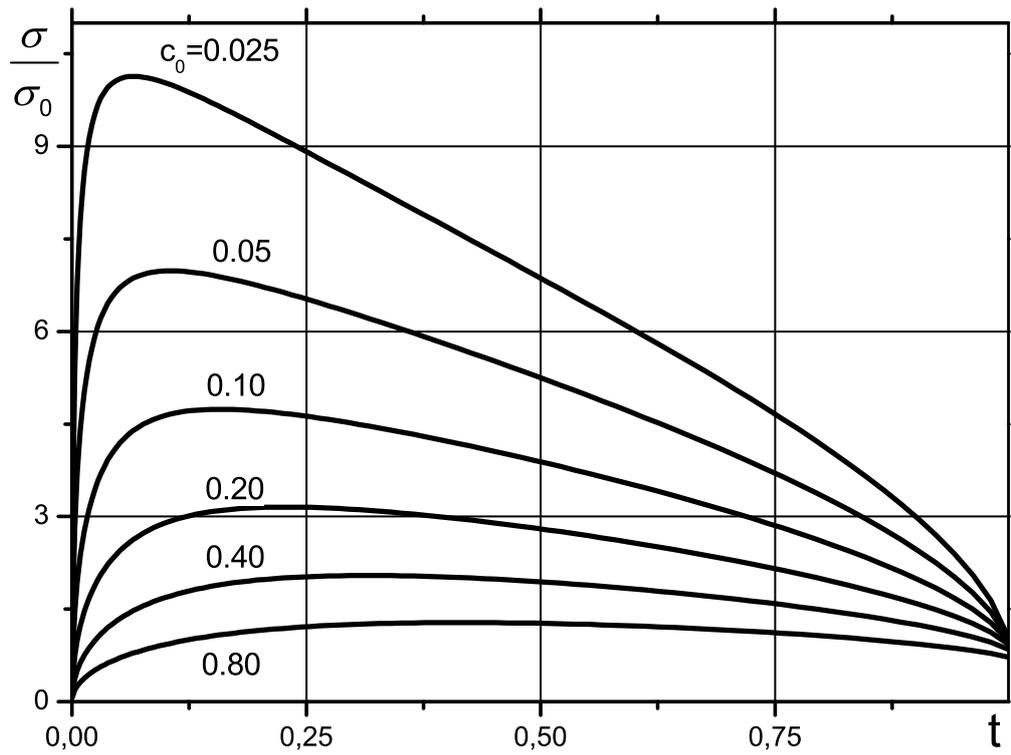


Рис. 3.4. Зависимость модуля вектора усилий в связях на краю концевой области от длины концевой трещины, $t = d/\ell$

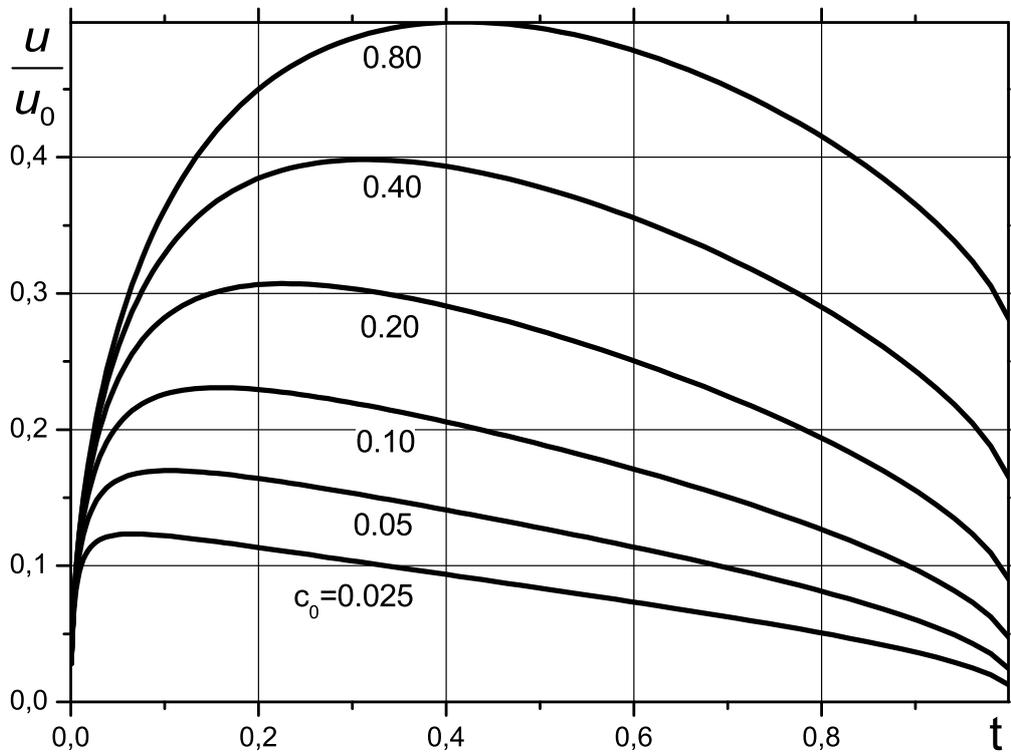


Рис. 3.5. Зависимость раскрытия трещины на краю концевой области от длины концевой трещины, $t = d/\ell$

сти приведены на рис. 3.5 и рис. 3.7. Ввиду прямой пропорциональности между компонентами перемещений и усилий (1.32), распределения составляющих раскрытия трещины при постоянной вдоль концевой области податливости связей также имеют абсолютный максимум при определенном размере концевой области. Этот размер концевой области, $s_m = d_m/\ell$, при котором достигается абсолютный максимум раскрытия трещины, совпадает с соответствующим значением для усилий, но при снижении относительной податливости связей его абсолютная величина уменьшается. Например, при $H/\ell = 0.1$ максимум раскрытия трещины составляет $u/u_0 \approx 0,23$, для касательной компоненты - $u_x/u_0 \approx 0,0444$, а при $H/\ell = 0.025$ имеем $u/u_0 \approx 0,123$ и $u_x/u_0 \approx 0,0323$, соответственно. При возрастании относительной податливости связей $H/\ell \gg 1$ (мягкие связи) положение максимума раскрытия трещины на краю концевой области смещается в сторону бóльших значений d/ℓ . Абсолютная величина максимального раскрытия при этом возрастает. Отметим, что на рис. 3.4-3.7 значение $t = d/\ell = 1$ соответствует центру трещины, полностью заполненной связями, а $t = d/\ell = 0$ - вершина трещины. Таким образом, при $H/\ell \gg 1$ положение максимума раскрытия смещается к центру трещины, $s_m = d_m/\ell \rightarrow 1$. Возрастание относительной податливости связей H/ℓ соответствует уменьшению параметра Ψ в выражении (2.29).

Распределения нормальных и касательных компонент усилий в связях для относительного размера концевой области трещины $d/\ell = 0.1$ при изменении относительной податливости связей ($0.8 \leq c_0 \leq 0.025$) приведены на рис. 3.8ab, где видно значительное возрастание усилий на краю концевой области трещины при малой податливости связей.

Зависимость значений ККН σ_m/σ_0 , соответствующих абсолютному максимуму при различных значениях $s_m = d_m/\ell$, от величины параметра Ψ представлена на рис. 3.9a. Возрастание параметра Ψ (при постоянных упругих свойствах материала за счет уменьшения относительной податливости связей) приводит к смещению положения максимума к вершине трещины и

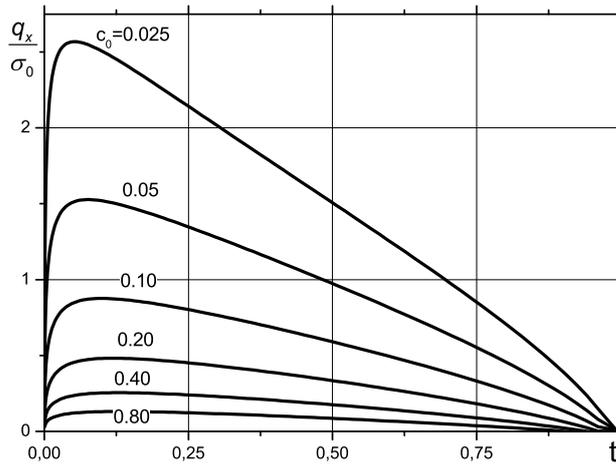


Рис. 3.6. Зависимость касательной составляющей усилий в связях на краю концевой области от длины концевой трещины, $t = d/\ell$

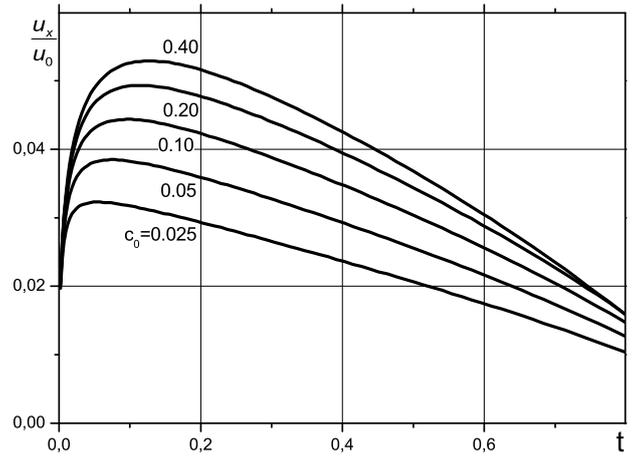
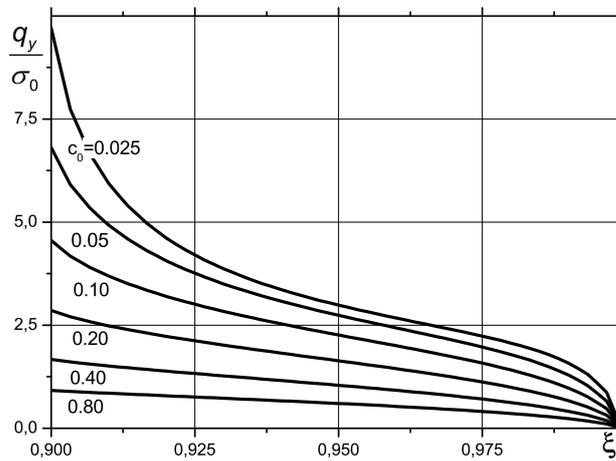
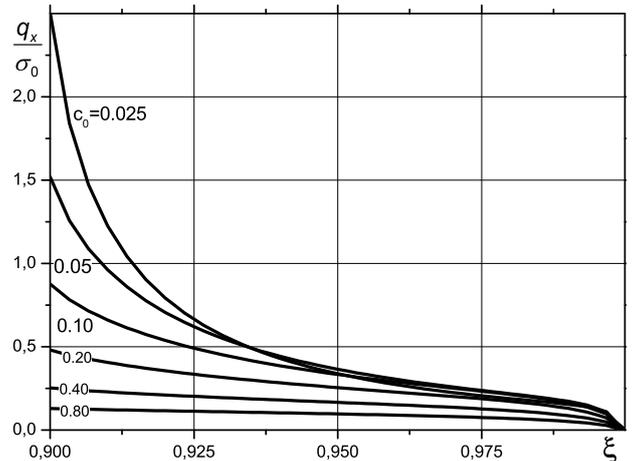


Рис. 3.7. Зависимость касательной составляющей раскрытия трещины на краю концевой области от длины концевой трещины, $t = d/\ell$



а)

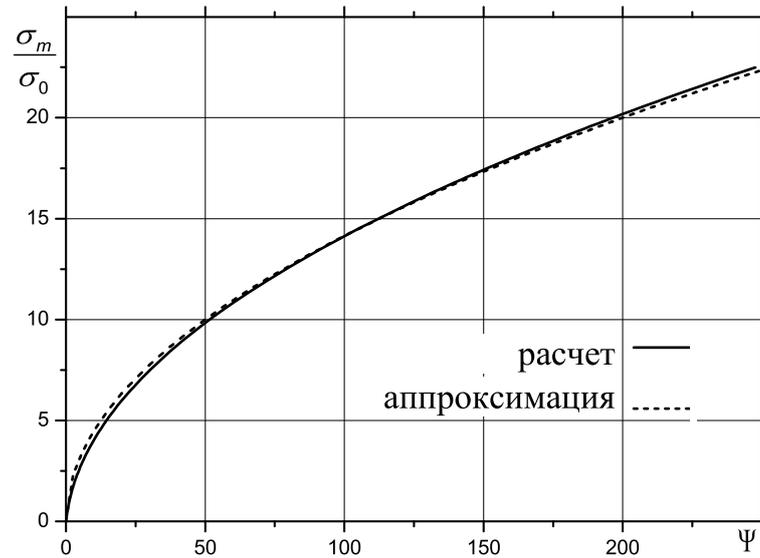


б)

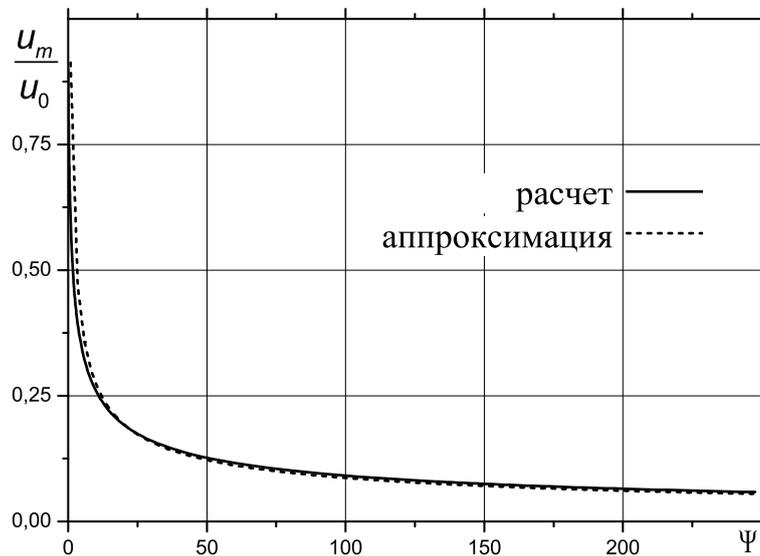
Рис. 3.8. (а) - Нормальная и (б) - касательная составляющие усилий в связях. Расчет методом СИДУ, $d/\ell = 0.1$, $\xi = x/\ell$

$\sigma_m/\sigma_0 \rightarrow \infty$ при $\Psi \rightarrow \infty$ ($H/\ell \rightarrow 0$). Аналогичная зависимость модуля вектора раскрытия трещины u_m/u_0 , соответствующего абсолютному максимуму, представлена на рис. 3.9б. При $\Psi \rightarrow \infty$ положение максимума смещается к центру трещины, а величина максимального раскрытия возрастает. Аналогичным образом изменяются при возрастании параметра Ψ касательные компоненты q_x и u_x .

Зависимость относительного размера концевой области d_m/ℓ , при котором достигается абсолютный максимум величин, представленных на рис. 3.9 (а также нормальных компонент усилий в связях и раскрытия трещины)



а)



б)

Рис. 3.9. Максимальные значения: **(а)** - модуля вектора усилий и **(б)** - раскрытия трещины от параметра Ψ , приведена на рис. 3.10а. Для относительно мягких связей ($\Psi \rightarrow 0$) размер концевой области $d_{x,m}/\ell$, при котором достигается абсолютный максимум касательных компонент q_x и u_x , заметно меньше, чем для нормальных компонент, (см. 3.9б), а при увеличении жесткости связей положения максимумов нормальных и касательных компонент векторов усилий и раскрытия трещины сближаются.

Пользуясь результатами, приведенными на рис. 3.10а, можно для заданного размера концевой области трещины d/ℓ определить значение параметра

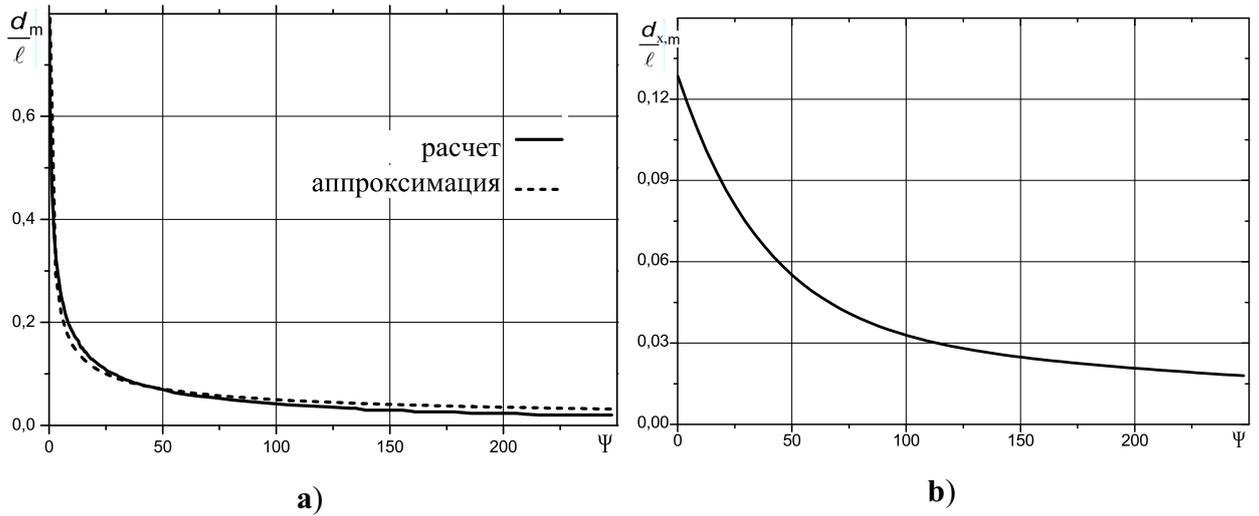


Рис. 3.10. Относительный размер концевой области при котором достигается максимум: (а) - нормальных и (б) - касательных компонент усилий и раскрытия трещины

Ψ , при котором усилия в связях и раскрытие трещины достигают экстремума, а величины этих максимумов/минимумов определяются по рис. 3.9.

Из рис. 3.9 и рис. 3.10а можно заметить, что $\sigma_m/\sigma_0 \sim \Psi^{1/2}$, $u_m/u_0 \sim \Psi^{-1/2}$ и $d_m/l \sim \Psi^{-1/2}$. Для упругих параметров материалов и связей, использованных в расчете, можно установить зависимости, приближающие результаты, приведенные на рис. 3.9 и рис. 3.10а, с большой точностью

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_0} \sim \sqrt{2\Psi}, \quad \frac{u_m}{u_0} \sim 0.5 \sqrt{\frac{3}{\Psi}}, \quad \frac{d_m}{l} \sim \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \quad (3.1)$$

Результаты, представленные на рис. 3.1-3.8, получены для $0.1 \leq H/l \leq 0.8$, что соответствует $1.66 \leq \Psi \leq 52.97$ при $E_1 = 135$ ГПа, $E_2 = 25$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$ и $E_b = E_2$.

При указанных механических свойствах материалов и связей получены также зависимости компонент векторов усилий и раскрытия трещины на краю концевой области трещины при изменении величины относительной податливости связей $c_0 = H/l$ в широком интервале $0.0095 < c_0 \leq 200$. Расчеты выполнены при постоянной длине трещины. Изменение относительной податливости связей в этом случае соответствует изменению величины параметра H (см.(2.20)). Результаты представлены в логарифмическом масштабе

(см. рис. 3.11-3.14), где параметр $\lg(\bar{c}_0/c_0)$ является функцией относительной жесткости связей $1/c_0$, а $\bar{c}_0 = 200$ - относительная податливость связей, соответствующая началу расчета.

Зависимости модулей векторов усилий и раскрытия трещины на краю концевой области для $t = d/\ell = 0.1; 0.3; 0.5$ приведены на рис. 3.11-3.12. Для трещины, частично заполненной связями, усилия на краю концевой области значительно возрастают, а раскрытие трещины сокращается при увеличении жесткости связей.

Если трещина полностью заполнена связями (см. рис. 3.13-3.14), то при увеличении жесткости (уменьшении податливости) связей усилия в связях ограничены величиной $\sigma/\sigma_0 \sim 1$, а раскрытие трещины при этом падает, $u/u_0 \rightarrow 0$. Можно выделить зону логарифмического возрастания усилий и уменьшения раскрытия трещины при $2.5 < \ln(\bar{c}_0/c_0) < 7.5$. Отметим, что ввиду линейности задачи, представленные результаты могут быть получены при изменении длины трещины и постоянном значении параметра H .

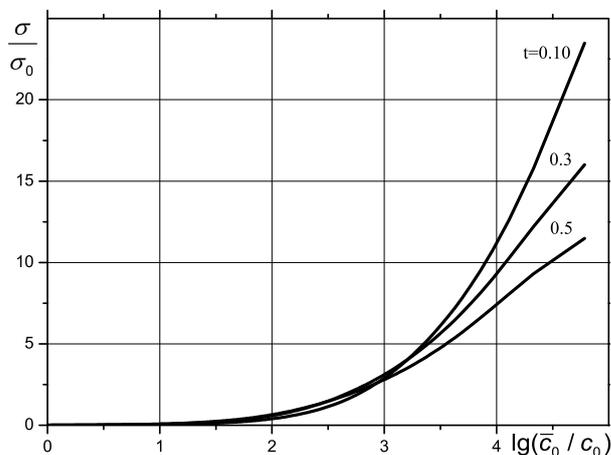


Рис. 3.11. Зависимость модуля вектора усилий на краю концевой области трещины от относительной жесткости связей, $t = d/\ell$

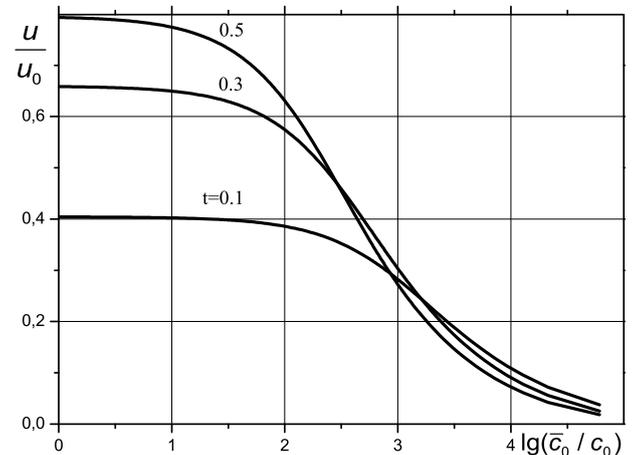


Рис. 3.12. Зависимость модуля вектора раскрытия на краю концевой области трещины от относительной жесткости связей

Рассмотрим влияние величин модулей упругости и коэффициентов Пуассона материалов и модуля упругости связей на концентрацию напряжений на краю концевой области. Из выражения (2.29) видно, что возрастание модуля упругости связей ведет к возрастанию параметра Ψ и, соответственно,

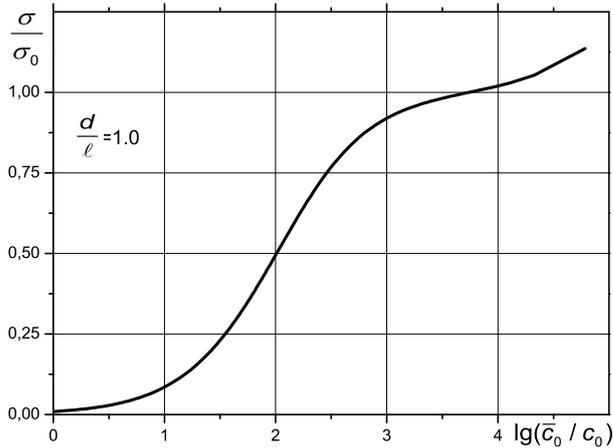


Рис. 3.13. Зависимость модуля вектора усилий на краю концевой области трещины, заполненной связями, от относительной жесткости связей

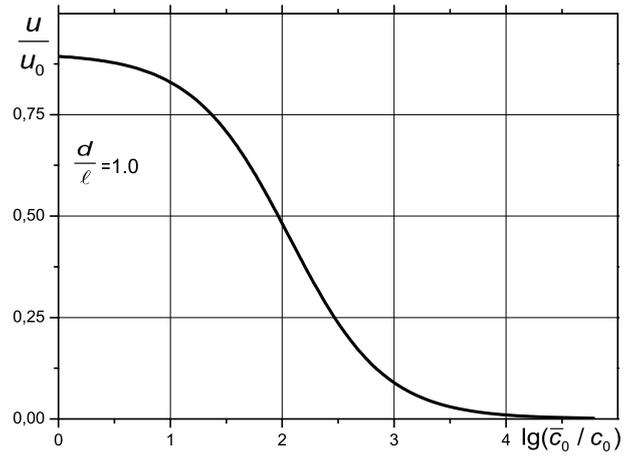


Рис. 3.14. Зависимость модуля вектора раскрытия на краю концевой области трещины, заполненной связями, от относительной жесткости связей

к росту ККН (при фиксированных упругих постоянных материалов). Возрастание податливости одного из материалов ($E_1/E_2 \rightarrow 0$ и $\Psi \rightarrow \infty$) при фиксированном модуле упругости связей также приводит к увеличению ККН, (см рис. 3.15). Такое изменение ККН вызвано тем, что при постоянных значениях $E_2 = E_b$ (в расчете $E_b = 25$ МПа) следствием возрастания податливости первого материала является увеличение раскрытия трещины и, для сдерживания такого раскрытия, усилия в связях значительно возрастают. Этот эффект выражен сильнее при малом размере концевой области. При возрастании относительной жесткости материалов ($E_1/E_2 \rightarrow \infty$ и $\Psi \rightarrow (E_b \ell (k_2 + 1) / 2\pi H \mu_2)$) усилия в крайней связи (ККН) снижаются и стремятся к некоторой величине, зависящей от параметра Ψ и относительной длины концевой области трещины d/ℓ . Если жесткость одного из материалов существенно увеличивается, то уменьшение раскрытия трещины приводит к снижению сдерживающих это раскрытие усилий в связях.

Изменение упругих свойств материалов приводит не только к изменению параметра Ψ , но и к изменению биупругой постоянной β (см.(1.7)). Диапазон изменения отношения модулей упругости материалов $0.1 \leq E_1/E_2 \leq 10$ (см. рис. 3.15) соответствует $12.29 \leq \Psi \leq 123$, при этом параметр β изменя-

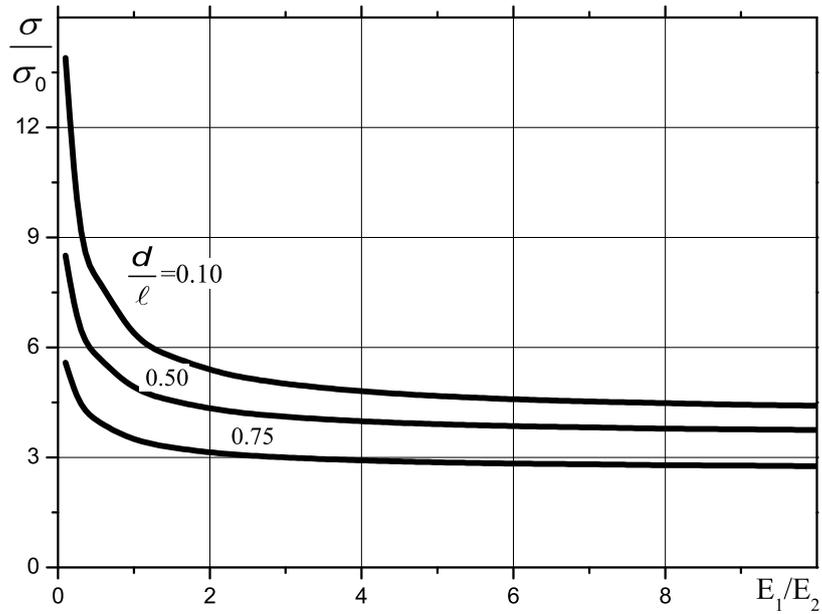


Рис. 3.15. Зависимость модуля вектора усилий на краю концевой области трещины от относительной жесткости соединенных материалов, $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$

ется в промежутке $-0.0608303 \leq \beta \leq 0.0608303$ (см. рис. 3.16). Отметим, что $-0.175 \leq \beta \leq 0.175$ и $\beta=0$ соответствует однородному телу или несжимаемым материалам ($\nu_1 = \nu_2=0.5$) с различными модулями упругости. Возрастание абсолютной величины параметра β приводит к увеличению эффектов, связанных со сдвиговыми деформациями.

Для анализа влияния величины параметра β на распределение усилий в связях проведены расчеты при фиксированном значении параметра Ψ . Запишем выражение (2.29) для состояния плоской деформации и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$

$$\Psi = \frac{4E_b \ell (1 - \nu^2)}{\pi H} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (3.2)$$

При $E_1 = E_2 = E_b$ и $H/\ell = 0.1$ получаем $\Psi = 80(1 - \nu^2)/\pi$. Далее, изменяем отношение модулей упругости материалов так, чтобы значение параметра Ψ оставалось постоянным при заданных коэффициенте Пуассона ν и модуле упругости связей E_b . Пусть $\theta = E_1/E_2$, где E_1, E_2 - новые значения модулей упругости материалов, тогда при заданном значении θ определим новые значения E_1 и E_2 как

$$E_1 = 0.5E_b(1 + \theta), \quad E_2 = 0.5E_b(1 + \theta)/\theta \quad (3.3)$$

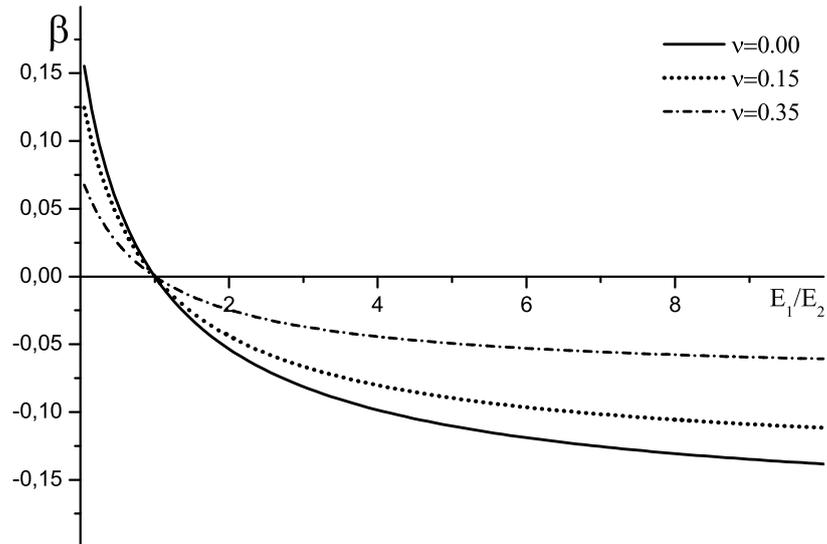


Рис. 3.16. Зависимость биупругой постоянной от относительной жесткости соединенных материалов, $\nu_1 = \nu_2$

Такой выбор модулей упругости материалов сохраняет величину параметра Ψ постоянной. Полагая $\nu_1 = \nu_2 = 0$, (при таком выборе коэффициентов Пуассона зависимость от параметра β проявляется наиболее сильно) имеем $\Psi = 80/\pi \approx 25.465$.

Усилия в связях существенно зависят от изменения биупругой постоянной соединения. Зависимости касательных и нормальных усилий на краю концевой области трещины для $\nu_1 = \nu_2 = 0$ при различных значениях биупругой постоянной (изменение биупругой постоянной осуществляется при изменении относительной жесткости соединенных материалов E_1/E_2 , $E_b = const$) приведены на рис. 3.17ab. При увеличении относительной жесткости материалов касательные усилия в связях возрастают, а нормальные уменьшаются. Значения абсолютных максимумов модуля вектора усилий и его компонент для различных значений параметров $\theta = E_1/E_2$ и β при $H/\ell = 0.1$ и $E_b = const$ приведены в таблице 3.1. Анализ численных результатов позволяет установить, что с увеличением параметра θ ($1 \leq \theta \leq 1000$) происходит перераспределение компонент усилий: касательные усилия в связях существенно возрастают, а нормальные снижаются. При $\theta \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0.175$) нормальные и касательные компоненты усилий сравнимы по величине, а их относительные

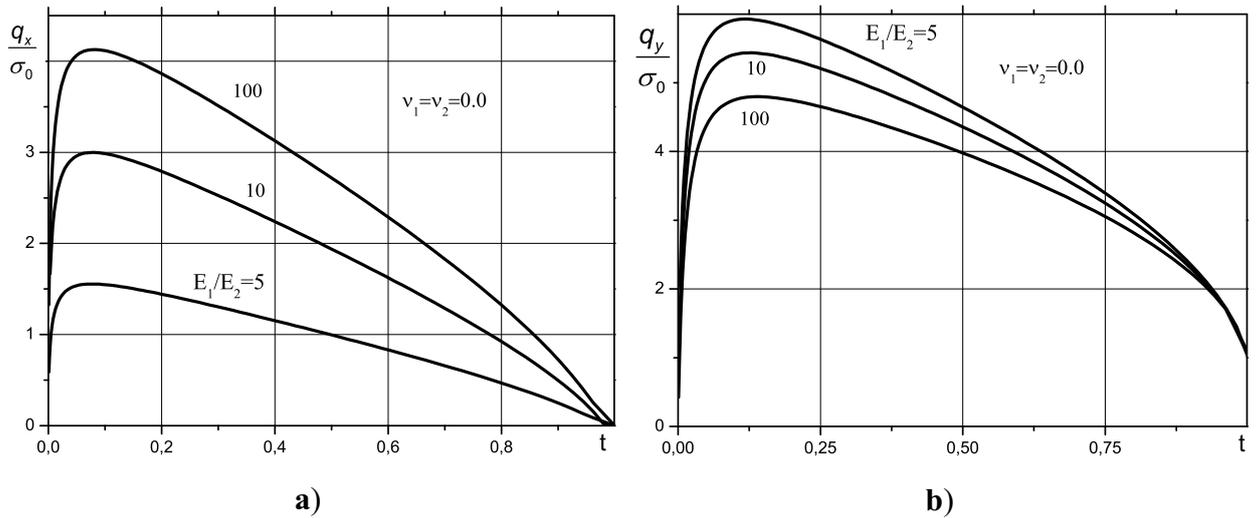


Рис. 3.17. Зависимости **(а)** - касательной и **(б)** - нормальной компонент вектора усилий в связях на краю концевой области трещины от длины концевой области при изменении относительной жесткости материалов, $t = d/\ell$

изменения незначительны.

Таблица 3.1. Зависимость максимальных напряжений в концевой области трещины от относительной жесткости материалов, $H/\ell = 0.1$, $E_b = const$

θ	$ \beta $	σ/σ_0	q_y/σ_0	q_x/σ_0
1	0	6.888	6.888	0
2	0.0535512	6.827	6.651	1.556
5	0.1103178	6.626	5.915	2.998
10	0.1383117	6.489	5.436	3.581
50	0.1666333	6.314	4.840	4.067
100	0.1706748	6.295	4.798	4.128
1000	0.174426	6.264	4.674	4.182
10000	0.174807	6.261	4.666	4.187

Влияние изменения коэффициентов Пуассона материалов на усилия в связях демонстрирует рис. 3.18ab, где представлены зависимости касательных и нормальных усилий на краю концевой области при изменении коэффициентов Пуассона соединенных материалов ($\nu_1 = \nu_2$) при $E_1/E_2 = 100$. При уменьшении коэффициентов Пуассона материалов (что соответствует увеличению биупругой постоянной β) касательные усилия в связях возрастают, а нормальные уменьшаются. Отметим, что изменение коэффициентов

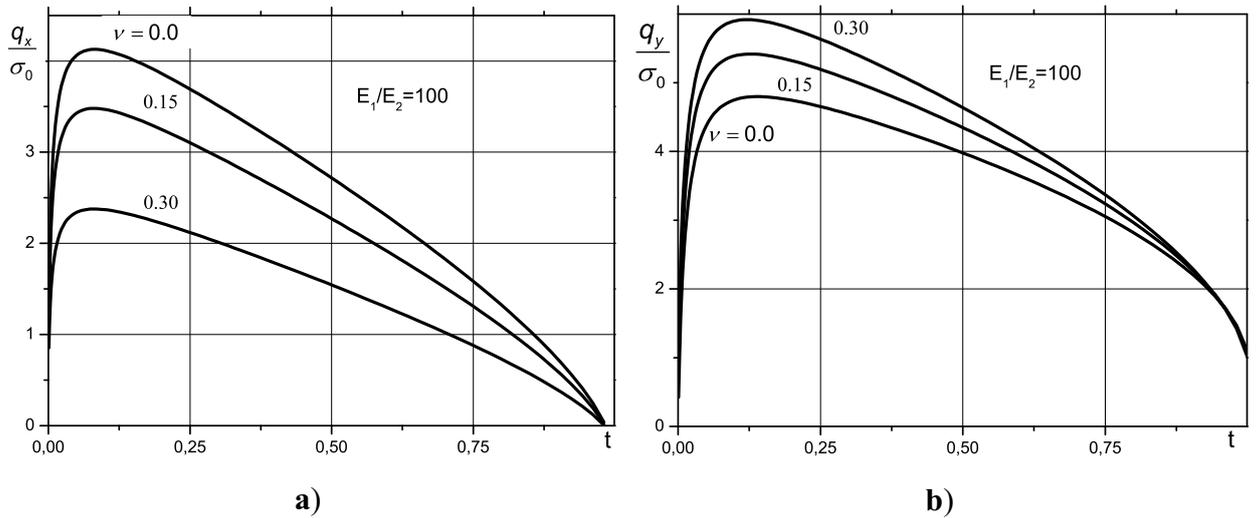


Рис. 3.18. Зависимости **(а)** - касательной и **(б)** - нормальной компонент вектора усилий в связях на краю концевой области трещины от длины концевой области при изменении коэффициентов Пуассона материалов, $t = d/\ell$

Пуассона приводит также к незначительному изменению параметра Ψ : при $\nu = 0$ - $\Psi \approx 24.465$, $\beta = 0.170675$; при $\nu = 0.15$ - $\Psi \approx 24.892$, $\beta = 0.136222$; при $\nu = 0.30$ - $\Psi \approx 23.173$, $\beta = 0.0915916$.

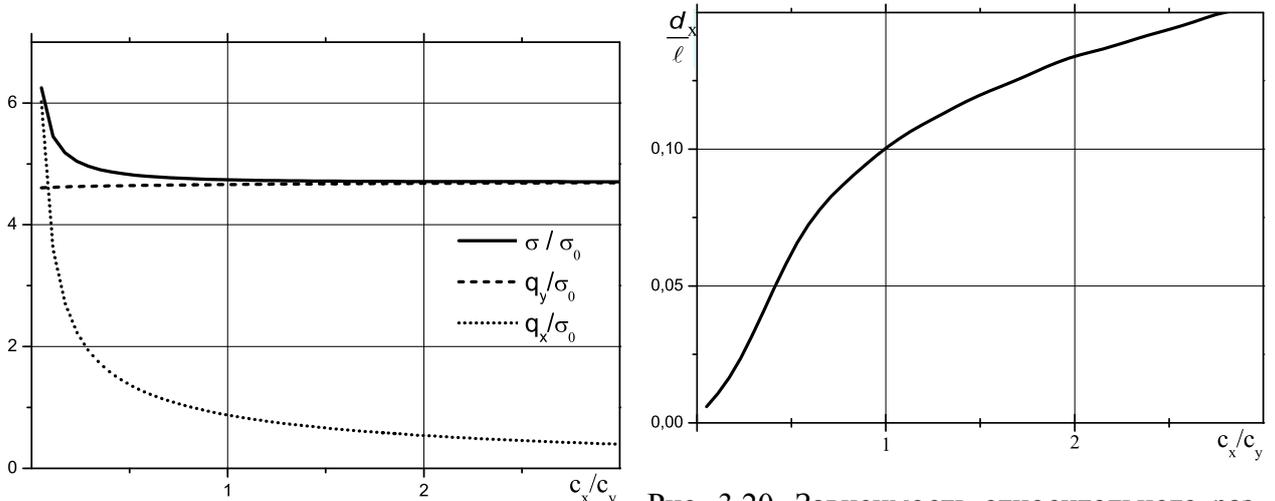


Рис. 3.19. Зависимости максимальных значений усилий вдоль концевой области трещины от соотношения податливости связей

Рис. 3.20. Зависимость относительного размера концевой области трещины, при котором достигается максимум касательной составляющей усилий, от соотношения податливости связей

Приведенные выше результаты получены в предположении, что податливости связей одинаковы в нормальном и касательном направлениях к поверхностям трещины и постоянны вдоль концевой области трещины. Ниже рассмотрены эффекты, обусловленные различием податливости в касатель-

ном и нормальном направлениях, а также изменением податливости вдоль концевой области трещины. В зависимости от физической природы связей в концевой области трещины соотношение между податливостями связей в нормальном и касательном направлениях может изменяться [56, 169]. Влияние отношения податливостей связей в касательном и нормальном направлениях $c_x/c_y = \gamma_2/\gamma_1$ (см. (1.33)) на величину максимальных напряжений в концевой области (ККН) рассмотрено при $E_1/E_2 = 5$ и $E_b = E_2 = 25$ ГПа.

При $c_x/c_y < 1.5$ заметный вклад в напряженное состояние вносят касательные усилия в связях, а при $c_x/c_y \rightarrow \infty$ касательные усилия стремятся к нулю (см. рис. 3.19). Ввиду того, что при одноосном растяжении $q_x \ll q_y$ нормальная составляющая вектора усилий слабо зависит от соотношения c_x/c_y . Увеличение податливости в касательном направлении приводит к возрастанию относительного размера концевой области трещины, при котором достигается этот максимум (см. рис. 3.20).

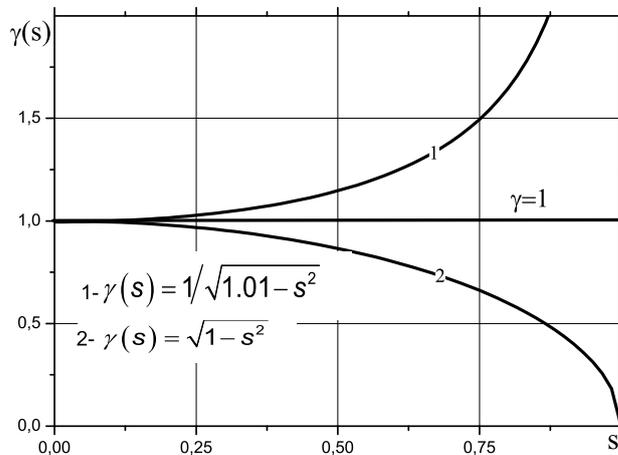


Рис. 3.21. Зависимости податливости вдоль концевой области трещины, модель деструкции/восстановления связей вблизи вершины

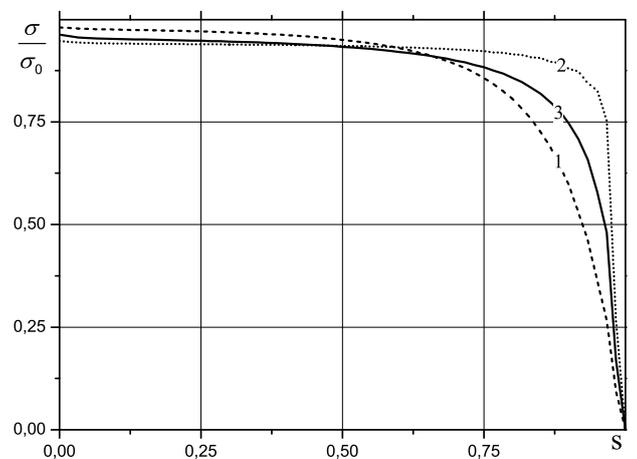


Рис. 3.22. Усилия в связях вдоль концевой области трещины, 1, 2- см. рис. 3.21, 3- постоянная податливость связей

Влияние изменения податливости вдоль концевой области трещины рассмотрено для случая трещины, заполненной связями ($d/\ell = 1$) в предположении, что податливости одинаковы в касательном и нормальном направлениях. Возрастание или уменьшение податливости вблизи вершины

трещины (что соответствует деструкции или восстановлению связей в этой зоне) может быть описано выражениями вида (см. рис. 3.20)

$$\gamma_{1,2}(s) \equiv \gamma(s) = 1/\sqrt{1.01 - s^2}, \quad \gamma(s) = \sqrt{1 - s^2} \quad (3.4)$$

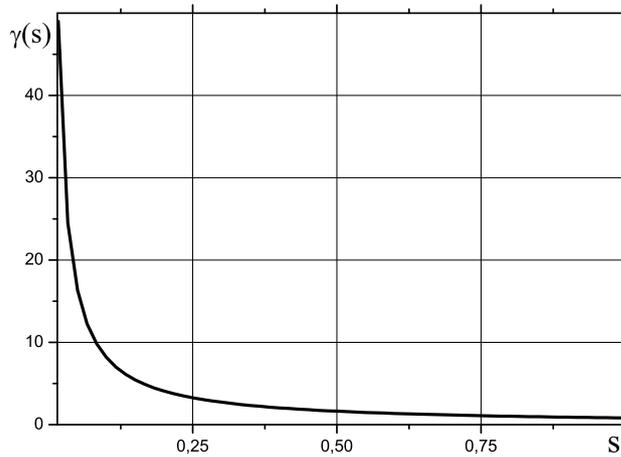


Рис. 3.23. Зависимость податливости вдоль концевой области трещины, модель деструкции связей в центре зоны, заполненной связями

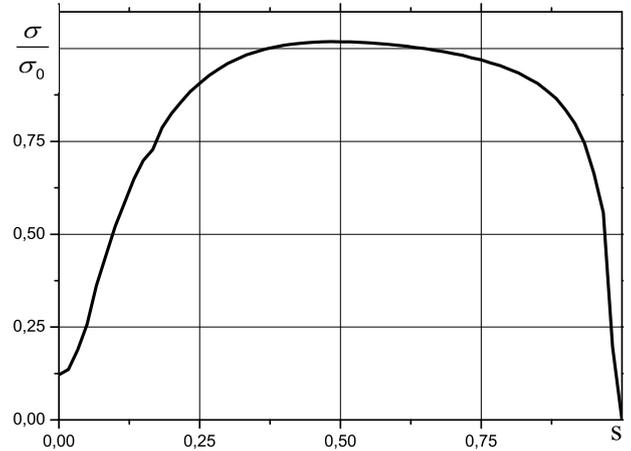


Рис. 3.24. Усилия в связях вдоль концевой области трещины, эффект разупрочнения связей

Такое изменение податливости приводит к перераспределению усилий вдоль концевой области трещины, причем наиболее существенное изменение усилий соответствует области заметного изменения податливости (см. рис. 3.21). Возрастание податливости в направлении к центру зоны, заполненной связями, (например, при деструкции связей в этой зоне) может быть описано выражением (см. рис. 3.23):

$$\gamma(s) = (s \sqrt{1.5})^{-1}$$

Распределение усилий вдоль концевой области трещины, соответствующее такой податливости связей, приведено на рис. 3.24. В области, где податливость связей велика, происходит значительное снижение напряженности связей. Методики, основанные на рассмотрении податливости связей, изменяющейся вдоль концевой области трещины, используются при решении

задач с нелинейной диаграммой деформирования связей и при анализе кинетики связей в концевой области трещины.

3.1.2. Трещина со связями в концевой области при действии растягивающих и сдвиговых внешних нагрузок

При действии растягивающей внешней нагрузки, приложенной по нормали к плоскости трещины, разность нормальных перемещений верхнего и нижнего берегов трещины (нормальная составляющая раскрытия трещины на границе соединения материалов) всегда положительна, за исключением малых участков вблизи вершин трещины, где наблюдается взаимодействие берегов трещины [113, 120]. В модели трещины со связями в концевой области размерами этих участков пренебрегаем, по сравнению с размером концевой области трещины. Если же приложена только внешняя сдвиговая нагрузка, то из аналитического решения (1.10) при $\sigma_0 = 0$ следует, что нормальная составляющая раскрытия трещины на границе соединения материалов имеет отрицательные значения на половине длины трещины, что фактически соответствует контакту берегов трещины в этой области, что не было учтено при постановке задачи. Уточненная постановка задачи для трещины на границе соединения материалов при сдвиге [120, 121, 239] позволяет определить размеры областей контакта. Решение с учетом контактного взаимодействия берегов трещины без трения при сдвиге приводит к рассмотрению двух областей контакта вблизи вершин трещины - одна из них мала, по сравнению с длиной трещины, а другая - порядка половины длины трещины [239] и позволяет определить нормальные сжимающие напряжения в этих зонах. Развитие этого подхода с учетом трения берегов трещины рассмотрено в ряде работ [240–242].

При наличии связей в концевой области трещины, на границе соединения материалов, и действии только внешней сдвиговой нагрузки, решение

уравнения (2.69), полученного с использованием аналитического выражения (1.5), не предполагающего контакта берегов трещины, приводит к отрицательным значениям раскрытия трещины, зависящим от размера концевой области трещины и податливости связей. На рис. 3.25 приведены распределения нормальной и касательной составляющих раскрытия трещины вдоль её длины на промежутке $|s| \leq 1$, $s = x/\ell$ при $E_1 = 135$ ГПа, $E_2 = 25$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, $E_b = E_2$, нормированные величиной касательной составляющей раскрытия в центре трещины $u_{0\tau}$, см. (1.5) при $\sigma_0 = 0$, $x = 0$.

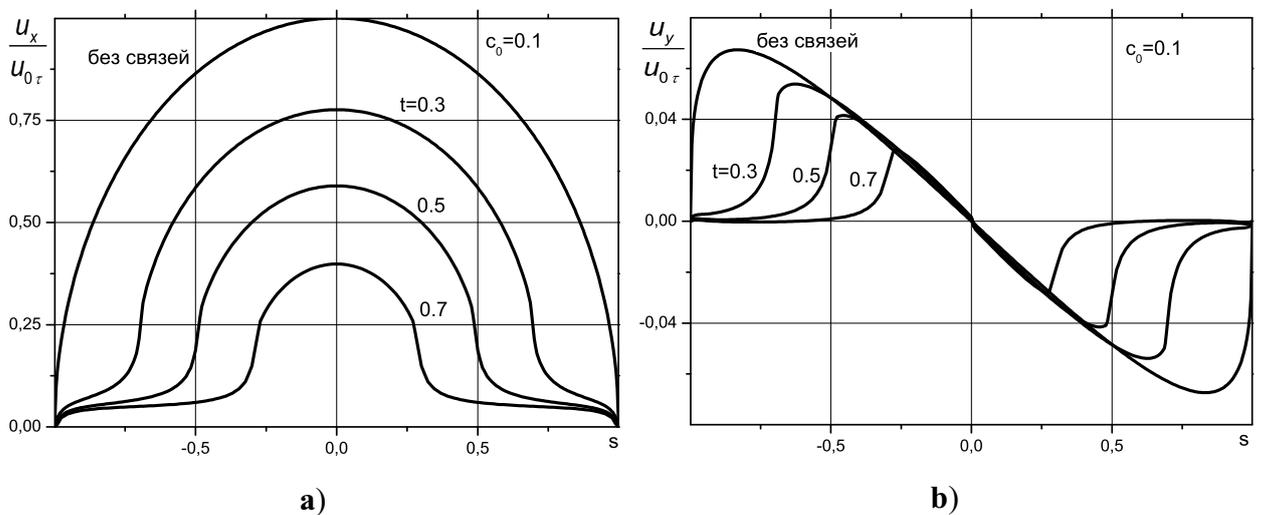


Рис. 3.25. (а) - Касательная и (б) - нормальная компоненты раскрытия трещины при внешней сдвиговой нагрузке, $t = d/\ell$, $s = x/\ell$

Наличие связей в концевой области трещины (физически это может быть, например, адгезионный слой между материалами) исключает взаимопроникновение поверхностей трещины. Отрицательные значения нормальной составляющей раскрытия трещины в концевой области соответствуют сжимающим напряжениям в связях, см. выражение (1.32). Будем полагать, что при действии только касательных внешних нагрузок τ_0 и присутствии адгезионного слоя между берегами трещины, концевая область в зоне сжатия d_1 занимает половину длины трещины - $d_1 = \ell$, а размер концевой области в зоне растяжения d_2 определяется начальными условиями задачи и $d_2 \leq d_1$. Уточнение размеров концевых областей при действии сдвиговых внешних нагрузок может быть получено при использовании алгоритма решения кон-

тактных задач в рамках метода граничных интегральных уравнений, (см. раздел 2.3).

При действии касательных внешних нагрузок компонента раскрытия трещины в направлении, перпендикулярном плоскости трещины, примерно на порядок меньше компоненты раскрытия трещины в касательном направлении, (см. рис. 3.25). Следовательно, приложение растягивающей нагрузки $\sigma_0 < \tau_0$ приведет к раскрытию трещины по всей длине. При отсутствии связей между берегами трещины и действии касательных внешних нагрузок положение минимума раскрытия трещины в нормальном направлении достигается в точке s_c , определяемой условием (см. (1.10), $\sigma_0 = 0$) $\frac{du_{\infty y}(s_c)}{ds} = 0$, которое дает уравнение для определения s_c

$$\operatorname{tg}\left(\beta \ln \frac{1 - s_c}{1 + s_c}\right) = -2 \frac{\beta}{s_c}$$

При совместном приложении касательной и нормальной внешних нагрузок условие непроникновения берегов трещины следует из (1.10): $u_{\infty y}(s) > 0$. Откуда получаем:

$$\frac{\sigma_0}{\tau_0} > \operatorname{tg}\left(\beta \ln \frac{1 - s}{1 + s}\right)$$

Полагая, что внешняя растягивающая нагрузка такова, что предыдущее условие выполняется при $s = s_c$, определяем величину внешней нагрузки, обеспечивающей раскрытие трещины на участке $(-1; s_c)$

$$\sigma_0 > 2 \frac{\beta}{s_c} \tau_0$$

При $|\beta| = 0.0509313$ (см. рис. 3.25b) получим оценки $s_c \approx 0.834$ и $\sigma_0 > 0.12\tau_0$, а при максимально возможном параметре $|\beta| \approx 0.175$ - $s_c \approx 0.819$ и $\sigma_0 > 0.43\tau_0$. Полученные оценки упрощают выбор величины внешних нагрузок, обеспечивающих раскрытие трещины, при учете связей в концевой области трещины.

Изменение знака нормальной компоненты раскрытия трещины при сдвиге вызвано различием механических свойств материалов. Рассмотрим, как и

разделе 3.1.1, влияние параметра β (при фиксированном значении параметра Ψ и $\nu_1 = \nu_2 = 0$, см. выражение (3.2)) на распределение нормальной компоненты раскрытия трещины со связями в концевой области при совместном действии внешних растягивающих и сдвиговых нагрузок. Увеличение пара-

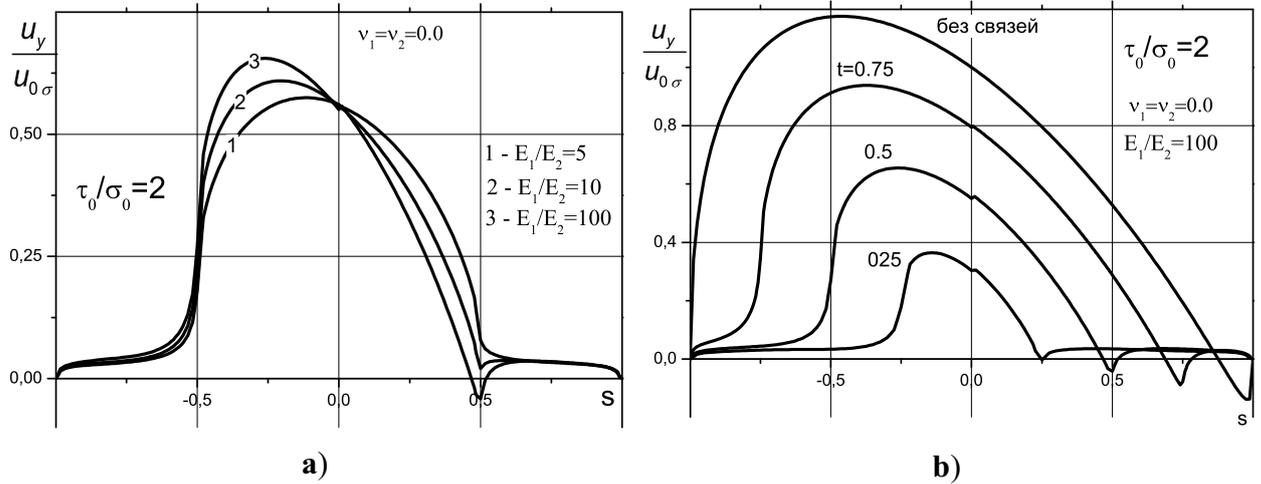


Рис. 3.26. Нормальная компонента раскрытия трещины при изменении: (а) - модулей упругости материалов; (б) - размера концевой области, $t = d/l$, $s = x/l$, $c_0 = 0.1$

метра β (при увеличении отношения модулей упругости материалов) приводит к образованию зоны сжатия в концевой области трещины (см. рис 3.26а).

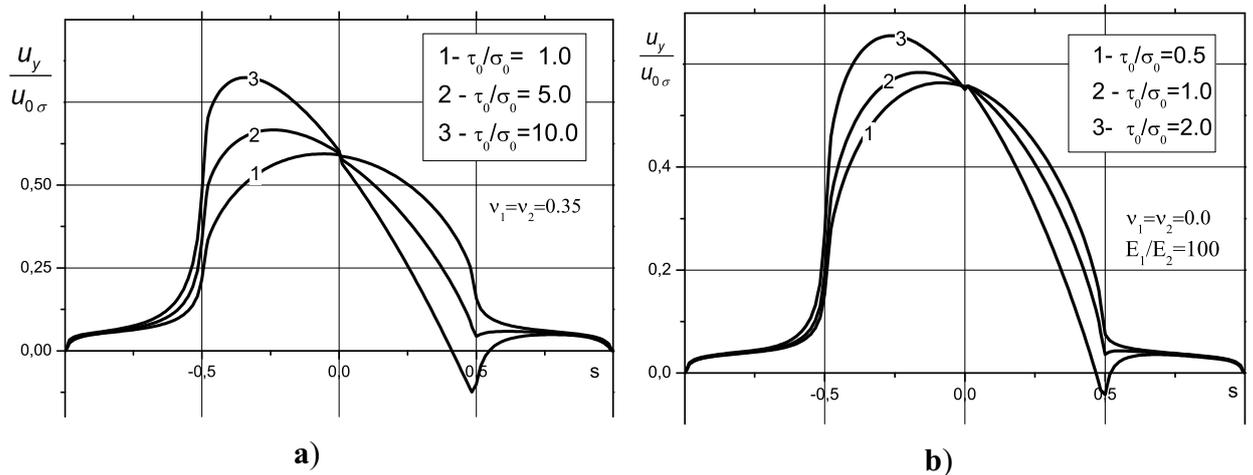
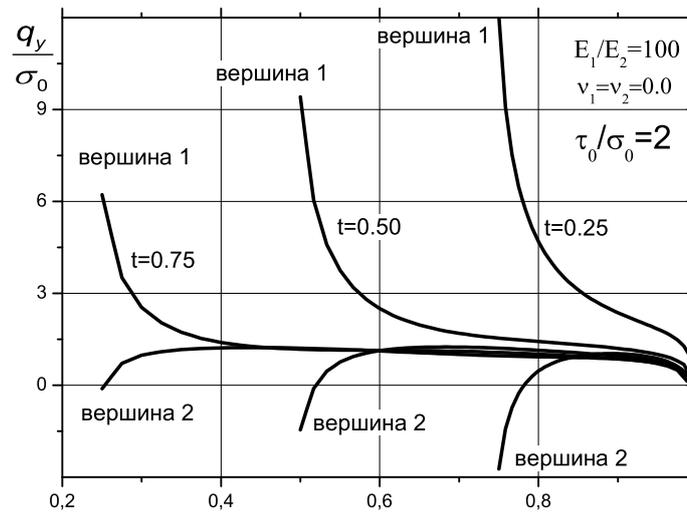
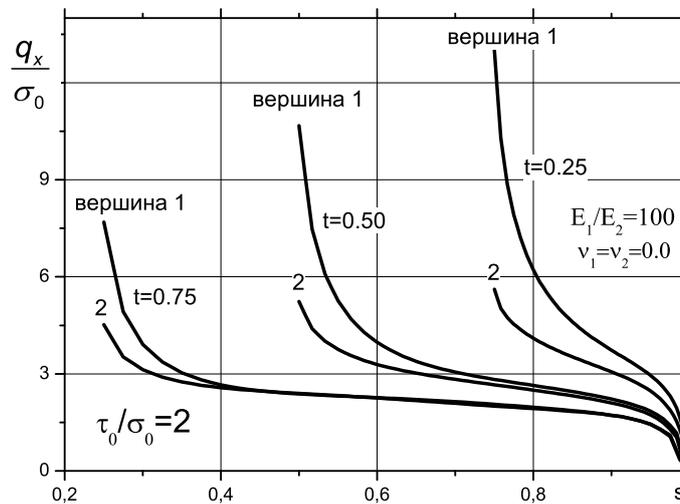


Рис. 3.27. Нормальная компонента раскрытия трещины при изменении соотношения между нормальной и сдвиговой нагрузками: (а) - $\beta = 0.0509313$; (б) - $\beta = 0.01706748$, $t = d/l$, $s = x/l$, $c_0 = 0.1$

При возрастании концевой области трещины для наибольшего из рассмотренных значений параметра β ($E_1/E_2 = 100$) размер зоны сжатия сокращается (см. рис 3.26б). Изменение соотношения между сдвиговой и растяги-



а)



б)

Рис. 3.28. (а) - Нормальная и (б) - касательная составляющие усилий в связях, $\beta = 0.01706748$, $t = d/\ell$, $s = |x|/\ell$, $c_0 = 0.1$

вающей внешними нагрузками приводит, при увеличении сдвиговой компоненты нагрузки, к образованию зон сжатия в концевой области (см. рис 3.27). При этом бóльшему значению параметра β соответствует меньшая величина сдвиговой нагрузки, приводящая к образованию зоны сжатия в концевой области трещины.

Составляющие вектора усилий в связях вдоль концевых областей, прилегающих к обоим вершинам трещины, приведены на рис. 3.28, где $s = |x|/\ell$ - расстояние от центра трещины (нормальное раскрытие трещины при $\tau_0/\sigma_0 = 2$ и $t = d/\ell = 0.5$ дано на рис. 3.27b). При совместном приложении

нормальной и сдвиговой внешних нагрузок возникают заметные различиям в напряженно - деформированном состоянии концевых областей трещины. В концевой области, расположенной в зоне растяжения связей ($x < 0$, вершина 1), усилия в связях заметно превышают усилия в концевой области, примыкающей к вершине 2. В этой концевой области имеются также зоны сжатия (рис. 3.28а). При совместном приложении нормальной и сдвиговой внешних нагрузок возможно, ввиду различных деформационных характеристик связей при растяжении и сжатии, существование концевых областей различного размера, примыкающих к вершинам трещины. Несимметричное распределение усилий в связях определяет также различные режимы разрушения вблизи вершин трещин.

3.2. Прямолинейная трещина на границе соединения материалов со связями с нелинейной диаграммой деформирования

В разделе приведены результаты численных экспериментов по исследованию влияния параметров нелинейной части кривой деформирования связей, размера концевой области трещины и величины внешней нагрузки на сходимость итерационного процесса решения нелинейной системы сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений для определения напряжений в связях. Приведены также результаты параметрического анализа напряженного состояния в концевой области трещины, на границе соединения материалов, позволяющие выделить эффекты, связанные с нелинейностью деформирования связей. Расчеты выполнены с использованием феноменологических кривых деформирования связей, рассмотренных в разделе 1.3.3. Отметим, что, при рассмотрении связей с нелинейной диаграммой деформирования, задача об определении напряжений в связях становится, в отличие случая линейно-упругих связей, масштабно-зависимой. Полученные результаты могут быть полезны (несмотря на ограниченную возможность переноса

са решения нелинейных задач на другие масштабы) при разработке методик решения задач в рамках модели трещины со связями методами конечных и граничных элементов.

3.2.1. Сходимость численного решения. Влияние формы кривой деформирования связей

Рассмотрим трещину длины $2\ell = 10^{-3}$ м на границе соединения полуплоскостей из различных материалов - соединение металла (модуль упругости $E_1 = 135$ ГПа) и полимера (модуль упругости $E_2 = 25$ ГПа), коэффициенты Пуассона материалов $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, с двумя концевыми областями одинакового размера, заполненными связями, с нелинейной диаграммой деформирования (начальный модуль упругости связей $E_b = E_2$). Значение раскрытия трещины при изменении закона деформирования связей полагаем равным $u_m = 10^{-7}$ м. Распределения усилий $q_{x,y}$ вдоль концевой области трещины определяются из решения нелинейной системы СИДУ (2.69). Подчеркнем, что для связей с нелинейной диаграммой деформирования решение зависит не только от параметра относительной жесткости связей Ψ , как в линейном случае, но и от формы кривой деформирования связей. В процессе вычислений размер концевой области трещины в данном разделе работы рассматривается как свободный параметр, и анализ сходимости итерационного процесса и распределений напряжений в концевой области трещины выполняется для $0 < d \leq \ell$.

Представленные ниже результаты получены в предположении, что эффективная начальная податливость связей постоянна вдоль концевой области трещины, одинакова по направлениям координатных осей ($\gamma_{1,2}(s, \sigma) = \gamma(s, \sigma)$) и определяется выражением, аналогичным (1.33). На каждом шаге итерационного решения $i \geq 1$ эффективную податливость можно представить в виде:

$$c_b^{(i)}(s, \sigma) = c_0 \frac{\ell}{E_b} \gamma^{(i)}(s, \sigma), \quad c_0 = \frac{H}{\ell}, \quad (3.5)$$

где $\gamma^{(1)}(s, \sigma) \equiv 1$ соответствует начальной податливости связей, т.е. податливости на первом шаге итерационного процесса.

Получим некоторые параметры кривых деформирования, выражая их через относительную податливость связей c_0 . Значение податливости c_b на участке упругого деформирования для трещины длиной $2\ell = 10^{-3}$ м и модуля упругости связей $E_b = 25$ ГПа составляет

$$c_b = c_0 (\ell/E_b) = c_0 (0.5 \cdot 10^{-3} / 25 \cdot 10^9) = 2c_0 \cdot 10^{-8} \text{ м / МПа}$$

Максимальное упругое напряжение в связях

$$\sigma_m = u_m/c_b = 5/c_0 \text{ МПа}$$

При $c_0 = 0.1$ (это значение относительной податливости соответствует упругому деформированию связей, состоящих из пучков молекул полимера, [35, 57]) получаем значения $c_b = 2 \cdot 10^{-9}$ м / МПа и $\sigma_m = 50$ МПа, использованные при построении кривых на рис 1.14.

В процессе расчетов варьировались следующие параметры модели: 1) длина концевой области трещины, 2) податливость связей на участке упругого деформирования c_b , 3) величина внешней нагрузки σ_0 , 4) параметры кривых деформирования связей η, δ, n , см. соотношения (1.79)–(1.83). Размер части концевой области трещины, в которой связи деформируются по нелинейному закону, зависит от начальной податливости связей. Если начальная податливость связей постоянна вдоль концевой области, то для линейно-упругих связей модуль вектора усилий σ максимален на краю концевой области, причем при определенном размере концевой области $t_m = d_m/\ell$ этот максимум достигает абсолютного значения.

На рис. 3.29 приведены распределения вдоль концевой области трещины $s = x/\ell$ относительных значений модуля упругих усилий в связях $\Sigma(s) = \sigma(s)/\sigma_0$, ($c_0 = 0.1$) для трех значений относительного размера концевой области d/ℓ , а также огибающая всех таких кривых (штриховая ли-

ния, $0 < d/\ell \leq 1$). Функция $\Sigma(1 - t) = \sigma(1 - t)/\sigma_0$ $t = d/\ell$, соответствующая огибающей зависимости на рис. 3.29, определяет, как уже отмечено в разделе 3.1.1, коэффициент концентрации напряжений на крайней связи (ККН). Зона нелинейного деформирования в концевой области возникает при выполнении условия $\sigma \geq \sigma_m$, где σ_m - максимально допустимое упругое напряжение в связи. Напряжение на крайней связи σ представим с использованием ККН: $\sigma = \sigma_0 \Sigma(1 - t)$. Следовательно, внешняя нагрузка, при превышении которой нелинейная деформация будет наблюдаться для всех концевых областей, для которых $\sigma \geq \sigma_0 \Sigma(1 - t_c) \equiv \sigma_m$, определяется как $\sigma_0 = \sigma_m / \Sigma(1 - t_c)$, где $t_c = d_c/\ell$ - размер концевой области трещины, при котором достигается данное значение ККН, $0 < d_c < \ell$. Определим минималь-

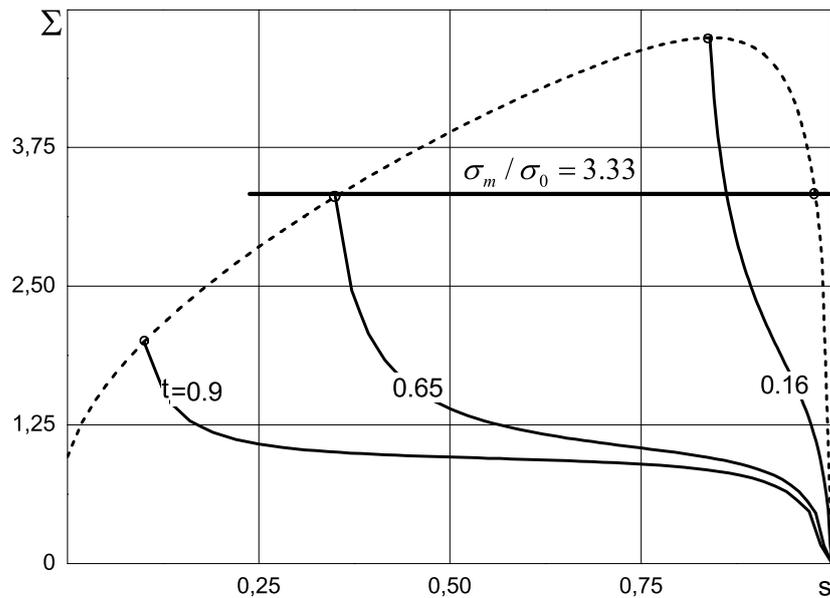


Рис. 3.29. К определению зоны нелинейного деформирования связей, $t = d/\ell$, $s = x/\ell$

ную внешнюю нагрузку σ_0 , при которой возникает нелинейная деформация связей для $c_0 = 0.1$. Максимальное значение ККН для $c_0 = 0.1$ составляет $\Sigma(1 - t_m) \approx 4.74$ при $(t_m = d_m/\ell) \approx 0.16$ (рис. 3.29). Таким образом, минимальная внешняя нагрузка, при превышении которой возникает нелинейная деформация связей $\sigma_0 = \sigma_m/4.74$ (при условии нагружения трещины с концевой областью, равной $(t_m = d_m/\ell) \approx 0.16$). При $\sigma_m = 50$ МПа получаем $\sigma_0 = \sigma_{0Y} \approx 10.6$ МПа. При бóльшей внешней нагрузке ($\sigma_0 > \sigma_{0Y}$) диапазон

концевых областей трещины, в которых связи деформируются по нелинейному закону, расширяется. Например, для ККН $\Sigma(1 - t_c) \approx 3.33$ (заметим, что такая величина ККН имеет место при двух значениях размеров концевых областей $t_1 = d_{c1}/\ell \approx 0.023$ и $t_2 = d_{c2}/\ell \approx 0.64$) внешняя нагрузка, при которой зона нелинейной деформации может наблюдаться в диапазоне указанных концевых областей, $t_1 \leq d/\ell \leq t_2$ составляет $\sigma_0 \approx 15$ МПа (см. рис. 3.29, на котором значениям $t = d/\ell$ соответствуют значения $x/\ell = 1 - d/\ell$). Существование напряженного состояния с нелинейно-деформированными связями в указанном диапазоне концевых областей зависит от параметров и формы кривой деформирования связей.

Анализ влияния величины податливости связей на участке упругого деформирования на решение нелинейной задачи выполнен для билинейного закона деформирования связей (1.84) при $\eta = 7.5$ и $\delta = 1$ (идеальная пластичность). В расчетах изменение податливости связей на участке упругого деформирования осуществлялось посредством изменения относительной податливости связей c_0 (при заданной длине трещины это соответствует изменению параметра H , см. (3.5)) и сохранению постоянного значения $u_m = 10^{-7}$ м. Максимальные упругие напряжения, соответствующие кривой деформирования связей σ_m (см. равенство (1.73)), изменяются при этом обратно пропорционально податливости связей.

На рис. 3.30 для величины внешней нагрузки $\sigma_0 = 15$ МПа и значений начальной относительной податливости связей $c_0 = 0.1; 0.05$ приведены зависимости нормированного раскрытия трещины на краю концевой области u/u_m от относительного размера концевой области трещины d/ℓ , полученные при решении нелинейной задачи. Снижение относительной податливости связей на участке упругого деформирования c_0 (увеличение жесткости) при постоянной величине u_m приводит к сокращению диапазона размеров концевых областей, в которых связи деформируются неупруго, так как напряжения σ_m , соответствующие кривой деформирования, при таком изменении подат-

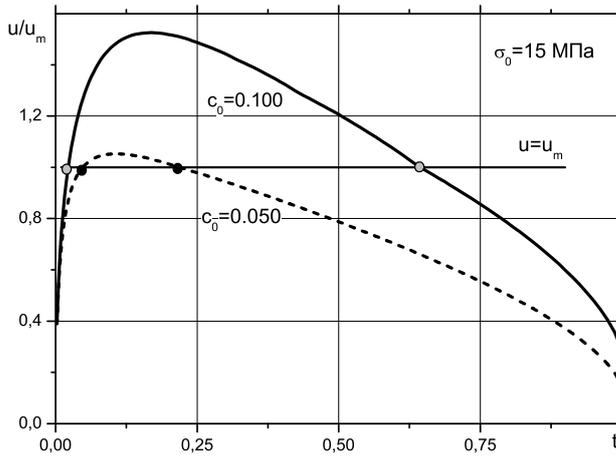


Рис. 3.30. Раскрытие трещины на краю концевой области, $t = d/\ell$.

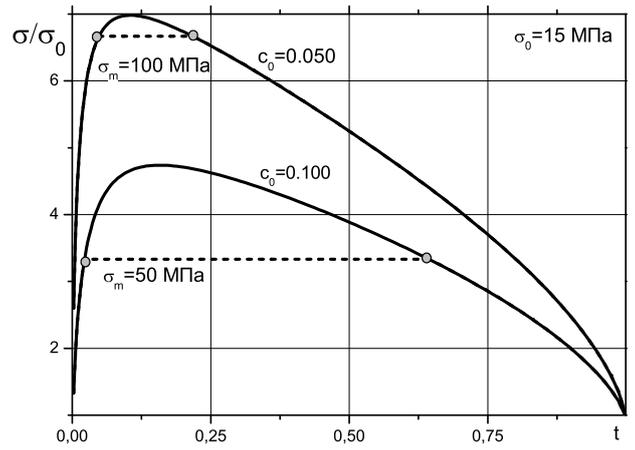


Рис. 3.31. Модуль вектора усилий на краю концевой области, $t = d/\ell$.

ливости возрастают значительней ($\sigma_m \sim 1/c_b$), чем максимальные упругие напряжения вдоль концевой области, которые изменяются как $\sigma \sim 1/\sqrt{c_b}$. Зависимости модуля вектора усилий на краю концевой области для линейной и упруго-пластической кривых деформирования связей при $c_0 = 0.1; 0.05$ приведены на рис. 3.31, где видно возрастание напряжений σ_m при уменьшении относительной податливости связей. Усилия в связях постоянны для концевых областей, расположенных в зоне нелинейного деформирования (пунктир на рис. 3.31), ввиду использования идеально-пластической зависимости. Отметим, что снижение податливости связей при сохранении постоянного значения σ_m приводит к противоположному эффекту - увеличению диапазона концевых областей, охваченных нелинейной деформацией, ввиду более заметного уменьшения максимальной упругой вытяжки связей, соответствующей кривой деформирования ($u_m \sim c_b$) по сравнению с уменьшением максимального упругого раскрытия вдоль концевой области трещины ($u \sim \sqrt{c_b}$).

Зависимость числа итераций N_c до достижения сходимости решения от длины концевой области трещины для билинейной зависимости (1.84) при $\eta = 7.5$, $\delta = 1$ и $c_0 = 0.1$ приведена на рис. 3.32а. При увеличении внешней нагрузки максимальное число итераций наблюдается при большем размере

концевой области, хотя параметры кривой деформирования не изменяются. Это связано с тем, что при относительно малых (по сравнению с σ_m) внешних нагрузках заметное нелинейное деформирование связей реализуется при малых размерах концевой области, где наибольшая концентрация напряжений (рис. 3.29). При возрастании внешней нагрузки диапазон концевых областей трещины, для которых возможно нелинейное деформирование, заметно увеличивается. Бóльшему размеру концевой области соответствует бóльшая зона нелинейного деформирования, и, соответственно, бóльшее число итераций до достижения сходимости.

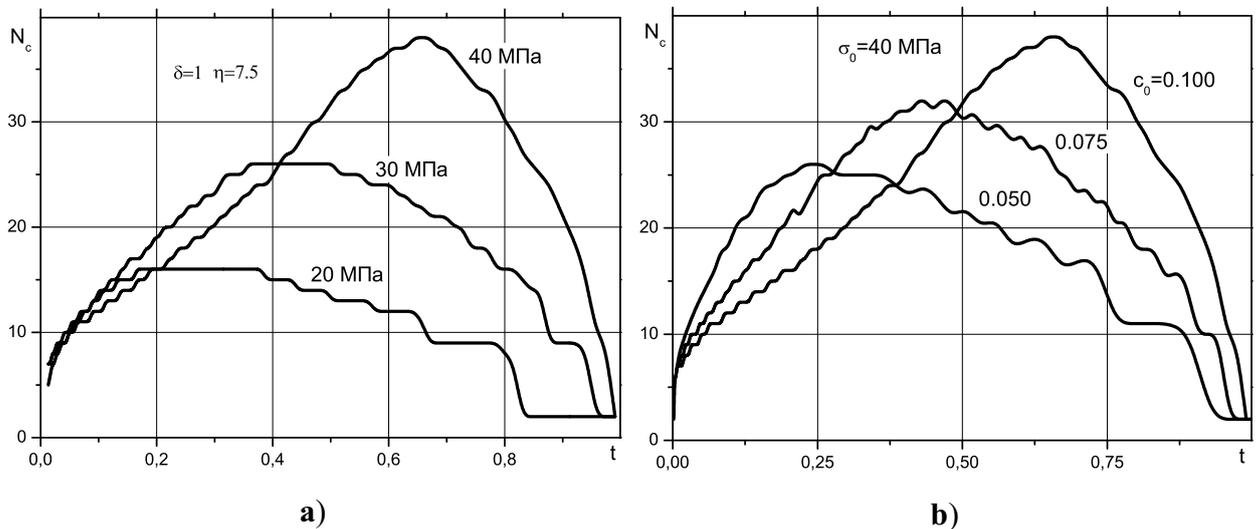


Рис. 3.32. Зависимость числа итераций N_c до достижения сходимости решения от длины концевой области трещины, $t = d/\ell$, $\eta = 7.5$, $\delta = 1$: (а) - вариация внешней нагрузки; (б) - относительной податливости связей

Уменьшение относительной податливости связей c_0 приводит к уменьшению части концевой области трещины, охваченной нелинейной деформацией. При этом также происходит снижение максимального количества итераций, за которое достигается сходимость решения, причем положение максимума смещается в сторону бóльших концевых областей с возрастанием относительной податливости (см. рис. 3.32b). При внешней нагрузке $11 \text{ МПа} \leq \sigma_0 \leq 40 \text{ МПа}$, $\eta = 7.5$, $\delta = 1$ и $c_0 = 0.1 - 0.05$ итерационный процесс сходится при любом размере концевой области, причем число итераций, за которое достигается сходимость итерационного процесса решения,

увеличивается пропорционально величине внешней нагрузки.

Для иллюстрации итерационного решения при $\delta = 1$ приведем некоторые результаты расчетов при внешней нагрузке $\sigma_0 = 40$ МПа, $d/\ell = 0.65$ и $c_0 = 0.1$. Сходимость решения в данном расчете достигается за 36 итераций. Изменение относительной податливости связей вдоль концевой области трещины показано на рис. 3.33. Итерационный процесс сходится достаточно быстро и уже после 7-8 итераций параметры решения изменяются незначительно.

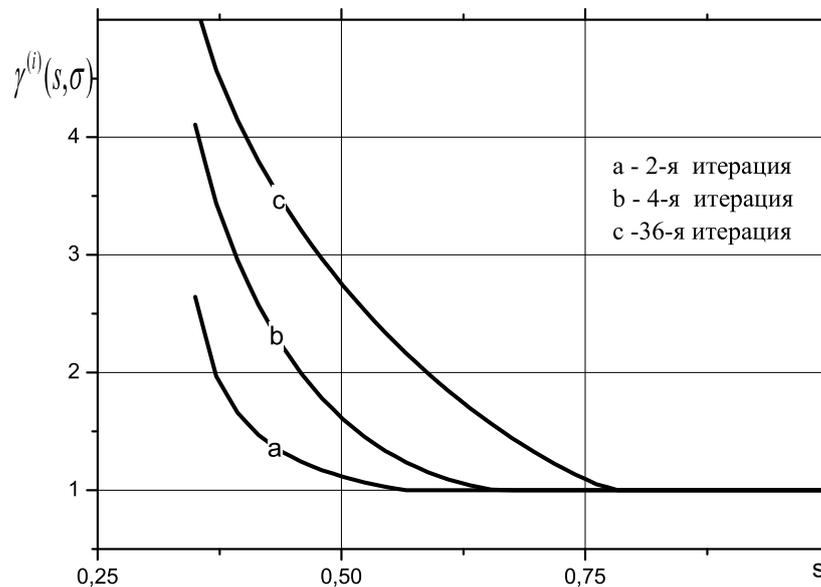


Рис. 3.33. Распределение относительной податливости вдоль концевой области трещины, $s = x/\ell$.

При увеличении внешней нагрузки ($\sigma_0 > 40$ МПа) и сохранении параметров кривой деформирования ($\eta = 7.5$, $\delta = 1$) имеется диапазон значений концевых областей, в которых решение нелинейной задачи отсутствует, ввиду того, что перемещения на краю концевой области превышают величину u_{cr} еще до достижения сходимости итерационного процесса по условию (2.93). Например, для $\sigma_0 = \sigma_m = 50$ МПа при $0.12 \leq d/\ell \leq 0.73$ итерационный процесс решения нелинейной задачи не сходится. Окончание итерационного процесса выполняется ввиду того, что раскрытие трещины на краю концевой области превышает величину u_{cr} . В рамках механической модели это соответствует нарушению в указанном диапазоне концевых областей со-

стояния предельного равновесия и развитию трещины с разрывом связей в концевой области [31].

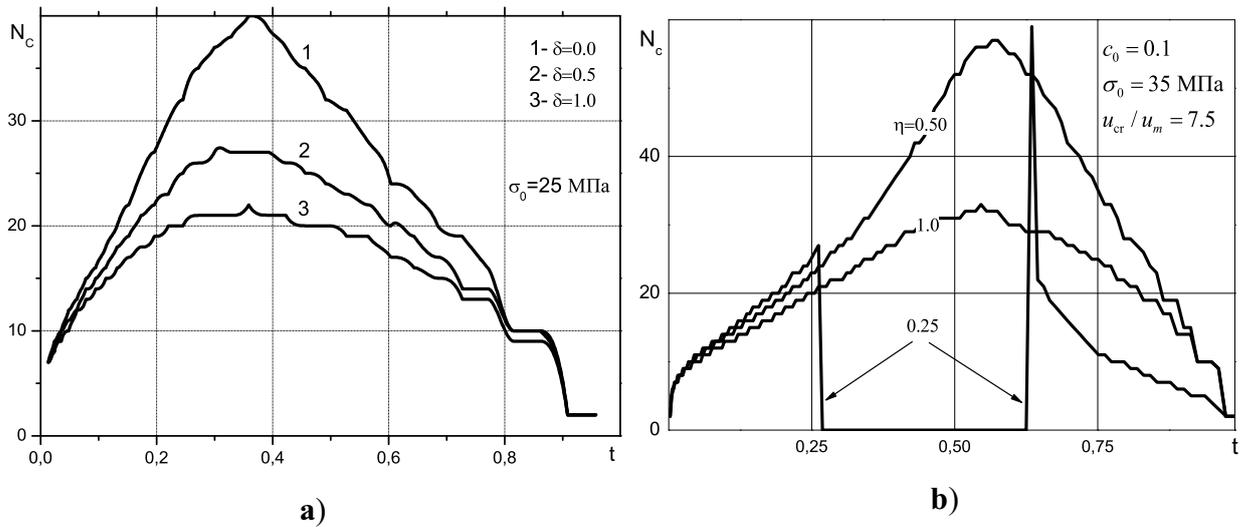


Рис. 3.34. Зависимость числа итераций N_c до достижения сходимости решения от длины концевой области трещины, вариация параметра разупрочнения, $\eta = 7.5$, $t = d/\ell$: **(a)** - $\sigma_0 = 25$ МПа, **(b)** - $\sigma_0 = 35$ МПа

Изменение параметра разупрочнения δ в диапазоне $0 \leq \delta \leq 1$ при постоянной внешней нагрузке существенно влияет на сходимость итерационного процесса. Зависимость, аналогичная рис. 3.33, при вариации параметра разупрочнения δ и фиксированной внешней нагрузке приведена на рис. 3.34а. Максимальное число итераций существенно зависит от параметра разупрочнения, но положение этого максимума сохраняется при изменении параметра δ . Расчетным путем установлено, что для зависимости (1.84) при внешней нагрузке $\sigma_0 \leq 40$ МПа и $0.9 \leq \delta \leq 1$ итерационное решение сходится при любом размере концевой области, а при уменьшении параметра δ возникают зоны отсутствия решения. При уменьшении внешней нагрузки диапазон допустимых значений δ возрастает. Например, при внешней нагрузке $\sigma_0 = 35$ МПа сходимость решения наблюдается в диапазоне $0.4 \leq \delta \leq 1$. Зависимости числа итераций N_c до достижения сходимости решения при внешней нагрузке $\sigma_0 = 35$ МПа, $\eta = 7.5$ и значениях параметра разупрочнения $0.25 \leq \delta \leq 1$ (зависимость (1.84)) приведены на рис. 3.34b. При значении $\delta = 0.25$ зона отсутствия сходимости итерационного решения занимает более третьей части

трещины. Как и в предыдущем примере расчета, окончание итерационного процесса выполняется ввиду того, что раскрытие трещины на краю концевой области превышает величину u_{cr} . Для значений $\delta = 0.5, 1.0$, при которых решение сходится во всем диапазоне концевых областей, максимальное число итераций возрастает при уменьшении параметра δ , но положение максимума сохраняется при изменении этого параметра. Отметим, что аналогичная зависимость наблюдается и при изменении параметра η . Уменьшение этого параметра (при фиксированном значении δ) также приводит к заметному возрастанию числа итераций и образованию зон отсутствия решения, см. подробнее в [54].

Следующая серия расчетов выполнена при $\eta = u_{cr}/u_m = 4$ и различных значениях параметра упрочнения δ . Как и в рассмотренных выше случаях, уменьшение параметра δ приводит к снижению величины внешней нагрузки, при которой возникают зоны отсутствия сходимости итерационного решения. Например, для билинейной зависимости (1.84) при внешней нагрузке $\sigma_0 = 25.5$ МПа и $\eta = 4$, решение сходится во всем диапазоне значений концевых областей $0 < d \leq \ell$ для $0.6 < \delta \leq 1$. При $\delta \leq 0.6$ возникают зоны отсутствия решения, размер которых возрастает при уменьшении параметра δ . Зависимости параметра сходимости решения Δ_n от номера итерации n_i при внешней нагрузке $\sigma_0 = 25.5$ МПа и $(d/\ell) = 0.1$ приведены на рис. 3.35. Итерационный процесс сходится для значений $\delta = 0.1; 0.5$. Если же $\delta = 0$ ($\sigma_{cr} = 0$), то возникает неустойчивость численного решения, итерационный процесс расходится (раскрытие трещины на краю концевой области превышает критическое значение, $u > u_{cr}$ начиная с итерации $n_i = 10$). При увеличении внешней нагрузки до $\sigma_0 \approx 31.8$ МПа зоны расходимости решения наблюдаются во всем диапазоне значений параметра $0 \leq \delta \leq 1$. Математически это выражается в плохой обусловленности матрицы $A(\sigma)$ в (2.86) (ввиду того, что эффективные податливости связей (2.92) значительно возрастают при неизменном векторе правой части системы) и в возникновении

неустойчивости решения для тех диапазонов концевых областей, для которых невозможно статическое равновесие при данной нагрузке. Для трещины с концевой областью в однородной плоскости при линейном законе разупрочнения связей определение соответствующих критических параметров предельного равновесия трещины сводится к решению задачи на собственные значения [243–245]. Для определения критических размеров концевой области и величины предельной внешней нагрузки при обобщенном законе деформирования связей вида (1.70) необходимо совместное решение системы (2.69) и уравнений, определяющих предельное равновесие трещины с концевой областью.

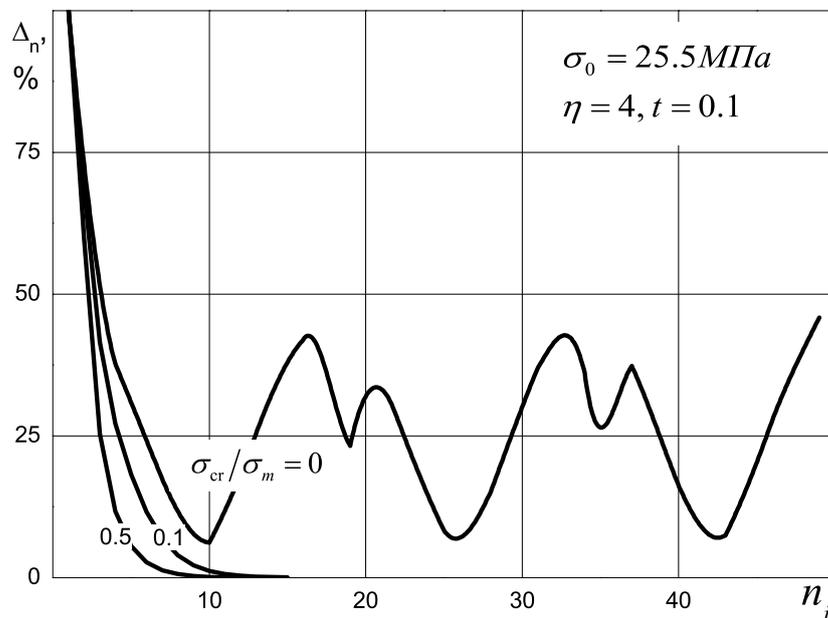


Рис. 3.35. Зависимость параметра сходимости от номера итерации, $t = d/\ell$

Сравнительный анализ сходимости итерационного решения при использовании кривых деформирования различной кривизны (рис. 3.36) показывает, что при заданной внешней нагрузке меньшее число итераций до достижения сходимости решения в зоне наибольших упругих напряжений ($d/\ell = 0.1$, см. рис. 3.29) соответствует выпуклой кривой деформирования связей. При относительно малых внешних нагрузках наибольшее число итераций требуется при использовании вогнутой кривой деформирования, а результаты расчетов при использовании билинейной зависимости занимают

промежуточное положение.

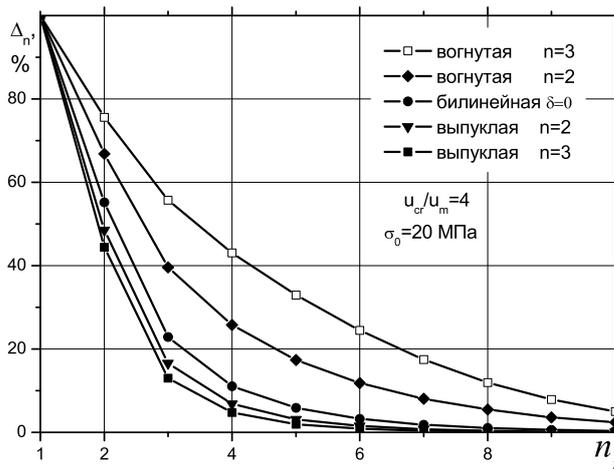


Рис. 3.36. Зависимость параметра сходимости Δ_n от номера итерации n_i , различные формы кривых деформирования связей.

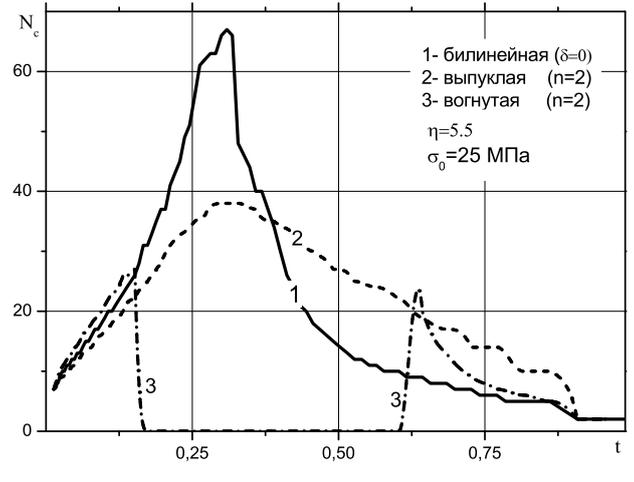


Рис. 3.37. Зависимость числа итераций N_c до достижения сходимости решения от длины конечной области трещины, различные формы кривых деформирования связей, $t = d/\ell$

Увеличение степени полинома для выпуклой кривой приводит к снижению числа итераций до достижения сходимости решения во всем допустимом диапазоне внешних нагрузок и концевых областей. Для вогнутой кривой деформирования связей наблюдается обратная зависимость – при увеличении степени полинома для вогнутой кривой скорость сходимости заметно снижается соответственно с увеличением кривизны (см. рис. 1.14). Сравнительный анализ скорости сходимости для трех типов кривых показывает, что наибольшая скорость сходимости наблюдается при использовании выпуклой кривой, а использование вогнутой кривой деформирования требует наибольшего числа итераций до достижения сходимости решения. В случае использования вогнутой кривой деформирования связей и при возрастании внешней нагрузки до величины $\sigma_0 \approx 2.3\sigma_{0Y}$ имеется бóльший диапазон концевых областей, при которых решение отсутствует (рис. 3.37).

“Сверхупрочнение” связей. Рассмотрим сходимость решения в случае “сверхупрочнения” связей (увеличении жесткости связей) $\delta > \eta$ на примере зависимости (1.84). Отметим, что физически ситуация $\delta > \eta$ возможна, например, при изменении свойств связей под воздействием внешних физи-

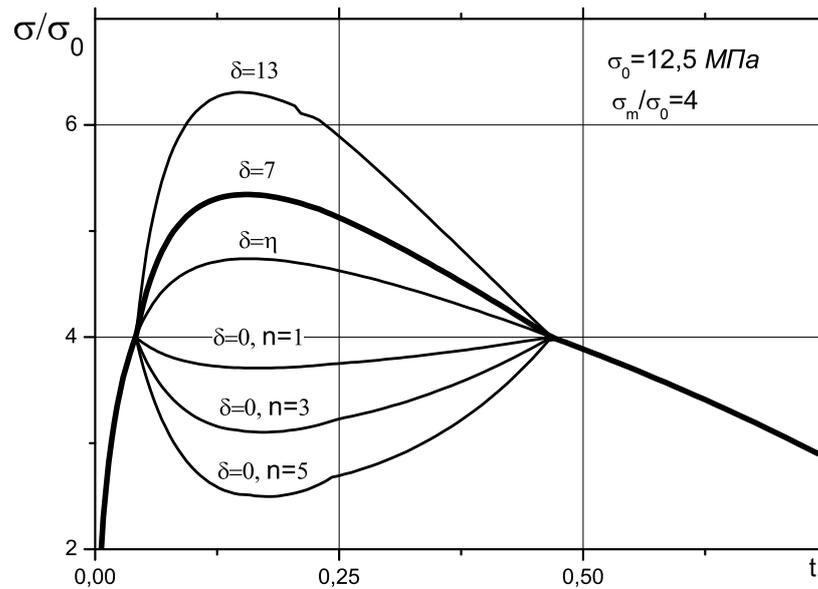


Рис. 3.38. Зависимость модуля вектора усилий в связях на краю концевой области трещины от длины концевой области, $t = d/\ell$

ческих полей или в процессе восстановления работоспособности материала. Фиксируем значение параметра билинейной зависимости $\eta = u_{cr}/u_m$ и будем выбирать значения параметра δ следующим образом. Отношение жесткости связей на начальном линейно-упругом участке деформирования k_B и участке сверхупрочнения k_S определяется так:

$$\omega = \frac{k_S}{k_B}, \quad k_S = \frac{\sigma_{cr} - \sigma_m}{u_{cr} - u_m}, \quad k_B = \frac{\sigma_m}{u_m}$$

Из этих выражений получаем связь между параметрами билинейной кривой деформирования связей $\delta = \omega(\eta - 1) + 1$. Для значений $\omega = 2; 4$ получаем (при $\eta = 4$) значения $\delta = 7$ и 13 , соответственно. Анализ распределений напряжений вдоль концевой области трещины выполнен для билинейной зависимости и значений параметра $\delta = 0, 4, 7, 13$ ($\delta = \eta = 4$ соответствует деформированию связей в упругой области). Для сравнения выполнены также расчеты для вогнутой кривой деформирования (1.83) при $\delta = 0, n = 3$ и $\delta = 0, n = 5$.

Зависимости модуля вектора усилий на крайней связи (σ/σ_0) при $\sigma_0 = 12.5$ МПа, $\sigma_m/\sigma_0 = 4$ (размер зоны неупругой деформации связей не изменяется при постоянной величине σ_m) от относительного размера концевой

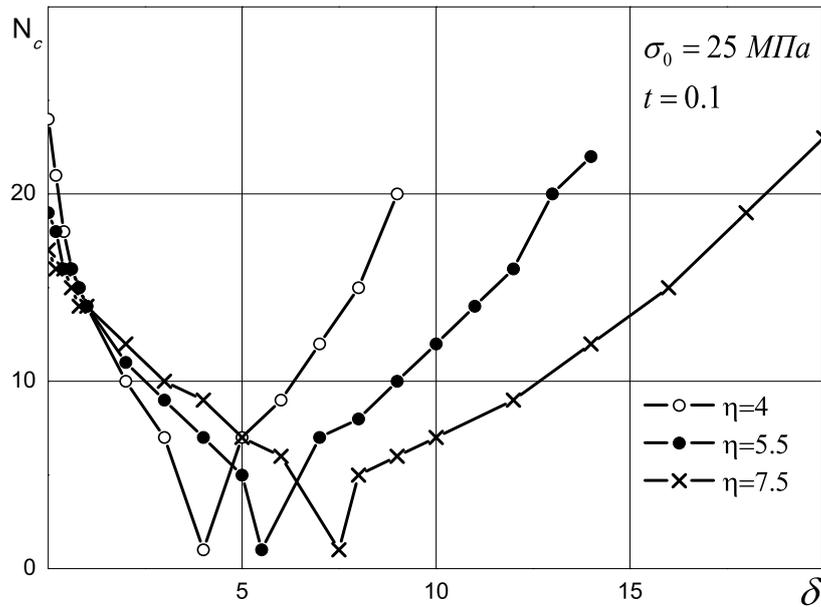


Рис. 3.39. Зависимость числа итераций от параметра δ билинейной кривой деформирования, $t = d/\ell$

области для указанных типов кривых приведены на рис. 3.38, на котором видно существенное влияние параметров кривой деформирования на напряженное состояние в концевой области трещины даже при относительно невысокой внешней нагрузке (по сравнению с предельной для данного случая нагрузкой возникновения нелинейных деформаций $\sigma_{0Y} \approx 10.6$ МПа). При нагрузке $\sigma_0 = 12.5$ МПа процесс сходимости является устойчивым, если $\delta < 15$, а при больших значениях этого параметра возникает неустойчивость решения. При “свехупрочнении”, как и в случае кривых с разупрочнением, при определенных размерах концевых областей и параметрах кривой деформирования возможно возникновение плохой обусловленности матрицы в системе (2.86) (ввиду значительного уменьшения эффективной податливости связей (2.92) для кривых с большим параметром δ) и возникновение, ввиду этого, неустойчивости решения.

При возрастании внешней нагрузки диапазон значений параметра δ , при которых решение сходится, сокращается. Например, зависимости числа итераций до достижения сходимости решения от величины параметра δ при нескольких значениях параметра η для $d/\ell = 0.1$ при $\sigma_0 = 25$ МПа

приведены на 3.39. Число итераций достигает минимума (одна итерация) при условии $\delta = \eta$, что соответствует упругой деформации связей. Как при $0 \leq \delta < \eta$, так и при $\delta \geq \eta$ число итераций существенно зависит от величины σ_{cr} . При каждом значении параметра η расчеты выполнялись до достижения предельного значения параметра δ_r , при котором решение еще сходится для заданного размера концевой области. Радиус сходимости относительно параметра δ_r при заданном размере концевой области возрастает с увеличением критического раскрытия трещины. При каждом значении параметра разупрочнения δ число итераций до достижения сходимости решения возрастает с увеличением внешней нагрузки. Расчеты показывают, что при относительно высоких значениях внешней нагрузки скорость возрастания числа итераций снижается. С другой стороны, при возрастании параметра η (при фиксированном значении u_m это соответствует возрастанию u_{cr}) число итераций, требуемое для достижения решения, уменьшается и стремится при $\eta \rightarrow \infty$ к некоторому постоянному значению, зависящему от величины внешней нагрузки.

3.2.2. Напряженное состояние в концевой области трещины со связями с нелинейной диаграммой деформирования

Рассмотрим влияние нелинейной части кривой деформирования связей на напряженное состояние в концевой области прямолинейной трещины, на границе соединения материалов. Форма нелинейного участка кривой деформирования связей зависит от типа и свойств связей в концевой области трещины, а параметр u_m не является постоянным и может изменяться, в частности, при росте трещины. Простейшей кривой такого рода является билинейная зависимость (1.84). Если податливости упругих связей $c_{x,y}(x)$ изменяются вдоль концевой области трещины, то эффективная податливость $c_b(x)$ также является переменной, что соответствует изменению закона де-

формирования связей вдоль концевой области трещины.

Рассмотрим результаты расчета усилий в связях и раскрытия в концевой области трещины при билинейной кривой деформирования для трещины длины $2\ell = 10^{-3}$ м, упругих постоянных материалов и связей, использованных в предыдущем разделе, $u_m = 10^{-7}$ м и $\delta = 0.5$.

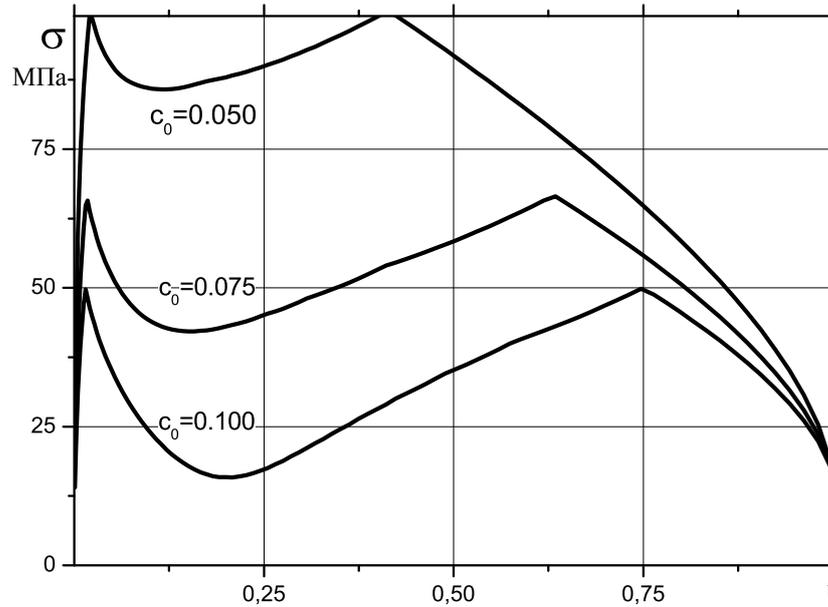


Рис. 3.40. Модуль вектора усилий на краю концевой области трещины, $t = d/\ell$, $\eta = 2$, $\sigma_0 = 17.5$ МПа

Зависимость модуля вектора усилий на краю концевой области трещины от её относительного размера d/ℓ при внешней растягивающей нагрузке $\sigma_0 = 17.5$ МПа и $\eta = 2$ для различных значений относительной податливости связей приведена на рис. 3.40. Наиболее значительное перераспределение усилий при рассмотрении кривой деформирования связей с нелинейной ветвью происходит при размерах концевой области d/ℓ , близких к положению максимума усилий в связях (см. рис. 3.29).

Раскрытие трещины на краю концевой области при нелинейном законе деформирования связей имеет, как и в случае линейных связей, абсолютный максимум, причем чем выше относительная податливость связей, тем значительнее увеличение раскрытия трещины; соответствующие распределения раскрытия трещины при $\sigma_0 = 17.5$ МПа аналогичны приведенным на

рис. 3.30, но с бõльшей зоной возможных нелинейных деформаций связей.

Распределения нормальных и касательных усилий в связях при внешней нагрузке $\sigma_0 = 17.5 \text{ МПа}$, $\eta = 2$ и $c_0 = 0.1$ приведены на рис. 3.41. Диапазон размеров концевой области трещины, при котором возможна нелинейная деформация связей в этом случае, $0.013 \leq d/\ell \leq 0.75$ (см. рис. 3.40). При возрастании размера концевой области трещины уровень упругих напряжений в связях снижается и, соответственно, уменьшается часть концевой области с нелинейной деформацией связей.

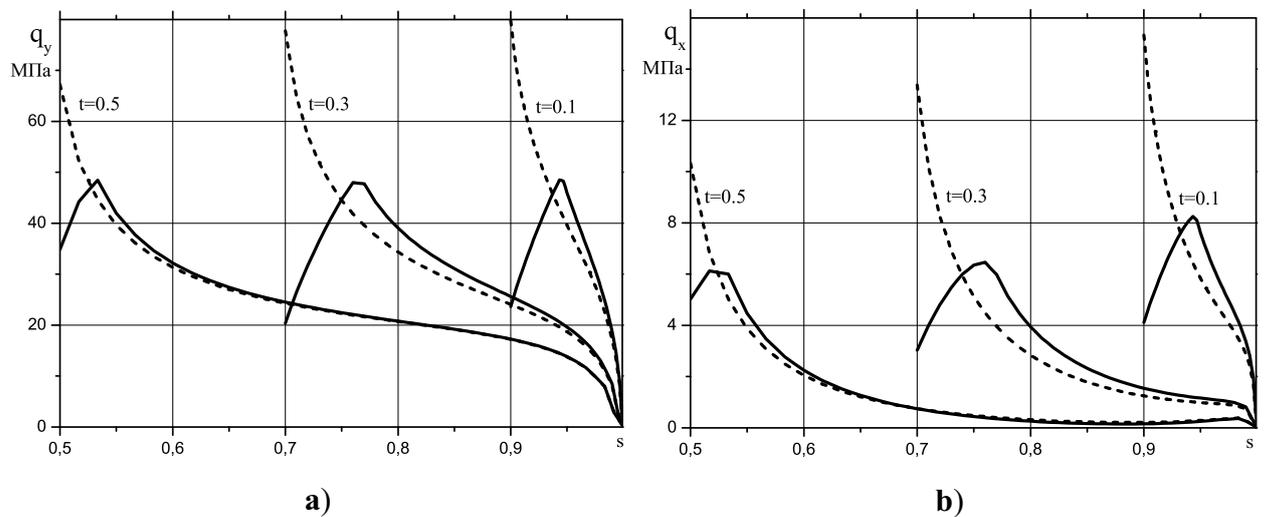


Рис. 3.41. **(а)** - Нормальные и **(б)** - касательные усилия в связях, $\sigma_0 = 17.5 \text{ МПа}$, $\eta = 2$, $\delta = 0.5$, $t = d/\ell$, $s = x/\ell$

При заданных внешней нагрузке ($\sigma_0 = 17.5 \text{ МПа}$) и размере концевой области трещины ($d/\ell = 0.1$) размер зоны нелинейного деформирования связей зависит от относительной податливости c_0 линейного участка кривой деформирования (см.рис. 3.42), т.к. при уменьшении параметра c_0 упругие напряжения в связях возрастают, что приводит к увеличению зоны нелинейной деформации связей.

Изменение параметра $\eta = u_{cr}/u_m$ оказывает заметное влияние на распределение усилий в зоне нелинейного деформирования связей (см. рис. 3.43а). При $u_{cr}/u_m \rightarrow \infty$ распределение усилий в области, где $u(x) > u_m$, стремится к однородному $\sigma(x) \rightarrow \sigma_m$, т.к. сходимость итерационного процесса достигается при малых по сравнению с u_{cr} значениях раскрытия трещины ($u \ll u_{cr}$)

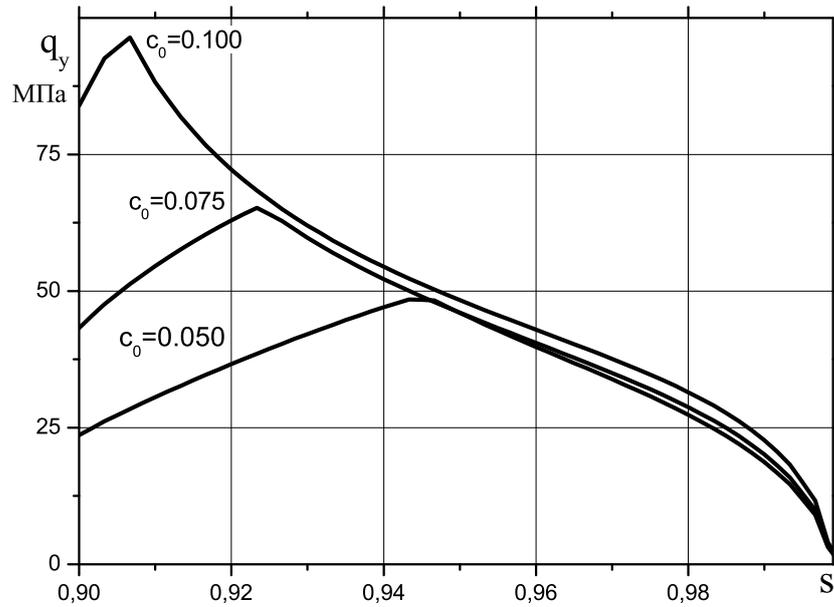


Рис. 3.42. Нормальные усилия вдоль концевой области трещины, $\sigma_0 = 17.5$ МПа, $d/\ell = 0.1$, $\eta = 2$, $s = x/\ell$

в области значений $u \sim u_m$ и $\sigma \sim \sigma_m$.

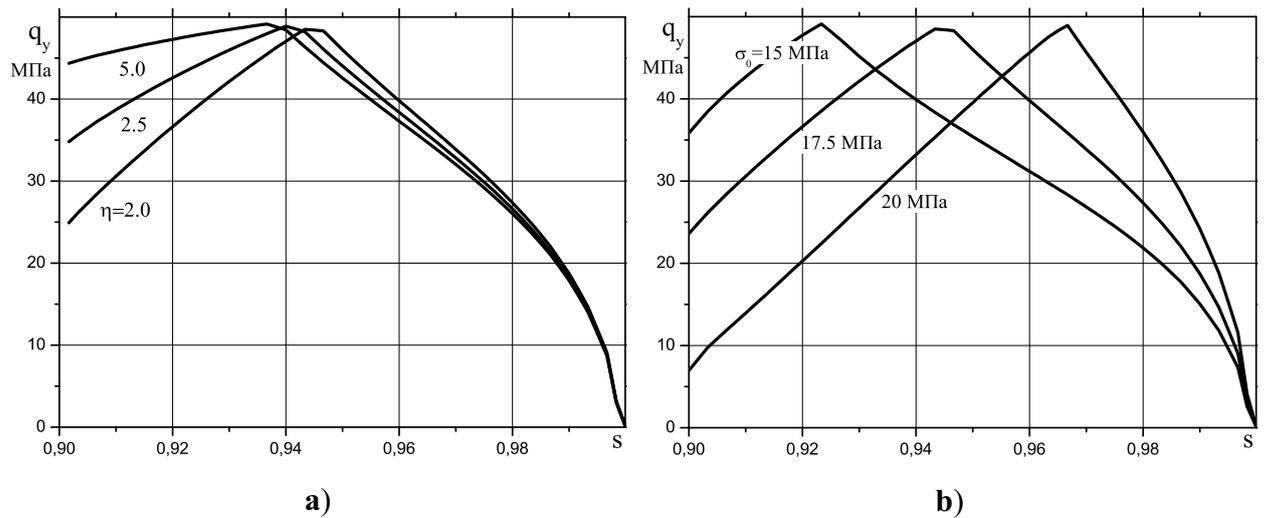


Рис. 3.43. Нормальные усилия в связях, $c_0 = 0.1$, $s = x/\ell$, $d/\ell = 0.1$: **(а)** - вариация параметра η , $\sigma_0 = 17.5$ МПа; **(б)** - вариация внешней нагрузки, $\eta = 2$

Возрастание внешней нагрузки при фиксированных параметрах концевой области трещины и кривой деформирования связей приводит к увеличению зоны нелинейной деформации связей (см. рис. 3.43б).

На рис. 3.44 приведены результаты расчета напряжений в концевой области трещины ($d/\ell = 0.1$) при использовании всех типов рассмотренных в разделе 1.3.3 кривых деформирования связей для $\sigma_0 = 20$ МПа и $u_{cr}/u_m = 4$. Тип и параметры кривых деформирования связей, а также число итераций,

за которое получено решение, приведены в таблице 3.2.

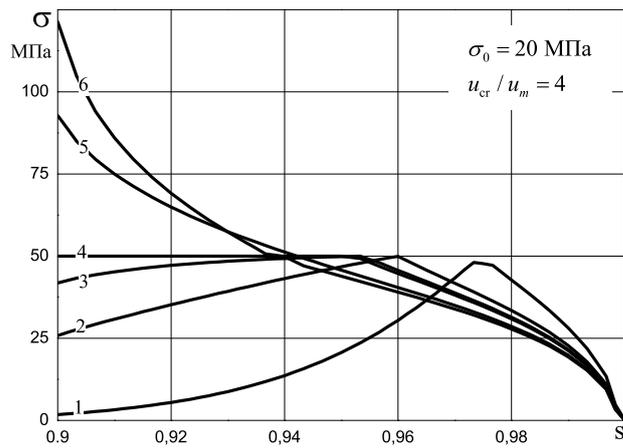


Рис. 3.44. Модуль вектора усилий вдоль длины концевой области трещины, различные типы кривых деформирования связей, $s = x/\ell$

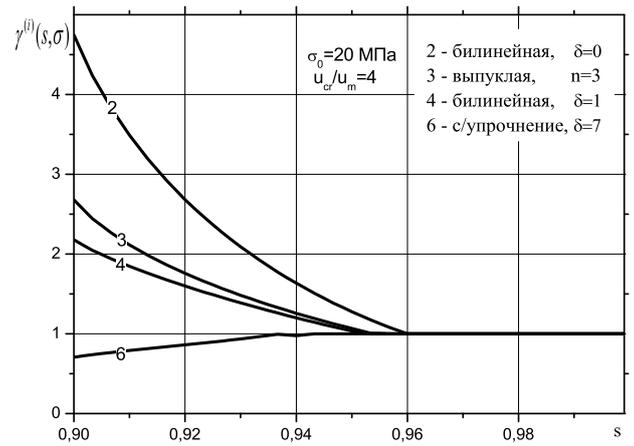


Рис. 3.45. Распределение относительной податливости вдоль концевой области трещины, различные типы кривых деформирования связей, $s = x/\ell$

Таблица 3.2. Кривые деформирования связей и сходимость решения

Номер кривой на рис. 3.44	Тип кривой деформирования связей	Параметры кривой деформирования связей	Число итераций до достижения сходимости решения
1	вогнутая	$n = 3, \delta = 0$	28
2	билинейная	$n = 1, \delta = 0$	20
3	выпуклая	$n = 3, \delta = 0$	16
4	билинейная	$\delta = 1$	13
5	линейно-упругая		1
6	билинейная, свехупрочнение	$\delta = 7$	11

Наибольшее разупрочнение связей, приводящее к снижению напряжений, происходит при использовании вогнутой кривой деформирования связей. Отметим, что при использовании кривых деформирования с падающей ветвью происходит заметное перераспределение напряжений вдоль всей концевой области. Эффективные податливости связей, полученные при достижении сходимости решения на последнем шаге итерационного процесса и соответствующие распределениям усилий на рис. 3.44, приведены

на рис. 3.45. Большим значениям податливостей соответствуют меньшие значения усилий в связях, и, соответственно, большие перемещения, как и предполагается при использовании модели квазилинейных связей.

3.3. Области конечного размера. Трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов

Комплекс программ “МЕГРЭ” (МЕтод ГРаничных Элементов), реализующий численное решение граничных интегральных уравнений задач теории упругости, может быть использован для решения широкого круга научных и прикладных задач с трещинами при механической нагрузке, а также при стационарном и нестационарном тепловом нагружении, в плоской, осесимметричной и пространственной постановках.

В комплексе программ “МЕГРЭ” возможно: 1) рассмотрение многосвязных составных областей с границей сложной формы; 2) учет анизотропии материалов и различия физико-механических свойств материалов в подобластях конструкции; 3) учет объемных сил (собственный вес; центробежная нагрузка; сосредоточенные силы); 4) расчет стационарных и нестационарных распределений температуры и температурных напряжений (несвязанная термоупругость); 5) решение контактных задач; 6) учет условий циклической симметрии; 7) решение задач с трещинами на границах соединения материалов с учетом взаимодействия берегов трещин и автоматизированным определением коэффициентов интенсивности напряжений. Разработан и включен в программный комплекс также новый вариант алгоритма объединения методов конечных и граничных элементов. Конечно-элементная часть алгоритма основана на базовом методе перемещений. Метод граничных элементов используется на этапе определения перемещений на границе и внутри тела в узлах конечно-элементной сетки. Последующее вычисление напряжений на

границе и внутри тела выполняется на основе конечно-элементного подхода. Такой вариант объединения методов конечных и граничных элементов демонстрирует высокую эффективность даже вытянутых областей, неблагоприятных для метода граничных элементов. Установлено, что эффективность сочетания методов увеличивается при увеличении числа узлов конечно-элементной сетки [36]. Описание алгоритма и методики численного решения, а также примеры использования программного комплекса для решения плоских, осесимметричных и пространственных задач теплопроводности и термоупругости, приведены в работах [33, 41, 42, 55, 62, 236, 237].

В данном разделе представлены решения ряда новых задач для трещин со связями в концевой области, на границе соединения материалов, полученные методом граничных интегральных уравнений, иллюстрирующие возможности алгоритма и программного обеспечения. Отметим, что решения задач такого рода в литературе отсутствуют.

3.3.1. Дуговая трещина со связями в концевой области, на границе соединения включения и матрицы

Развитие работ по механике многослойных конструкций [246–248] приводит к необходимости анализа процессов разрушения по неплоским границам соединения слоев различных материалов с трещинами сложной формы. Криволинейные трещины возникают и на границах отверстий и включений, где, ввиду высокой концентрации напряжений, образуются зоны пластичности, полностью охватывающие контур отверстия [249].

Большая часть работ по механике разрушения кусочно-однородных тел посвящена рассмотрению задач о прямолинейных трещинах на границе соединения материалов или задач о трещинах на границе цилиндрического включения и матрицы. Задачи для одиночной трещины на границе соединения материалов в безграничной области при различных условиях нагружения рассмотрены в работах [107, 250–253]. В указанных работах взаимодействие

берегов трещины не рассматривалось, а соединение материалов вне трещины полагалось идеальным. Задача о трещине на границе включения и матрицы с учетом контактных зон вблизи вершины трещины, рассматривалась в работе [254]. В рамках подхода Эшелби неидеальное соединение на границе включения и матрицы рассматривалось в [255]. Рассмотрение неидеального соединения в рамках когезионной модели выполнено в [256] (см. также цитированные там статьи). Анализ разупрочнения вдоль идеального соединения между включением и матрицей рассмотрен в работе [257]. Модель соединения между включением и матрицей в виде линейно-упругих пружин рассмотрена в [258], где полагается, что линейно-упругий слой полностью окружает включение, и сингулярность напряжений на краю зоны разупрочнения (в вершине трещины) не рассматривается. В отличие от предыдущих работ, в [258] рассматривались области конечного размера с использованием метода ГИУ. Для решения задач о криволинейных трещинах произвольной формы на границе соединения материалов развиваются также асимптотические методы [259–261].

Задачи о криволинейных трещинах со связями в концевой области, на границе соединения материалов, с учетом сингулярности напряжений в вершине трещины ранее не рассматривались.

В данном разделе, в качестве примера использования разработанного алгоритма решения задач с криволинейными трещинами на границе соединения материалов методом ГИУ, рассмотрена задача о дуговой трещине со связями в концевой области на границе включения и матрицы с учетом сингулярности напряжений в вершине трещины. Приведены результаты решения задачи об одноосном растяжении пластины с круговым включением (волоконном). Полагается, что между включением и пластиной (матрицей) существует зона ослабленных адгезионных связей в форме дуги окружности, которая рассматривается в рамках расчетной схемы метода ГИУ как трещина, полностью или частично заполненная связями и расположенная сим-

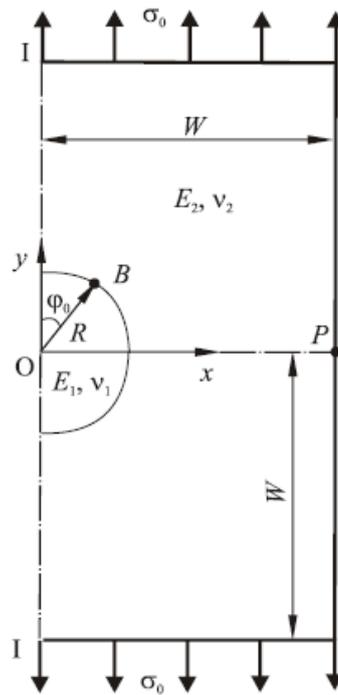


Рис. 3.46. Пластина с дуговой трещиной на границе соединения матрицы и включения: учет симметрии задачи и граничные условия, $W/R = 10$, $\varphi = 30^\circ$

метрично относительно направления приложения растягивающей нагрузки. Ввиду симметрии задачи при численном решении методом ГИУ рассматриваем половину квадратной пластины ($W/R = 10$, $\varphi = 30^\circ$) с трещиной, коэффициент заполнения связями которой может изменяться, состояние плоской деформации, вершина трещины находится в точке B . Граничные условия в задаче аналогичны рассмотренным для составной пластины с трещиной (см. раздел 2.4): вдоль линии $I - I$ равняются нулю нормальные перемещения и касательные усилия. Для исключения движения тела как жесткого целого в точке P полагалось равным нулю перемещение в направлении оси OY (см. рис.3.46). Распределение модуля вектора усилий в связях вдоль концевой области трещины для различных коэффициентов заполнения дуговой трещины связями ϑ/φ_0 показаны на рис. 3.47, где ϑ угловая мера длины концевой области трещины и $0 < \vartheta \leq \varphi_0$. Безразмерный угловой параметр φ/φ_0 определяет положение текущей точки вдоль концевой области дуговой трещины. Линия симметрии конструкции $I - I$ соответствует значению $\varphi = 0$ и угловой размер концевой области трещины отсчитывается от центра трещины (точка с

координатами $x = 0, y = R$, см. рис. 3.46).

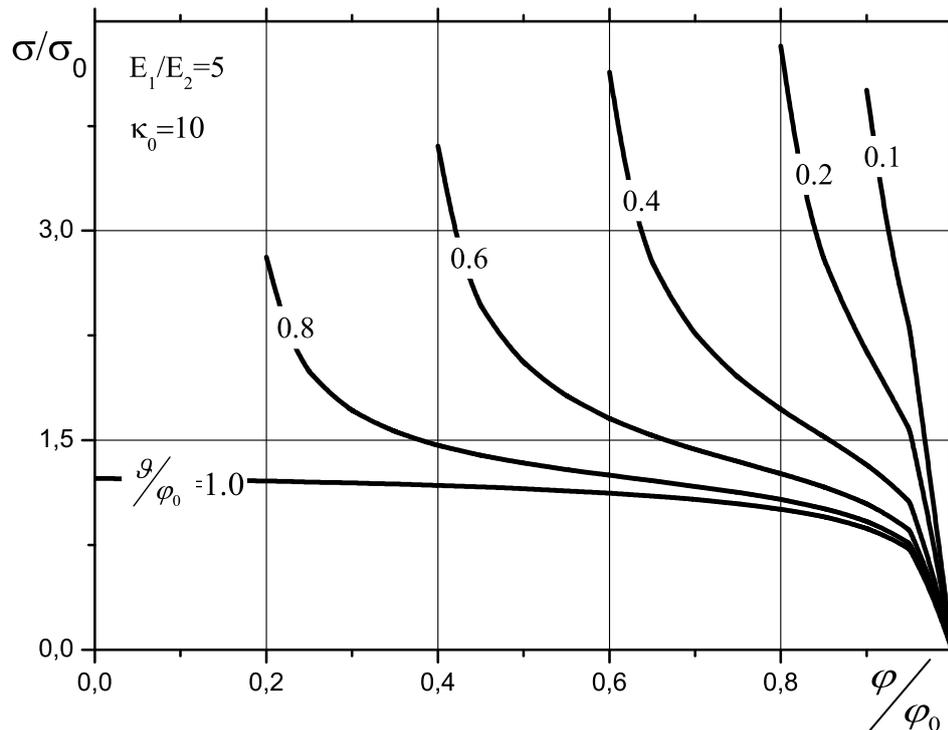


Рис. 3.47. Распределения модуля вектора усилий в связях вдоль концевой области дуговой трещины на границе соединения матрицы и включения, φ/φ_0 - угловая координата вдоль концевой области

При увеличении размера концевой области трещины распределение усилий вдоль концевой области стремиться к однородному с небольшим участком неоднородности вблизи вершины трещины. Модуль вектора усилий достигает максимального значения на краю концевой области, причем при $\vartheta/\varphi_0 = 0.2$ величина усилий на краю концевой области достигает наибольшего возможного значения $\sigma/\sigma_0 \approx 4.3$ для всех размеров концевых областей. Отметим, что аналогичная зависимость имеет место и для прямой трещины в пластине.

Результаты вычисления модуля КИН для дуговой трещины, заполненной связями, по формулам (2.136), (2.137), (2.140) и (2.145) приведены на рис.3.48 в зависимости от относительной жесткости связей. Нормировка результатов вычисления КИН выполнена значением $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}$, где $\ell = R \sin \varphi_0$. Отличие результатов, полученных по указанным выше формулам, невелико, с небольшим нарастанием для относительно жестких связей.

Результаты, полученные по формуле (2.140), близки к среднему значению, полученному другими способами по формулам раздела 2.3.2. Ввиду этого, формула (2.140) используется далее для вычисления модуля КИН для дуговой трещины между включением и матрицей.

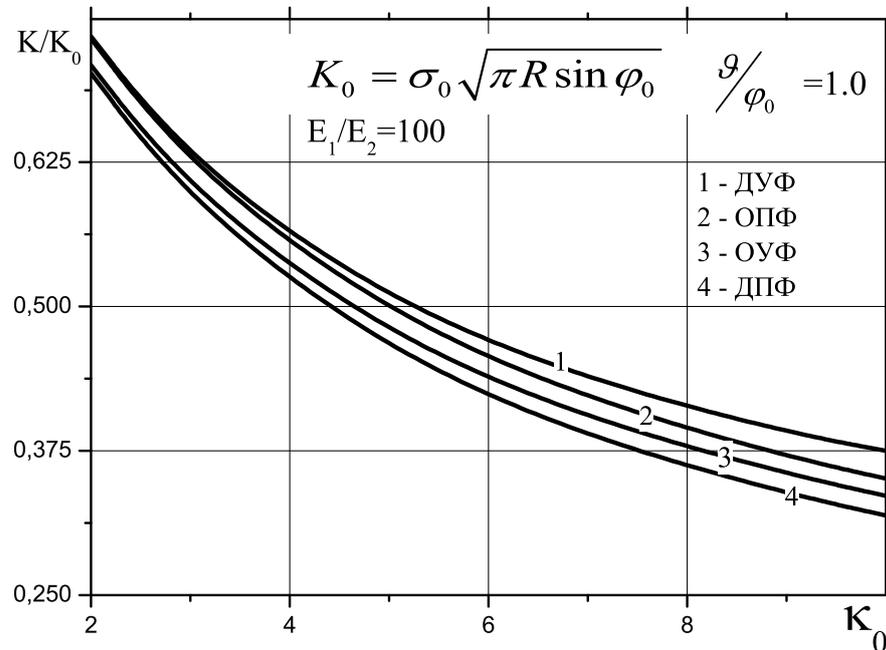


Рис. 3.48. Дуговая трещина, заполненная связями. Сопоставление формул для вычисления модуля КИН, κ_0 - относительная жесткость связей

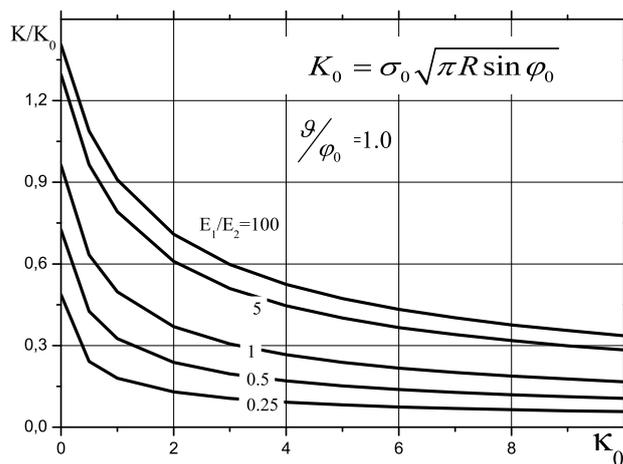


Рис. 3.49. Трещина на границе соединения включения и матрицы: зависимости модуля КИН от относительной жесткости связей

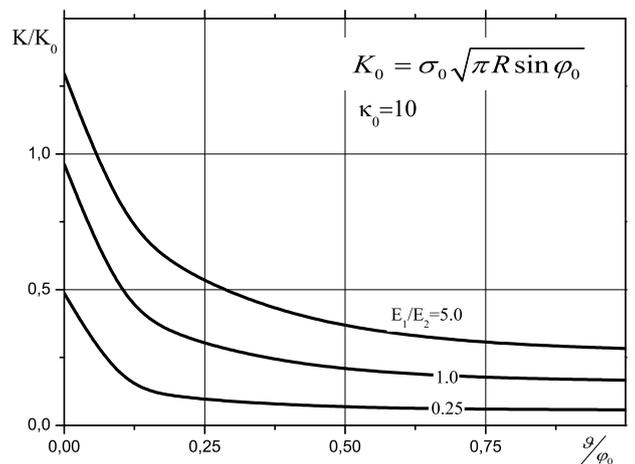


Рис. 3.50. Трещина на границе соединения включения и матрицы: зависимости модуля КИН от коэффициента заполнения трещины

Зависимости модуля КИН от относительной жесткости связей для трещины, заполненной связями, ($\vartheta/\varphi_0 = 1$) и полученные при различных зна-

чениях модуля упругости включения, приведены на рис.3.49. Модуль КИН вычислялся по формуле (2.140). Случай $k_0 = 0$ соответствует трещине с берегами, свободными от нагрузки. При возрастании относительной жесткости включения E_1/E_2 модуль КИН также увеличивается, и влияние жесткости связей на величину модуля КИН проявляется сильнее. Значительное изменение модуля КИН происходит при относительно мягких связях, а при увеличении жесткости связей происходит стабилизация экранирующего влияния связей. Этот эффект более заметен в случае однородного тела или "мягкого" включения ($E_1/E_2 < 1$).

Зависимость модуля КИН от коэффициента заполнения трещины связями приведена на рис.3.50 для случая относительно жестких связей $k_0 = 10$. Если коэффициент заполнения связями $\vartheta/\varphi_0 \approx 0.3$, то экранирующее влияние связей близко к насыщению, причем в случае однородного тела или мягкого включения эффект наблюдается при меньшем заполнении трещины связями.

3.3.2. Взаимодействие трещин со связями в концевой области с препятствиями и границами раздела сред

Задачи о взаимодействии трещин с препятствиями и границами раздела сред возникают при исследовании торможения трещин и управления их движением [262, 263]. Задачи такого рода возникают как при разработке методов предотвращения разрушения крупногабаритных (авиационных) конструкций [101, 264], так и при отыскании путей повышения надежности изделий микроэлектроники [265]. Для торможения трещин используют ребра жесткости, специальные прослойки, разгружающие отверстия, ремонтные накладки и заполнители трещины. В последнем случае между берегами трещины образуются связи, позволяющие снизить КИН в вершине трещины. Возможно также торможение трещины специально созданными температурными полями [262], а также массивами микротрещин, расположенных вблизи вершины

магистральной трещины [263].

В данном разделе представлены результаты параметрических расчетов КИН для составных конструкций с трещинами при механическом и термическом нагружении, полученные методом ГИУ.

Выполнена серия расчетов для модели торможения трещины слоем материала с другими механическими свойствами, плоское напряженное состояние, коэффициенты Пуассона материалов полагались одинаковыми, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Расчетная модель пластины с краевой трещиной приведена на рис. 3.51, однородная растягивающая нагрузка σ_0 прикладывалась к верхнему краю пластины. Трещина рассматривается как свободная от связей, так и заполненная связями. Закон деформации связей принимался в форме (2.117) в предположении, что $\gamma_2 = 0$ (жесткость связей в направлении вдоль трещины равна нулю) и $\gamma_1 = 1$. Относительная жесткость связей в направлении растяжения κ определяется так (a - длина трещины, κ_2 - жесткость в касательном направлении):

$$\kappa = \kappa_1 \left(\frac{E_1}{a} \right)^{-1} = \frac{E_b a}{E_1 H}, \quad \kappa_1 = \frac{E_b}{H}, \quad \kappa_2 = 0$$

При выполнении расчетов полагалось, что модуль упругости связей в концевой области трещины $E_b = E_1$, а изменение относительной жесткости связей осуществлялось (при заданной длине трещины) посредством изменения параметра H (см. раздел 2.4).

Зависимости КИН в вершине трещины, заполненной связями, от относительной жесткости дополнительного слоя E_2/E_1 приведены на рис. 3.52а. Увеличение жесткости слоя приводит к значительному снижению КИН, при $E_2/E_1 \sim 10$ экранирующий эффект слоя стабилизируется. Отметим также, что с приближением вершины трещины с поверхности слоя его экранирующий эффект усиливается. Влияние вклада связей в концевой области трещины (трещина заполнена связями) иллюстрирует рис. 3.52b, где представлены зависимости КИН от относительной жесткости связей при $E_2/E_1 = 10$.

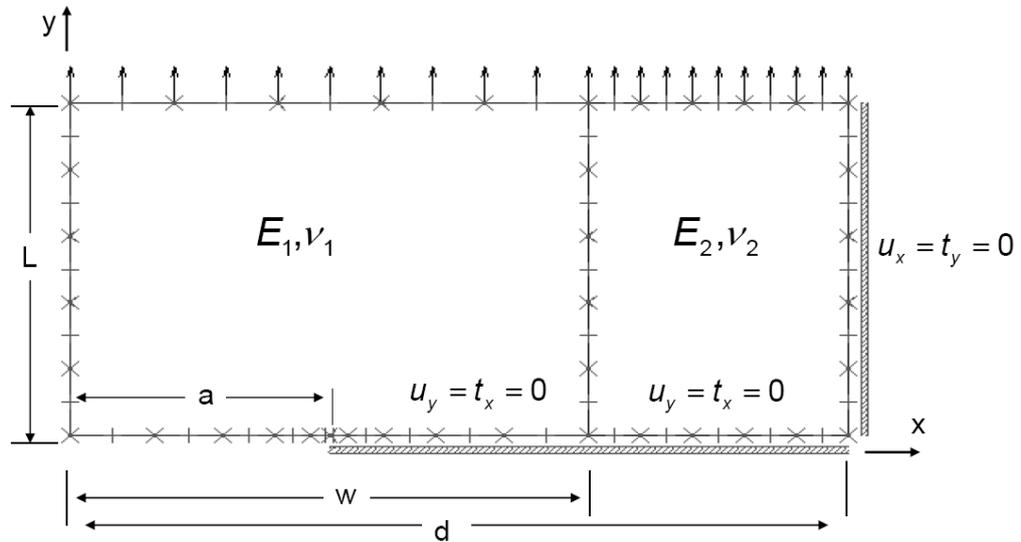


Рис. 3.51. Пластина с краевой трещиной, подкреплённая слоем материала с другими механическими свойствами: учёт симметрии задачи и граничные условия, $w/a = 2$, $d/a = 3$, $a/L = 1$

Заполнение трещины связями с относительной жесткостью $\kappa = 1$ приводит к почти трехкратному снижению КИН. При дальнейшем увеличении жесткости связей этот эффект стабилизируется. Таким образом, заполнение трещины связями соответствующей жесткости приводит к существенному повышению эффективности упрочнения.

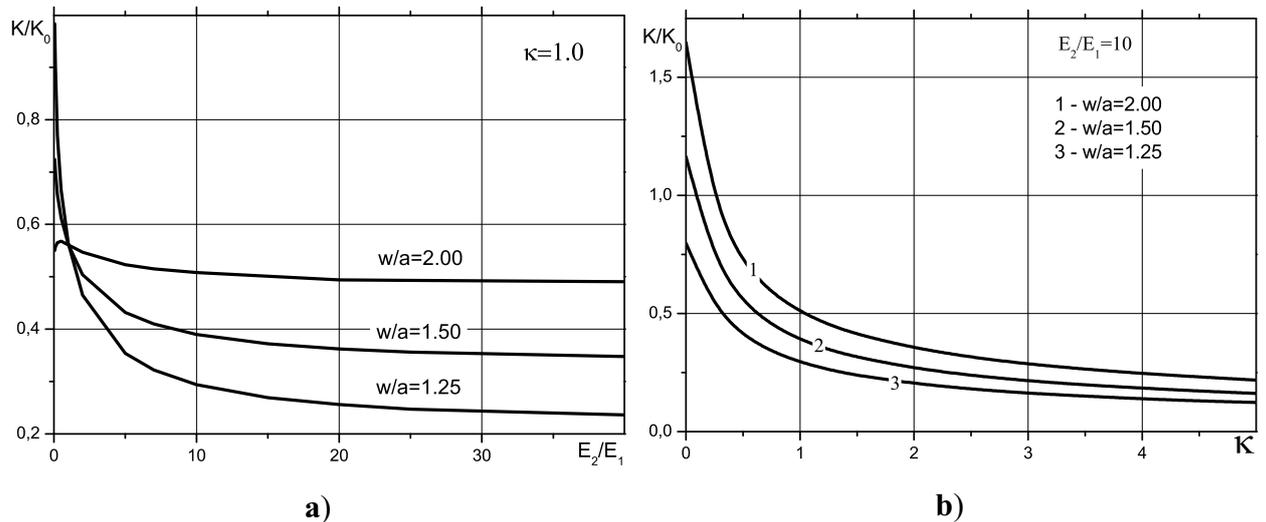


Рис. 3.52. КИН для краевой трещины в пластине, подкреплённой слоем, $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$; **(а)** - зависимость от относительной жесткости слоя, $\kappa = 1$; **(б)** - зависимость от относительной жесткости связей, заполняющих трещину, $E_2/E_1 = 10$

Рассмотрим распределения нормальной составляющей усилий в связях вдоль трещины, заполненной связями, при $\kappa = 1$, $w/a = 1.25$ в зависимости

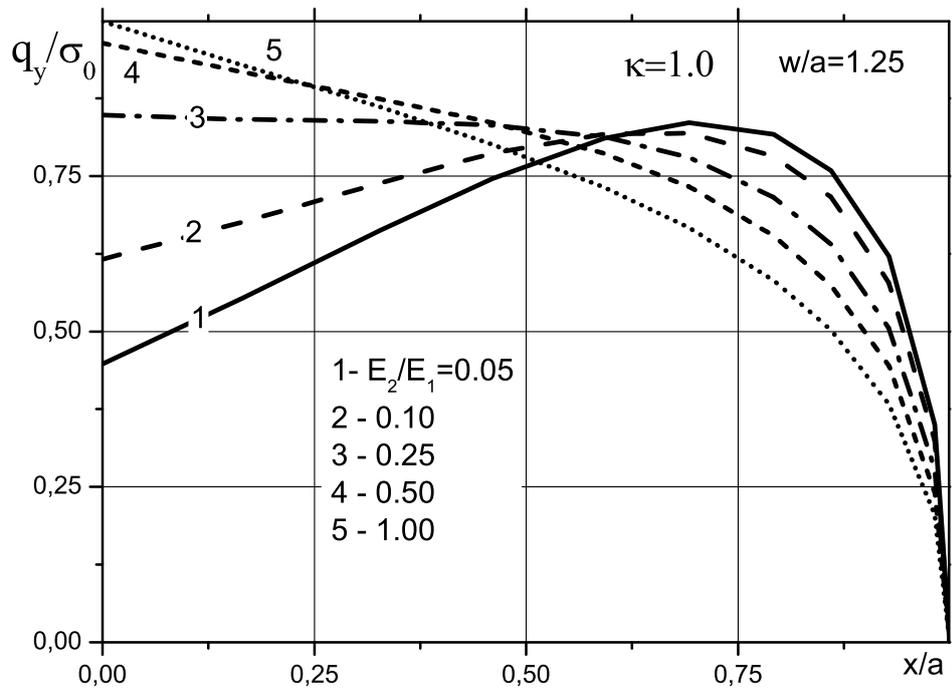


Рис. 3.53. Нормальные усилия в связях вдоль трещины, заполненной связями, влияние жесткости подкрепляющего слоя, $\kappa = 1$, $w/a = 1.25$

от относительной жесткости подкрепляющего слоя (см. рис. 3.53). Форма распределения усилий и их величина существенно зависят от относительной жесткости слоя, в отличие от случая трещины, заполненной связями между двумя полуплоскостями (см. рис. 3.22, кривая 3). При малой жесткости подкрепляющего слоя усилия в связях вдоль трещины снижаются, уменьшается вклад связей в экранирующий эффект и, соответственно, КИН в вершине трещины возрастает.

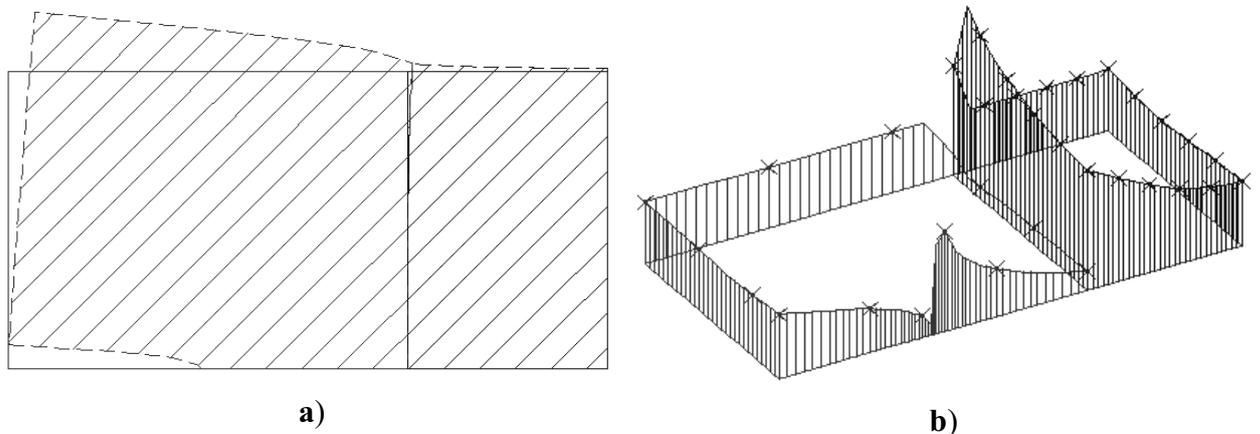


Рис. 3.54. (a) - Деформированное состояние расчетной области; (b) - эпюра нормальных напряжений вдоль контура области

Деформированное состояние расчетной области (заштрихованная часть)

при $\kappa = 1$ и $E_2/E_1 = 10$ приведено на рис. 3.54а, где видна значительная деформация подобласти с трещиной. Эпюра нормальных напряжений вдоль контура расчетной области представлена на рис. 3.54b; максимальные напряжения в подкрепляющем слое $\sigma_{yy}/\sigma_0 = 2.93$ заметно превышают напряжения в области с трещиной, где нормальные напряжения близки к номинальным, $\sigma_{yy}/\sigma_0 \sim 1.0$, за исключением окрестности вблизи вершины трещины.

В качестве примера влияния нестационарных температурных полей на КИН для трещины со связями в концевой области рассмотрена задача для полосы шириной $2D$ и высотой $2H$ с двумя краевыми трещинами длины a ($H/D = 1, D/a = 2$, состояние плоской деформации). Полагаем, что трещины заполнены связями. В начальный момент времени ($t = 0$) пластина имеет постоянную температуру T_0 (начальное условие для решения температурной задачи). Начиная с момента времени $t > 0$, боковые поверхности пластины $x = \pm D$ поддерживаются при температуре T_s , меньшей T_0 (граничные условия, соответствующие термическому удару). Ввиду симметрии задачи, расчет тепловых полей и температурных напряжений выполнялся для 1/4 пластины. Расчетная область и граничные условия приведены на рис. 3.55.

Расчет выполнен при $T_0 - T_s = 300\text{K}$, $\nu = 0.3$ для трещины без связей и трещины, заполненной связями. Как и в предыдущем примере, полагалось, что касательная жесткость связей равна нулю и $E_b = E$. Нестационарное температурное поле является причиной возникновения в пластине нормальных напряжений, раскрывающих трещину. Наличие связей между берегами трещины сдерживает её раскрытие при термической нагрузке. Выполнено параметрическое исследование влияния жесткости связей в концевой области трещины на величину КИН.

На рис. 3.56 показана зависимость безразмерного термического КИН K_I/K_0 от безразмерного времени τ (числа Фурье) для случая трещины без связей и различных значений жесткости связей, заполняющих трещину. Параметры для нормировки и представления результатов на рис. 3.56 следующие:

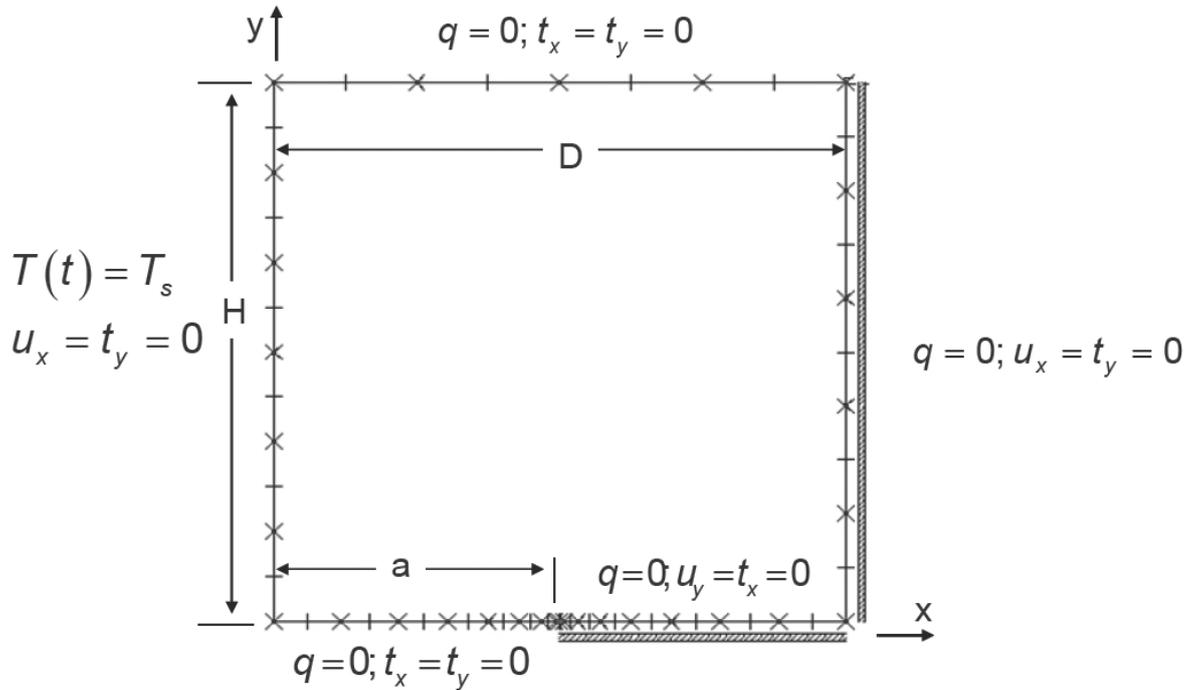


Рис. 3.55. Полоса с двумя краевыми трещинами: учет симметрии задачи, термические и механические граничные условия, $H/D = 1$, $D/a = 2$

щие

$$K_0 = \frac{\alpha E (T_0 - T_s) \sqrt{\pi a}}{1 - \nu}, \quad \kappa = \frac{E_b a}{HE}, \quad \tau = \frac{t \lambda_c}{D^2}$$

где α - коэффициент линейного расширения материала, E , ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала полосы, λ_c - коэффициент теплопроводности материала, κ - относительная жесткость связей, t - время от начала расчета. Наблюдается существенно нелинейный эффект влияния увеличения жесткости связей на термический КИН, значительное экранирование связями наблюдается при относительно большой жесткости связей.

Распределения нормальных усилий в связях для нескольких моментов времени вдоль концевой области трещины приведено на рис. 3.57. Усилия вдоль концевой области трещины при нестационарной термической нагрузке изменяются практически линейно, в отличие от механического нагружения, когда для трещины, заполненной связями, усилия в связях почти постоянны на большей части концевой области (см. рис. 3.22, кривая 3). Величина усилий в связях уменьшается со временем при стремлении температурного распределения к однородному. В рассмотренном примере в зоне трещины

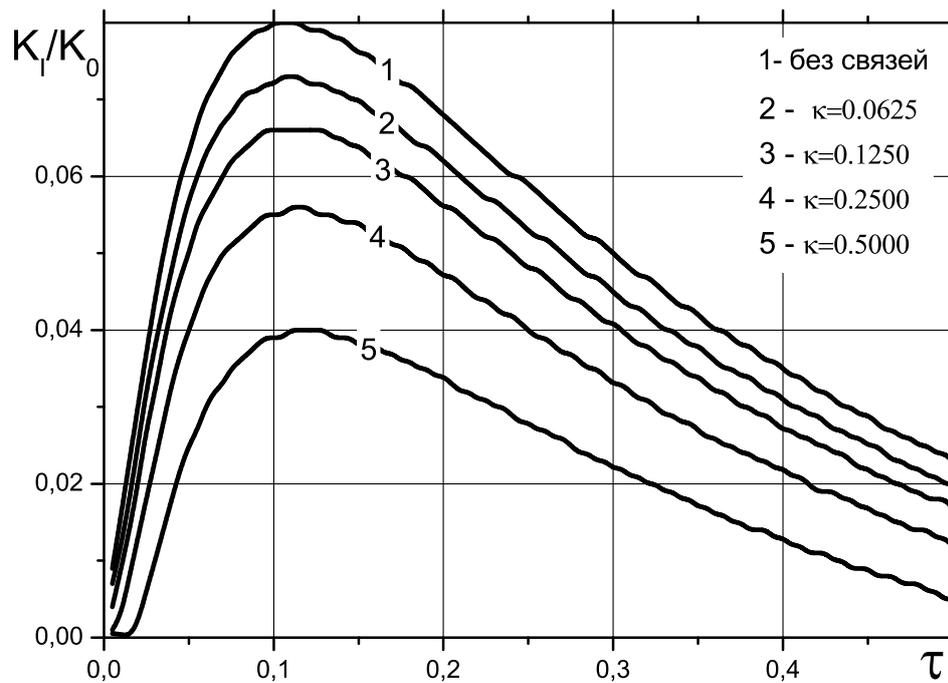


Рис. 3.56. Термический КИН - зависимость от безразмерного времени τ

возникали растягивающие напряжения, раскрывающие трещину, при охлаждении пластины. Создание сжимающих термических напряжений в зоне трещины при локальном нагреве позволяет снизить или компенсировать раскрытие трещины, возникающее при растяжении.

3.3.3. Трещина со связями в концевой области, на границе неидеального соединения материалов

В данном разделе приведены результаты анализа методом ГИУ напряженного состояния при наличии трещины и участков неидеального соединения материалов, расположенных за вершиной трещины (обобщенная задача для модели Прандтля [78]). Такие задачи возникают при моделировании сдвиговой прочности композиционных материалов [266, 267] и анализе прочности адгезионных соединений [268, 269]. При моделировании адгезионных соединений используются две основные модели: а) рассматривается трещина на границе соединения материалов с концевой областью (зоной процесса разрушения), сравнимой с длиной трещины (модель, используемая в данной

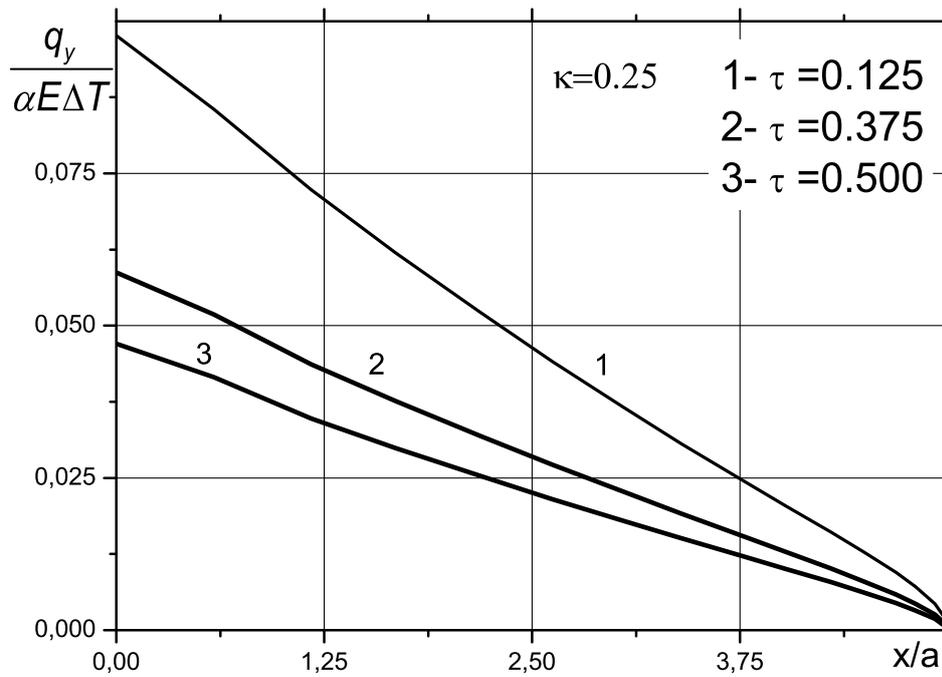


Рис. 3.57. Нормальные напряжения в связях вдоль концевой области трещины при нестационарном температурном нагружении

работе, см. также [18, 157, 196, 270]); b) полагается, что вся граница соединения областей является зоной процесса разрушения без трещины [268, 271] или с трещиной [269, 272, 273]. В обоих случаях используется термин -неидеальное соединение- (weak interface/imperfect interface). Для задач последнего типа получена также специальная формулировка метода граничных интегральных уравнений для прямолинейной трещины на границе неидеального соединения двух полуплоскостей [274].

Методика решения, используемая в данной работе (см. раздел 2.3), позволяет рассматривать трещины произвольной формы в областях конечного размера при наличии криволинейных участков неидеального соединения. При выполнении вычислений полагалось, что модуль упругости связей в концевой области трещины и на участке соединения материалов без трещины равен модулю упругости материала второй подобласти ($E_b = E_2$). Изменение относительной жесткости связей осуществлялось (при заданной длине трещины) посредством изменения параметра H , см. (2.164)). Жесткость связей в направлениях нормальном и касательном к участку неидеального соедине-

ния материалов полагалась одинаковой. Число узлов при разбиении границы каждой подобласти изменялось от 80 до 100, (на линии трещины выбиралось по 40 узловых точек в каждой подобласти).

Задача об одноосном растяжении пластины с центральной прямолинейной трещиной и неидеальном соединении материалов вне трещины рассмотрена в двух вариантах постановки: 1) трещина свободна от связей; 2) трещина заполнена связями. При расчете приняты размеры модели - $W/\ell = 5$, где W - половина ширины составной пластины. Ввиду симметрии задачи моделировалась только 1/2 часть пластины (см. рис. 2.3). Внешняя растягивающая нагрузка $\sigma_0 = \sigma_{0y}$ прикладывалась в направлении оси OY на участке $0 \leq x \leq W$, $y = \pm W$. На линии симметрии I-I (см. рис. 2.3) полагались равными нулю нормальная составляющая перемещений и касательная составляющая усилий.

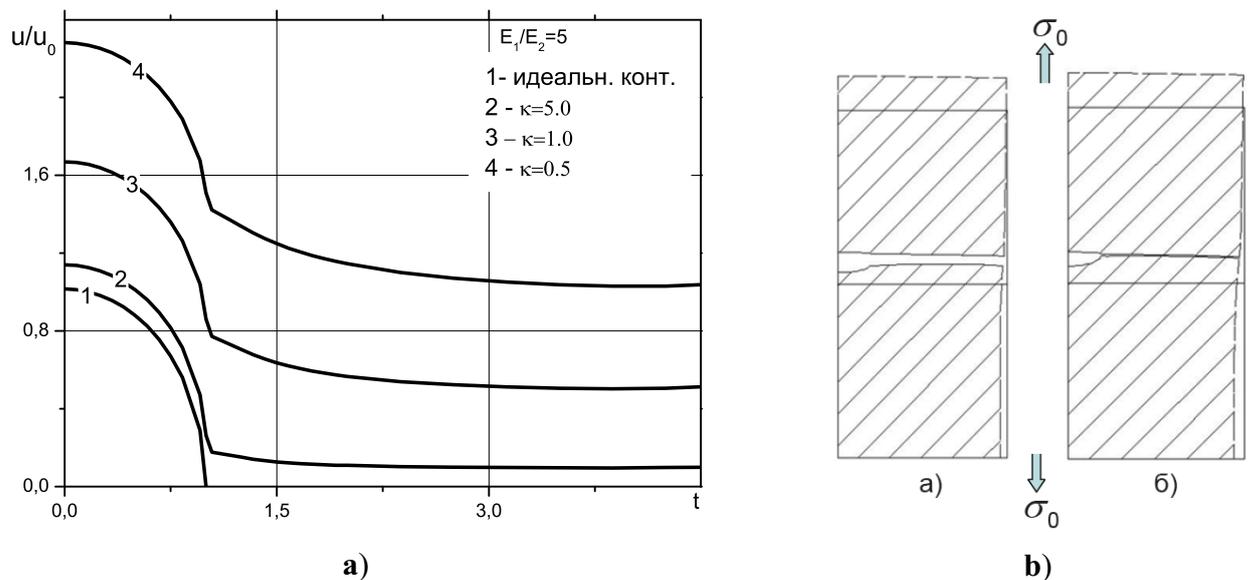


Рис. 3.58. (а) - Раскрытие трещины и относительное смещение участка соединения подобластей, $t = x/\ell$; (б) - деформированное состояние в зоне соединения подобластей

Трещина, свободная от связей, с условиями неидеального контакта вдоль линии соединения подобластей. Раскрытие трещины, а также относительное смещение участка неидеального соединения подобластей, приведены на рис. 3.58а (u_0 - раскрытие в центре трещины без связей, см. выражение (2.165)). Деформированное состояние в зоне соединения подобластей

(заштрихованная зона) при относительной жесткости связей $\kappa_0 = 0.5$ (а) и $\kappa_0 = 5$ (б) показано на рис. 3.58b. На рис. 3.58 видно, что относительное смещение подбластей при малой ($\kappa_0 = 0.5, 1.0$) жесткости связей сопоставимо с раскрытием трещины при идеальном соединении материалов, а при увеличении жесткости связей относительное смещение подбластей мало.

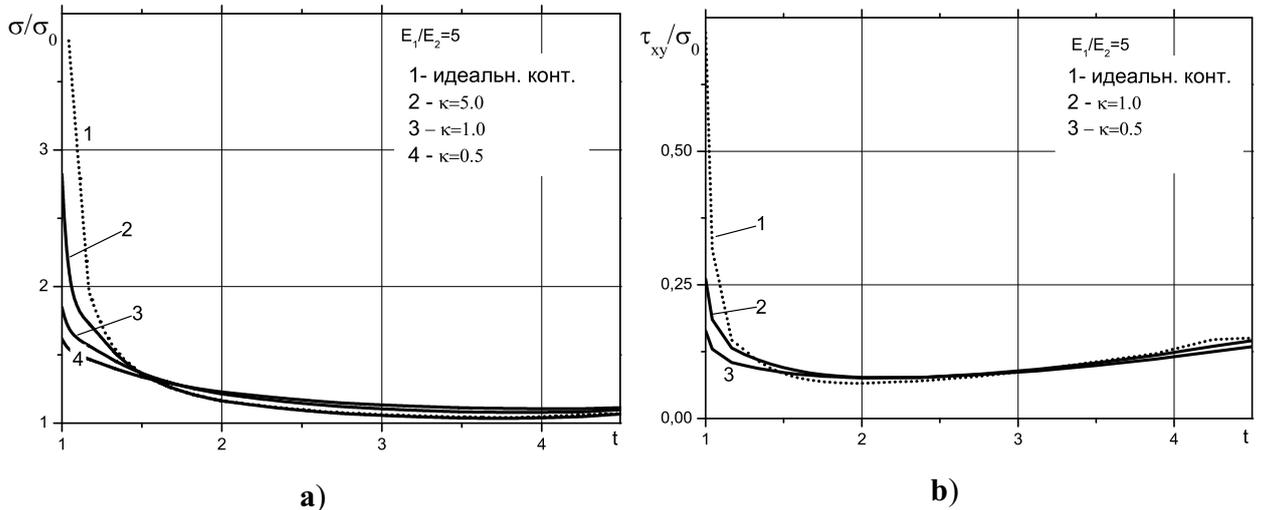


Рис. 3.59. Напряжения на участке неидеального соединения подбластей (а) - модуль вектора напряжений; (б) - касательные напряжения, $t = x/\ell$

На рис. 3.59ab показаны зависимости модуля вектора напряжений и компоненты напряжений τ_{xy} вдоль линии соединения подбластей для различных значений жесткости связей на участке неидеального соединения материалов. При увеличении жесткости связей распределении напряжений стремится к соответствующему распределению при идеальном соединении подбластей. Этот результат качественно согласуется с асимптотической оценкой, полученной в работе [78]. При снижении жесткости связей распределение напряжений становится более однородным.

Величина напряжений на участке неидеального соединения подбластей зависит от соотношения модулей упругости материалов, см. рис. 3.60, причем при увеличении различия механических характеристик материалов касательные напряжения увеличиваются, а нормальные - уменьшаются.

Трещина заполнена связями, а участок границы подбластей является участком неидеального соединения материалов. Распределение напряже-

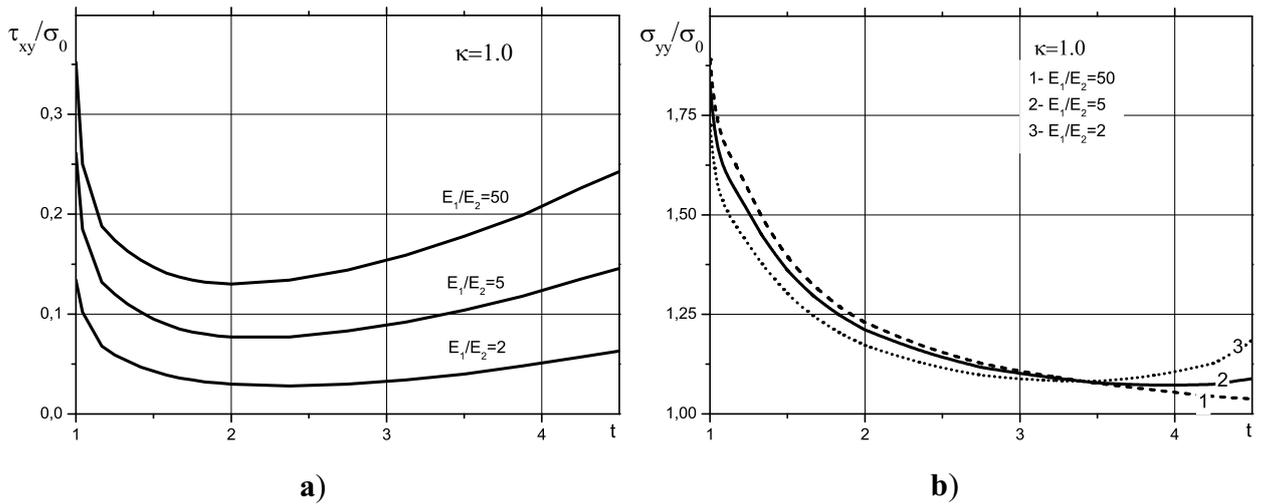


Рис. 3.60. Напряжения на участке неидеального соединения подобластей: (а) - касательные; (б) - нормальные, $t = x/\ell$

ний σ_{yy} вдоль концевой области трещины и зоны соединения подобластей представлено на рис. 3.61 для случая жесткости связей в концевой области трещины, превышающей жесткость на участке соединения подобластей.

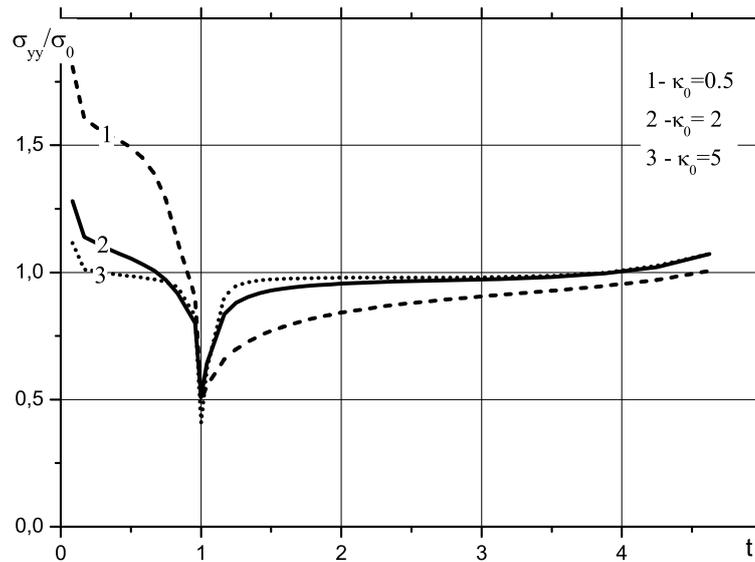


Рис. 3.61. Нормальные напряжения на участке неидеального контакта между материалами; трещина, заполненная связями, $t = x/\ell$

Относительная жесткость связей на трещине линейно изменялась от $\kappa_0=5$ при $x = 0$ до величины, равной жесткости связей за вершиной трещины при $x/\ell=1$. Распределение напряжений вдоль концевой области и участка соединения подобластей является существенно неоднородным и имеет “провал” вблизи вершины трещины, расположенной в точке $x/\ell = 1$. Это связано с тем, что жесткости связей на трещине и в зоне неидеального соединения

сильно различаются.

Задача об одноосном растяжении пластины с круговым включением рассмотрена также в двух вариантах постановки при наличии свободной от связей трещины между включением и матрицей: 1) между подобластями вне трещины - идеальный контакт; 2) между подобластями вне трещины - условия неидеального соединения. В последнем случае полагается, что между включением и пластиной (матрицей) существует трещина, занимающая часть дуги окружности, а также зона ослабленных адгезионных связей в форме дуги окружности, которая рассматривается в рамках расчетной схемы метода ГИУ как расположенная симметрично относительно направления приложения растягивающей нагрузки зона неидеального соединения подобластей.

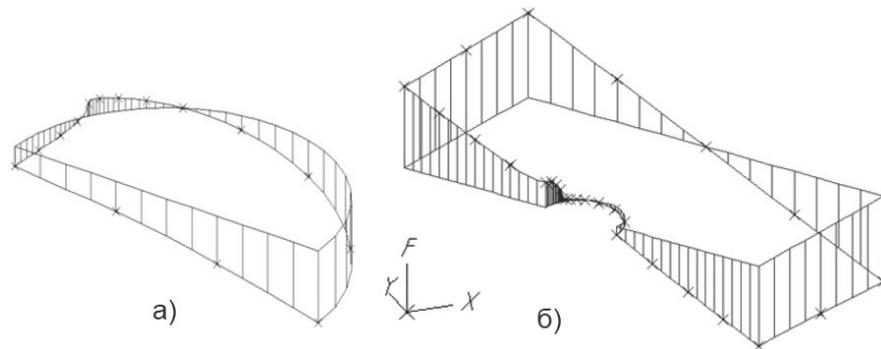


Рис. 3.62. Эпюры перемещений точек на границе подобластей вдоль оси OY ((а) - включение; (б) - матрица), идеальное соединение между включением и матрицей вне трещины

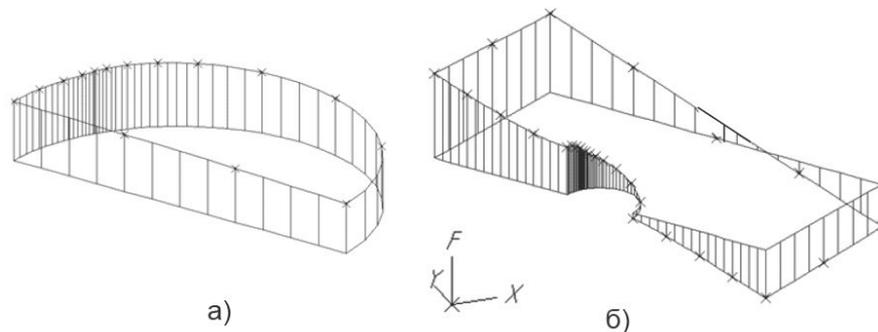


Рис. 3.63. Эпюры перемещений точек на границе подобластей вдоль оси OY ((а) - включение; (б) - матрица), условие неидеального соединения между включением и матрицей вне трещины

Ввиду симметрии задачи при численном решении методом ГИУ рассмотрена половина квадратной пластины ($2W/R = 10$, $\phi = 30^0$), состояние

плоской деформации, с трещиной, вершина которой находится в точке B и граничными условиями, аналогичными рассмотренным в разделе 3.3.1 (см. рис. 3.46).

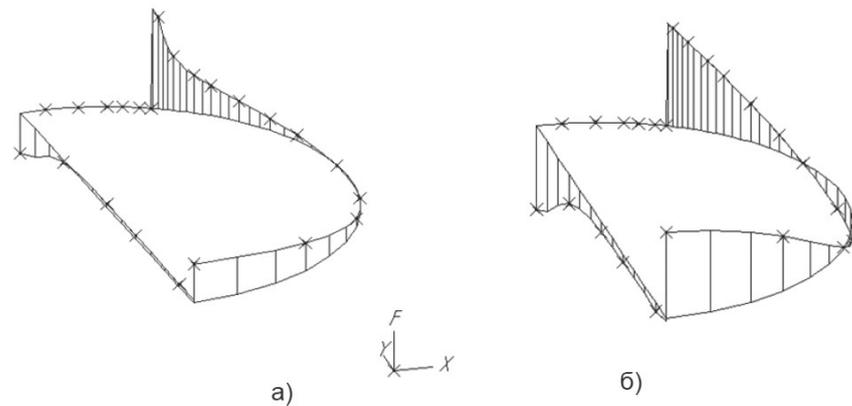


Рис. 3.64. Эпюры нормальных напряжений вдоль границы включения: (а) - идеальное соединение, (б) - неидеальное соединения между включением и матрицей

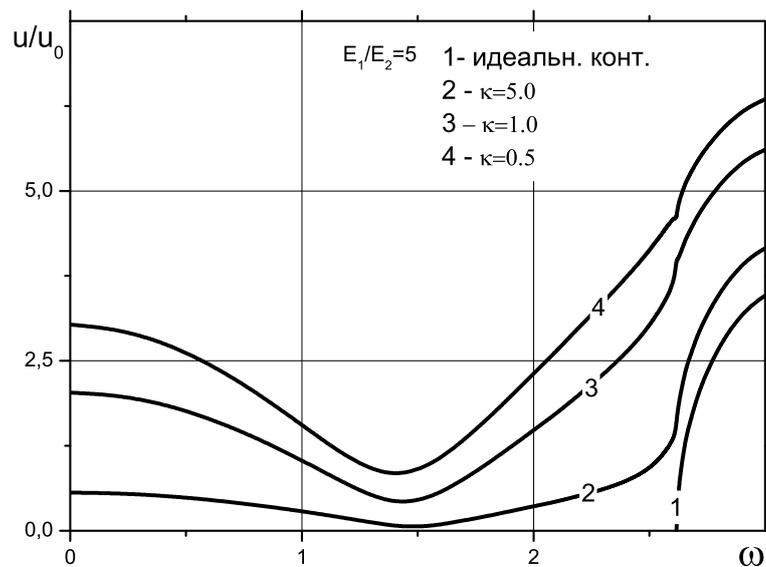


Рис. 3.65. Раскрытие трещины и относительное смещение участка неидеального соединения между включением и матрицей, $u_0 = 2\sigma_0 R/E_1$

Эпюры перемещений вдоль оси OY точек на границах подобластей для случаев идеального и неидеального соединений показаны на рис. 3.62 и 3.63, где наблюдаются характерные отличия в деформировании при различных условиях на стыках подобластей. Эпюры нормальных напряжений по контуру включения приведены на рис. 3.64. При наличии неидеального контакта между подобластями наблюдаются значительные зоны сжатия по окружности включения.

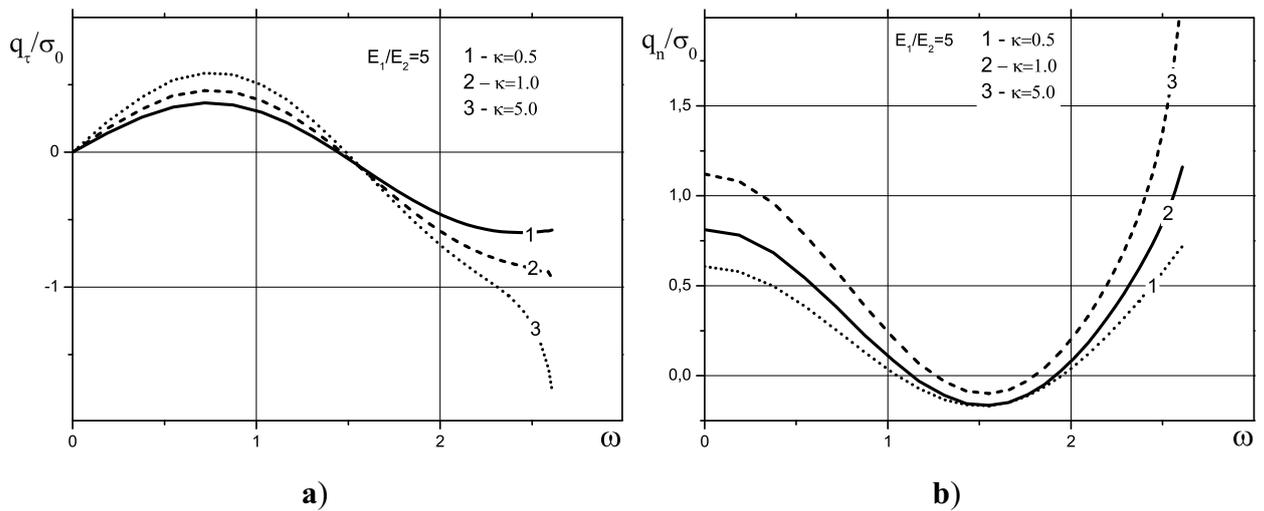


Рис. 3.66. Усилия на участке неидеального соединения включения и матрицы (а)- касательные; (б)- нормальные

Раскрытие трещины, а также относительное смещение участка неидеального соединения включения и матрицы, приведены на рис. 3.65, где $\omega = s/R$, s - длина дуги между точками с координатами $x = 0, y = -R$ и $x = 0, y = R$ (см. рис. 3.46). Минимальное смещение между подобластями наблюдается при $x = R, y = 0$, при увеличении жесткости связей ($\kappa = 5$) смещение участка неидеального соединения уменьшается и при большой жесткости связей $\kappa > 10$ соединение можно рассматривать как идеальное.

Распределения нормальных и касательных усилий вдоль зоны неидеального соединения подобластей приведены на рис. 3.66, где $\omega = s/R$, участок неидеального соединения - дуга s между точкой с координатами $x = 0, y = -R$ и точкой B (см. рис. 3.46). При увеличении жесткости связей нормальные усилия возрастают, а вблизи точки $x = R, y = 0$ наблюдается зона сжатия.

Жесткость участка неидеального соединения материалов изменяется со временем под действием физических полей и агрессивных сред. Дegradaция связей может быть рассмотрена, исходя из термофлуктуационной модели кинетики связей, с учетом неоднородного распределения напряжений на участке неидеального соединения материалов.

Глава 4

Критерий формирования и роста трещин со связями в концевой области, на границе соединения материалов

При рассмотрении различных моделей зоны процесса разрушения применяются силовые, энергетические и деформационные критерии разрушения (как однопараметрические, так и двухпараметрические) [14, 95, 263, 275–277].

В данной работе для описания зоны процесса разрушения используется **модель трещины со связями в концевой области** без наложения ограничений на размер концевой области трещины. Зона процесса разрушения рассматривается как часть трещины с приложением в этой части к поверхностям трещины сил сцепления (усилий), сдерживающих ее раскрытие (см. главу 1). При использовании такой модели трещины необходим обобщенный критерий разрушения, позволяющий определять условия продвижения как края концевой области трещины, так и вершины трещины.

В качестве первого условия такого критерия разрушения обычно используется силовое условие (1.3):

$$K_{\infty} - K_b = K_{Ic}, \quad (4.1)$$

где K_{∞} - КИН от действия внешних нагрузок, K_b - КИН, обусловленный наличием связей в концевой области трещины, зависящий от размера концевой области трещины (см. главу 3), K_{Ic} - трещиностойкость материала, соответствующая механизму деформирования связей, находящихся в малой зоне вблизи вершины трещины (например, трещиностойкость материала матрицы, которая, в общем случае, зависит от длины трещины).

В качестве второго условия роста трещины с концевой областью возможен выбор условия критического раскрытия трещины на краю концевой

области (или условия критической деформации) [14, 18, 95]:

$$u(\sigma_{cr}, L, d) = \delta_{cr}, \quad (4.2)$$

где σ_{cr} - критическая внешняя нагрузка, при которой начинается разрыв связей на краю концевой области трещины, L и d - характерные линейные размеры трещины и её концевой области, соответственно.

Другая возможность состоит, например, в использовании вместо (4.1) условия достижения критических напряжений σ_{th} в вершине трещины:

$$\sigma(\sigma_m, L, d) = \sigma_{th}, \quad (4.3)$$

где σ_m - критическая внешняя нагрузка, при которой начинается продвижение вершины трещины.

При использовании критерия В.В. Новожилова [278] под напряжением в вершине трещины понимается среднее значение напряжения на некотором характерном участке вблизи её вершины [22, 27, 28, 279, 280].

Заметим, что при применении в качестве критерия разрушения силовых условий (4.1) или (4.3) и условия (4.2), работа по деформированию связей в концевой области трещины, а также другие механизмы, связанные с потреблением энергии при росте трещины с концевой областью, оказываются вне рамок критерия разрушения.

Задачи для трещин с концевой областью рассматривались с использованием энергетических методов в ряде работ. Баланс энергии при учете пластических деформаций в вершине трещины рассмотрен в работе [281]. Применение энергетических методов для решения широкого круга задач механики разрушения при наличии тонкой пластической зоны у края трещины рассмотрено в книге [263]. Интеграл Черепанова-Райса использован в работе [157] для определения предельного значения КИН для трещины, заполненной связями, а в работе [17] - для оценки степени упрочнения связями при малой концевой области трещины. Вариант энергетического критерия

Гриффитса для анализа разрушения волокнистых композитов с учетом энергетического вклада материала матрицы и волокон рассмотрен в [173, 282] в предположении, что поток энергии в вершину трещины постоянен. Комбинированный подход, основанный на энергетическом и силовом условиях разрушения используется в моделях конечной механики разрушения [283–285].

В данной работе для анализа предельного равновесия трещины с концевой областью на границе соединения материалов предлагается обобщенный вариант критерия разрушения с энергетическим условием продвижения вершины трещины, учитывающим работу по деформированию связей в концевой области трещины и изменение потока энергии в вершину трещины при росте трещины и изменении размеров её концевой области. Это условие основано на равенстве скорости высвобождения энергии деформации в вершине трещины и скорости потребления энергии деформации связями в концевой области трещины. Для определения продвижения края концевой области трещины используется кинематическое условие (4.2).

4.1. Нелокальный критерий квазистатического роста трещин со связями в концевой области

Рассмотрим упругое тело с плоской трещиной площади S и концевой областью площади S_d , $S_d \subset S$. На границе тела приложены внешние нагрузки $T_i^e(s)$ и заданы перемещения точек s поверхности тела $u_i^e(s)$, где $i=1, 2$ или $i=1,2,3$ в двумерном и пространственном случаях, соответственно. Положим, что в концевой области S_d , примыкающей к фронту трещины, поверхности трещины взаимодействуют так, что это взаимодействие сдерживает раскрытие трещины. Для описания взаимодействия поверхностей трещины предположим, что в концевой области S_d между берегами трещины имеются связи, закон деформирования которых, в общем случае нелинейный, задан. При действии внешних нагрузок в связях, соединяющих берега трещины, возни-

кают усилия $Q_i(s)$, а к поверхностям трещины приложены соответствующие усилия (напряжения) противоположного знака.

Полагая, что раскрытие трещины $u_i(s)$ и усилия в связях $Q_i(s)$ известны, а поверхность тела в концевой области трещины S_d нагружена напряжениями

$$T_i^d(s) = -Q_i(s), \quad (4.4)$$

запишем выражение для полной энергии тела с нагрузками $T_i^e(s)$ на внешней поверхности тела S_e и нагрузками (4.4) в концевой области трещины:

$$F = \Pi + U + \Sigma_m \quad (4.5)$$

Здесь U - потенциальная энергия деформации связей в концевой области трещины, Π - полная потенциальная энергия упругого тела

$$\Pi = W - A, \quad (4.6)$$

где W - потенциальная энергия деформации, A - работа внешних сил.

Последнее слагаемое в равенстве (4.5) учитывает вклад поверхностной энергии материала матрицы и энергии деформации волокон, расположенных у края трещины

$$\Sigma_m = G_m S; \quad G_m = 2c_m \gamma_m + 2c_f \Gamma_f, \quad c_m = 1 - c_f \quad (4.7)$$

где c_f - удельная концентрация волокон в композите, γ_m - удельная поверхностная энергия материала матрицы, Γ_f - удельная энергия деформации волокон у края трещины (полагаем, что эта величина включает также удельную работу при возможности вытягивания волокон из матрицы).

При отсутствии массовых сил

$$\Pi = \int_V w(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_e} T_i^e(s) u_i^e(s) dS - \int_{S_d} \{ T_i^d(s) u_i^+(s) - T_i^d(s) u_i^-(s) \} dS, \quad (4.8)$$

где $w(\varepsilon_{ij})$ - плотность энергии деформации упругого тела в объеме V , ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, $u_i^e(s)$ - перемещения точек на внешней

поверхности тела S_e , $u_i^+(s)$, $u_i^-(s)$ - перемещения поверхностей трещины в концевой области S_d .

Составляющие раскрытия трещины в концевой области определим так:

$$u_i^d(s) = u_i^+(s) - u_i^-(s) \quad (4.9)$$

Запишем выражение (4.8) с учетом соотношений (4.4) и (4.9)

$$\Pi = \int_V w(\varepsilon_{ij})dV - \int_{S_e} T_i^e(s)u_i^e(s)dS + \int_{S_d} Q_i^d(s)u_i^d(s)dS \quad (4.10)$$

Потенциальную энергию деформации связей в концевой области трещины в равенстве (4.5) представим в виде

$$U = \int_{S_d} \Phi(u^d)dS, \quad (4.11)$$

где $\Phi(u^d)$ - плотность потенциальной энергии деформации связей в концевой области трещины. Энергетический критерий равновесия трещины при малом приращении ее размера (площади, длины) получаем из выражений (4.5), (4.6)

$$\delta F = \delta(\Pi + U + \Sigma_m) = 0, \quad (4.12)$$

т.е. изменение потенциальной энергии системы определяется затратами на образование новой поверхности трещины и деформирование связей в концевой области трещины.

Заметим, что определение приращения потенциальной энергии при изменении размера трещины согласно равенству (4.12) предполагает, в общем случае, существование бесконечных напряжений в вершине (вдоль фронта) трещины [133]. Энергетическое условие (4.12) совпадает по форме с критерием Гриффитса и является при рассмотрении двухпараметрических моделей разрушения только необходимым условием разрушения [155, 281]. Например, при рассмотрении модели трещины с линейно-упругими связями в концевой области это выражается в том, что невозможно определить

критическую разрушающую нагрузку, исходя единственно из этого критерия [29, 30]. В предельном случае трещины с малой концевой областью можно показать, что условие (4.12) эквивалентно условию конечности напряжений в вершине трещины [29].

Для анализа предельного равновесия трещины с концевой областью необходимо использование дополнительного критического условия, в качестве которого возможно рассмотрение условий критической деформации связи, критической нагрузки на связь, критического раскрытия трещины. Условия такого типа являются, по сути, силовыми или кинематическими достаточными условиями разрушения.

Далее будем рассматривать условие критического раскрытия трещины на краю концевой области как дополнительное достаточное условие разрушения. Полагаем, что разрыв связей на краю концевой области (или в некоторой точке на контуре концевой области в пространственном случае) происходит при выполнении условия

$$u(s_0) = \delta_{cr}, \quad (4.13)$$

где $u(s_0)$ - раскрытие трещины на краю концевой области, δ_{cr} - предельная длина связи.

Уравнения (4.12), (4.13) представляют собой критерий разрушения для трещины с концевой областью. Совместное решение этих уравнений позволяет при заданных размерах трещины и характеристиках связей определить два основных параметра - критическую внешнюю нагрузку и размер концевой области в состоянии предельного равновесия трещины.

4.1.1. Трещина на границе соединения материалов. Критерий разрушения

Рассмотрим применение критерия разрушения (4.12), (4.13) для двумерной задачи об одноосном растяжении плоскости с прямолинейной трещиной

со связями в концевой области. Трещина расположена перпендикулярно направлению приложения нагрузки на прямолинейной границе соединения полуплоскостей из различных материалов.

В двумерной задаче выражение (4.12) для одиночной прямолинейной трещины, расположенной на участке $|x| \leq \ell$, $y = 0$, с концевыми областями размера $d_1 = d_2 = d$ (рис. 2.1), запишется так [29, 30]:

$$\frac{\partial F}{\partial \ell} = \frac{\partial \Pi}{\partial \ell} + \frac{\partial U}{\partial \ell} + G_m = 0, \quad (4.14)$$

где G_m - трещиностойкость материала матрицы, см. (4.7).

Выражение (4.14) можно представить в такой форме:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{b \partial \ell} + G_m \quad (4.15)$$

Введем обозначения

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \ell}, \quad G_{\text{bond}}(d, \ell) = \frac{\partial U}{b \partial \ell} + G_m, \quad (4.16)$$

где $G_{\text{tip}}(d, \ell)$ – скорость высвобождения энергии деформации (поток энергии в вершину трещины [133]), $G_{\text{bond}}(d, \ell)$ - скорость потребления энергии деформации связями в концевой области трещины, b - толщина тела.

Выражение для скорости высвобождения энергии деформации для трещины, расположенной на границе разных материалов, остается справедливым и при наличии связей в концевой области трещины, так как влияние связей выражается в приложении нагрузок $T_i^d(s)$ к берегам трещины в ее концевой области. Таким образом, независимо от формы закона деформирования связей, скорость высвобождения энергии деформации определяется выражением [108]:

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) = \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{16ch^2(\pi\beta)}, \quad \beta = \frac{\ell n \alpha}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{\mu_2 k_1 + \mu_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2}, \quad (4.17)$$

где $k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ для плоской деформации или $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2}) / (1 + \nu_{1,2})$ для плоского напряженного состояния, $\nu_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ - коэффициенты Пуассона и модули

сдвига материалов подобластей 1 ($y > 0$) и 2 ($y < 0$) (см. рис. 2.1). КИН K_I и K_{II} определяются с учетом КИН от нагрузок на внешней поверхности тела ($K_{i,\infty}$) и КИН от нагрузок в концевой области трещины ($K_{i,b}$) [29, 30]

$$K_i = K_{i,\infty} - K_{i,b}, \quad i = I, II \quad (4.18)$$

Потенциальную энергию деформации связей в концевой области трещины определяем согласно соотношению (4.10):

$$U = b \int_{\ell-d}^{\ell} \Phi(u) dx, \quad \Phi(u) = \int_0^{u(x)} \sigma(u) du, \quad u(x) = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \sigma(u) = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}, \quad (4.19)$$

где $\Phi(u)$ - плотность потенциальной энергии деформации связей в концевой области трещины, $u_{x,y}(x)$ - компоненты раскрытия трещины в концевой области, $\sigma(u)$ - модуль вектора усилий в связях, определяемый законом деформирования связей, $q_{y,x}(u)$ - нормальная и касательная составляющие усилий в связях.

Подставляя выражения (4.19) во второе равенство (4.16), получаем:

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = \frac{\partial U}{b \partial \ell} + G_m = \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\int_0^{u(x)} \sigma(u) du \right) dx + G_m \quad (4.20)$$

Дифференцирование по верхнему и нижнему пределам интегрирования в выражении (4.20) для скорости потребления энергии деформации связями соответствует предположению об изменении размера концевой области трещины в результате разрыва связей на краю концевой области (при $x_0 = \ell - d$) и одновременном продвижении вершины трещины. В таком случае возможно выполнение условия автономности концевой области трещины.

Выполняя дифференцирование по верхнему и нижнему пределам в равенстве (4.20), получим:

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \ell} \sigma(u) \right) dx + G_m + G_c - G_b, \quad (4.21)$$

где введены обозначения

$$G_c = \int_0^{u(\ell)} \sigma(u) du, \quad G_b = \int_0^{u(\ell-d)} \sigma(u) du \quad (4.22)$$

и в состоянии предельного равновесия трещины $u(\ell - d) = \delta_{cr}$ (согласно условию (4.13)).

Выбор модели трещины с ненулевым раскрытием в ее вершине $u(\ell) \neq 0$ предполагает, что концевая область состоит из двух частей, d и d_c , на каждой из которых закон деформирования связей может быть различным, а параметр дифференцирования (ℓ) не является полной длиной трещины. При выборе такой модели концевой области трещины первый интеграл в (4.22) представляет собой плотность энергии деформации связей на участке d_c концевой области трещины. В рассматриваемой здесь модели трещины полагаем, что $d_c \ll d$, толщина H промежуточного слоя между областями из различных материалов (адгезионного слоя) мала по сравнению с длиной трещины ($H/\ell \rightarrow 0$) и $u(\ell) = 0$. Тогда $G_c = 0$ и выражение (4.21) с учетом соотношений (2.1), определяющими связь между раскрытием трещины и усилиями в связях, и можно записать так:

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) + \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) \right) dx - G_b + G_m \quad (4.23)$$

Величина G_b представляет собой плотность энергии деформации, выделяющейся при разрыве связей на краю концевой области ($x = \ell - d$).

Два типа соединений материалов будут рассматриваться далее при использовании критерия (4.12), (4.13):

а) композиционные материалы с подкрепляющими волокнами или частицами;

б) адгезионные соединения материалов.

Параметр G_m в этих случаях определяется так (см. выражение (4.7)):

$$G_m = \begin{cases} 2c_m\gamma_m + 2c_f\Gamma_f & \text{(а)} \\ \eta G_b & \text{(б)}, \end{cases} \quad (4.24)$$

где для случая б) параметр $\eta \geq 0$ представляет собой относительную трещиностойкость соединения материалов на продолжении трещины.

Для однородного материала или адгезионного слоя, соединяющего разные материалы, полагаем, что законы деформирования связей в концевой области трещины и на ее продолжении одинаковы ($\eta = 1$), т.е.

$$G_m = G_b = \int_0^{\delta_{cr}} \sigma(u) du \quad (4.25)$$

и выражение (4.23) принимает вид:

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) + \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) \right) dx \quad (4.26)$$

Случай $\eta > 1$ соответствует наличию дополнительных механизмов подкрепления в адгезионном слое за вершиной трещины, а случай $0 \leq \eta < 1$ соответствует “слабому” интерфейсу, причем $\eta = 0$ соответствует случаю “идеально слабого” интерфейса.

При рассмотрении композиционного материала с матрицей, обладающей малой трещиностойкостью (сопротивление разрушению определяется только связями в концевой области), полагаем, что $G_b \gg G_m$ и $\eta = 0$. Для этого частного случая ниже будет показано, что $G_{\text{bond}}(d, \ell) \rightarrow 0$, $G_{\text{tip}}(d, \ell) \rightarrow 0$ при $(d/\ell) \rightarrow 0$ и выражение (4.15) переходит условие конечности напряжений в вершине трещины в когезионной модели.

Состоянию предельного равновесия вершины трещины и края концевой области трещины соответствует выполнение необходимого

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) = G_{\text{bond}}(d, \ell) \quad (4.27)$$

и достаточного условий ($x_0 = \ell - d$)

$$u(x_0) = [u_x^2(x_0) + u_y^2(x_0)]^{1/2} = \delta_{cr} \quad (4.28)$$

Параметр δ_{cr} определяется свойствами связей в концевой области трещины, а также может зависеть от масштаба трещины (например, при изменении типа связей с ростом трещины).

Из совместного решения уравнений (4.27) и (4.28) можно определить размер концевой области d_{cr} и критическое внешнее напряжение σ_{cr} в состоянии предельного равновесия трещины. Скорость потребления энергии деформации $G_{bond}(d_{cr}, \ell)$, полученная из совместного решения этих уравнений, является энергетической характеристикой сопротивления адгезионному разрушению, $G_{cr} = G_{bond}(d_{cr}, \ell)$, причем величина G_{cr} не остается постоянной при изменении длины трещины. После определения критического внешнего напряжения могут быть также определены критический КИН и поток энергии в вершину трещины, обусловленные внешней нагрузкой σ_{cr} .

4.1.2. Режимы квазистатического роста трещин

При монотонном нагружении тела, для заданных начальных размеров трещины и ее концевой области, можно выделить следующие режимы равновесия и квазистатического роста трещины [31]:

1. Продвижение вершины трещины с одновременным возрастанием длины концевой области трещины без разрыва связей происходит при выполнении условий

$$G_{tip}(d, \ell) \geq G_{bond}(d, \ell), \quad u(\ell - d) < \delta_{cr} \quad (4.29)$$

2. Разрыв связей на краю концевой области трещины без продвижения вершины трещины происходит при выполнении условий

$$G_{tip}(d, \ell) < G_{bond}(d, \ell), \quad u(\ell - d) \geq \delta_{cr} \quad (4.30)$$

Размер концевой области трещины в этом случае сокращается, стремясь к предельному значению для данного уровня нагрузки.

Указанные два этапа роста трещины можно рассматривать как процессы приспособляемости трещины к заданному уровню внешних нагрузок (до-критический рост трещины).

3. Продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области происходит при одновременном выполнении условий (знаки равенства соответствуют квазистатическому росту трещины)

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) \geq G_{\text{bond}}(d, \ell), \quad u(\ell - d) \geq \delta_{cr} \quad (4.31)$$

В рамках рассматриваемой модели положение концевой области и вершины трещины не меняется при одновременном выполнении второго из условий (4.29) и первого условия (4.30).

Таким образом, величина внешней нагрузки и параметры связей определяют характер разрушения: продвижение вершины трещины с ростом концевой области; сокращение размера концевой области без продвижения вершины трещины; продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области.

Заметим, что при рассмотрении адгезионного слоя с линейно-упругими связями [29, 30] выполнение условия (4.27) зависит только от относительных геометрических характеристик концевой области и трещины. Критическое значение размера концевой области, полученное из этого условия, может быть отнесено к трещине любой длины. Определение фактического размера трещины, соответствующего состоянию предельного равновесия, происходит при учете достаточного условия (4.28). Этот факт является очевидным подтверждением необходимости использования двухпараметрического критерия для полного описания предельного равновесия трещины с концевой областью.

Для анализа предельного равновесия трещин с использованием соот-

ношений (4.27)-(4.28) требуются распределения напряжений и смещений в концевой области трещины, методы определения которых рассмотрены в главе 2. Если напряжения в связях не зависят от раскрытия трещины и являются постоянными, то могут быть получены аналитические выражения для раскрытия трещины в концевой области [13, 15]. В разделе 4.2 для этого частного случая (трещины, расположенной в однородной плоскости с постоянными напряжениями в связях) получены аналитические выражения для энергетических характеристик трещины и рассмотрена методология использования нелокального критерия разрушения для анализа формирования и роста трещин.

4.1.3. Трещина с малой концевой областью. Эквивалентность критериев разрушения

Рассмотрим трещину на границе соединения материалов в предположении малости размера ее концевой области по сравнению с длиной трещины, $d \ll \ell$. Положим также, без потери общности, что закон деформирования связей в концевой области трещины имеет вид

$$\sigma(u) = ku + q_0$$

где k - жесткость связей в концевой области трещины (одинаковая для нормального и касательного направлений), u - раскрытие трещины в концевой области и q_0 - напряжения в связях при $u = 0$ (в вершине трещины).

Раскрытие трещины вблизи вершины при малом размере концевой области имеет вид [18]

$$u(x) = C(x^2 - \ell^2)^{1/2},$$

где C постоянная, зависящая от механических свойств материалов и связей.

Рассмотрим энергетические характеристики трещины в состоянии предельного равновесия при малом размере концевой области. Запишем выра-

жение (4.21) с учетом (4.22)

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \ell} \sigma(u) \right) dx - \int_0^{u(\ell-d)} \sigma(u) du + G_m \quad (4.32)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (4.32) вычислим с учетом того, что $\partial u / \partial \ell = C\ell(\ell^2 - x^2)^{-1/2}$. Получим ($d \ll \ell$)

$$\int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \ell} \sigma(u) \right) dx = \ell k C^2 \int_0^d t dt + \ell q_0 C \int_0^d (2\ell t)^{-1/2} dt = C^2 k \ell d + C q_0 (2\ell d)^{1/2} \quad (4.33)$$

Второй интеграл в правой части выражения (4.32) (4.32) равен ($d \ll \ell$)

$$\int_0^{u(\ell-d)} (ku + q_0) du = \frac{ku^2(\ell-d)}{2} + q_0 u(\ell-d) = C^2 k \ell d + C q_0 (2\ell d)^{1/2} \quad (4.34)$$

В итоге, получаем выражение для скорости потребления энергии связями в случае малой концевой области:

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = G_m \quad (4.35)$$

С другой стороны, исходя из выражения (4.23), можно записать:

$$G_{\text{bond}}(d_{cr}, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) + \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) \right) dx + G_m - G_b, \quad G_b = \int_0^{\delta_{cr}} \sigma(u) du \quad (4.36)$$

Из выражений (4.35) и (4.36) следует:

$$\int_{\ell-d_{cr}}^{\ell} \left(\frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) + \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) \right) dx = \int_0^{\delta_{cr}} \sigma(u) du \quad (4.37)$$

Таким образом, в случае малой концевой области трещины приращение энергии деформации связей в состоянии предельного равновесия (левая часть уравнения (4.37)) равно плотности энергии деформации, высвобождающейся при разрыве связей на краю концевой области (правая часть уравнения

(4.37)). При выполнении равенства (4.37) возможно соблюдение условия автономности концевой области трещины.

Первое уравнение нелокального критерия разрушения (4.27) для случая трещины на границе соединения материалов можно записать, принимая во внимание выражения (4.17) и (4.35):

$$G_{\text{tip}}(d_{cr}, \ell) = \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{16 \operatorname{ch}^2(\pi\beta)} = G_m \quad (4.38)$$

Из этого уравнения получим силовое условие разрушения для модуля КИН K , аналогичное (4.1):

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = \sqrt{E_i G_m}, \quad (4.39)$$

где E_i зависит от механических свойств материалов, см. (4.38).

Модуль КИН K в (4.39) будет равен нулю для материалов с малой трещиностойкостью, ($G_m = \eta G_b$, $\eta = 0$). Из последнего выражения следует также условие конечности напряжений в вершине трещины. Таким образом, условие, которое является исходным допущением в моделях когезионного типа [11, 13, 15], является следствием энергетического условия при малом размере концевой области и пренебрежении собственной трещиностойкостью материала.

4.2. Нелокальный критерий разрушения. Трещина с постоянными напряжениями в связях. Аналитическое исследование

Применение нелокального критерия разрушения (4.27)-(4.28) рассмотрим на примере задачи об одноосном растяжении однородной плоскости с прямолинейной трещиной длины 2ℓ (см. рис. 2.1, при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0$). На удаленной внешней границе приложено растягивающее напряжение $\sigma_y = \sigma_0$, а напряжения в связях $q_y(x) = P_0$ в концевой области трещины

не зависят от раскрытия трещины и постоянны вдоль концевой области. Касательные нагрузки на поверхности трещины отсутствуют.

Скорость высвобождения энергии деформации (4.17) для однородного тела определяется так (плоское напряженное состояние) [133]:

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) = \frac{K^2}{E}; \quad K = K_{\infty} - K_b = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell} \left(1 - \frac{2}{\pi \sigma_0} \int_{1-d/\ell}^1 \frac{q_y(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \quad (4.40)$$

При постоянных напряжениях в связях P_0 получаем:

$$K = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell} (1 - Z_0 \arccos(1 - t)), \quad Z_0 = \frac{2P_0}{\pi \sigma_0}, \quad t = \frac{d}{\ell}, \quad (4.41)$$

и выражение (4.40) имеет вид:

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) = G_f (1 - Z_0 \arccos(1 - t))^2, \quad G_f = \frac{\sigma_0^2 \pi \ell}{E}, \quad (4.42)$$

где G_f - скорость высвобождения энергии деформации при отсутствии связей между берегами трещины.

Выражение для скорости потребления энергии деформации связями используем в форме (4.20):

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = 2P_0 \left[\frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\ell-d}^{\ell} u(x) dx \right] + G_m, \quad (4.43)$$

где $u(x)$ - перемещение верхнего берега трещины, определяемое выражением (П.49), G_m - параметр, определяемый выражением (4.24); в случае адгезионного слоя с постоянными усилиями в связях (см. соотношение (4.25))

$$G_m = G_b = P_0 \delta_{cr} \quad (4.44)$$

Вычисляя интеграл и производную в правой части равенства (4.43), получим (вычисления приведены в Приложении)

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = 2G_f \varphi(t) + G_m, \quad t = \frac{d}{\ell}, \quad (4.45)$$

где

$$\begin{aligned} \phi(t) &= Z_0 \{A(t) - B(t) - Z_0 [A(t) [A(t) - 2B(t)] - 2C(t)]\} \\ A(t) &= \arccos(1 - t), \quad B(t) = \sqrt{2t - t^2}, \quad C(t) = (1 - t) \ln(1 - t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Приравнивая выражения $G_{\text{tip}}(d, \ell)$ (4.42) и $G_{\text{bond}}(d, \ell)$ (4.45) и полагая в (4.45) $G_m = \eta G_b = \eta P_0 \delta_{cr}$, получаем уравнение, соответствующее условию (4.27),

$$2Z_0 \left\{ [2A(t) - B(t)] - Z_0 \left[\frac{3}{2} A^2(t) - 2A(t)B(t) - 2C(t) \right] \right\} + 2\eta R_0 Z_0^2 - 1 = 0 \quad (4.47)$$

Уравнение, соответствующее условию (4.28), получаем, исходя из выражения (П.52), при $x = \ell - d$

$$\frac{B(t)}{Z_0} - [A(t)B(t) + C(t)] = R_0 \quad (4.48)$$

В уравнениях (4.47), (4.48) использованы следующие обозначения:

$$R_0 = \frac{d_0}{\ell}, \quad d_0 = \frac{\pi E \delta_{cr}}{8P_0}, \quad \eta = \frac{G_m}{G_b}, \quad G_b = P_0 \delta_{cr} \quad (4.49)$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (4.47), (4.48) соответствует условиям предельного равновесия трещины с концевой областью (4.27)-(4.28) и содержит две неизвестных величины:

$$Z_0 = \frac{2P}{\pi \sigma_{cr}}, \quad t = \frac{d_{cr}}{\ell}.$$

Уравнение для определения критического размера концевой области в состоянии предельного равновесия получаем, подставляя выражение (4.48) в (4.47):

$$\begin{aligned} [R_0 + A(t)B(t) + C(t)] [3A(t)B(t) - C(t) - R_0] - \\ - B^2(t) [3A^2(t) - 2A(t)B(t) - 2C(t)] + 2(\eta - 1) B^2(t) R_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Критическое внешнее напряжение σ_{cr} определяется исходя из выражения (4.48)

$$\frac{\sigma_{cr}}{P_0} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{R_0 + A(t)B(t) + C(t)}{B(t)} \right] \quad (4.51)$$

для значений параметра $t_{cr} = d_{cr}/\ell$, являющихся решением уравнения (4.50).

Отметим, что уравнение (4.51) можно также рассматривать для произвольных значений $0 < t = d/\ell \leq 1$, независимо от выражения (4.48). В этом случае уравнение (4.51) определяет напряжение разрыва связи на краю концевой области $\sigma_0 = \sigma_U$.

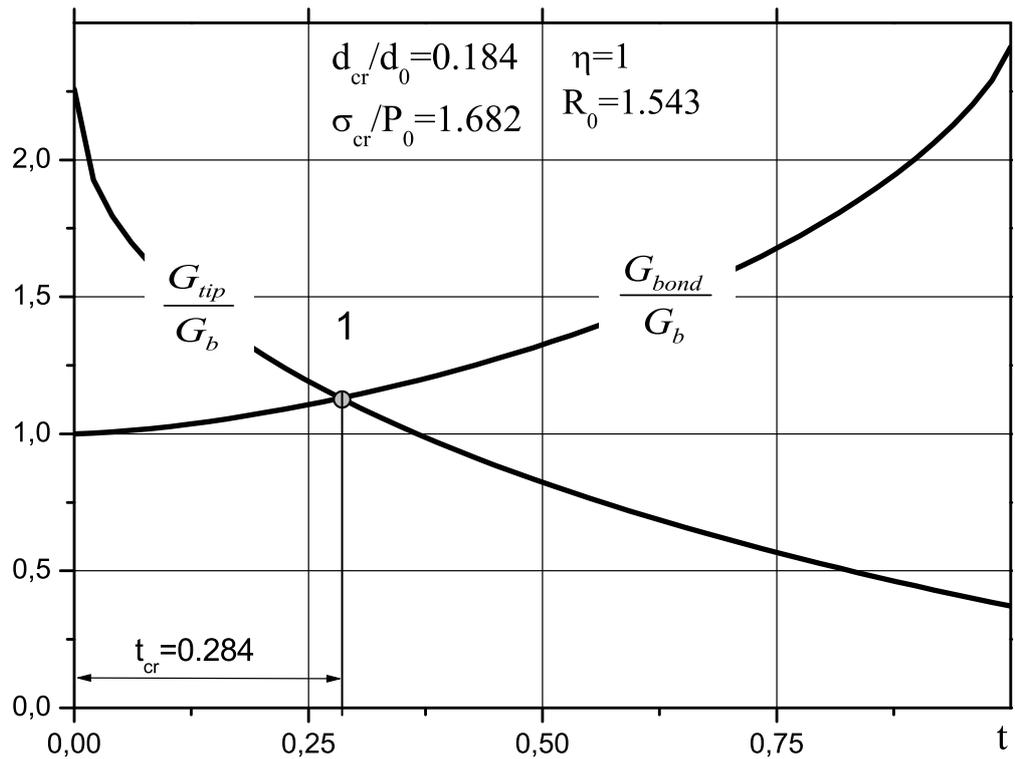
Решение системы уравнений (4.47) и (4.48) (или (4.50) и (4.51)) полностью определяется параметрами R_0 и η и позволяет получить зависимости величин σ_{cr} и d_{cr} от длины трещины при квазистатическом росте трещины. При отсутствии решения системы уравнений (4.47), (4.48) возможна реализация одного из режимов разрушения, описанных в конце раздела 4.1.2.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение нелокального критерия разрушения (4.27)-(4.28) для расчета критического размера концевой области трещины и критической внешней нагрузки в состоянии предельного равновесия трещины с концевой областью.

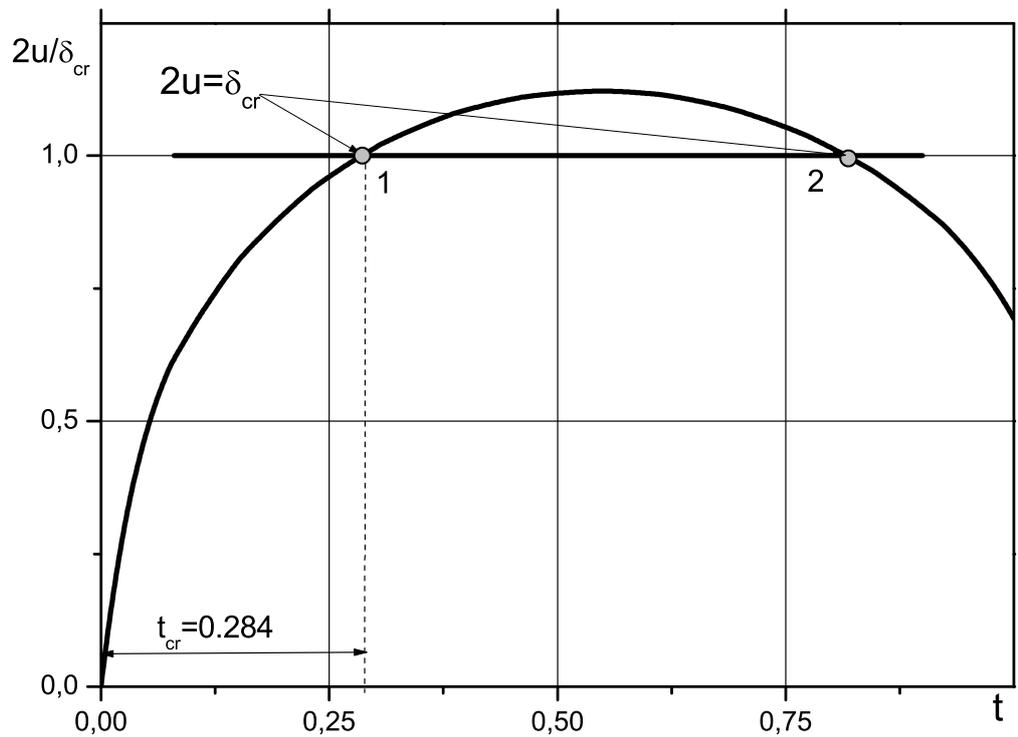
В случае постоянных напряжений в концевой области трещины кривая деформирования связей определяется только двумя параметрами, значения которых для данного расчета приняты следующие: а) критическое раскрытие трещины на краю концевой области $\delta_{cr} = 0.15 \cdot 10^{-3}$ м; нормальные усилия в связях $P_0 = 5 \cdot 10^{-3}E$ ($E = 25$ ГПа - модуль упругости материала). Для этих характеристик деформирования связей параметр d_0 определяется как $d_0 \approx 0.012$ м (см. выражение (4.49)).

Положим также, что длина трещины выбрана как $\ell = 0.648d_0$ (т.е. $R_0 = 1.543$), а связи между берегами трещины соответствуют адгезионному слою ($\eta = 1$), см. (4.49).

Решение системы уравнений (4.47) и (4.48) при указанных выше параметрах связей в концевой области трещины дает для состояния предельного равновесия относительный размер концевой области трещины $t_{cr} = d_{cr}/\ell = 0.284$ и критическую внешнюю нагрузку $\sigma_{cr} = 1.682P_0$ для полученного значения



a)



b)

Рис. 4.1. Расчет параметров нелокального критерия разрушения, $t = d/\ell$. а): Скорость высвобождения энергии деформации и скорость потребления энергии связями, $t_{cr} = d_{cr}/\ell$ - длина концевой области в состоянии предельного равновесия б): Раскрытие трещины на краю концевой области, условия критического раскрытия выполняется в точке 1; точка 2 - недопустимый корень, $t_2 = 0.817$.

t_{cr} .

Наглядное представление о решении системы уравнений (4.47) и (4.48) можно получить из анализа рис. 4.1ab. Безразмерные энергетические характеристики концевой области трещины (скорость высвобождения энергии деформации G_{tip}/G_b и скорость потребления энергии связями G_{bond}/G_b , где величина G_b определяется выражением (4.44)) в зависимости от относительной длины концевой области трещины $t = d/\ell$ приведены на рис. 4.1a. Зависимость безразмерного раскрытия трещины на краю концевой области $u_0 = 2u(1-t)/\delta_{cr}$ при $\eta = 1$ приведена на рис. 4.1b (функция $u(1-t)$, $t = d/\ell$ определяется выражением (П.52), см. Приложение). Функции, представленные на рис. 4.1ab, вычислены для значения внешней нагрузки равной критической $\sigma_0 = \sigma_{cr} = 1.682P_0$.

Из результатов, приведенных на рис. 4.1b, следует, что в точках 1 и 2 выполняется условие $u_0 = 1$, что соответствует выполнению соотношения (4.28), но предельному равновесию трещины соответствуют только точки вида 1 на рис. 4.1ab, так как в этом случае выполняются оба условия (4.27) и (4.28).

Таким образом, общие точки пересечения вида 1 на графиках рис. 4.1ab соответствуют решению системы уравнений (4.27) и (4.28) и определяют относительный размер концевой области трещины $t_{cr} = d_{cr}/\ell = 0.284$ (нормировка величиной d_0 дает $d_{cr}/d_0 = 0.184$). Критическая внешняя нагрузка (напряжение) определяется из уравнения (4.51) – $\sigma_{cr} = 1.682P_0$. Это значение критических напряжений соответствует точкам M и m_1 на кривых докритического роста трещины, см. далее рис. 4.3a и рис. 4.7a.

Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 4.1ab, иллюстрирующие решение системы уравнений (4.47) и (4.48) для той же длины трещины, но при $\eta = 0$ ("слабый слой"), показаны на рис.4.2ab. При $\eta = 0$, ввиду отсутствия вклада в трещиностойкость малой области в вершине трещины, размер концевой области в состоянии предельного равновесия значительно

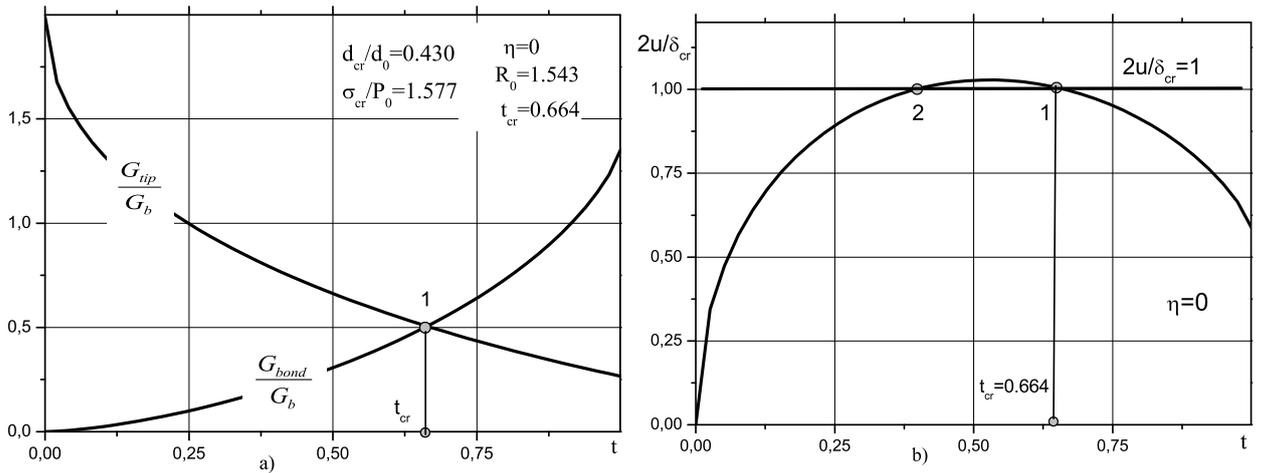


Рис. 4.2. Расчет параметров нелокального критерия разрушения, $t = d/\ell$. **а)**: Скорость высвобождения энергии деформации и скорость потребления энергии связями, $t_{cr} = d_{cr}/\ell$ - длина концевой области в состоянии предельного равновесия **б)**: Раскрытие трещины на краю концевой области трещины, условия критического раскрытия выполняется в точке 1; точка 2 - недопустимый корень, $t_2 = 0.395$.

больше, чем при $\eta = 1$, а процесс квазистатического роста трещины начинается при несколько меньшей внешней нагрузке $\sigma_{cr} = 1.577P_0$.

4.2.1. Докритический рост трещины. Начальный разрез, свободный от связей

Рассмотрим развитие трещины и формирование её концевых областей, полагая, что имеется свободный от связей начальный разрез-трещина длины $2\ell_0$. При монотонном возрастании нагрузки σ_0 выполняются условия (4.29) и вблизи вершин трещины формируются две концевые области размера d каждая. Тогда

$$t = \frac{d}{\ell_0 + d} \quad (4.52)$$

При каждом значении размера концевой области d и внешней нагрузки σ_0 выполняется условие (4.27), а раскрытие трещины на краю концевой области не превышает критического значения (см. условие (4.29), докритический рост трещины).

Зависимость величины внешней нагрузки $\sigma_0 = \sigma_G$ от размера концевой области трещины получаем из условия (4.47), рассматривая его как уравне-

ние относительно параметра Z_0 :

$$Z_0^2 \left[\frac{3}{2} A^2(t) - 2A(t)B(t) - 2C(t) - \eta R_0 \right] - Z_0 [2A(t) - B(t)] + \frac{1}{2} = 0 \quad (4.53)$$

Из уравнения (4.53), используя определение (4.41) параметра Z_0 , получаем:

$$\frac{\sigma_G}{P_0} = \frac{2}{\pi Z_0(t, \eta, R_0)} = \frac{2}{\pi} \left[2A(t) - B(t) + \sqrt{A^2(t) + B^2(t) + 4C(t) + 2\eta R_0} \right], \quad (4.54)$$

где $Z_0(t, \eta, R_0)$ - меньший корень уравнения (4.53), удовлетворяющий условию (4.27), а параметр t определяется формулой (4.52).

При увеличении внешней нагрузки согласно уравнению (4.54) происходит докритический рост трещины, размер концевой области трещины возрастает и достигает критического значения при выполнении условия (4.28). Для сохранения режима квазистатического роста трещины далее необходимо уменьшать внешнюю нагрузку так, чтобы выполнялись условия (4.31).

Кривые докритического роста трещины из начального разреза, (зависимости напряжений, определяемых выражением (4.54) от длины трещины для значений параметров $\eta = 0$ и $\eta = 1$) и их огибающие, соответствующие состоянию предельного равновесия, приведены на рис.4.3ab, где используются следующие обозначения:

$$\lambda = \frac{\ell}{d_0}, \quad \ell = \ell_{0,j} + d$$

где λ - относительная длина трещины, ℓ - длина трещины при докритическом росте, $\ell_{0,j}$ - размер начального разреза без связей, d - приращение длины трещины (сформированная концевая область), $j = 1, \dots, 4, 5$ - номер начального разреза.

Каждая из кривых докритического роста трещины начинается из точки

$$\lambda \equiv \lambda_j = \frac{\ell_{0,j}}{d_0}, \quad \sigma_G = 0$$

и заканчивается на кривой предельного равновесия при

$$\lambda \equiv \lambda_{cr,j} = \frac{\ell_{0,j} + d_{cr,j}}{d_0}, \quad \sigma_G = \sigma_{cr},$$

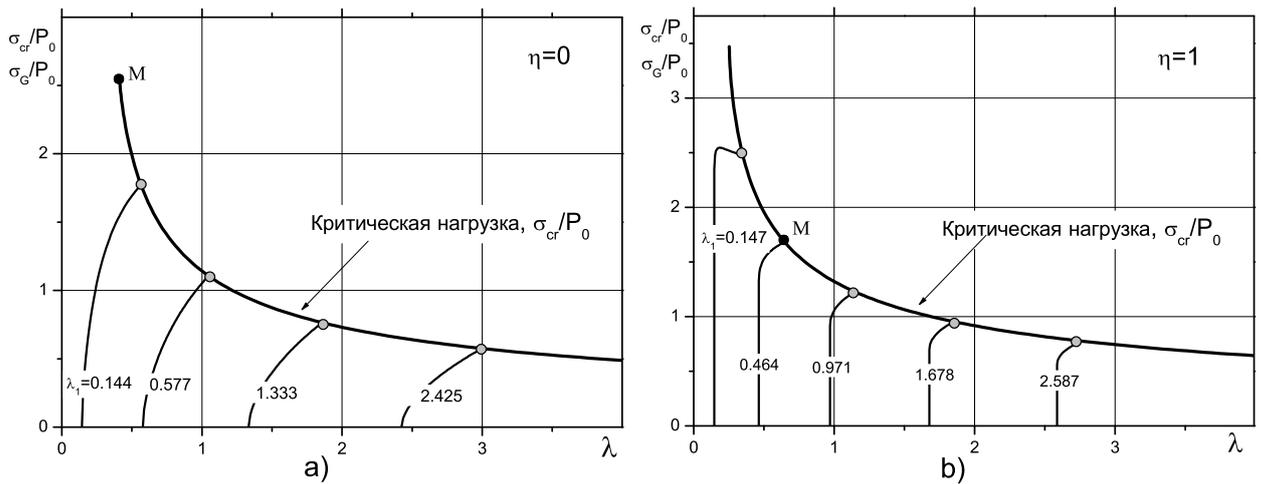


Рис. 4.3. Кривые докритического роста трещины из начального разреза без связей, λ_j - начальная относительная длина разреза, $\lambda = \ell/d_0$

где $d_{cr,j}$ - критическая длина концевой области трещины (полное приращение начального разреза). Например, кривая 2 на рис. 4.3b, определяемая уравнением (4.54), соответствует изменению внешней нагрузки от $\sigma_G = 0$ до $\sigma_G/P_0 = 1.682$, которое необходимо для увеличения длины концевой области d от $d_2 = 0$ (относительная начальная длина трещины без связей $\lambda_2 = 0.464$) до значения $d_2 = d_{cr,2}$, соответствующего полной длине трещины ℓ_2 и относительной длине трещины $\lambda_{2,cr} = \ell_2/d_0 = 0.648$. Параметр λ для кривой 2 изменяется в диапазоне

$$0.464 \geq \lambda \geq 0.648$$

В точке M , где кривая 2 переходит в кривую предельного квазистатического роста трещины, определяемую решением уравнений (4.47) и (4.48), размер концевой области достигает критического значения $d_{cr,2}$ и происходит переход к квазистатическому развитию трещины (относительный размер критической концевой области трещины $d_{cr,2}/d_0 = \lambda_2 - \lambda_{2,cr} = 0.184$, см. также рис.4.1a).

Отметим, что при малой трещиностойкости матрицы ($\eta = 0$) подрастание трещины при докритическом развитии (размер концевой области) больше, чем при $\eta = 1$. Отметим также, что в случае $\eta = 0$ рост трещины начинается сразу после приложения нагрузки, тогда как при $\eta = 1$ образо-

вание концевой области при докритическом росте трещины из начального разреза начинается при внешней нагрузке, удовлетворяющей условию (см. (4.54) при $t = 0$):

$$\sigma_0 \geq \frac{2P_0}{\pi} \sqrt{2\eta R_0} = \sqrt{\frac{G_m E}{\pi \ell_{0,j}}}$$

Немонотонное изменение внешней нагрузки при докритическом росте трещины из короткого надреза (см. случай $\eta = 1$, $\lambda_1 = 0.147$) характерно при учете трещиностойкости матрицы ($\eta \geq 1$).

4.2.2. Докритический рост трещины. Трещина, заполненная связями

Рост трещины, заполненной связями, при монотонном нагружении определяются уравнениями (4.47) и (4.48) при $t = (d/\ell) = 1$.

Рассмотрим выражения для энергетических характеристик (4.42) и (4.45) в случае трещины, заполненной связями. Представим при $t = 1$ эти выражения в форме:

$$\begin{aligned} G_{tip}(\ell) &= \frac{\pi P_0^2 \ell}{E} \left(\frac{\sigma_0}{P_0} - 1 \right)^2 \\ G_{bond}(\ell) &= \frac{2\pi P_0^2 \ell}{E} \left[\frac{\sigma_0}{P_0} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\eta R_0}{\pi} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

При монотонном нагружении трещины, заполненной связями, энергетические функции (4.55) являются возрастающими функциями. Равенство этих величин достигается в состоянии предельного равновесия при выполнении условия (4.27). Приравнявая выражения в (4.55) получим уравнение для величины критической внешней нагрузки σ_m , при которой начинается продвижение вершины трещины:

$$\xi^2 - 2\xi \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{2\eta R_0}{\pi} \right) = 0, \quad \xi = \frac{\sigma_m}{P_0} - 1, \quad (4.56)$$

где σ_m - критическая внешняя нагрузка, при которой начинается продвижение вершины трещины, σ_{cr} - критическая внешняя нагрузка, при которой начинается разрыв связей в центре трещины.

Из уравнения (4.56) (см. также формулу (4.54) при $t = 1$) получаем:

$$\frac{\sigma_m}{P_0} = 2 \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} (1 + 2\eta R_0)} \quad (4.57)$$

Величина критической внешней нагрузки, при которой начинается разрыв связей в центре трещины σ_{cr} , определяется из уравнения (4.48), которое при $t = 1$ принимает вид:

$$\frac{\sigma_{cr}}{P_0} = 1 + \frac{2R_0}{\pi} \quad (4.58)$$

Соотношение между значениями напряжений σ_{cr} и σ_m определяется параметрами $\eta = const$ и R_0 , причем величина $R_0 = d_0/\ell$ уменьшается при росте трещины.

Рассмотрим уравнения (4.57) и (4.58) как функции относительной длины трещины, $\lambda = \ell/d_0$ (см. рис. 4.4). Если трещина относительно короткая ($\lambda_1 < \lambda_f$ и $\sigma_{cr} > \sigma_m$), то для трещины, заполненной связями, возрастание внешней нагрузки до величины $\sigma_0 = \sigma_m$ приводит к началу продвижения вершины трещины без разрыва связей. Для поддержания режима квазистатического роста трещины без разрыва связей следует уменьшать внешнюю нагрузку в соответствии с зависимостью (4.57) σ_m/P_0 от длины трещины до достижения длины трещины λ_f . Далее возможен переход к режиму квазистатического роста трещины с разрывом связей на краю концевой области и продвижением вершины трещины. С другой стороны, если трещина относительно длинная ($\lambda_1 > \lambda_f$ и $\sigma_{cr} < \sigma_m$), то возрастание внешней нагрузки до величины $\sigma_0 = \sigma_{cr}$ приводит к началу разрыва связей в центре трещины и формированию зоны, свободной от связей. Для поддержания режима квазистатического разрыва связей на краю концевой области без продвижения вершины трещины следует изменять внешнюю нагрузку в соответствии с зависимостью (4.48) σ_U/P_0 от длины трещины до достижения длины трещины λ_f . Далее возможен переход к режиму квазистатического роста трещины с разрывом связей на краю концевой области и продвижением вершины тре-

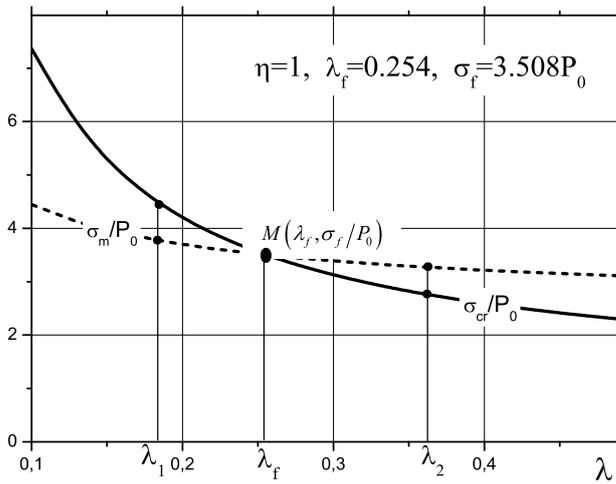


Рис. 4.4. Трещина, заполненная связями. Зависимости критических напряжений от длины начальной трещины, $\lambda = \ell/d_0$

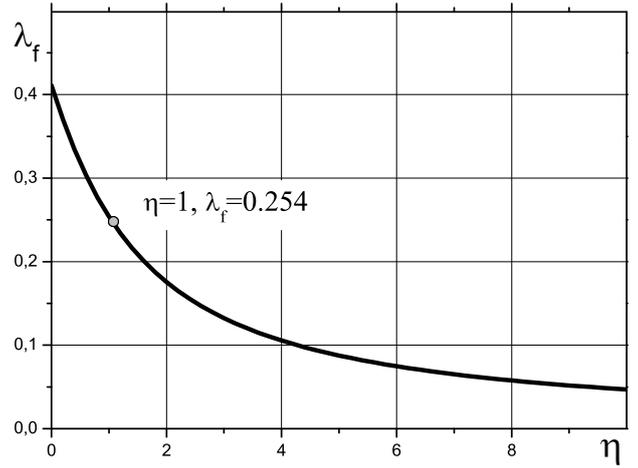


Рис. 4.5. Зависимость критической длины начальной трещины, $\lambda_f = \ell_f/d_0$ от относительной трещиностойкости адгезионного слоя, η

щины.

Определим критическое значение параметра $R_0 = R_f$, при котором $\sigma_{cr} = \sigma_m = \sigma_f$. Из равенств (4.56) и (4.57) (приравнивая выражения для σ_{cr} и σ_m) получаем квадратное уравнение относительно R_f :

$$R_f^2 - R_f [\pi + 2(\eta - 1)] - \pi = 0,$$

положительный корень которого

$$R_f = \frac{\pi}{2} \left[\left(1 + 2\frac{\eta - 1}{\pi} \right) + \sqrt{\left(1 + 2\frac{\eta - 1}{\pi} \right)^2 + \frac{4}{\pi}} \right] \quad (4.59)$$

Отметим, что при $\eta \gg 1$ из выражения (4.59) следует, что $R_f \sim 2\eta$.

При значении $R_0 = R_f$ получаем из соотношения (4.57)

$$\frac{\sigma_f}{P_0} = 1 + \frac{2R_f}{\pi} = 2 \left(1 + \frac{\eta - 1}{\pi} \right) + \sqrt{\left(1 + 2\frac{\eta - 1}{\pi} \right)^2 + \frac{4}{\pi}} \quad (4.60)$$

При $\eta = 1$ получаем $\sigma_f/P_0 = 3.508$ (см. точку М на рис. 4.4, $\lambda_f = 0.254$).

Заметим, что в рассматриваемом случае трещина представляет собой зону ослабленных связей в материале, а начальный разрез-трещина отсутствует. Таким образом, выражения (4.60) дают оценку прочности бездефектного материала – при отсутствии трещины-разреза.

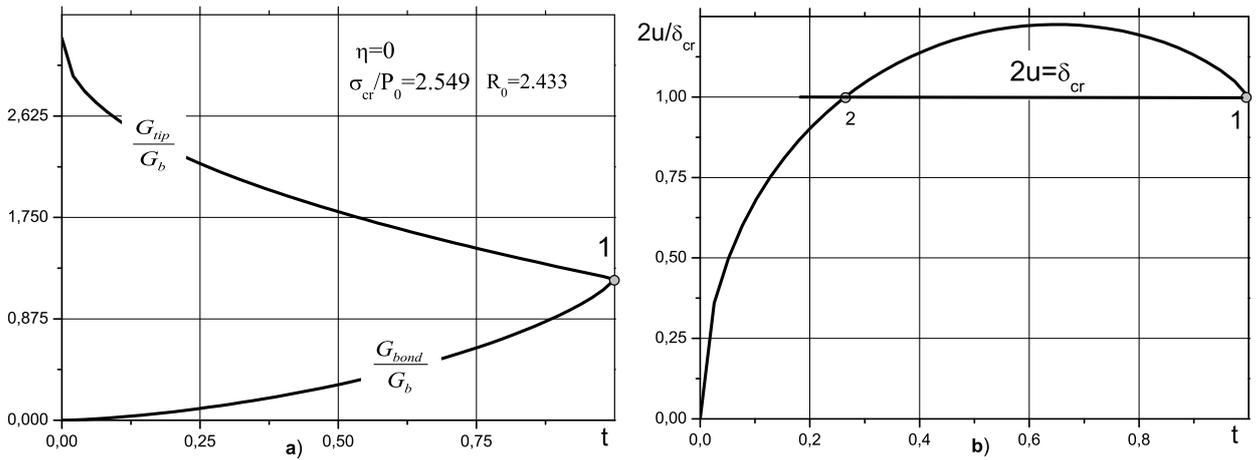


Рис. 4.6. Применение критерия разрушения для трещины, заполненной связями, $t = d/\ell$ - относительная длина концевой области. а): Скорость высвобождения энергии деформации и скорость потребления энергии связями, $d_{cr} = \ell$ - длина концевой области в состоянии предельного равновесия б): Раскрытие трещины на краю концевой области, условия критического раскрытия выполняется в точке 1; точка 2 - посторонний корень.

При фиксированных параметрах E , P_0 , δ_{cr} выражение (4.59) позволяет оценить длину (ℓ_f) начальной трещины, при которой возможно начало квазистатического роста трещины, заполненной связями, с выполнением условий (4.47) и (4.48)

$$\ell_f = \frac{\pi E \delta_{cr}}{8 P_0 R_f} \quad (4.61)$$

С другой стороны, возможен выбор параметров связей (δ_{cr} , P_0) таким образом, чтобы условие (4.61) выполнялось для трещины заданного размера.

Зависимость относительной длины начальной трещины ℓ_f/d_0 от параметра относительной трещиностойкости адгезионного слоя η приведена на рис. 4.5. Максимальное значение этой величины $\ell_f \approx 0.41d_0$ достигается при $\eta = 0$. Решение системы уравнений (4.47) и (4.48) существует, если дана трещина длины $\ell \geq \ell_f$ (квазистатический рост трещины), если $\ell < \ell_f$ то происходит докритический рост трещины, заполненной связями, с последующим переходом к режиму квазистатического роста.

Решение системы уравнений (4.47) и (4.48) в случае $\ell_f = 0.41d_0$ ($\eta = 0$, трещина критической длины, заполненная связями) показано на рис. 4.6. Положим, что длина трещины достаточно велика ($\ell > \ell_f$), чтобы выполнялись условия (4.30). Зависимость величины внешней нагрузки $\sigma_0 = \sigma_U$ от

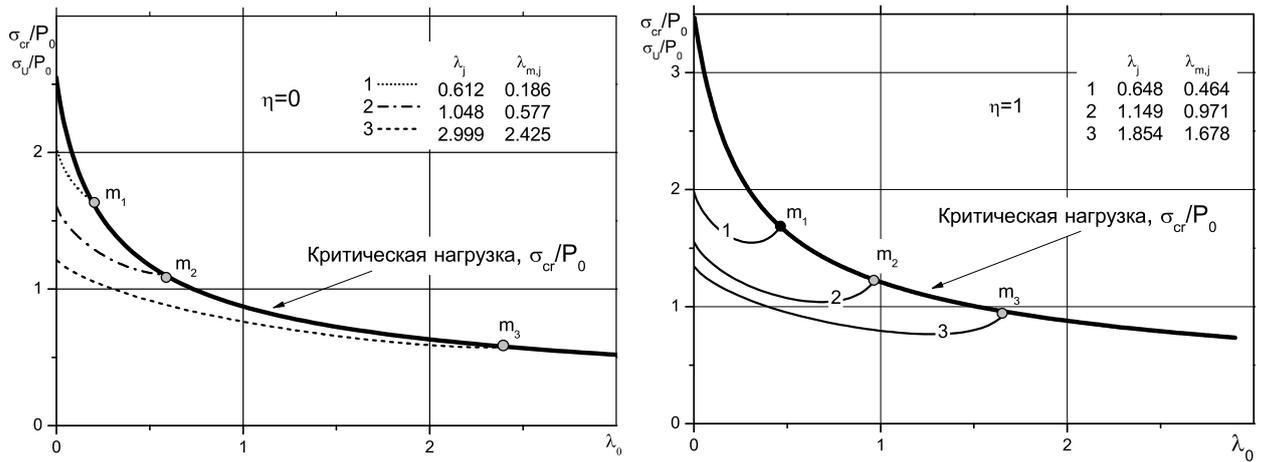


Рис. 4.7. Кривые докритического роста начальной трещины, заполненной связями, λ_j - начальная относительная длина разреза, $\lambda = \ell/d_0$

размера концевой области определяется в этом случае выражением (4.51):

$$\frac{\sigma_U}{P_0} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{R_0 + A(t)B(t) + C(t)}{B(t)} \right], \quad \frac{d_{cr}}{\ell} < t \leq 1 \quad (4.62)$$

Выражение (4.62) соответствует предположению, что для трещины, заполненной связями, разрыв связей начинается из её центра. При изменении величины внешней нагрузки, согласно выражению (4.62), происходит разрыв связей на краю концевой области без продвижения вершины трещины, размер концевой области сокращается, стремясь к предельному значению для данного уровня нагрузки, и при достижении критического размера концевой области происходит переход к режиму разрушения, который соответствует выполнению условий (4.47) и (4.48). Для случая монотонного нагружения трещины, полностью заполненной связями, зависимости докритической (4.62) и критической (соответствующей состоянию предельного равновесия) внешних нагрузок от относительной длины части трещины, свободной от связей (ℓ - длина трещины вместе с концевой областью):

$$\lambda_0 = \frac{\ell - d}{d_0}$$

показаны на рис. 4.7 для $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Кривые 1 – 3 соответствуют различным длинам начальной трещины, заполненной связями. Величина напряжений начала разрыва связей в центре трещины уменьшается при возрастании

длины трещины (см. (4.62) при $t = 1$)

$$\frac{\sigma_U}{P_0} = 1 + \frac{2d_0}{\pi\ell}$$

Например, кривая 1, определяемая уравнением (4.62), соответствует изменению внешней нагрузки от $\sigma_U/P_0 = 1.983$ до $\sigma_U/P_0 = 1.682$, необходимой для сокращения размера концевой области d в результате разрыва связей, от величины $d_1 = \ell_1$ до величины $d_1 = d_{cr,1}$ без изменения полной длины трещины ℓ , $\lambda_1 = \ell_1/d_0 = 0.648$). Параметр λ_0 в этом примере изменяется в пределах:

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_{m,1} = \frac{\ell_1 - d_{cr,1}}{d_0} = 0.464,$$

где $\lambda_{m,1}$ - относительный критический размер части трещины без связей для кривой 1.

В точке m_1 пересечения кривой 1 и кривой предельного равновесия, определяемой решением уравнений (4.47) и (4.48), размер концевой области достигает критической величины $d_{cr,1}$ и происходит переход к квазистатическому росту трещины (относительный размер концевой области $d_{cr,1}/d_0 = \lambda_1 - \lambda_{m,1} = 0.184$, см. также рис. 4.1a).

Изменение внешней нагрузки $\sigma_0 = \sigma_U$ при $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_m$ должно соответствовать квазистатическому процессу разрыва связей на краю концевой области трещины. При $\eta = 1$ эта функция достигает минимума при определенной длине концевой области трещины (например, кривая 1, рис. 4.7a). Такое изменение внешней нагрузки можно объяснить наличием максимума на зависимости раскрытия на краю концевой области трещины от размера концевой области. см., например, рис. 4.1b при $0.284 < t < 1$. В этом случае для трещины длиной $\ell = 0.648d_0$ внешняя нагрузка будет больше критической (соответствующей квазистатическому росту трещины, точка m_1) при $0.817 < t < 1$, а в диапазоне $0.284 < t \leq 0.817$ внешняя нагрузка для разрыва связей будет меньше, чем критическая.

4.2.3. Квазистатический рост трещины со связями в концевой области

Критический размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия может быть получен как из системы уравнений (4.47) и (4.48), так и из выражений (4.51) и (4.54). Внешние нагрузки, определенные в состоянии предельного равновесия из кинематического (4.51) и энергетического (4.54) условий, должны совпадать. Соответствующее уравнение получаем, приравнивая выражения для напряжений (4.51) и (4.54):

$$B(t) \sqrt{A^2(t) + B^2(t) + 4C(t) + 2\eta R_0} = R_0 + C(t) - B(t) [A(t) - B(t)] \quad (4.63)$$

Уравнение (4.63) можно рассматривать как нелинейное алгебраическое уравнение для определения относительной величины концевой области трещины $t = t_{cr}$ (параметры R_0 и η заданы) и оно может быть решено только численно. С другой стороны, из уравнения (4.63) при заданном значении параметра η можно найти величину $R_0 = R_{cr}$, соответствующую $t = t_{cr}$,

$$R_{cr}(t) = \Sigma(t) + \sqrt{\Sigma^2(t) + \Psi(t)}, \quad (4.64)$$

где

$$\Sigma(t) = B(t) [A(t) - B(t) (1 - \eta)] - C(t)$$

$$\Psi(t) = B^2(t) [A^2(t) + B^2(t) + 4C(t)] - [C(t) - B(t) (A(t) - B(t))]^2$$

Длину трещины, соответствующую параметру t_{cr} , и размер концевой области в состоянии предельного равновесия определяем после вычисления из выражения (4.64) параметра $R_{cr}(t_{cr})$ (см. определение R_0 в (4.49)):

$$\frac{d_{cr}}{d_0} = \frac{t_{cr}}{R_{cr}(t_{cr})} \quad (4.65)$$

Таким образом, выражение (4.65) дает аналитическое решение для длины концевой области трещины в состоянии предельного равновесия без дополнительного ограничения $d \ll \ell$ (см. [18], решение для малых d). Зависимости длины концевой области трещины в состоянии предельного равновесия

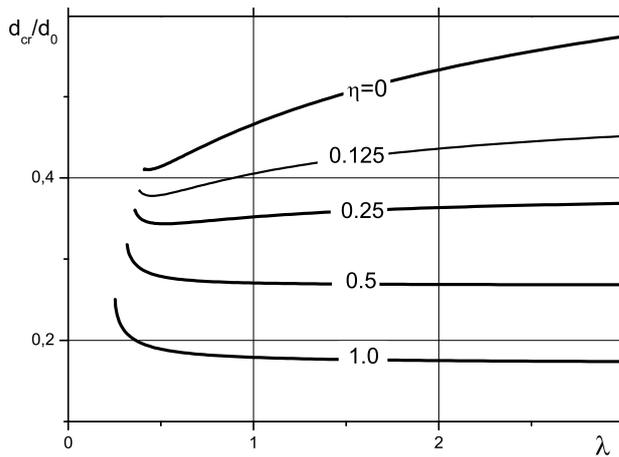


Рис. 4.8. Зависимость длины концевой области трещины в состоянии предельного равновесия от длины трещины, $\lambda = \ell_{cr}/d_0$

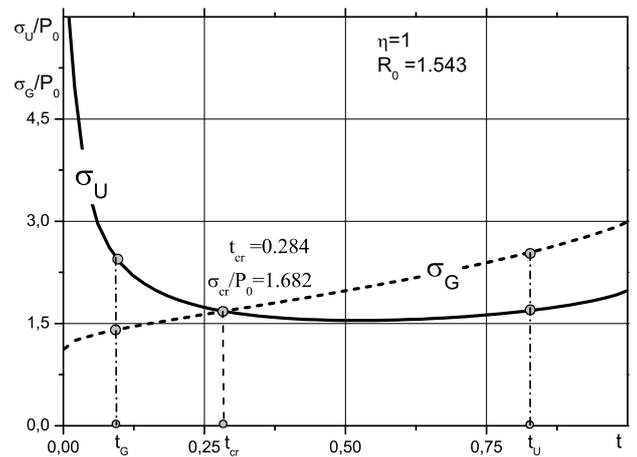


Рис. 4.9. Зависимости критических напряжений σ_U и σ_G от длины концевой области трещины, $t = d/\ell$

d_{cr}/d_0 от длины трещины $\lambda = \ell_{cr}/d_0$ (можно записать также $\lambda = 1/R_{cr}$), полученные из соотношений (4.65), приведены на рис. 4.8 для разных значений параметра η . При относительно большой трещиностойкости матрицы ($\eta \geq 1/2$) длина концевой области трещины в состоянии предельного равновесия уменьшается с увеличением длины трещины и быстро стремится к предельному, не зависящему от длины трещины, значению. При относительно малой трещиностойкости матрицы ($0 < \eta < 1/2$) длина концевой области трещины в состоянии предельного равновесия незначительно уменьшается при относительно коротких трещинах и далее возрастает, стремясь предельному значению, не зависящему от длины трещины. Если трещиностойкостью матрицы можно пренебречь ($\eta = 0$), то размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия увеличивается при возрастании длины трещины, стремясь к постоянной величине $d_{cr}/d_0 = 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Заметим, что случай $\eta = 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ аналогичен модели Леонова-Панасюка [14], в которой критический размер концевой области уменьшается при возрастании длины трещины, стремясь к такому же предельному значению.

Рассмотрим далее рост трещины полудлины ℓ с концевой областью произвольного размера $0 < d_i < \ell$ (трещина частично заполнена связями).

Значения параметров R_0 и η полностью определяют решение задачи о предельном равновесии трещины. Характер развития трещины при монотонном нагружении изменяется в зависимости от соотношения между заданным размером концевой области d и критическим размером этой области в состоянии предельного равновесия d_{cr} . Анализ развития трещины в этом случае выполним с использованием зависимостей (4.51) и (4.54), см. рис. 4.9.

Если задан размер концевой области трещины d_U , такой, что (полагаем, что $\ell \geq \ell_f$ и решение системы уравнений (4.47) и (4.48) существует)

$$d_{cr} < d_U \leq \ell, \quad (t_{cr} < t_U \leq 1) \quad (4.66)$$

то $\sigma_U < \sigma_G$ (см. рис. 4.9), и при величине внешней нагрузки $\sigma_0 = \sigma_U$ выполняются условия (4.30), происходит разрыв связей на краю концевой области, и размер концевой области трещины сокращается без продвижения вершины трещины. При достижении критического размера концевой области происходит переход к квазистатическому режиму разрушения, описываемому условиями (4.27)-(4.28).

Если же задан размер концевой области трещины d_G , такой, что

$$0 \leq d_G < d_{cr}, \quad (0 \leq t_G < t_{cr}), \quad (4.67)$$

то $\sigma_U > \sigma_G$ (см. рис. 4.9) и при величине внешней нагрузки $\sigma_0 = \sigma_G$ выполняются условия (4.29) - происходит продвижение вершины трещины без разрыва связей на краю концевой области, длина трещины и размер ее концевой области возрастают. При достижении критических размеров трещины и концевой области происходит переход к квазистатическому режиму разрушения, описываемому условиями (4.27)-(4.28).

Критическая длина трещины, до которой происходит продвижение вершины начальной трещины, определяется в этом случае из уравнения, аналогичного (4.63). Пусть в результате квазистатического развития до состояния предельного равновесия длина трещины увеличилась на Δd и достигла вели-

чины $\ell_n = \ell + \Delta d$, а длина концевой области соответственно достигла величины $\bar{d}_{cr} = d_i + \Delta d$. Тогда относительный размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия:

$$\bar{t}_{cr} = \frac{\bar{d}_{cr}}{\ell_n} = \frac{d_G + \Delta d}{\ell + \Delta d} = \frac{t_G + \xi}{1 + \xi}, \quad (4.68)$$

где $t_G = d_G/\ell$ - относительная длина концевой области трещины до начала нагружения (см. второе условие (4.67)), $\xi = \Delta d/\ell$ - приращение длины концевой области, нормированное начальной длиной трещины. Исходной трещине длины ℓ и трещине длины $\ell_n = \ell + \Delta d$ соответствуют параметры R_0 и R_n :

$$R_0 = \frac{\pi E \delta_{cr}}{8 P_0 \ell}, \quad R_n = \frac{\pi E \delta_{cr}}{8 P_0 (\ell + \Delta d)} = \frac{R_0}{1 + \xi} \quad (4.69)$$

Подставляя в уравнение (4.63) $t = \bar{t}_{cr}$ из (4.68), и заменяя параметр R_0 на R_n , согласно (4.69), получаем уравнение для определения параметра ξ :

$$\begin{aligned} B(\bar{t}_{cr}(\xi)) \sqrt{A^2(\bar{t}_{cr}(\xi)) + B^2(\bar{t}_{cr}(\xi)) + 4C(\bar{t}_{cr}(\xi)) + 2\eta \frac{R_0}{1 + \xi}} = \\ = \frac{R_0}{1 + \xi} + C(\bar{t}_{cr}(\xi)) - B(\bar{t}_{cr}(\xi)) [A(\bar{t}_{cr}(\xi)) - B(\bar{t}_{cr}(\xi))] \end{aligned} \quad (4.70)$$

После определения параметра ξ из этого уравнения находим приращение длины концевой области (и трещины) Δd и длину трещины ℓ_n после квазистатического подрастания:

$$\Delta d = \xi \ell, \quad \ell_n = \ell(1 + \xi)$$

а относительную длину концевой области трещины определяем из соотношения (4.68). Рассмотрим пример.

Пример. Имеется трещина длины 2ℓ , которой соответствует параметр $R_0 = 1.543$ (см. рис. 4.1ab). При этой величине параметра R_0 относительный размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия составляет $t_{cr} = d_{cr}/\ell = 0.284$. Пусть фактически заданный начальный размер концевой области трещины $t_i = d_i/\ell = 0.1 < t_{cr}$, рис. 4.9. При монотонном

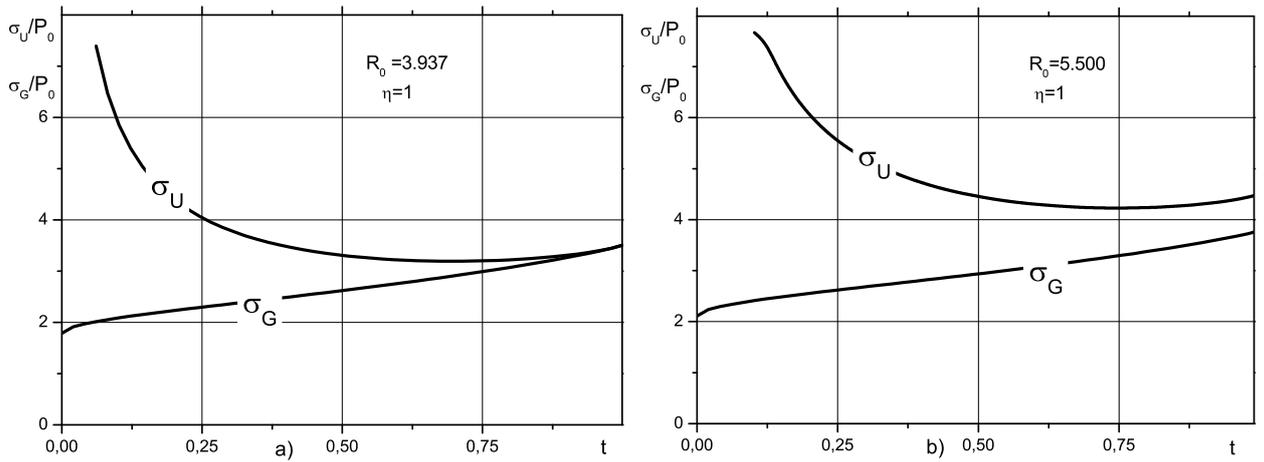


Рис. 4.10. Зависимости критических напряжений σ_U и σ_G от длины концевой области трещины для случая $\ell \leq \ell_f$, $t = d/\ell$

нагрузении продвижение вершины трещины ($\sigma_G < \sigma_U$ при $t_i = 0.1$) начинается при $\sigma_G/P_0 = 1.418$ (это значение находим из уравнения (4.54) при $R_0 = 1.543$, $t = t_i = 0.1$). Относительное изменение длины трещины ξ (после продвижения вершины трещины до состояния предельного равновесия) определяется из решения уравнения (4.70), а остальные параметры определяются из соотношений (4.68)-(4.69):

$$\xi = \frac{\Delta d}{\ell} = 0.181, \quad R_n = \frac{R_0}{1 + \xi} = 1.307, \quad \bar{t}_{cr} = \frac{\bar{d}_{cr}}{\ell_n} = \frac{t_G + \xi}{1 + \xi} = 0.238$$

В итоге, после продвижения вершины трещины, длина трещины и размер концевой области в состоянии предельного равновесия:

$$\ell_n = \ell(1 + \xi) = 1.181\ell, \quad \Delta d = \xi\ell = 0.181\ell$$

Критическая внешняя нагрузка в состоянии предельного равновесия после подрастания трещины составляет $\sigma_{cr}/P_0 = 1.53$ (это значение может быть получено как из уравнения (4.51), так и (4.54) при $R_0 = 1.307$, $t = \bar{t}_{cr} = 0.238$). Если $\ell \leq \ell_f$, то при любой величине концевой области трещины будет происходить докритический рост трещины за счет продвижения вершины трещины без разрыва связей. Зависимости (4.51) и (4.54) для двух длин трещин $\ell_2 < \ell_f$ ($R = 5.500$) и $\ell_1 = \ell_f$ ($R = 3.937$) приведены на рис. 4.10. Например, если при $R = 5.500$ начальная трещина заполнена связями частично,

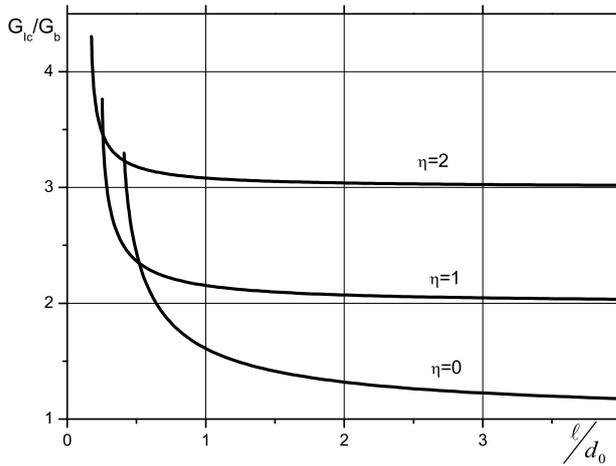


Рис. 4.11. Зависимость "наблюдаемой" трещиностойкости от длины трещины, $\lambda = \ell/d_0$

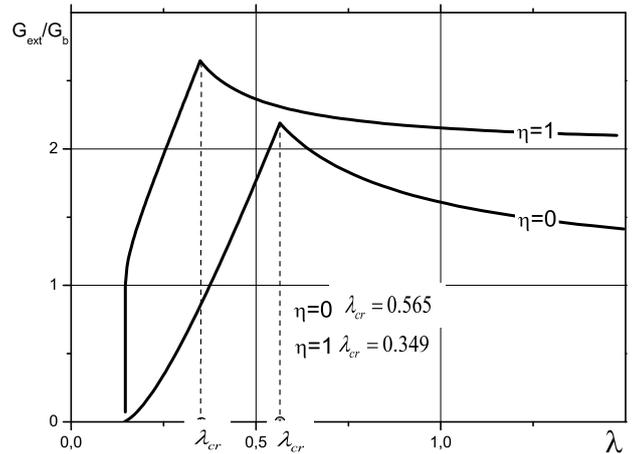


Рис. 4.12. Зависимость "наблюдаемого" потока энергии от длины трещины, $\lambda = \ell/d_0$

то при монотонном нагружении так, что внешняя нагрузка изменяется согласно уравнению (4.54) ($\sigma_0 = \sigma_G$), происходит докритическое увеличение длины трещины до достижения состояния предельного равновесия. Параметр t в уравнении (4.54) определяется аналогично (4.68) $t = (t_0 + \xi)/(1 + \xi)$, здесь $t_0 = d/\ell$ - относительная длина концевой области до начала нагружения, ξ - текущее приращение длины трещины. Новое значение параметра R_0 и величина подрастания трещины определяются из уравнений (4.68)-(4.70). Например, при $t_0 = (d/\ell) = 0.5$ (см. рис. 4.10а) величина подрастания трещины определяется из уравнения (4.70) и составляет $\xi = \Delta d\ell = 0.666$, из (4.69) получаем $R_n = 3.301$, а из (4.68) получаем $\bar{t}_{cr} = 0.700$. Величина внешней нагрузки при достижении этого состояния предельного равновесия составляет $(\sigma_0/P) = 2.768$. "Наблюдаемую" трещиностойкость материала K_{Ic} и соответствующую ей критическую величину - удельную энергию разрушения G_{Ic} определяем как:

$$K_{Ic}(\ell) = \sigma_{cr}(\ell) \sqrt{\pi\ell}, \quad G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad (4.71)$$

Эти величины вычисляются после решения системы уравнений (4.47) и (4.48). В данном случае параметры (4.71) не являются постоянными материала и зависят от длины трещины. Значения G_{Ic}/G_b (см. определение

G_b в (4.49)) представлены на рис. 4.11. При возрастании длины трещины $\lambda = \ell/d_0$ удельная энергия разрушения стремится к постоянной величине $G_b + G_m$, определяемой свойствами связей в концевой области трещины и материалом матрицы.

"Наблюдаемый" поток энергии в вершину трещины в процессе ее квазистатического роста вычисляется аналогично (4.71) для соответствующих значений напряжений (см. рис. 4.3 и рис. 4.7). Такие кривые для случая роста трещины из начального разреза без связей приведены на рис. 4.12 для $\eta = 0 \lambda_1 = 0.144 \lambda_{cr} = 0.565$ (см. рис. 4.3) и $\eta = 1 \lambda_1 = 0.147 \lambda_{cr} = 0.349$ (см. рис. 4.7). Отметим, что при $\eta = 1$ поток энергии в вершину трещины не меняется до начала продвижения вершины трещины.

Рассмотренные выше случаи развития трещины из начального разреза и зоны ослабленных связей позволяют описать поведение трещины с концевой областью при монотонном нагружении.

4.3. Анализ предельных случаев. Сопоставление критериев разрушения

В в данном разделе рассмотрена модель когезионного типа (случай "идеально слабого" интерфейса, (см. (4.24), $\eta = 0$). Для трещины с концевой областью, размер которой мал по сравнению с длиной трещины, и постоянных усилий в связях получены асимптотические выражения для уравнений нелокального критерия разрушения. Для задачи с постоянными усилиями в концевой области трещины выполнен также сравнительный анализ предложенного выше критерия разрушения для трещины со связями в концевой области (далее - энергетический критерий) и критерия разрушения с силовым условием продвижения вершины трещины [18] (далее - силовой критерий).

4.3.1. Модели когезионного типа

Рассмотрим на примере задачи о прямолинейной трещине в пластине (см. раздел (4.2)) модель Леонова-Панасюка-Дагдейла (ЛПД) как вариант модели когезионного типа с постоянными напряжениями в связях.

В модели ЛПД [13–15] полагается, что напряжения в вершине трещины ограничены, что эквивалентно равенству нулю коэффициента интенсивности напряжений. Полагая в (4.41) $K = 0$, получаем соотношение, связывающее внешнюю нагрузку σ_0 и напряжения P_0 в концевой области трещины:

$$\frac{\sigma_0}{P_0} = \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{d}{\ell} \right) \quad (4.72)$$

Соотношение (4.72) получено в [14], стр.34, непосредственно из условия ограниченности напряжений в вершине трещины. Заметим, что использование условия для КИН в качестве условия ограниченности напряжений позволяет рассматривать в рамках модели ЛПД задачи с изменяющимися вдоль концевой области напряжениями [20, 199, 286].

В модели ЛПД обычно полагается известным размер свободной от связей части трещины h , а размер концевой области d , в которой берега трещины взаимодействуют, определяется из решения задачи при наложении дополнительных условий. Таким образом, при рассмотрении концевой области как части трещины, полная длина трещины $\ell = h + d$.

Выражение (П.49) для перемещений верхнего берега трещины принимает, с учетом (4.72), вид ($h = \ell - d$):

$$u_0(x) = \frac{P_0}{\pi E} [(x - h) F(\ell, x, h) - (x + h) F(\ell, x, -h)] \quad (4.73)$$

Следствием условия (4.72) является плавное смыкание противоположных берегов трещины в ее вершине.

Условием разрыва связей на краю концевой области в модели ЛПД является достижение раскрытием трещины критического значения δ_{cr} :

$$2u_0(\ell - d) = \delta_{cr} \quad (4.74)$$

Полагая в выражении (4.73) $x = \ell - d$, получаем:

$$2u_0(\ell - d) = -(\ell - d) \frac{8P_0}{\pi E} \ln \frac{\ell - d}{\ell} \quad (4.75)$$

Пусть начальный размер части трещины, свободной от связей, задан, т.е. задана величина $h = \ell - d$. Тогда из (4.74)-(4.75) получим:

$$\delta_{cr} = -h \frac{8P_0}{\pi E} \ln \frac{h}{\ell} \quad (4.76)$$

Условие (4.72) дает:

$$\cos \frac{\pi \sigma_0}{2P_0} = \frac{h}{\ell} \quad (4.77)$$

Подставив (4.77) в (4.76), получим:

$$\ln \left(\cos \frac{\pi \sigma_0}{2P_0} \right) = -\frac{d_0}{h}, \quad (4.78)$$

где параметр d_0 определен выражением (4.49).

Из условия (4.78) следует выражение для критической внешней нагрузки:

$$\sigma_{cr} = \frac{2}{\pi} P_0 \arccos \left[\exp \left(-\frac{d_0}{h} \right) \right] \quad (4.79)$$

Зависимость критической внешней нагрузки (4.79) от длины трещины $\ell = h + d$, нормированной параметром d_0 , приведена на рис. 4.13 (кривая 1).

Размер концевой области трещины $d_{cr} = \ell - h$, образующейся при выполнении условия (4.74), находим из выражения (см. (4.76)):

$$\ln \left(\frac{h}{d_{cr} + h} \right) = -\frac{d_0}{h} \quad (4.80)$$

Получаем:

$$d_{cr} = h \left(\exp \frac{d_0}{h} - 1 \right) \quad (4.81)$$

Если параметр d_0/h достаточно велик (это возможно, например, при малых значениях h), то $d_{cr} \gg h$. При $h \rightarrow 0$ из (4.79) следует, что $\sigma_{cr} \rightarrow P_0$, т.е. тело без трещины имеет конечную прочность. Заметим, что прямое моделирование трещин, полностью заполненных связями ($h = \ell - d = 0$), при

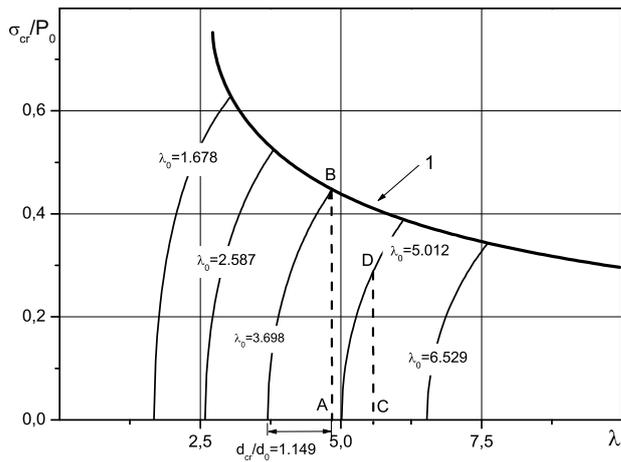


Рис. 4.13. Кривые докритического роста и предельного равновесия трещины в модели ЛПД, $\lambda = \ell/d_0$

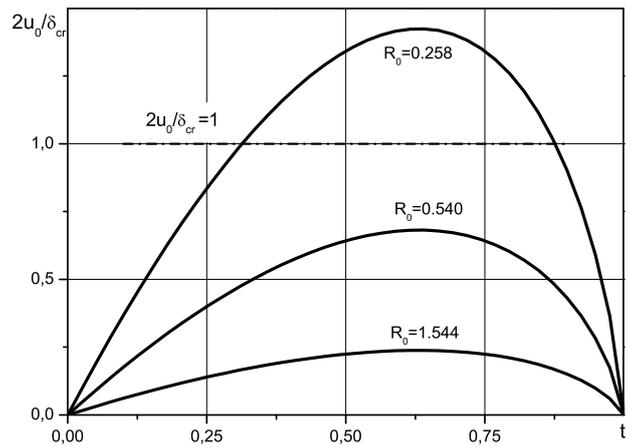


Рис. 4.14. Зависимость раскрытия трещины на краю концевой области от длины концевой области, $t = d/\ell$

постоянных напряжениях в концевой области в модели ЛПД невозможно, т.к. при $h = 0$ из решения (4.73) следует, что раскрытие трещины при этом равно нулю.

В модели ЛПД при монотонном нагружении тела с начальным разрезом, свободным от связей, выполняется условие (4.72), т.е. при любом малом увеличении нагрузки происходит образование концевой области-зоны ослабленных связей. Если при этом раскрытие на краю концевой области не превышает критического значения, то величина внешней нагрузки и размер концевой области связаны уравнением (4.72). Это - докритический этап роста трещины. При выполнении условия (4.74) внешняя нагрузка достигает критической величины, и для последующего квазистатического развития трещины необходимо уменьшать нагрузку так, чтобы при росте трещины выполнялось уравнение (4.79). Кривые докритического роста трещины (уравнение (4.72)) для различных значений начальной длины трещины без связей h_0 ($d = 0$, $\ell_0 = h_0$, $\lambda_0 = \ell_0/d_0$) приведены на рис. 4.13. Точки пересечения кривых докритического роста трещины с кривой 1 соответствуют состояниям предельного равновесия трещин различной начальной длины.

Если имеется начальная трещина с концевой зоной заданного разме-

ра d_m , то из выражений (П.49)-(П.51) следует, что при малых значениях внешней нагрузки наблюдается перехлест берегов трещины. Пусть $d_m = d_{cr}$ (см.(4.81)). В этом случае, при возрастании внешней нагрузки до величины σ_{cr} (см. уравнение (4.79)), вершина трещины остается неподвижной (при этом $2u(\ell - d_m) < \delta_{cr}$ и $K < 0$) до совместного выполнения условий (4.72) и (4.74) и этап докритического подрастания отсутствует. (см. рис. 4.13, участок нагружения А-В). Если же $d_m < d_{cr}$, то вершина трещины остается неподвижной до выполнения условия $K = 0$ (см. рис. 4.13, участок нагружения С-Д), а величина внешней нагрузки σ_m , соответствующая выполнению этого условия, определяется из (4.72) (полагаем, что размер трещины без связей h задан):

$$\sigma_m = \frac{2P_0}{\pi} \arccos\left(\frac{h}{h + d_m}\right) \quad (4.82)$$

Для $d_m \ll h$ из (4.82) получаем:

$$\sigma_m = \frac{2P_0}{\pi} \sqrt{2t}, \quad t = \frac{d_m}{h + d_m} \quad (4.83)$$

При нагрузках $\sigma_m < \sigma_0 < \sigma_{cr}$ происходит докритическое подрастание трещины, размер концевой области возрастает (полагаем, что внешняя нагрузка изменяется согласно уравнению (4.82)) до выполнения условия (4.74). Если же $d_m > d_{cr}$, то критическое раскрытие на краю концевой области достигается раньше, чем выполняется условие (4.72). В таком случае при выполнении условия (4.74) начинается разрыв связей на краю концевой области и размер концевой области сокращается. При дальнейшем увеличении нагрузки, согласно уравнению (4.72), достигается новое состояние предельного равновесия при значении $h_1 > h$.

При малых значениях d_0/h (т.е. при $h \rightarrow \infty$ - большом размере начальной трещины) из (4.79) получаем выражение для критической нагрузки [14]:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{E P_0 \delta_{cr}}{\pi h}}, \quad (4.84)$$

совпадающее с результатом, следующим из критерия Гриффитса, при величине удельной поверхностной энергии материала равной

$$G_0 = P_0 \delta_{cr} \quad (4.85)$$

В рамках модели ЛПД гипотеза автономности концевой области выполняется при $h \rightarrow \infty$: размер концевой области трещины не зависит от длины начальной трещины и стремится к величине d_0 :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} d_{cr} = d_0 = \frac{\pi E \delta_{cr}}{8 P_0} \quad (4.86)$$

Рассмотрим условие существования концевой области трещины d_{cr} в рамках модели ЛПД, полагая, что заданным параметром является не длина части трещины без связей h , а полная длина трещины ℓ , включающая в себя также и концевую область. Из (4.74)-(4.75) при $h = \ell - d$ и $t = d/\ell$ получаем зависимость относительного раскрытия трещины на краю концевой области от длины концевой области трещины:

$$\frac{2u_0(1-t)}{\delta_{cr}} = -\frac{(1-t)\ln(1-t)}{R_0}, \quad t = \frac{d}{\ell}, \quad R_0 = \frac{d_0}{\ell} \quad (4.87)$$

Зависимости раскрытия трещины на краю концевой области (4.87) от относительной длины концевой области $t = d/\ell$ для различных значений параметра R_0 приведены на рис. 4.14. Раскрытие трещины на краю концевой области достигает критического значения, если

$$2u_0(1-t_{cr}) = \delta_{cr}$$

Последнее условие с использованием (4.87) приводится трансцендентному уравнению (при заданной длине трещины $R_0 = const$)

$$-(1-t_{cr})\ln(1-t_{cr}) = R_0 \quad (4.88)$$

Функция в левой части уравнения (4.88) достигает максимального значения $\exp(-1)$ при $t_{cr} = 1 - \exp(-1)$, и уравнение (4.88) имеет решение при

выполнении условия:

$$R_0 \leq R_m = \exp(-1) \approx 0.368 \quad (4.89)$$

Если $R_0 < R_m$, то уравнение (4.88) имеет два решения, причем меньшей концевой области соответствует меньшая величина критической внешней нагрузки, определяемая либо из выражения (4.72), либо из уравнения, получаемого подстановкой (4.77) в (4.87) при условии $h = \ell - d_{cr}$:

$$R_0 = -\cos \xi \ln(\cos \xi), \quad \xi = \pi \sigma_0 / 2P_0 \quad (4.90)$$

Отсутствие решения уравнения (4.90) означает (при выполнении условия (4.72)), что длина трещины ℓ мала и ни при каких значениях размера концевой области невозможно выполнение условия (4.74). В этом случае будет происходить докритический рост трещины до выполнения условия:

$$-(1 - t_{cr}) \ln(1 - t_{cr}) = \frac{\pi E \delta_{cr}}{8P_0 \ell_{cr}} = R_m,$$

из которого можно определить критическую длину трещины, при которой возможно существование концевой области в рамках модели ЛПД.

4.3.2. Трещина с малой концевой областью

Уравнения (4.47) и (4.48) при $t \rightarrow 0$ ($A(t) \approx \sqrt{2t}$, $B(t) \approx \sqrt{2t}$, $C(t) \approx -t$) принимают вид:

$$(Z_0 \xi)^2 - 2Z_0 \xi - 2\eta R_0 Z_0^2 + 1 = 0, \quad Z_0(0.5\xi^2 + R_0) - \xi = 0, \quad (4.91)$$

где $\xi = \sqrt{2d/\ell}$ и Z_0 определено в (4.41).

Из уравнений (4.91) получаем:

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{2R_0(1+\eta)}} \quad (4.92)$$

Подставляя (4.92) во второе уравнение в (4.91), получаем уравнение для определения параметра $\xi = \sqrt{2d/\ell}$

$$\xi^2 - 2\xi \sqrt{2R_0(1+\eta)} + 2R_0 = 0, \quad (4.93)$$

откуда

$$t = 0.5\xi^2 = R_0 \left(\sqrt{\eta + 1} - \sqrt{\eta} \right)^2 \quad (4.94)$$

Из выражения (4.94) следует, что для трещин с малой концевой областью критический размер концевой области d_{cr} не зависит от длины трещины:

$$d_{cr} = t\ell = d_0 \left(\sqrt{\eta + 1} - \sqrt{\eta} \right)^2, \quad (4.95)$$

где d_0 определено в (4.49).

Критическую внешнюю нагрузку в состоянии предельного равновесия для трещины с малой концевой областью получаем из соотношения (4.92):

$$\sigma_{cr} = \sqrt{(1 + \eta) \frac{EP_0\delta_{cr}}{\pi\ell}} = \sqrt{\frac{E(G_b + G_m)}{\pi\ell}} \quad (4.96)$$

Выражение (4.54) для докритической нагрузки при $t \rightarrow 0$ принимает вид:

$$\frac{\sigma_0}{P_0} = \frac{2}{\pi} \left[\sqrt{2t} + \sqrt{2\eta R_0} \right], \quad t = \frac{d}{\ell} \quad (4.97)$$

При $\eta \rightarrow \infty$ (трещиностойкость матрицы много больше трещиностойкости волокон, $G_m \gg G_b$) из выражения (4.95) получаем:

$$d_\infty = d_\eta = \frac{d_0}{4\eta} = \frac{\pi E \delta_{cr} G_b}{32 P_0 G_m} = \frac{\pi E \delta_{cr}^2}{32 G_m} \quad (4.98)$$

Величина критической внешней нагрузки σ_η определяется из (4.96):

$$\sigma_{cr} = \sigma_\eta = \sqrt{\frac{EG_m}{\pi\ell}} \quad (4.99)$$

Отметим, что выражения (4.95) и (4.96) для размера концевой области и величины внешней нагрузки совпадают с соответствующими выражениями, полученными в [18] с использованием силового критерия разрушения для трещины с малой концевой областью. Кроме того, при $\eta = 0$ (трещиностойкость матрицы мала) выражения (4.95) и (4.96) совпадают с полученными ранее для модели ЛПД - (4.86) и (4.84), соответственно.

Рассмотрим энергетические характеристики и энергетический баланс в вершине трещины в состоянии предельного равновесия. Скорость потребления энергии деформации связями (4.45) при $t \rightarrow 0$ будет ($\varphi(t) \rightarrow 0$)

$$G_{bond}(d_{cr}, \ell) = G_m \quad (4.100)$$

С другой стороны, исходя из выражения (4.23), записанного для однородного материала, можно при постоянных напряжениях в связях записать:

$$G_{bond}(d_{cr}, \ell) = 2P_0 \int_{\ell-d_{cr}}^{\ell} \frac{\partial u(x)}{\partial \ell} dx - G_b + G_m, \quad G_b = \int_0^{\delta_{cr}} q_y(u) du = P_0 \delta_{cr} \quad (4.101)$$

Из (4.100) и (4.101) следует что

$$2P_0 \int_{\ell-d_{cr}}^{\ell} \frac{\partial u(x)}{\partial \ell} dx = \int_0^{\delta_{cr}} q_y(u) du, \quad (4.102)$$

т.е. при малой концевой области трещины в состоянии предельного равновесия скорость потребления энергии связями равна скорости выделения энергии при разрыве связей на краю концевой области.

Скорость высвобождения энергии деформации в состоянии предельного равновесия трещины определяется из (4.40):

$$G_{tip}(d, \ell) = \frac{\sigma_{cr}^2 \pi \ell}{E} (1 - Z_0 \arccos(1 - t))^2$$

При малом размере концевой области получаем:

$$G_{tip}(d_{cr}, \ell) = \frac{\sigma_{cr}^2 \pi \ell}{E} \left(1 - \frac{2P_0}{\pi \sigma_{cr}} \sqrt{\frac{2d_{cr}}{\ell}} \right)^2 \quad (4.103)$$

Подставляя в (4.103) значения d_{cr} и σ_{cr} из (4.95) и (4.96) при $\eta = 0$, получаем

$$G_{tip}(d, \ell) = \frac{(K_{\infty} - K_b)^2}{E} = 0,$$

что дает

$$K_{\infty} - K_b = 0 \quad (4.104)$$

Таким образом, при малом размере концевой области и пренебрежении трещиностойкостью матрицы, двухпараметрический критерий разрушения приводит к выражению (4.104), которое является исходным предположением в когезионных моделях ЛПД и Г.И.Баренблатта. И, соответственно, в этом случае имеет место плавное смыкание берегов трещины, являющееся следствием условия (4.72).

Полный поток энергии в вершину и концевую область трещины определяем аналогично (4.71) и с учетом (4.96):

$$G_{ext} = \frac{\sigma_{cr}^2 \pi \ell}{E} = G_b + G_m \quad (4.105)$$

Из (4.102) и (4.105) следует, что при $\eta = 0$ и квазистатическом росте трещины внешний поток энергии $G_{ext} = P_0 \delta_{cr}$ расходуется на деформирование связей в концевой области трещины и эта энергия высвобождается при разрыве связей на краю концевой области, т.е. энергия полностью расходуется на образование новой поверхности трещины. Так как размер и форма концевой области трещины не изменяются, то в этом случае выполняется условие автономности концевой области.

При учете трещиностойкости матрицы ($\eta \neq 0$) из (4.105) получаем:

$$G_{bond}(d_{cr}, \ell) = G_m, \quad (4.106)$$

а выражение (4.103) в этом случае дает:

$$G_{tip}(d_{cr}, \ell) = \frac{(K_\infty - K_b)^2}{E} = \eta G_b = G_m \quad (4.107)$$

Из (4.107) следует силовое условие разрушения [18]

$$K_\infty - K_b = K_{Ic}, \quad K_{Ic} = \sqrt{EG_m} \quad (4.108)$$

Внешний поток энергии (4.105) полностью расходуется на образовании новой поверхности трещины при разрыве связей в концевой области и разрыве материала матрицы. Так как размер и форма концевой области трещины не

изменяются, то в этом случае также выполняется условие автономности концевой области.

4.3.3. Сопоставление силового и энергетического критериев роста трещин

Сравнительный анализ рассмотренного выше нелокального критерия разрушения (далее - энергетический критерий) и нелокального критерия разрушения с силовым условием роста трещины [18] (далее - силовой критерий) выполнен для задачи с постоянными напряжениями в концевой области трещины.

Применение энергетического критерия разрушения сводится к совместному решению уравнений (4.47) и (4.48). Решение этой системы позволяет определить критические значения величины внешней нагрузки σ_{cr} и размера концевой области d_{cr} для трещины заданной длины в состоянии предельного равновесия. Альтернативный подход состоит в определении, при заданной относительной длине концевой области, из уравнения (4.63), соответствующего состоянию предельного равновесия, параметра R_{cr} .

Получим аналогичные уравнения для двухпараметрического силового критерия разрушения при постоянных напряжениях в концевой области трещины. Первое (силовое) условие разрушения этого критерия имеет вид (4.108). Полагаем, что это условие справедливо теперь при любой длине концевой области трещины. Второе условие критерия разрушения совпадает с условием (4.13).

Используя (4.41), получаем из (4.13):

$$\frac{1}{Z_0} - A(t) = \frac{K_{Ic}}{2P_0} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}}, \quad t = \frac{d}{\ell}, \quad (4.109)$$

где использованы обозначения (4.41) и (4.46).

Учитывая, что при постоянных напряжениях в связях (см. (4.41))

$$K_{Ic} = \sqrt{EG_m} = \sqrt{\eta EG_b} = \sqrt{\eta EP_0 \delta_{cr}}, \quad (4.110)$$

получаем:

$$\frac{K_{Ic}}{2P_0} \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} = \sqrt{2\eta R_0}, \quad R_0 = \frac{\pi E \delta_{cr}}{8P_0 \ell}$$

В итоге, имеем систему уравнений (см. обозначения в (4.41) и (4.46)):

$$\frac{1}{Z_0} - A(t) = \sqrt{2\eta R_0}, \quad \frac{B(t)}{Z_0} - [A(t)B(t) + C(t)] = R_0 \quad (4.111)$$

Первое уравнение в (4.111) является следствием (4.109), а второе - повторяет уравнение (4.48). Из системы уравнений (4.111) могут быть определены критические значения величины внешней нагрузки σ_{cr} и размера концевой области d_{cr} для трещины заданной длины в состоянии предельного равновесия.

Уравнение для определения длины концевой области трещины в состоянии предельного равновесия следует из (4.111):

$$C(t) - B(t) \sqrt{2\eta R_0} + R_0 = 0, \quad t = \frac{d_{cr}}{\ell} \quad (4.112)$$

После решения этого уравнения критическая внешняя нагрузка может быть определена, например, из выражения (4.51).

С другой стороны, уравнение (4.112) можно рассматривать как уравнение для определения параметра $R_{cr} = R_0$ при заданной величине $t_{cr} = d_{cr}/\ell$ (по аналогии с (4.63)):

$$\xi^2 - \xi B(t_{cr}) \sqrt{2\eta} + C(t_{cr}) = 0, \quad \xi = \sqrt{R_{cr}} \quad (4.113)$$

Из (4.113) получаем:

$$R_{cr} = 0.5 \left(B(t_{cr}) \sqrt{\eta} + \sqrt{\eta B^2(t_{cr}) - 2C(t_{cr})} \right)^2 \quad (4.114)$$

Рассмотрим, как и при анализе энергетического критерия, применение силового критерия разрушения (4.111) для двух предельных случаев: 1) трещина, заполненная связями; и 2) трещина с малой концевой областью.

Для трещины, заполненной связями ($t = d/\ell = 1$), из уравнений (4.111) получаем:

$$\frac{\sigma_m}{P_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{2\eta R} + 1, \quad \frac{\sigma_{cr}}{P_0} = 1 + \frac{2R}{\pi} \quad (4.115)$$

Приравнивая выражения для σ_m и σ_{cr} в (4.115), получаем по аналогии с (4.59) и (4.60) выражения для критического параметра R_f и критического напряжения σ_f :

$$R_f = 2\eta, \quad \frac{\sigma_f}{P_0} = 1 + \frac{4\eta}{\pi} \quad (4.116)$$

Выражение для относительного размера концевой области трещины запишем по аналогии с (4.65):

$$\frac{d_{cr}^f}{d_0} = \frac{t_{cr}^f}{R_{cr}^f(t_{cr})}, \quad (4.117)$$

где верхний индекс f соответствует силовому критерию.

Используя выражения (4.59), (4.60), (4.65) и (4.116), (4.117), имеем:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{cr}^e}{\sigma_{cr}^f} = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{d_{cr}^f}{d_{cr}^e} = 1, \quad (4.118)$$

где индексы f и e соответствуют силовому и энергетическому критериям.

Зависимости отношений максимальных критических внешних нагрузок и максимальных размеров концевой области трещины в состоянии предельного равновесия, полученных по обоим рассматриваемым критериям от относительной трещиностойкости материала η , приведены на рис. 4.15. Различие между указанными параметрами уменьшается при $\eta \rightarrow \infty$, когда вклад связей в трещиностойкость мал. Заметим, что при использовании энергетического критерия d_{cr} соответствует трещине, полностью заполненной связями.

При малом, по сравнению с длиной трещины, размере концевой области ($t_{cr} \rightarrow 0$) из (4.114) имеем

$$R_{cr} = t_{cr} \left(\sqrt{\eta + 1} + \sqrt{\eta} \right)^2 = \frac{d_{cr}}{\ell} \left(\sqrt{\eta + 1} - \sqrt{\eta} \right)^{-2} \quad (4.119)$$

Из последнего соотношения следует выражение для размера концевой области трещины при $t \rightarrow 0$, совпадающее с (4.95), что свидетельствует об эквивалентности рассматриваемых критериев разрушения при малых размерах концевой области. Заметим также, что если $\eta \rightarrow \infty$, то выражения (4.64) и (4.114) дают близкие результаты.

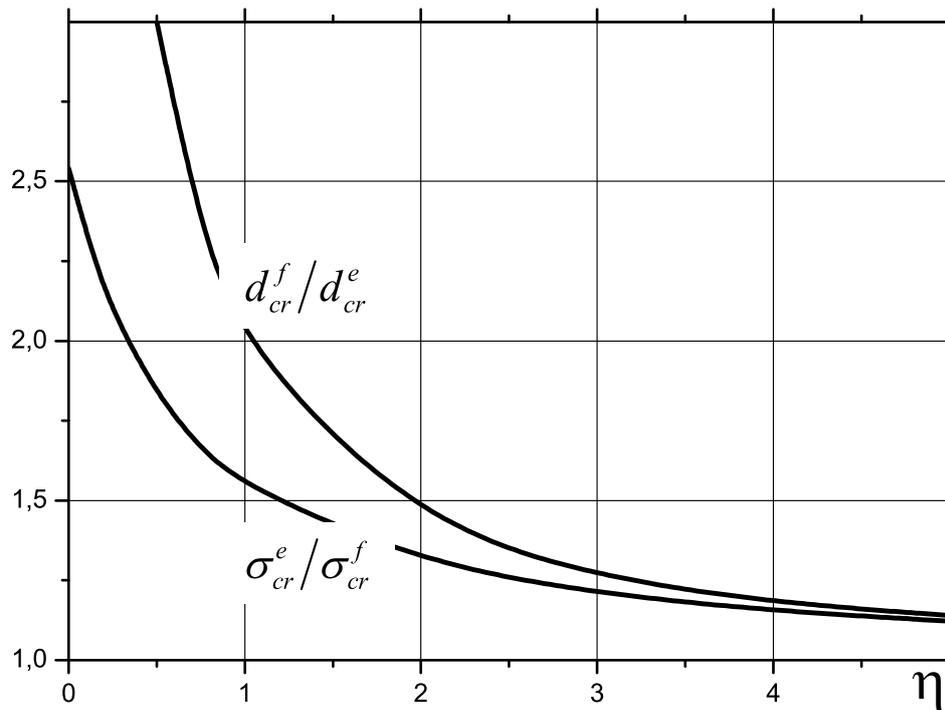


Рис. 4.15. Сравнение энергетического и силового критериев; зависимости относительных критических параметров в состоянии предельного равновесия

Сопоставление результатов, полученных с использованием энергетического и силового критериев разрушения, выполнено для двух значений относительной трещиностойкости $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Относительный размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия определяется из выражений (4.65) и (4.117), где $t = d_{cr}/\ell$ - относительный размер концевой области трещины, используемый при вычислении параметра R_{cr} из уравнений, полученных на основе энергетического (4.64) или силового (4.114) критериев, $0 < t \leq 1$.

Зависимости относительного размера концевой области трещины в состоянии предельного равновесия от длины части трещины, не занятой связями

$$\lambda_0 = \frac{\ell_{cr} - d_{cr}}{d_0},$$

приведены на рис. 4.16аb.

В случае $\eta = 0$ (см. рис. 4.16а) зависимости для энергетического и силового критериев принципиально различаются. Возрастание критического размера концевой области трещины при увеличении длины трещины в

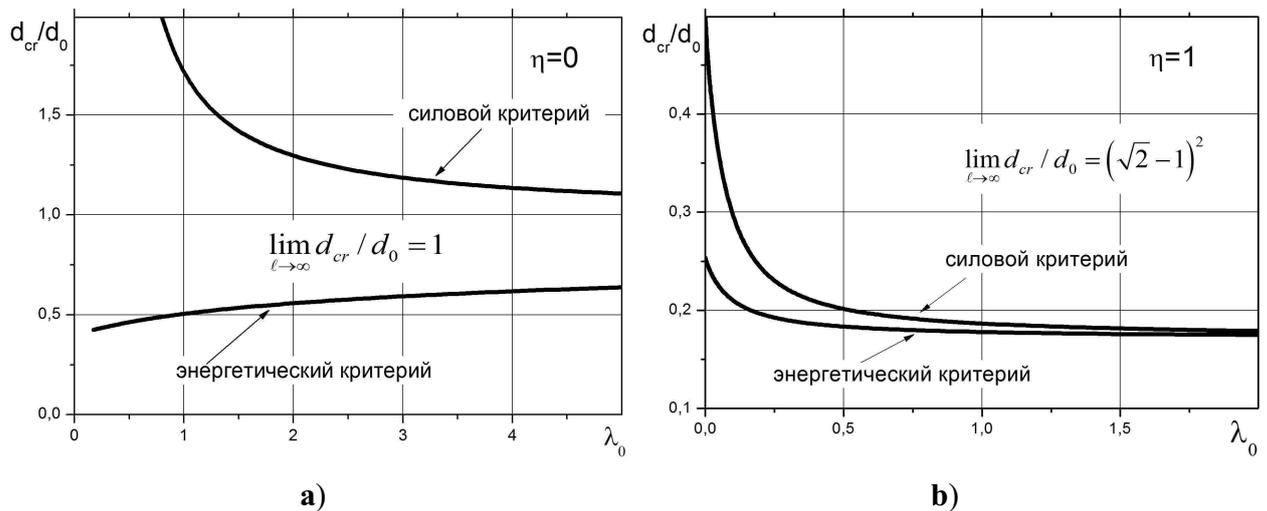


Рис. 4.16. Сравнение энергетического и силового критериев; зависимость размера концевой области от длины трещины без связей, $\lambda_0 = (\ell - d_{cr})/d_0$

случае энергетического критерия можно объяснить тем, что при увеличении длины трещины возрастает поток энергии в вершину трещины, для потребления которого требуется бóльшая концевая область.

При использовании силового критерия (который при $\eta = 0$ вырождается в критерий модели ЛПД) критический размер концевой области уменьшается при увеличении длины трещины, причем при $\ell \rightarrow \infty$ обе зависимости стремятся к общему предельному значению размера концевой области d_0 . При $\eta = 1$ заметное различие наблюдается для относительно коротких трещин, меньшее значение размера концевой области в случае использования энергетического критерия связано с учетом потребления энергии связями. Ввиду этого предельное равновесие трещины при заданной нагрузке может быть обеспечено при более короткой концевой области трещины. При $\ell \rightarrow \infty$ обе кривые стремятся к предельному значению, определяемому выражением (4.95).

Зависимости значений критической внешней нагрузки в состоянии предельного равновесия от длины части трещины, не занятой связями, приведены на рис. 4.17ab. Использование энергетического критерия разрушения дает бóльшее значение нагрузки для всех рассмотренных значений параметра η , что связано с учетом в энергетическом критерии работы по деформированию

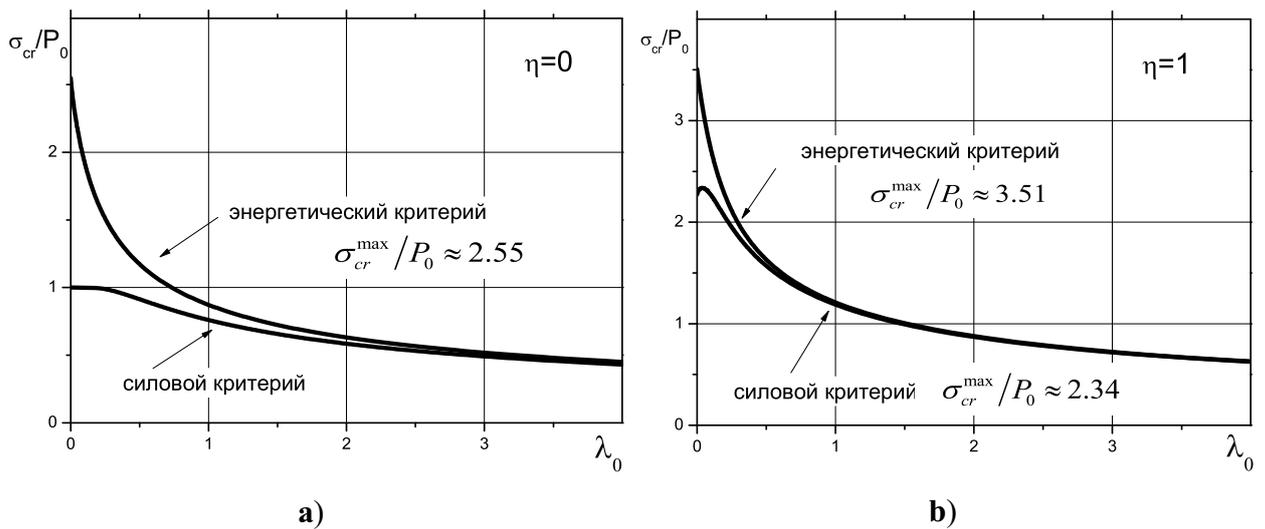


Рис. 4.17. Сравнение энергетического и силового критериев, зависимость разрушающих напряжений от длины трещины без связей, $\lambda_0 = (\ell - d_{cr})/d_0$

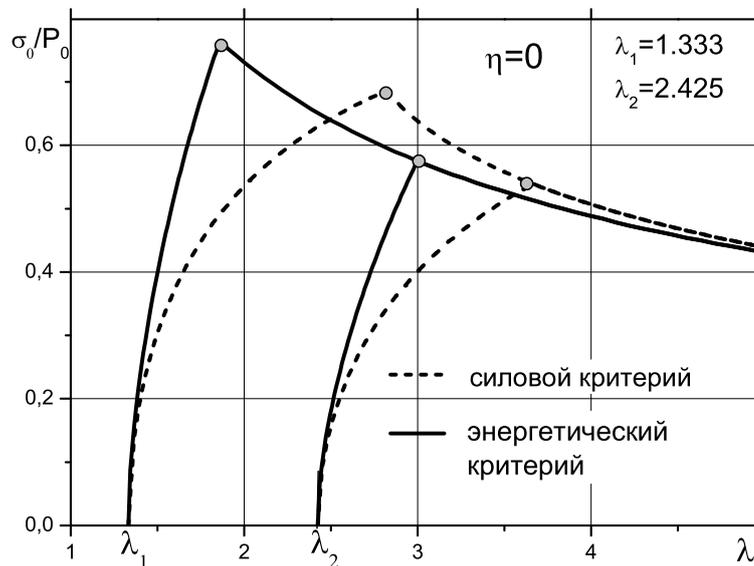


Рис. 4.18. Кривые докритического роста трещины из начального надреза, свободного от связей, энергетический и силовой критерии, малая трещиностойкость матрицы

связей.

Кривые докритического роста трещины из начального надреза, свободного от связей, полученные с использованием силового и энергетического критериев, приведены на рис. 4.18. Напряжения при развитии трещины из начального разреза без связей определяются из соотношения, следующего из первого уравнения в (4.111):

$$\frac{\sigma_0}{P_0} = \frac{2}{\pi} \left[\sqrt{2\eta R_0} + A(t) \right]$$

В этом случае, так же, как и при определении критических нагрузок, энер-

гетический критерий дает более высокие значения внешней нагрузки при меньшем размере концевой области.

Глава 5

Анализ трещиностойкости соединений материалов

В главе выполнен анализ энергетических характеристик концевой области трещины, рассмотрены эффекты упрочнения, вызванные присутствием связей в концевой области трещины, на границе соединения материалов. Нелокальный критерий квазистатического роста трещин со связями в концевой области применяется для анализа развития трещин по границе соединения материалов. Рассматриваются линейно-упругая и нелинейная диаграммы деформирования связей в концевой области прямолинейной трещины. Получены оценки критической внешней нагрузки и размера концевой области трещины в состоянии предельного равновесия, а также характеристики адгезионного сопротивления соединения материалов. Выполнено сопоставление с известными расчетными и экспериментальными результатами. Рассмотрено применение термофлуктуационной модели кинетики связей в концевой области трещины.

5.1. Коэффициенты интенсивности напряжений и энергетические характеристики трещины при нелинейном законе деформирования связей

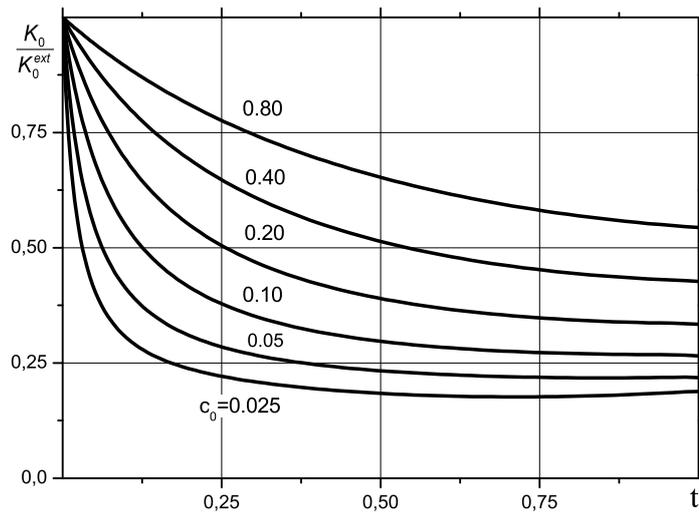
Взаимодействие между поверхностями трещины, вызванное присутствием связей различного физического происхождения, сдерживает раскрытие трещины и приводит к снижению величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Относительное изменение КИН позволяет оценить эффективность связей в концевой области трещины (эффект упрочнения связями). В разделе рассмотрено влияние механических свойств материалов и связей на КИН и энергетические характеристики трещины с концевой областью - скорости высвобождения энергии деформации и скорости потре-

ния энергии связями.

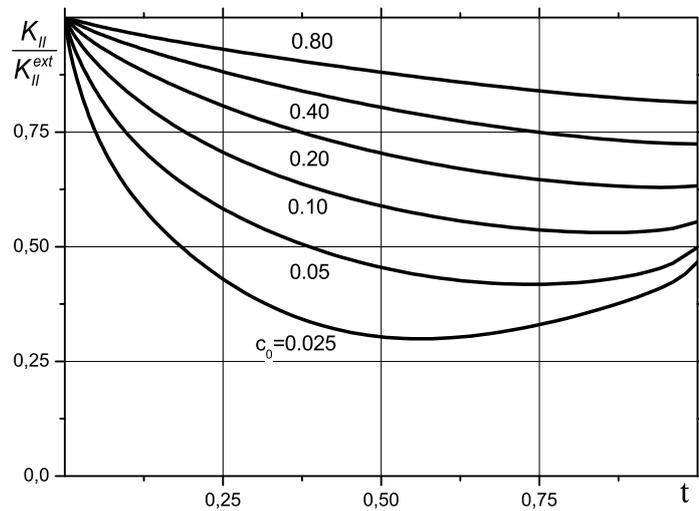
Расчеты выполнены методом сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для прямолинейной трещины с концевой областью на границе соединения полуплоскостей из различных материалов. Взаимодействие берегов трещины в концевой области определяется выражением (1.32).

5.1.1. Влияние механических свойств материалов и связей на коэффициенты интенсивности напряжений

Как и в разделе 3.1.1, начнем с рассмотрения влияния механических свойств связей в концевой области трещины на величину коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины (коэффициентов упрочнения связями, см. выражение (2.64)). Отметим, что $K_r < 1$ и при увеличении жесткости связей величина этого коэффициента уменьшается. На рис. 5.1 представлены зависимости относительного модуля КИН $K_r = K_0/K_0^{ext}$ и относительного КИН для сдвиговых деформаций $K_{r,II} = K_{II}/K_{II}^{ext}$ (коэффициент упрочнения в касательном направлении) от размера концевой области трещины при различных значениях относительной податливости связей c_0 . При уменьшении податливости связей модуль КИН существенно снижается, причем при малых значениях податливостей связей имеется зона слабого изменения коэффициента упрочнения, и размер этой зоны возрастает при снижении податливости связей (см.рис. 5.1a). Значения относительного КИН для касательных напряжений также снижаются при уменьшении податливости связей (см.рис. 5.1b). Интересно отметить, что при снижении податливости связей эти зависимости имеют минимум, положение которого смещается в сторону вершины трещины при снижении податливостей связей. Заметим, что положение минимума коэффициента упрочнения для касательных напряжений примерно совпадает с началом зоны слабого изменения модуля КИН (см. рис. 5.1a). Отметим, что коэффициенты упрочнения на рис. 5.1 имеют



a)



b)

Рис. 5.1. (а)- Модуль КИН с учетом связей; (б) - коэффициент упрочнения в касательном направлении, c_0 - относительная податливость связей, $t = d/\ell$

одинаковый порядок величины, что обусловлено выбором нормировки.

Зависимости относительного модуля КИН и относительного КИН для сдвига от относительной жесткости связей в логарифмическом масштабе (здесь, как и в разделе 3.1.1, параметр $\lg(\bar{c}_0/c_0)$ является функцией относительной жесткости связей $1/c_0$, а $\bar{c}_0 = 200$ - относительная податливость связей, соответствующая началу расчета) приведены на рис. 5.2, где можно выделить области значительного изменения КИН при увеличении жесткости связей.

Отношение компонент комплексного КИН для трещины без связей меж-

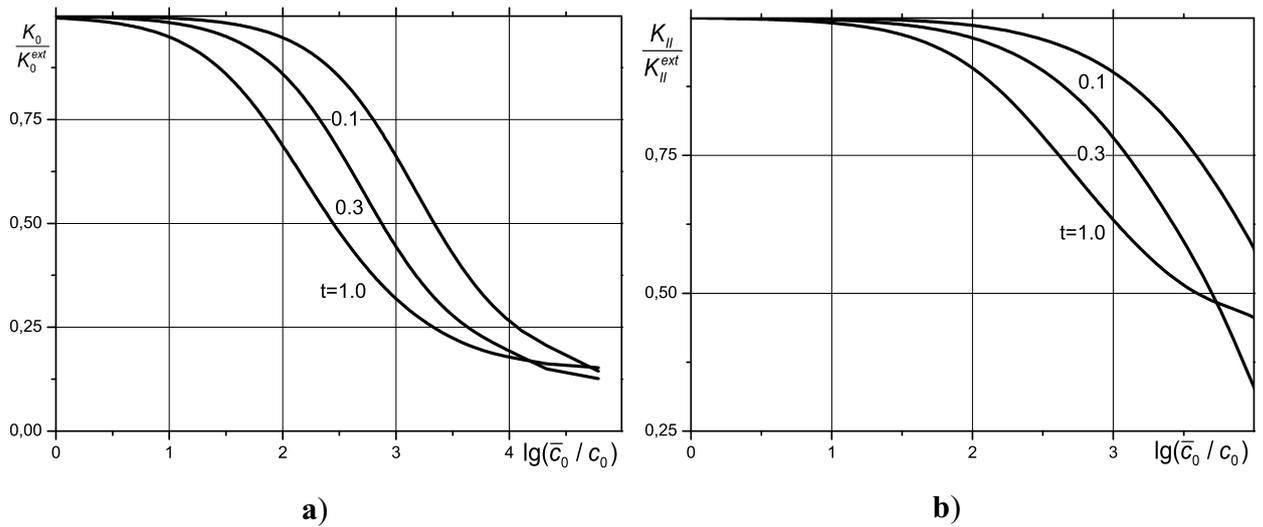


Рис. 5.2. **(а)** - Модуль КИН с учетом связей; **(б)** - коэффициент упрочнения в касательном направлении, $\lg(\bar{c}_0/c_0)$ - относительная жесткость связей, $t = d/\ell$

ду поверхностями зависит от параметра β : $K_{II}/K_I = 2\beta$, см. (1.19). При наличии связей в концевой области трещины этот эффект более выражен. Зависимость отношения K_{II}/K_I от величины коэффициента Пуассона материалов получена с использованием выражений (3.2)-(3.3). Модули упругости материалов $E_{1,2}$ определялись из соотношения (3.3) при $\theta = 100$, фиксированном модуле упругости связей $E_b = 25$ МПа и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Параметр Ψ при таком выборе модулей упругости материалов не зависит от их величин $E_{1,2}$ и изменяется незначительно: при $0 \leq \nu \leq 0.5$: $25.465 \leq \Psi \leq 19.099$. Из результатов, приведенных на рис. 5.3, видно, что при наличии связей между поверхностями трещины, влияние сдвиговой компоненты КИН возрастает.

Зависимости отношения K_{II}/K_I от размера концевой области трещины при изменении модулей упругости и коэффициента Пуассона материалов приведены на рис.рис. 5.4. Расчеты выполнены также, как и при анализе зависимости КИН от коэффициента Пуассона с использованием выражений (3.2)-(3.3). При $\nu = 0$ и $E_b = 25$ МПа изменялась относительная жесткость материалов при постоянном параметре $\Psi = 24.465$ (рис. 5.4а). При заданном отношении модулей упругости θ вычислялись модули упругости материалов $E_{1,2}$ и параметр Ψ , зависящий от коэффициента Пуассона. Отметим, что

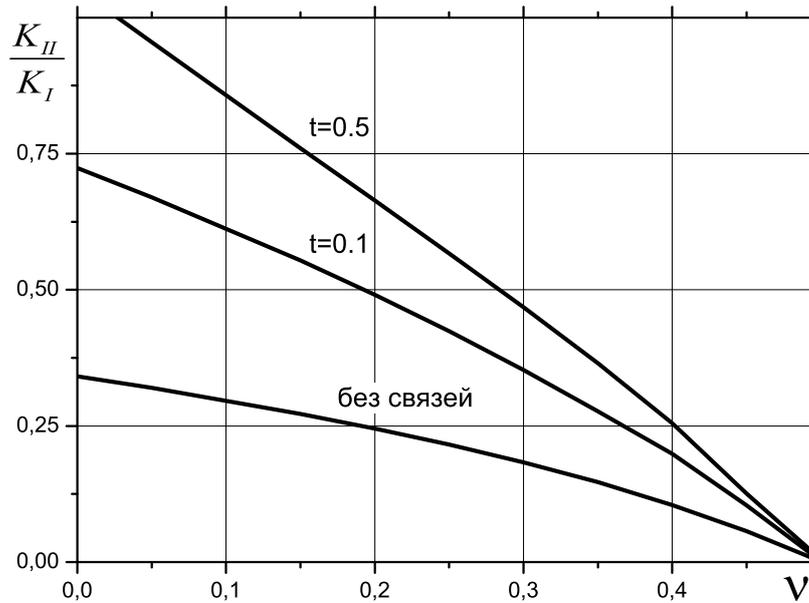


Рис. 5.3. Зависимость отношения K_{II}/K_I от коэффициента Пуассона материала, ν

$K_{II}/K_I \rightarrow 2\beta$ при $d/\ell \rightarrow 0$ (отсутствие связей).

Влияние сдвиговой составляющей КИН наиболее сильно проявляется при $0.25 \leq d/\ell \leq 0.80$. При малых значениях параметра β отношение K_{II}/K_I имеет максимум при $d/\ell < 0.25$ и положение максимума смещается к центру трещины при возрастании параметра β . Увеличение параметров θ и β при фиксированных значениях параметров d/ℓ и Ψ приводит к заметному возрастанию K_{II} (примерно линейно) и незначительному снижению K_I . В итоге модуль КИН возрастает примерно на 10% (см.табл. 5.1). Отметим, что величина модуля вектора усилий на краю концевой области при возрастании параметра β снижается (см.табл.3.1), однако, происходящее при этом перераспределение напряжений в концевой области приводит к возрастанию модуля КИН и КИН K_{II} . Значения КИН в табл. 5.1 нормированы величиной КИН для однородного тела K_m .

Рассмотрим влияние на величину КИН различия податливости в касательном и нормальном направлениях, а также изменения податливости вдоль концевой области трещины.

Влияние отношения податливости связей $c_x/c_y = \gamma_2/\gamma_1$ по направлениям осей координат рассмотрено при $E_2/E_1 = 5$ и $E_b = E_2 = 25$ ГПа, что

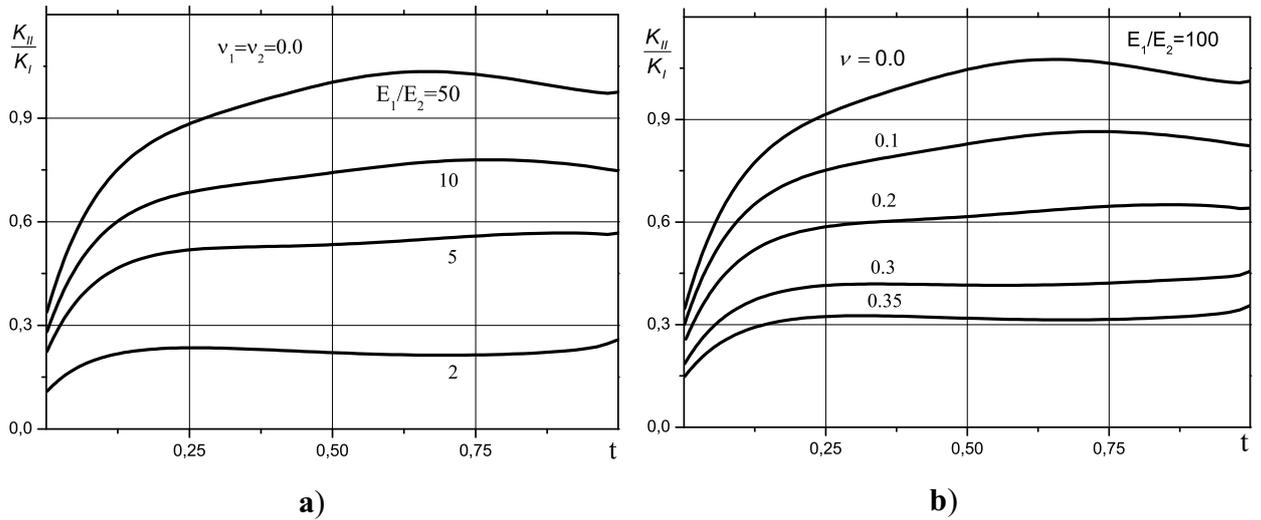


Рис. 5.4. Зависимость отношения K_{II}/K_I от длины концевой области трещины $t = d/\ell$; **(а)**- изменение относительной жесткости материалов; **(б)**- изменение коэффициентов Пуассона материалов

Таблица 5.1. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от относительной жесткости материалов, $c_0 = H/\ell = 0.1$, $d/\ell = 0.1$, $\nu = 0$, $E_b = 25$ ГПа, $K_m = \sigma_0 \sqrt{\pi\ell}$

E_1/E_2	K_0/K_m	K_I/K_m	K_{II}/K_m
1	0.391	0.391	0
2	0.395	0.387	0.080
5	0.409	0.374	0.165
10	0.419	0.365	0.207
50	0.432	0.353	0.249
100	0.434	0.352	0.255
1000	0.436	0.350	0.260
10000	0.437	0.351	0.261

соответствует положительному значению параметра β и $K_{II} > 0$ (в разделе 3.1.1 приведены результаты при $E_1/E_2 = 5$). При одноосном растяжении $K_I \gg K_{II}$. Ввиду этого, изменение податливости в касательном направлении слабо влияет на величину КИН K_I , но заметно влияет на величину КИН K_{II} . Зависимости КИН K_{II} от длины концевой области трещины для нескольких значений c_x/c_y представлены на рис. 5.5. При увеличении податливости в касательном направлении КИН K_{II} заметно снижается при относительно короткой концевой области. Зависимости на рис. 5.5 имеют локальные экстремумы при $c_x/c_y < 1$ и $d/\ell < 0.05$ (а) и при $c_x/c_y > 1$ и $d/\ell < 0.1$ (б).

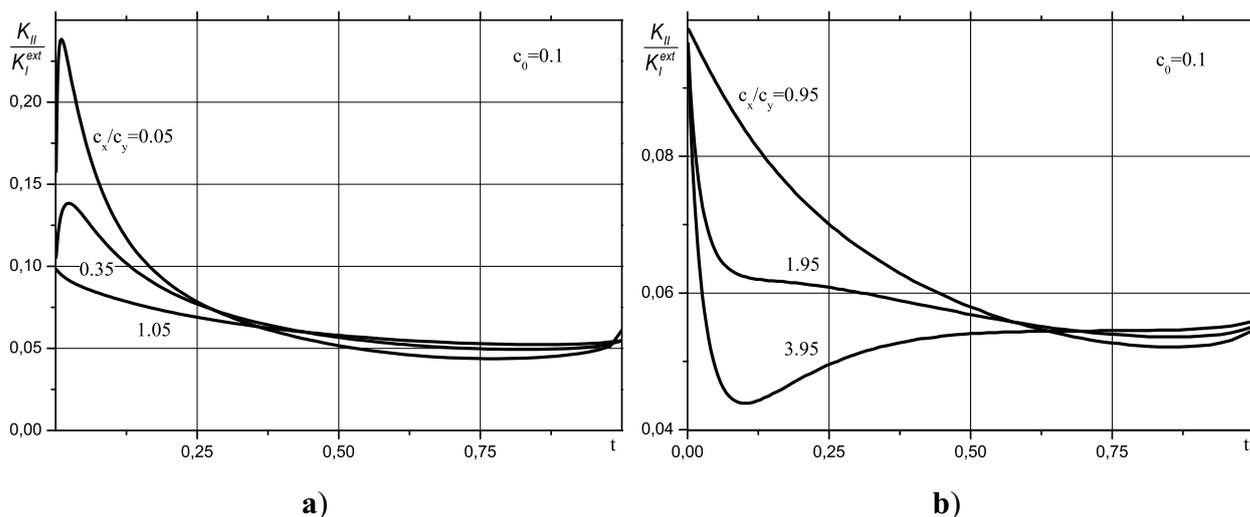


Рис. 5.5. Влияние различия податливости по направлениям осей координат на КИН K_{II} , $t = d/\ell$

При увеличении степени заполнения трещины связями влияние различия податливости по направлениям осей координат незначительно.

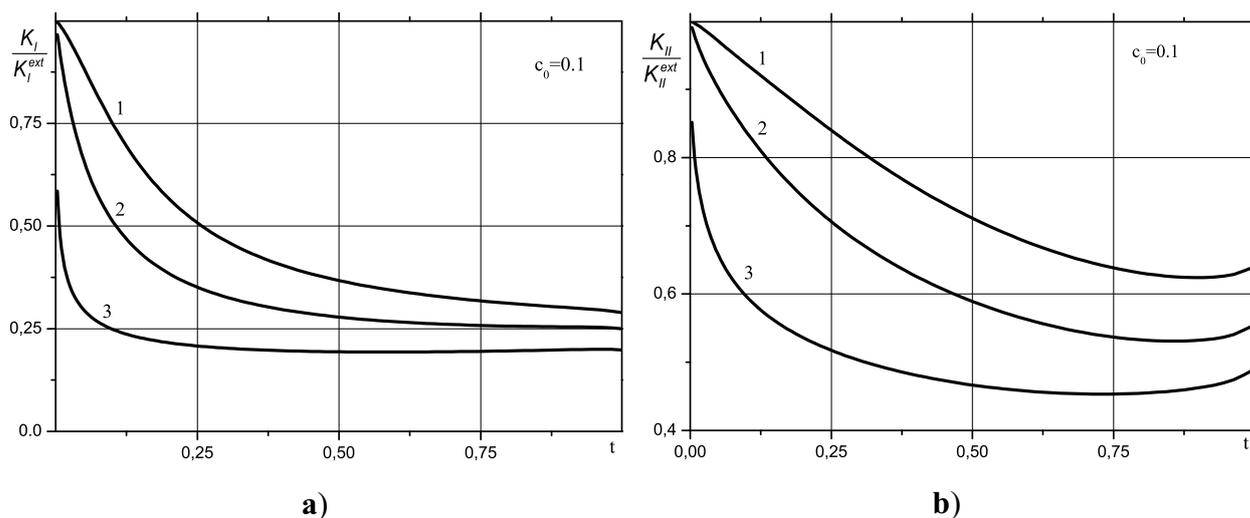


Рис. 5.6. Коэффициенты упрочнения: (а) - K_{rI} и (б) - K_{rII} при изменении податливости вдоль концевой области трещины, $t = d/\ell$: 1 - $\gamma(t) = 1/\sqrt{1.01 - t^2}$, 2 - $\gamma = 1$, 3 - $\gamma(t) = \sqrt{1 - t^2}$

Изменение податливости связей вдоль концевой области трещины приводит к изменению распределения усилий в связях (см. рис. 3.21 и рис. 3.24). Влияние на величину коэффициентов упрочнения изменения податливости связей вдоль концевой области трещины рассмотрено для функций вида (3.4) в предположении, что податливости одинаковы в касательном и нормальном направлениях. Зависимости коэффициентов упрочнения приведены на рис. 5.6. Возрастание податливости приводит к уменьшению коэффициента

упрочнения, причем этот эффект является более существенным при малых размерах концевой области.

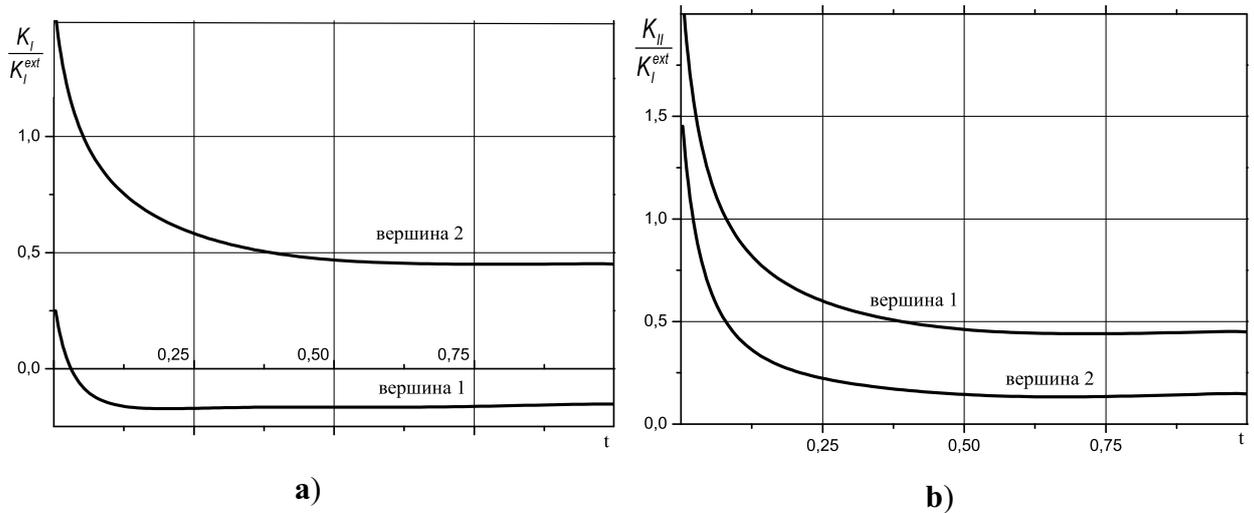


Рис. 5.7. Коэффициенты упрочнения: (а)- K_{rI} и (б) - K_{rII} при изменении длины концевой области трещины, $\tau_0/\sigma_0 = 2$, $t = d/\ell$

Приложение растягивающих и сдвиговых нагрузок к области с прямой трещиной на границе соединения материалов приводит к различным значениям КИН K_I и K_{II} для вершин трещины 1 ($x > 0$) и 2 ($x < 0$). В случае преобладания вблизи одной из вершин сдвиговых деформаций возможно образование зон сжатия на части трещины. Для примера на рис. 5.7 приведены зависимости КИН от длины концевой области трещины при $\tau_0/\sigma_0 = 2$ и параметрах материалов и связей, использованных в разделе 3.1.2. Для вершины трещины 1 при $d/\ell > 0.05$ наблюдается зона сжатия и $K_I < 0$. В этом случае развитие разрушения возможно вблизи вершины 2.

Рассмотрим влияние формы кривой деформирования связей на величину КИН. В разделе 3.2.2 приведены примеры расчета напряженного состояния в концевой области трещины при учете нелинейного деформирования связей в концевой области трещины. Уменьшение параметра разупрочнения δ кривой деформирования связей приводит к снижению уровня напряженности связей в концевой области и увеличению коэффициента упрочнения связями K_r . Для примера, на рис. 5.8 приведены зависимости модуля КИН от длины концевой области трещины при $\sigma_0 = 40$ МПа, $c_0 = 0.1$ и $c_0 = 0.05$.

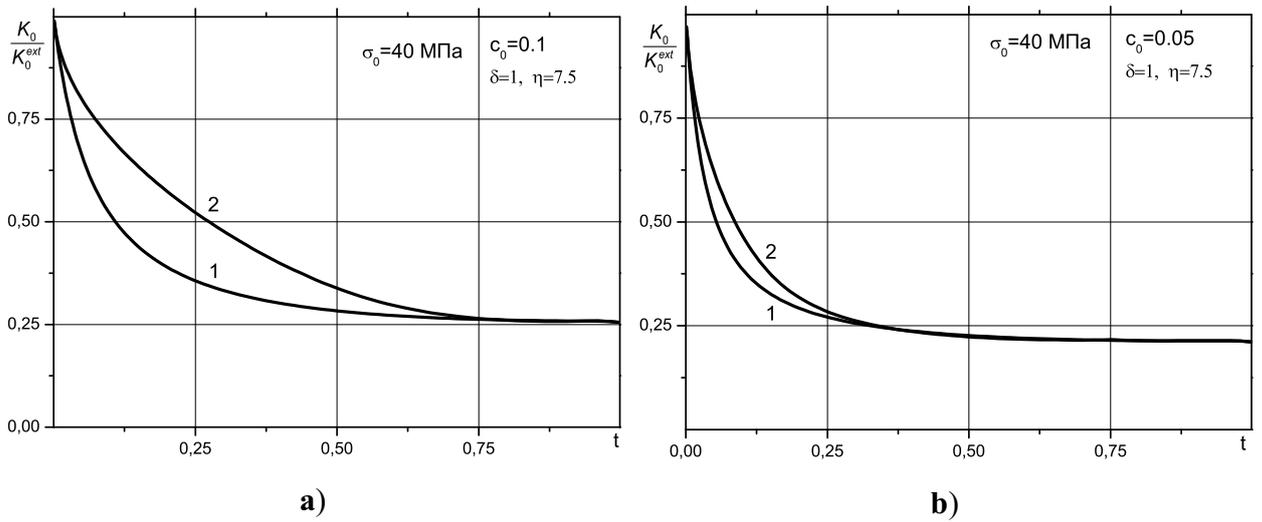


Рис. 5.8. Коэффициент упрочнения K_r при изменении длины концевой области трещины: 1- линейно-упругие связи; 2- нелинейный закон деформирования связей, $t = d/\ell$: (а) - $c_0 = 0.10$ и (б) - $c_0 = 0.05$

Зона нелинейного деформирования и степень разупрочнения связей возрастают при увеличении податливости связей (см. также рис. 3.32b).

5.1.2. Энергетические характеристики трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов

В разделе 4.1.1 определены энергетические характеристики трещины со связями в концевой области: скорость высвобождения энергии деформации

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) = \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_0^2}{16 ch^2(\pi\beta)} \quad (5.1)$$

и скорость потребления энергии деформации связями в концевой области трещины на границе соединения материалов, которую для случая адгезионного слоя можно записать в форме (см. (4.26))

$$G_{\text{bond}}(d, \ell) = G_{\text{bond}}^x(d, \ell) + G_{\text{bond}}^y(d, \ell) \quad (5.2)$$

где приняты обозначения

$$G_{\text{bond}}^y(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) dx, \quad G_{\text{bond}}^x(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) dx \quad (5.3)$$

Рассмотрим влияние механических свойств материалов и связей в концевой области трещины на энергетические характеристики (5.1) и (5.2). Все энергетические характеристики, приведенные в данном разделе в безразмерной форме, нормированы величиной скорости высвобождения энергии деформации для трещины равной длины при отсутствии связей $G_{tip}(0, \ell)$, см. выражение (5.1) при $d = 0$, а на графиках приняты следующие обозначения

$$\bar{G}_{tip} = \frac{G_{tip}(d, \ell)}{G_{tip}(0, \ell)}, \quad \bar{G}_{bond} = \frac{G_{bond}(d, \ell)}{G_{tip}(0, \ell)}, \quad \bar{G}_{bond}^{x,y} = \frac{G_{bond}^{x,y}(d, \ell)}{G_{tip}(0, \ell)} \quad (5.4)$$

Зависимость скорости высвобождения энергии деформации (5.1) от длины концевой области трещины аналогична соответствующей зависимости модуля КИН K_0 (2.65) (см. рис. 5.1а). Скорость высвобождения упругой энергии уменьшается при снижении относительной податливости связей. При малых значениях относительной податливости связей можно выделить зону слабого изменения скорости высвобождения упругой энергии (см. рис. 5.9). Так же, как и при отсутствии связей, скорость высвобождения энергии деформации можно разделить на компоненты, пропорциональные K_I^2 и K_{II}^2 (см. [134, 287]). Влияние свойств материалов и связей можно проследить по результатам анализа КИН, приведенным в предыдущем разделе.

Рассмотрим вычисление скорости потребления энергии деформации связями (5.2)-(5.3) для прямолинейной трещины, расположенной на границе двух упругих полупространств, при законе деформирования связей вида (1.32). Выражение для производной раскрытия трещины в направлении, нормальном плоскости трещины, получаем с учетом выражения для компонент вектора перемещений (2.31)

$$\frac{\partial u_y(s)}{\partial \ell} = c_0 \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}}{E_b} \left[\gamma_1(s)q_1(s) - s\gamma_1(s)\frac{\partial q_1(s)}{\partial s} - sq_1(s)\frac{\partial \gamma_1(s)}{\partial s} \right], \quad (5.5)$$

где учено, что $s = x/\ell$, $ds/d\ell = -s/\ell$.

Выражение для производной раскрытия трещины в касательном направ-

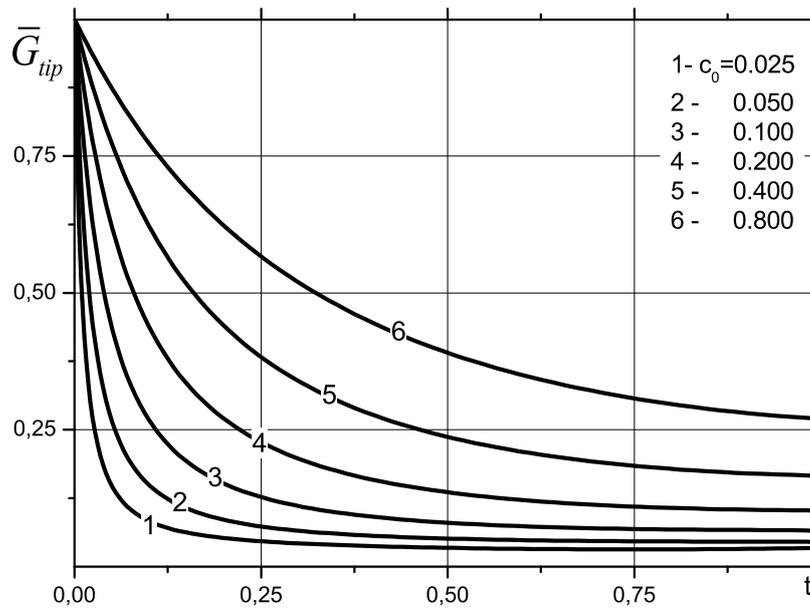


Рис. 5.9. Зависимость скорости высвобождения энергии деформации от длины концевой области трещины, одноосное растяжение, $t = d/\ell$

лении имеет аналогичную форму. Подставляя (5.5) в (5.2)-(5.3) и переходя к безразмерным переменным в интеграле, получаем:

$$G_{bond}(d, \ell) = \frac{H(\sigma_0^2 + \tau_0^2)}{E_b} \int_{1-d/\ell}^1 \left(\gamma_k(s)q_k^2(s) - s\gamma_k(s)q_k(s)\frac{dq_k(s)}{ds} - sq_k^2(s)\frac{d\gamma_k(s)}{ds} \right) ds, \quad (5.6)$$

где $k=1,2$ и по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Вычисления интеграла в (5.6) выполняется по квадратурным формулам Гаусса, см. выражение (П.48) в Приложении.

Скорость потребления энергии деформации связями достигает максимального значения при определенной величине размера концевой области трещины. На рис. 5.10 представлены результаты расчетов скорости потребления энергии деформации связями при одноосном растяжении для свойств материалов, приведенных во введении к главе 3 и $c_0 = 0.1$. При выбранных свойствах материалов выполняются следующие соотношения: $G_{bond}^x(d, \ell) \ll G_{bond}^y(d, \ell)$ и $G_{bond} \approx G_{bond}^y(d, \ell)$. Положение максимума при возрастании податливости связей смещается к центру трещины ($t = d/\ell = 1$, трещина, заполненная связями), а его величина уменьшается, причем при

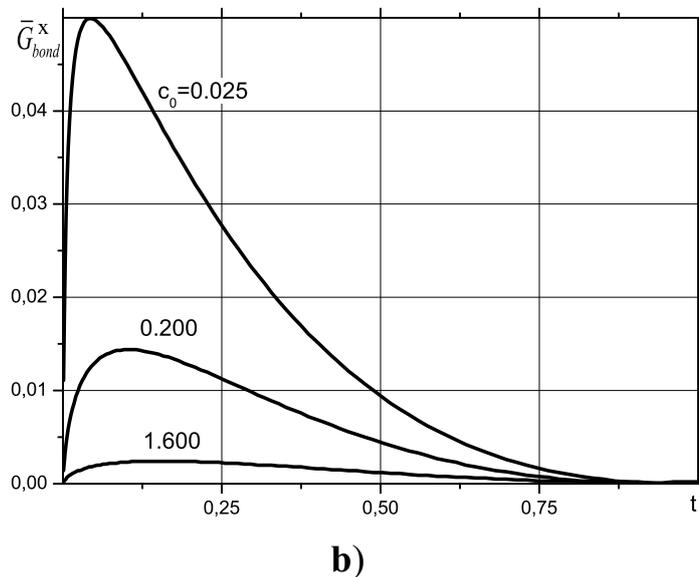
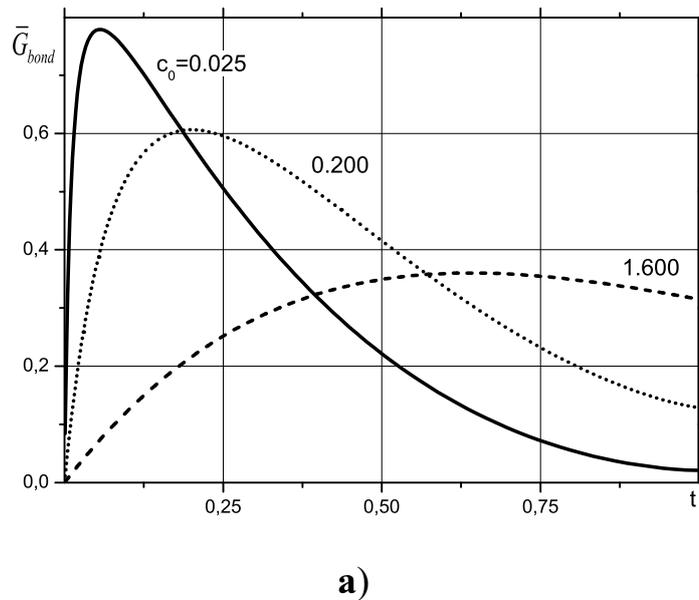


Рис. 5.10. Скорость потребления энергии деформации связями: **(а)** - полная, см. (5.2); **(б)** - для сдвиговых деформаций, см. (5.3), $t = d/\ell$

$1/\Psi \geq 3$ максимум всегда наблюдается при $d/\ell = 1$.

Зависимость максимума скорости поглощения энергии деформации связями от величины параметра Ψ приведена на рис. 5.11. При больших значениях Ψ выполняется соотношение $G_{bond}(d, \ell) \cong (0.8 \div 0.85)G_{tip}(0, \ell)$. Размер концевой области трещины, при котором достигается максимальное значение скорости потребления энергии деформации связями, совпадает с соответствующим размером концевой области для максимума модуля вектора усилий, см. рис. 3.10 и выражение (3.1).

Зависимости скорости поглощения энергии деформации связями от со-

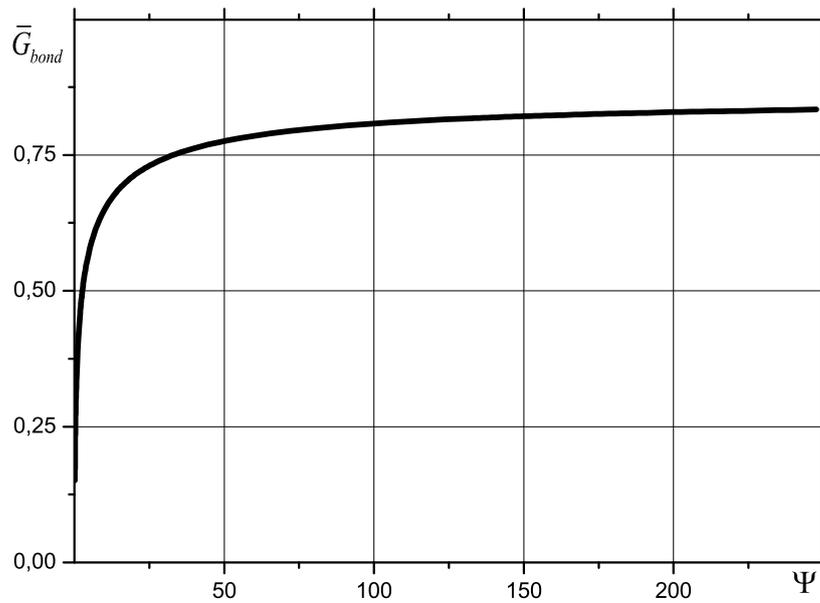


Рис. 5.11. Зависимость максимального значения скорости потребления энергии деформации связями от параметра Ψ , одноосное растяжение

отношения модулей упругости и коэффициентов Пуассона материалов получены, как и в разделах 3.1.1 и 5.1.1, с использованием выражений (3.2)-(3.3). При изменении относительной жесткости материалов ($\nu_1 = \nu_2 = 0$) возрастает вклад сдвиговых деформаций, составляющая скорости поглощения энергии деформации связями $G_{bond}^x(d, \ell)$ увеличивается, а $G_{bond}^y(d, \ell)$ - уменьшается при практически постоянном значении $G_{bond}(d, \ell)$, см. рис. 5.12.

Изменение коэффициентов Пуассона материалов ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) также приводит к изменению соотношения между слагаемыми скорости поглощения энергии деформации связями. При уменьшении коэффициента Пуассона возрастает вклад сдвиговых деформаций и возрастает соответствующее слагаемое в (5.3) при сохранении суммарного значения $G_{bond}(d, \ell)$.

Влияние соотношения податливости связей c_x/c_y по направлениям осей координат рассмотрено для механических свойств материалов, приведенных в разделе 3.1.1. При одноосном растяжении изменение податливости в касательном направлении слабо влияет на суммарную величину $G_{bond}(d, \ell)$. При малых c_x/c_y максимальное значение $G_{bond}(d, \ell)$ заметно выше, чем при $c_x = c_y$, см. рис. 5.14.

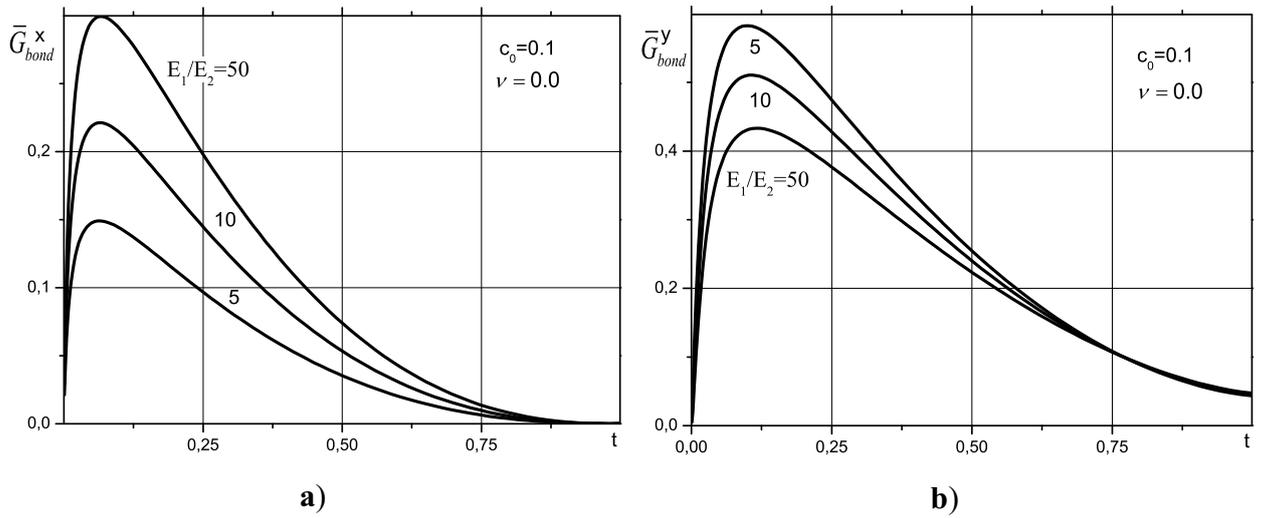


Рис. 5.12. Зависимости скорости потребления энергии деформации связями от длины концевой области трещины при изменении относительной жесткости материалов: **(а)** - полная, см. (5.2); **(б)** - для сдвиговых деформаций, см. (5.3), $t = d/\ell$

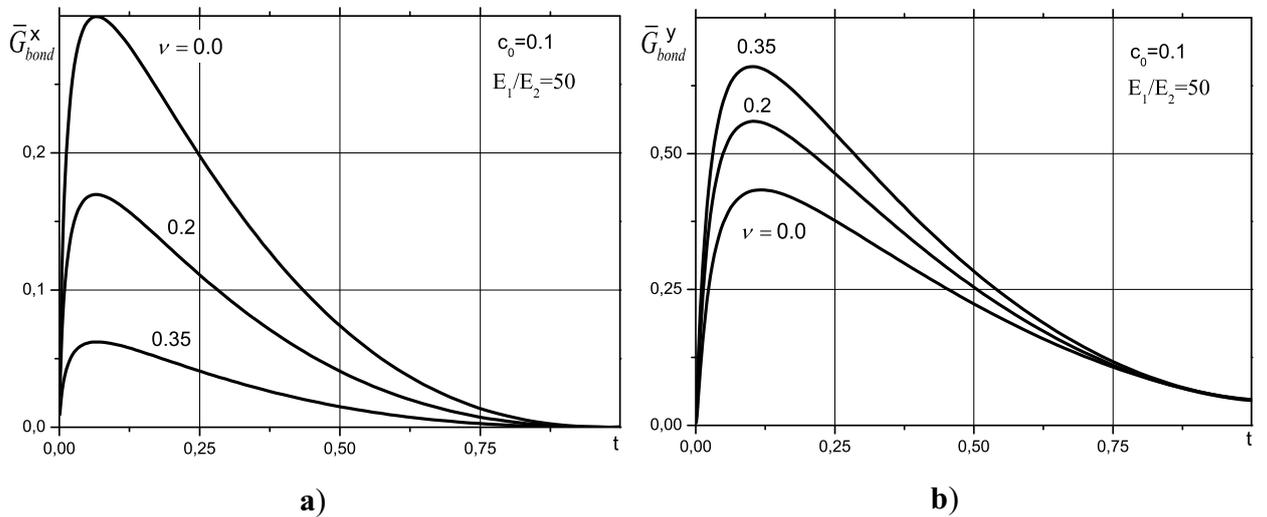


Рис. 5.13. Зависимости скорости потребления энергии деформации связями от длины концевой области трещины при изменении коэффициента Пуассона материалов: **(а)** - полная, см. (5.2); **(б)** - для сдвиговых деформаций, см. (5.3), $t = d/\ell$

Влияние изменения податливости связей вдоль концевой области трещины на величину скорости поглощения энергии деформации связями рассмотрено для функций вида (3.4) в предположении, что податливости одинаковы в касательном и нормальном направлениях. Зависимости скорости поглощения энергии деформации связями и слагаемого этого параметра, соответствующего сдвиговым деформациям, приведены на рис. 5.15. Заметные различия наблюдаются для размеров концевой области $d/\ell < 0.5$. Возрастание податливости (функция вида $\gamma(t) = 1/\sqrt{1.01 - t^2}$) приводит к уменьшению слагаемых скорости поглощения энергии деформации связями, причем

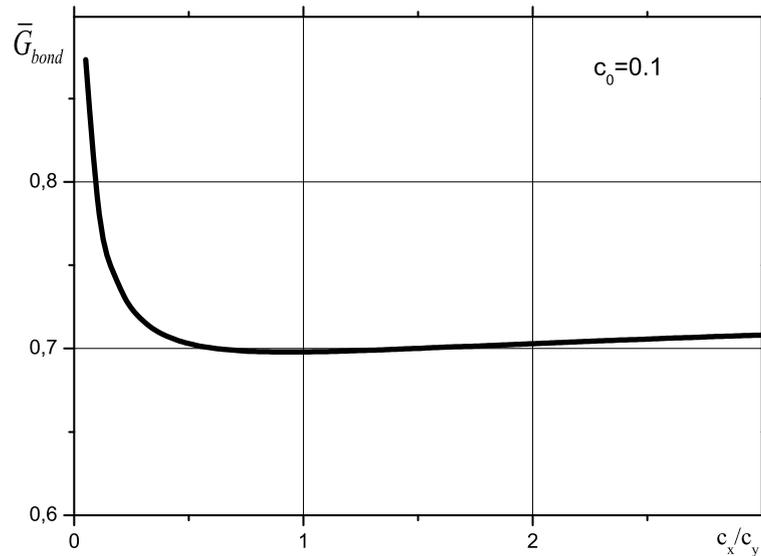


Рис. 5.14. Зависимость максимального значения скорости потребления энергии деформации связями от c_x/c_y , одноосное растяжение

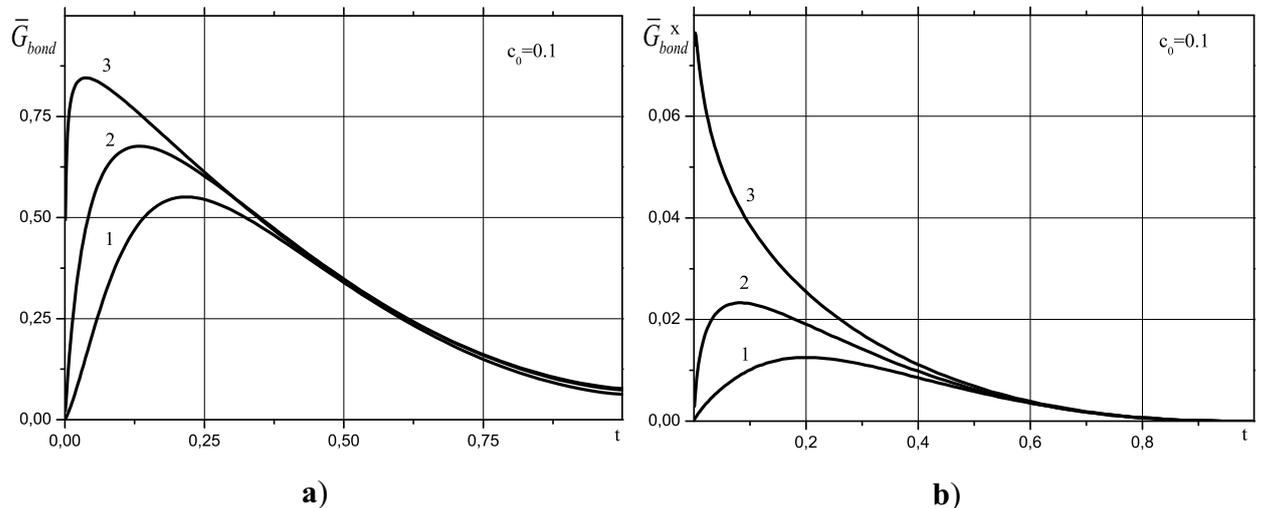


Рис. 5.15. Зависимости скорости потребления энергии деформации связями от длины концевой области трещины: **(а)** - полная, см. (5.2); **(б)** - для сдвиговых деформаций, см. (5.3), $t = d/\ell$, изменение податливости: 1 - $\gamma(t) = 1/\sqrt{1.01 - t^2}$, 2 - $\gamma = 1$, 3 - $\gamma(t) = \sqrt{1 - t^2}$

этот эффект является более существенным при малых размерах концевой области.

Изменение закона деформирования связей приводит к изменению величины скорости поглощения энергии деформации связями. Для примера, на рис. 5.16 приведены зависимости скорости поглощения энергии деформации связями от длины концевой области трещины при $\sigma_0 = 40$ МПа и $c_0 = 0.1$ для случая линейно-упругих связей и билинейного закона деформирования связей. Зона нелинейного деформирования (см. рис. 5.8а) соответствует об-

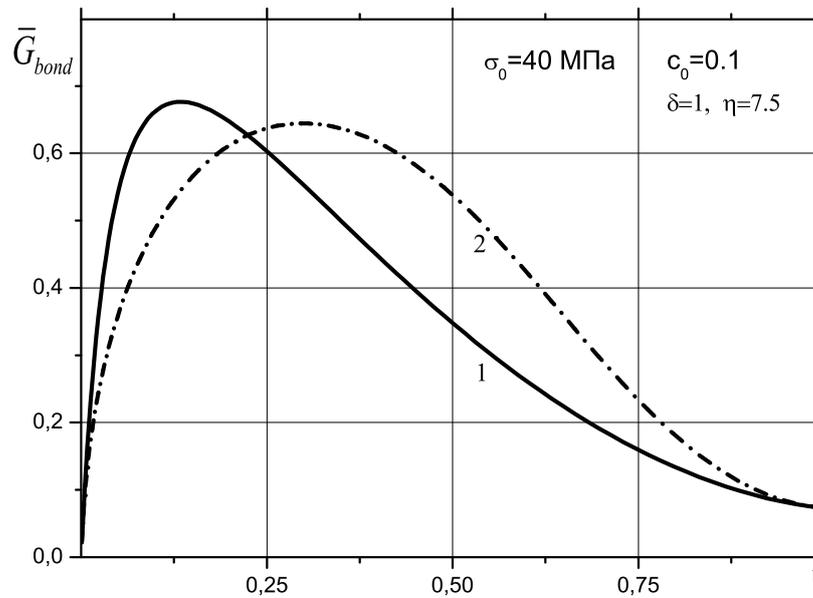


Рис. 5.16. Зависимость скорости потребления энергии деформации связями от длины концевой области трещины, $t = d/\ell$; (1)- линейно-упругие связи; (2)- нелинейный закон деформирования связей

ласти, в которой зависимости скорости поглощения энергии деформации связями заметно отличаются.

5.2. Трещиностойкость соединений материалов при различных законах деформирования связей в концевой области трещины

В разделе рассмотрена методика применения нелокального критерия роста трещин со связями в концевой области, а также приведены результаты анализа трещиностойкости соединений материалов при линейно-упругом и нелинейном законах деформирования связей в концевой области трещины. Расчеты выполнены с использованием разработанного комплекса компьютерных программ для решения сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений. Выполнено сопоставление с известными численными и экспериментальными результатами.

5.2.1. Применение нелокального критерия квазистатического роста трещин при различных законах деформирования связей в концевой области трещины

Рассмотрим методику оценки параметров докритического развития и предельного равновесия трещины с квазилинейными связями вида (1.32) в концевой области трещины при использовании нелокального критерия разрушения, основанного на уравнениях (4.27)-(4.28) и условиях (4.29)-(4.31).

Применение нелокального критерия разрушения (4.27)-(4.28) состоит из следующих этапов:

- 1) определения усилий в связях и раскрытия в концевой области трещины на каждом шаге приращения длины трещины или её концевой области (для прямолинейной трещины на границе соединения полуплоскостей - из решения уравнения (2.69) с учетом закона деформирования связей);
- 2) проверки выполнения условий (4.29)-(4.31), определения режима развития трещины и приращения длины трещины или её концевой области.

Исходные данные, необходимые на этих этапах, включают: 1) механические свойства материалов подобластей (модули упругости и коэффициенты Пуассона); 2) закон деформирования связей в концевой области трещины; 3) критическое раскрытие на краю концевой области трещины, u_{cr} ; 4) плотность энергии деформации, выделяющейся при разрыве связей на краю концевой области, G_b ; 5) трещиностойкость материала в малой зоне вблизи вершины трещины, G_m (см. раздел 4.1.1). Параметры 2)-5) являются масштабно-зависимыми и могут изменяться при росте трещины.

Рассмотрим этап проверки выполнения условий (4.29)-(4.31) и определения режима развития трещины. Условие квазистатического развития трещины на границе соединения материалов из зоны, свободной от связей, следует из выражения (4.29) (докритический рост трещины):

$$G_{\text{tip}}(d, \ell) = G_{\text{bond}}(d, \ell), \quad u(\ell - d) < u_{cr}, \quad (5.7)$$

где u_{cr} - критическое раскрытие трещины на краю концевой области, $G_{tip}(d, \ell)$ определяется выражением (5.1), а $G_{bond}(d, \ell)$ имеет вид:

$$G_{bond}(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) + \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) \right) dx - \int_0^{u(\ell-d)} \sigma(u) du + G_m \quad (5.8)$$

При увеличении размера концевой области d зависимость внешней критической нагрузки от длины трещины при возрастании длины трещины определяется из решения уравнения (5.8).

Условие разрыва связей на краю концевой области без продвижения вершины трещины (4.30) имеет вид (докритический рост трещины):

$$G_{tip}(d, \ell) < G_{bond}(d, \ell), \quad u(\ell - d) = u_{cr} \quad (5.9)$$

Зависимость внешней критической нагрузки от длины концевой области трещины (без изменения длины трещины) определяется из второго выражения в (5.9) с использованием соотношений (1.32), (1.33) и (2.31):

$$\sigma_{cr}(d) = \frac{u_{cr} E_b}{H \gamma_d \sqrt{q_{x,d}^2 + q_{y,d}^2}}, \quad (5.10)$$

где величины $\gamma_d, q_{x,d}, q_{y,d}$ определяются на краю концевой области.

Квазистатический рост трещины реализуется при выполнении условий (4.31) в форме:

$$G_{tip}(d, \ell) = G_{bond}(d, \ell), \quad u(\ell - d) = u_{cr} \quad (5.11)$$

Для случая трещины с адгезионным слоем на границе соединения материалов первое из уравнений в (5.11) имеет вид:

$$\left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_0^2}{16 c h^2 (\pi \beta)} = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) + \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) \right) dx, \quad (5.12)$$

где учтено, что в состоянии предельного равновесия $u(\ell - d) = u_{cr}$ и

$$\int_0^{u_{cr}} \sigma(u) du = G_m$$

Для линейно-упругих связей в концевой области трещины решение системы уравнений (5.11) проводится в два этапа. На первом этапе выполняется совместное итерационное решение системы уравнений (2.69) и (5.12). Отметим, что (5.12) также является интегральным уравнением, см. (2.62), (2.63), (5.1) и (5.3). Выражение для скорости потребления энергии деформации связями рассматриваем для случая адгезионного слоя. Из решения системы уравнений (2.69) и (5.12) (если оно существует), определяется относительная критическая длина концевой области трещины в состоянии предельного равновесия t_{cr} при заданных длине трещины, параметрах связей и материалов.

При рассмотрении адгезионного слоя выполнение условия (5.12) для линейно-упругих связей в концевой области трещины зависит от параметра относительной жесткости связей Ψ и механических свойств материалов, а при заданных свойствах материалов и связей – от относительных характеристик $(H/\ell, d/\ell)$ концевой области и трещины. Ввиду этого, относительное критическое значение длины концевой области, полученное из условия (5.12), может быть отнесено к трещине любого масштаба при допустимой внешней нагрузке. Критическая длина концевой области для заданной длины трещины определяется как $d_{cr} = \ell t_{cr}$. После определения критической длины концевой области трещины d_{cr} критическую внешнюю нагрузку σ_{cr} , соответствующую при заданных длине трещины ℓ и критическом раскрытии трещины на краю концевой области u_{cr} решению уравнения (5.12), находим из решения второго уравнения нелокального критерия разрушения (5.11), которое имеет вид, аналогичный (5.10). Зависимости параметров разрушения от длины трещины получаются в результате решения системы уравнений (5.11) для последовательности возрастающих длин трещин.

Для связей с нелинейной диаграммой деформирования (см. раздел 1.3) необходимо выполнение итерационного решения системы (5.11) с изменением уровня внешней нагрузки и проверкой выполнения условия достижения

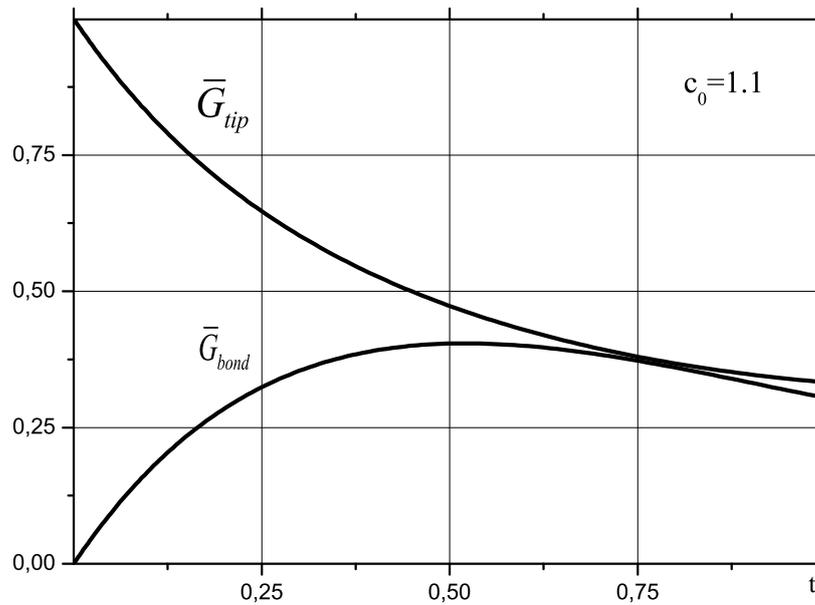


Рис. 5.17. Энергетические характеристики трещины со связями в концевой области, отсутствие решения уравнения (5.12), $t = d/\ell$, $\Psi = 1.2$

предельного раскрытия на краю концевой области. В качестве первого приближения принимается решение для линейно-упругих связей и определяется интервал поиска решения для внешней нагрузки $[c_1\sigma_{cr}; c_2\sigma_{cr}]$ и концевой области $[w_1d_{cr}; w_2d_{cr}]$, где σ_{cr} - критическое внешнее напряжение (см. выражение (5.10)) и d_{cr} - критическая длина концевой области для линейно-упругих связей, $0 < c_1 < c_2 < 1$ и $w_1 < 1$, $w_2 > 1$ - эмпирические постоянные, зависящие от формы кривой деформирования связей. Определяется размер шага по нагрузке $\Delta\sigma = \sigma_{cr}(c_2 - c_1)/N$, где N - число шагов. Для уровней внешней нагрузки вида $\sigma_{0,i} = c_2\sigma_{cr} - (i - 1)\Delta\sigma$, ($i = 1 \dots N$) выполняется итерационное решение первого уравнения системы (5.11) с проверкой достижения критического раскрытия на краю концевой области.

Рассмотрим различные варианты решения системы уравнений (5.11) с учетом представления (5.12) для случая линейно-упругих связей с постоянной или изменяющейся вдоль концевой области податливостью. При относительно мягких связях в концевой области трещины возможно отсутствие решения уравнения (5.12) и, ввиду этого, отсутствие решения системы урав-

нений (5.11), (см. рис. 5.17). В этом случае податливость связей мала, при достижении критической внешней нагрузки и любом размере концевой области возможен квазистатический рост трещины (например, при выполнении условия (4.29)). Для рассматриваемых механических свойств материалов и связей ($E_1 = 135$ ГПа, $E_2 = 25$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, $E_b = E_2$) решение уравнения (5.12) отсутствует при $H/\ell \geq 1.1$ (что соответствует $\Psi \leq 1.2$ при произвольном сочетании механических свойств материалов и связей). Это условие позволяет получить критерий для оценки допустимых параметров связей и материалов, при которых существует решение системы уравнений (5.11)

$$E_b \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \leq 2.4\pi c_0 \quad (5.13)$$

Если один из материалов абсолютно жесткий ($E_1 \rightarrow \infty$), $E_b = E_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, то из (5.13) получаем $H \approx 0.93\ell$ - предельное значение характерного размера H . Решение уравнения (5.12) существует при $\Psi > 1.2$ ($c_0 < 1.1$ при используемых свойствах материалов). При податливости, изменяющейся вдоль концевой области по закону (см. (3.4))

$$\gamma_{1,2}(t) \equiv \gamma(t) = \sqrt{1 - t^2},$$

решение системы существует при $c_0 \leq 2$ (см. рис. 5.18). При $c_0 = 2$ оба энергетических параметра разрушения практически совпадают на промежутке $0.660 \leq t \leq 0.947$.

Решение для $c_0 = 0.25$ при постоянной вдоль концевой области трещины податливости представлено на рис. 5.19а, где положение точки пересечения графиков $G_{tip}(d, \ell)$ и $G_{bond}(d, \ell)$ соответствует критическому значению относительной длины концевой области $t_{cr} = d_{cr}/\ell \approx 0.105$. Критическая внешняя нагрузка σ_{cr} , соответствующая найденному значению t_{cr} и раскрытию на краю концевой области $u = u_{cr}$, определяется из решения уравнения (4.28). Это решение иллюстрируется на рис. 5.19б, где значению t_{cr} , полученному из решения системы уравнений (4.27) и (4.28), соответствует поло-

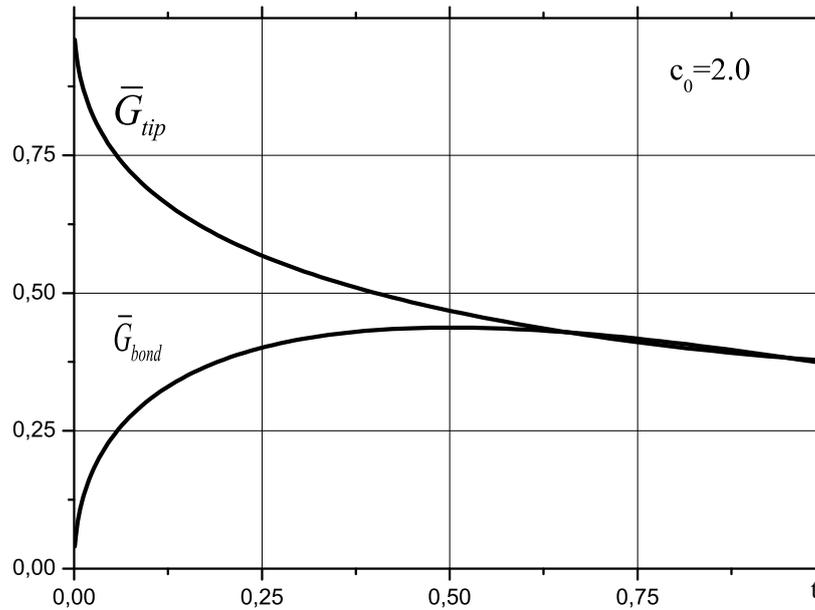


Рис. 5.18. Энергетические характеристики трещины со связями в концевой области, решение уравнения (5.12) при изменении податливости связей вдоль концевой области трещины, $t = d/\ell$, $\Psi = 1.25$

жение точки пересечения (точка А) прямой $u = u_{cr}$ и зависимости раскрытия трещины на краю концевой области ($x = \ell - d_{cr}$) от длины концевой области при внешней нагрузке, равной критической ($\sigma_0 = \sigma_{cr}$). Второе решение уравнения (4.28) (точка В на рис. 5.19b) не согласуется с условием (4.27) и, следовательно, не определяет состояния предельного равновесия концевой области и вершины трещины.

При малых и больших значениях относительной податливости связей $c_0 = H/\ell$ (и, соответственно, малой и высокой относительной жесткости связей, см. параметр Ψ) условие (4.27) может выполняться при двух значениях $t^* = d^*/\ell$ и $t_2^* > t_1^*$ (см.рис. 5.20), причем $t_2^* > 0.8$ (это верно как при малых, так и при больших значениях податливости связей). Из результатов, приведенных на рис. 5.1a следует, что $K_0(t_2^*) < K_0(t_1^*)$. Следовательно, для выполнения условий (4.27) и (4.28) при $t = t_2^*$ необходима более высокая внешняя нагрузка, чем при $t = t_1^*$. Таким образом, при увеличении внешней нагрузки возможно выполнение условия (4.28) при $t = t_2^*$, что приводит к квазистатическому сокращению размера концевой области до величины $t_{cr} = t_1^*$ без продвижения вершины трещины. Отметим, что при $\eta \gg 1$ (см.

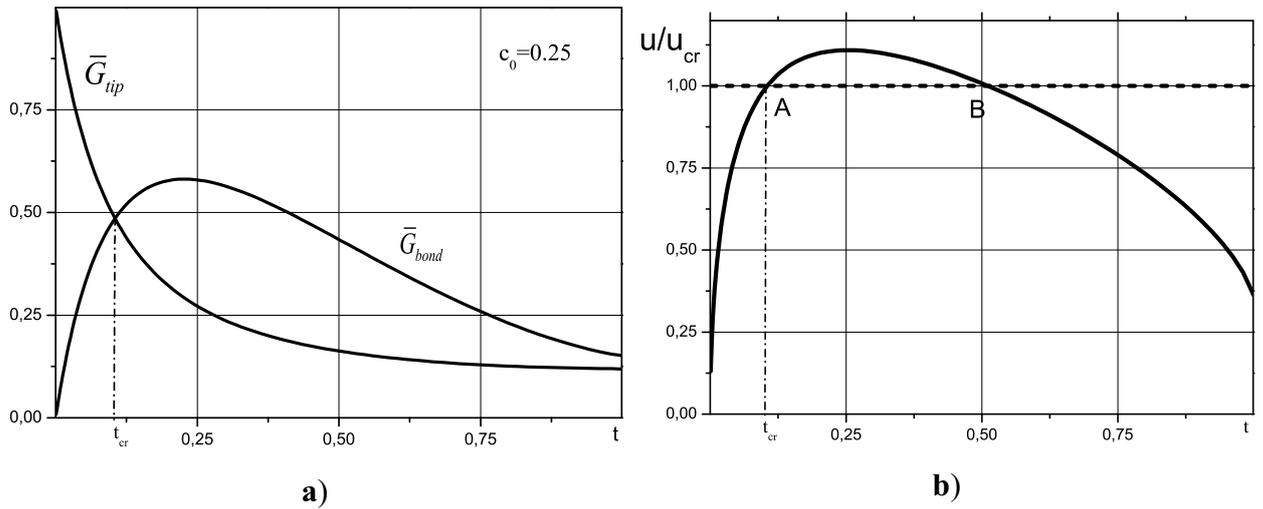


Рис. 5.19. Расчет параметров нелокального критерия разрушения для линейно-упругих связей, $t = d/\ell$. **а)**: Скорость высвобождения энергии деформации и скорость потребления энергии связями, существование решения уравнения (4.27), $t_{cr} = d_{cr}/\ell$ - длина концевой области в состоянии предельного равновесия; **б)**: Раскрытие трещины на краю концевой области, условия критического раскрытия выполняется в точке A; точка B - недопустимый корень.

определение (4.24)) указанный эффект отсутствует.

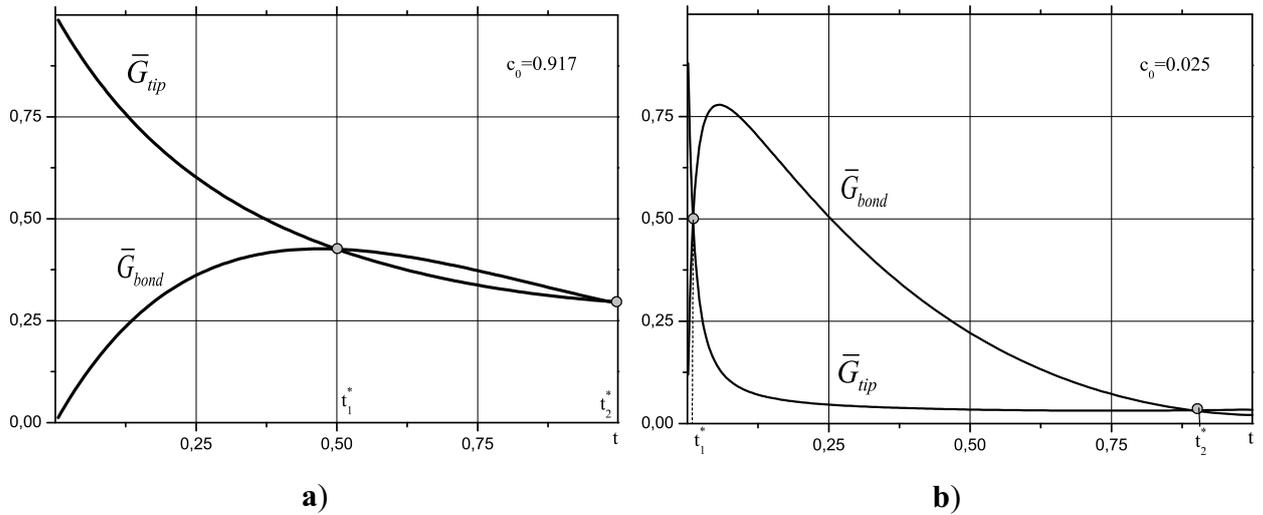


Рис. 5.20. Энергетические характеристики трещины со связями в концевой области: **(а)**- мягкие связи; **(б)**- жесткие связи, t_1^* и t_2^* - два решения уравнения (4.27), $t = d/\ell$

Рассмотрим режимы развития разрушения для трещины с произвольным размером концевой области $0 < d < \ell$, полагая, что существует единственное решение уравнения (4.27). Пусть концевая область трещины $0 < d < d_{cr}$. При монотонно возрастающей внешней нагрузке $G_{tip}(d, \ell) > G_{bond}(d, \ell)$ и раскрытие трещины на краю концевой области не превышает критического значения ($u < u_{cr}$), что соответствует выполнению условий (4.29) (см.

рис. 5.19). Происходит увеличение длины трещины без разрыва связей на краю концевой области. При достижении критического размера концевой области и критической величины внешней нагрузки возможен переход к квазистатическому режиму разрушения, описываемому условиями (4.31). Если задан размер концевой области трещины d такой, что $d_{cr} < d < \ell$, то выполняются условия (4.30), и при монотонном нагружении происходит разрыв связей на краю концевой области, размер концевой области трещины сокращается без продвижения вершины трещины, $d \rightarrow d_{cr}$. Переход к квазистатическому режиму разрушения происходит, так же, как и в первом случае, при достижении критического размера концевой области и критической величины внешней нагрузки.

Рассмотрим применение критерия (4.27)-(4.28) для трещины начальной длины $2\ell = 10^{-3}$ м при наличии в концевой области трещины связей с нелинейной диаграммой деформирования, приведенной на рис. 1.13 (билинейная зависимость, $c_0 = 0.1$, $\lambda = 250$, $\eta = 2$, $\delta = 0.5$, $\sigma_m = 50$ МПа, $u_m = 10^{-7}$ м). Решение системы уравнений (5.11) для линейно-упругих связей во всем диапазоне деформирования ($u_{cr} = 2u_m$) принималось в качестве первого шага итерационного процесса: $d_{cr} \approx 0.041\ell$, и $\sigma_{cr} \approx 25.1$ МПа. В итоге, для билинейной зависимости получено $d_{cr} \approx 0.055\ell$ и $\sigma_{cr} \approx 20$ МПа. На рис. 5.21ab приведены энергетические характеристики трещины как для линейно-упругих, так и нелинейных связей.

При монотонном нагружении начальной трещины, заполненной связями, с билинейной диаграммой деформирования, процесс разрушения начинается с разрыва связей в центре трещины при внешней нагрузке $\sigma_{cr} > \sigma_m$ (ввиду малого коэффициента концентрации напряжений на крайней связи, см. рис. 3.29). Процесс развития разрушения существенным образом зависит от программы нагружения. Для поддержания квазистатического процесса разрушения необходимо снижать величину внешней нагрузки при росте части трещины, свободной от связей.

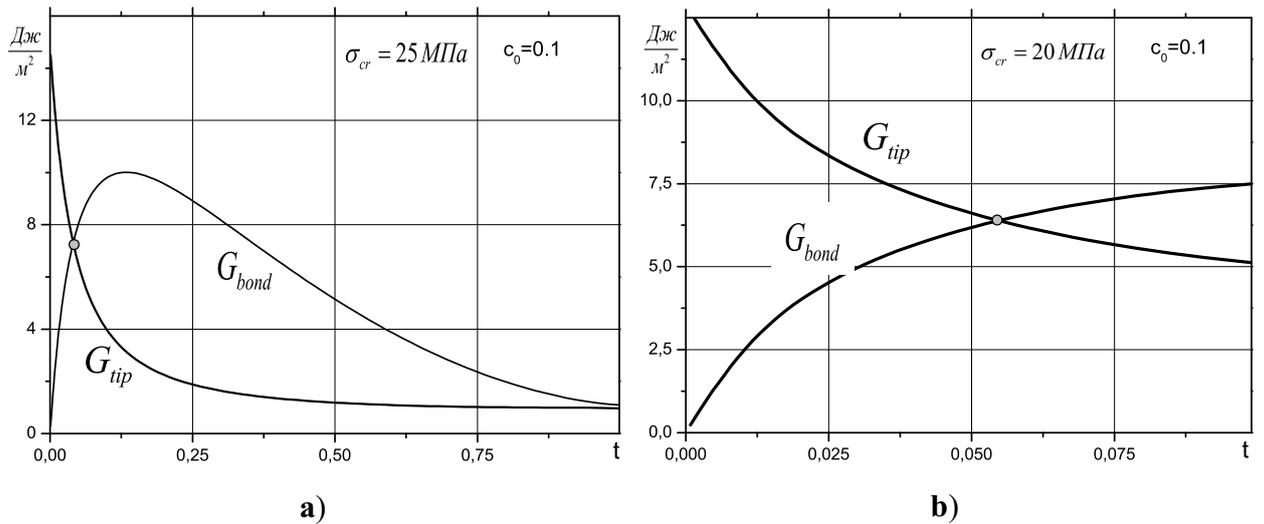


Рис. 5.21. Энергетические характеристики трещины со связями в концевой области: (а)- линейно-упругие связи; (б)- билинейная кривая деформирования связей, $t = d/\ell$

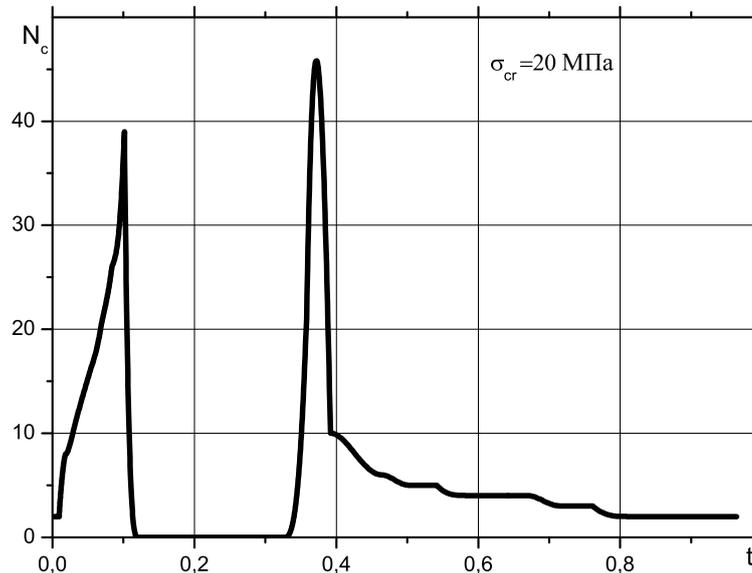


Рис. 5.22. Зависимость числа итераций N_c до достижения сходимости решения от длины концевой области трещины $t = d/\ell$, $\eta = 2$, $\delta = 0.5$

При внешней нагрузке, равной критической для рассматриваемого случая ($\sigma_{cr} \approx 20 \text{ МПа}$), область сходимости итерационного алгоритма решения задачи с нелинейными связями в концевой области показана на рис. 5.22. Если внешняя нагрузка не меньше критической при достижении границы зоны отсутствия сходимости решения, то возможен переход к быстрому развитию трещины до достижения квазистатического равновесия. При монотонном нагружении ($0 < \sigma_0 < \sigma_{cr}$) начальной трещины, свободной от связей, происходит развитие концевой области трещины с достижением ее критической

длины и переходом к квазистатическому разрушению. В этом случае критический размер концевой области не достигает границы зоны отсутствия сходимости решения.

5.2.2. Моделирование трещиностойкости соединений материалов. Линейно-упругие связи

Рассмотрим зависимость параметров предельного равновесия трещины от относительной податливости связей для трещины фиксированной длины ($2\ell = 10^{-3}$ м) при постоянном значении критического раскрытия трещины на краю концевой области, $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$ м. Размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия d_{cr} в случае линейно-упругих связей определяется из уравнения (5.12). Критическая нагрузка, соответствующая началу квазистатического роста трещины, σ_{cr} для заданного размера трещины определяется выражением (5.10). Энергетическая характеристика сопротивления адгезионному разрушению $G_{cr} = G_{bond}(d_{cr}, \ell)$ определяется выражением (5.6) для полученных из критерия предельного равновесия величин d_{cr} и σ_{cr} (одноосное растяжение). Расчеты выполнены для $\nu_1 = \nu_2 = 0$ при определении соотношения между модулями упругости материалов, как и в разделах 3.1.1 и 5.1.1, с использованием выражений (3.2)-(3.3).

Зависимость относительной длины концевой области трещины в состоянии предельного равновесия d_{cr}/d_0 от относительной жесткости связей $k_0 = 1/c_0$ приведена на рис. 5.23а. Здесь параметр d_0 определяется аналогично параметру, введенному ранее при рассмотрении критерия для постоянных напряжений в связях (см. (4.49))

$$d_0 = \frac{\pi E u_{cr}}{8 P_0}$$

Заменяя в этом выражении модуль упругости материала E на $8/A$ (см. (1.6)), а постоянное напряжение в концевой области P_0 - на максимальное значение модуля вектора усилий на краю концевой области при линейно-упругом

законе деформирования связей (см. (1.33) и (1.35))

$$\sigma_f = \frac{E_b}{H} u_{cr}, \quad (5.14)$$

получаем (см. (2.29))

$$d_0 = \frac{\pi H}{AE_b} = \frac{\ell}{2\Psi}, \quad \frac{d_{cr}}{d_0} = 2\Psi \frac{d_{cr}}{\ell} \quad (5.15)$$

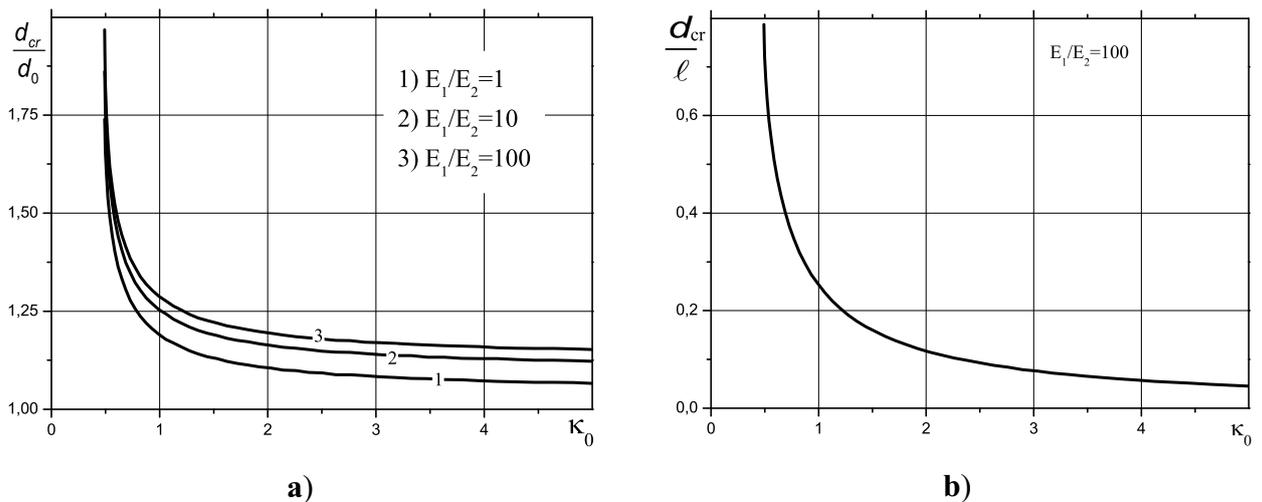


Рис. 5.23. Зависимость длины концевой области трещины от относительной жесткости связей. Нормировка: **(а)** - параметром d_0 ; **(б)** - длиной трещины ℓ , $E_1/E_2 = 100$, $\kappa_0 = 1/c_0$

При выбранных параметрах материалов состояние предельного равновесия трещины с концевой областью существует, если $\kappa_0 \geq 0.49$. Значительное изменение критического размера концевой области наблюдается для относительно мягких связей, $0.49 \leq \kappa_0 \leq 1$. Размер концевой области трещины стремится к постоянной величине, $d_{cr} \approx (1.06 - 1.13)d_0$ при увеличении относительной жесткости связей. Увеличение относительной жесткости материалов E_1/E_2 приводит к возрастанию d_{cr} . Зависимость критического размера концевой области, нормированной полудлиной трещины ℓ , приведена на рис. 5.23б. При $E_1/E_2 = 100$ максимальная длина концевой области в состоянии предельного равновесия составляет $d_{cr} \approx 0.787\ell$.

Зависимость критической внешней нагрузки σ_{cr} , соответствующей началу квазистатического роста трещины, нормированной величиной (5.14), приведена на рис. 5.24. Внешняя критическая нагрузка достигает наиболь-

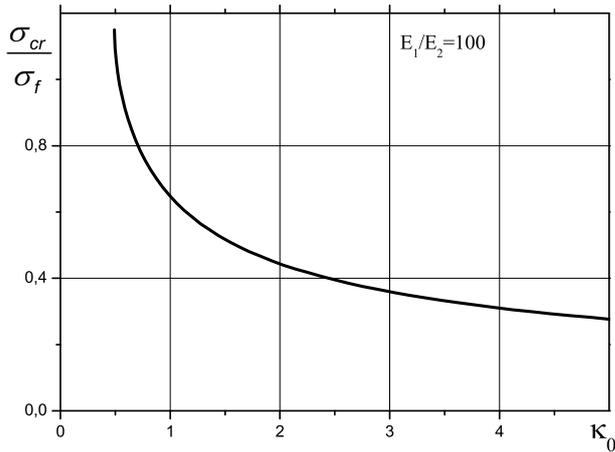


Рис. 5.24. Зависимость растягивающей критической внешней нагрузки от относительной жесткости связей

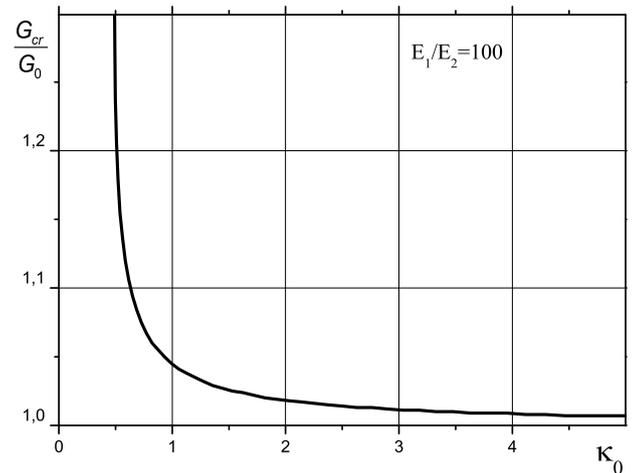


Рис. 5.25. Зависимость энергетической характеристики G_{cr} от относительной жесткости связей

ших значений при мягких связях, т.к. в этом случае усилия в связях относительно невелики (см. рис. 3.4), и для достижения критического раскрытия на краю концевой области необходима значительная внешняя нагрузка. При увеличении жесткости связей критический размер концевой области трещины уменьшается, возрастет коэффициент концентрации усилий на краю концевой области и, соответственно, внешняя критическая нагрузка снижается. Зависимость энергетической характеристики сопротивления адгезионному разрушению $G_{cr} = G_{bond}(d_{cr}, \ell)$ от относительной жесткости связей приведена на рис. 5.25. Нормировка величины G_{cr} выполнена энергетическим параметром G_0 , соответствующим концевой области трещины (см. (1.2)) с линейно-упругими связями

$$G_0 = \int_0^{u_{cr}} \sigma(u) du = 0.5\sigma_f u_{cr} \quad (5.16)$$

Заметное отличие величины G_{cr} от G_0 наблюдается для относительно мягких связей при $0.49 \leq \kappa_0 \leq 1$.

Рассмотрим процесс развития начальной трещины, заполненной связями, для значений относительной податливости связей $0.1 \leq c_0 \leq 0.5$. При монотонном увеличении внешней нагрузки и указанных значениях относи-

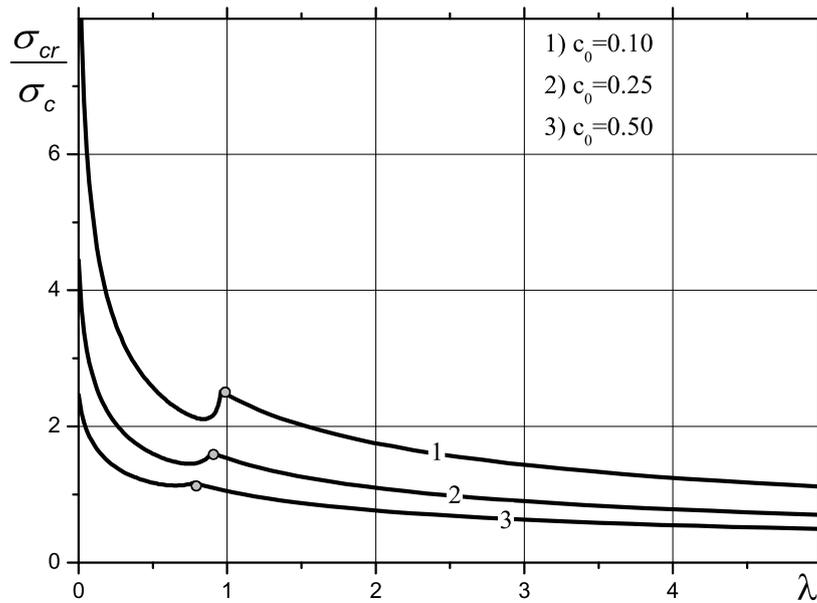


Рис. 5.26. Зависимость критической внешней нагрузки от относительной длины части трещины, свободной о связей, $\lambda = (\ell_c - d)/\ell$

тельной податливости связей выполняется условие (4.30) ($d = \ell$) и процесс разрушения начинается с разрыва связей в центре трещины с сокращением размера концевой области от $d = \ell$ до $d = d_{cr}$ и выполнения условия перехода к квазистатическому росту трещины (4.31). На рис. 5.26 приведены зависимости внешней нагрузки σ_{cr} , нормированной величиной (5.14), при $H = \ell$

$$\sigma_c = \frac{E_b}{\ell} u_{cr} \quad (5.17)$$

от относительной длины части трещины, свободной о связей

$$\lambda = \frac{\ell_c - d}{\ell}, \quad (5.18)$$

где ℓ - начальная длина трещины, ℓ_c - текущая длина трещины, d - размер концевой области. Переход от режима разрыва связей на краю концевой области (без изменения длины трещины) к квазистатическому росту трещины отмечен на рис. 5.26 точками. Например, при $c_0 = 0.1$ (кривая 1) указанному переходу соответствуют $\lambda = 0.959$ и $d = d_{cr} \approx 0.041\ell$.

Для выбранных выше параметров ($2\ell = 10^{-3}\text{м}$, $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}\text{м}$) переходу от режима разрыва связей к режиму квазистатического роста трещины соответствуют следующие характеристики разрушения: а) $c_0 = 0.1$:

$\sigma_{cr} \approx 25.1$ МПа, $G_{bond}(d_{cr}, \ell) \approx 10.1$ Дж/м²; б) $c_0 = 0.25$: $d_{cr} \approx 0.105\ell$, $\sigma_{cr} \approx 16.1$ МПа, $G_{bond}(d_{cr}, \ell) \approx 4.1$ Дж/м²; в) $c_0 = 0.50$: $d_{cr} \approx 0.225\ell$, $\sigma_{cr} \approx 11.7$ МПа, $G_{bond}(d_{cr}, \ell) \approx 2.1$ Дж/м². При квазистатическом развитии трещины происходит заметное уменьшение критической внешней нагрузки (рис. 5.26), а длина концевой области трещины в состоянии предельного равновесия и энергетическая характеристика G_{cr} , изменяются незначительно. Например, для $c_0 = 0.25$ размер концевой области изменяется как $d_{cr} \approx (0.225 - 0.200)\ell$ при изменении длины трещины, соответствующей рис. 5.26.

Рассмотрим процесс квазистатического развития трещины из зоны, заполненной связями, для случая относительно мягких связей при значениях параметра $\Psi > 1.2$, что соответствует нижней границе, при которой существует состояние предельного равновесия трещины с концевой областью, см. рис. 5.17. Для трещины начальной длины 2ℓ первое решение уравнения (5.12) определяется при $\Psi \approx 1.25$, что соответствует (при выбранных для расчета механических свойствах материалов $\nu_1 = \nu_2 = 0$ и определении соотношения между модулями упругости материалов, как в разделах 3.1.1 и 5.1.1) начальной относительной податливости связей $c_0 = H/\ell \approx 2.037$. Зависимости относительной длины концевой области трещины в состоянии предельного равновесия d_{cr}/ℓ от относительной длины трещины

$$\lambda_c = \frac{\ell_c}{\ell},$$

где ℓ - начальная длина трещины, ℓ_c - текущая длина трещины, приведены на рис. 5.27. Критические размеры концевой области для начальной длины трещины следующие: 1) $E_1/E_2 = 1$ - $d_{cr} = 0.695\ell$ и 2) $E_1/E_2 = 100$ - $d_{cr} = 0.787\ell$. Если начальный размер концевой области больше критического ($d_{cr} < d \leq \ell$, предельный случай - зона, заполненная связями), то при монотонном нагружении разрыв связей на краю концевой области начинается при выполнении условия (4.28). При выполнении условия (4.27) происходит переход к квазистатическому развитию трещины, $0 < d \leq d_{cr}$.

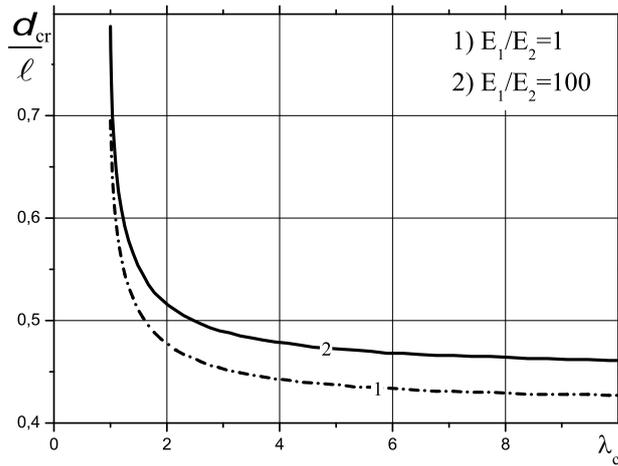


Рис. 5.27. Зависимость длины концевой области трещины в состоянии предельного равновесия от длины трещины

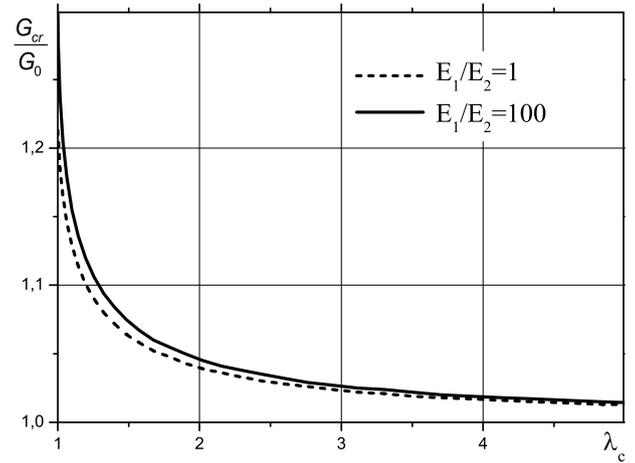


Рис. 5.28. Зависимость энергетической характеристики G_{cr} от длины трещины

Зависимости критической внешней нагрузки от длины части трещины, свободной от связей (5.18), полученные для трещины, заполненной связями, и нормированные величиной (5.14) приведены на рис. 5.29.

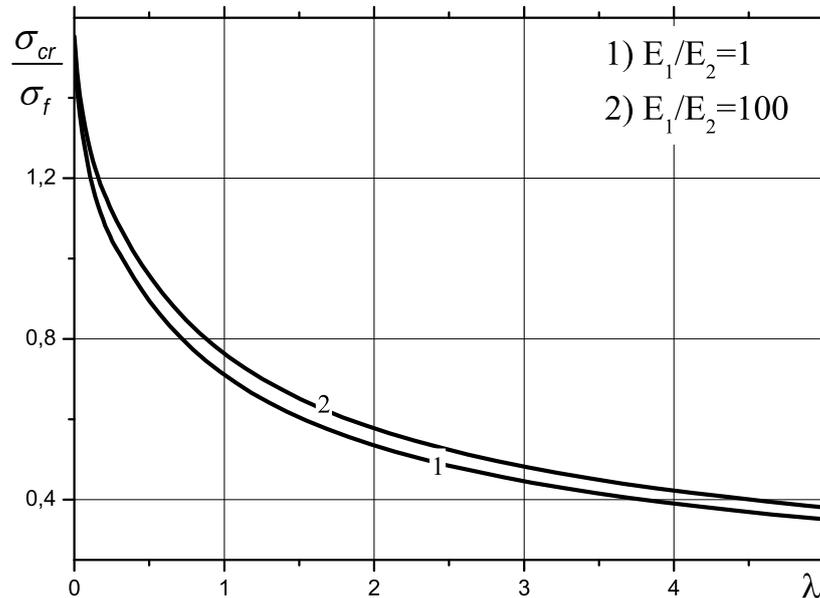


Рис. 5.29. Зависимость критической внешней нагрузки от длины трещины при развитии трещины из зоны, заполненной связями

Изменение относительной жесткости материалов не оказывает заметного влияния на величину критических напряжений. Разрыв связей в центре трещины начинается при $\sigma_{cr}/\sigma_f = 1.522$ ($E_1/E_2 = 1$) и $\sigma_{cr}/\sigma_f = 1.553$ ($E_1/E_2 = 100$), и на промежутке $0 < \lambda < d_{cr}/\ell$ внешнее напряжение опреде-

ляется условием (4.28).

Зависимость внешней нагрузки от длины трещины (кривая квазистатического роста трещины, рис. 5.29) является общей для всех трещин при заданных механических свойствах материалов и связей. Одна из зависимостей, приведенных на рис. 5.29 ($E_1/E_2 = 100$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $2\ell = 10^{-3}\text{м}$) представлена на рис. 5.30 вместе с кривыми докритического развития трещин бóльшей длины, заполненных связями в момент начала нагружения. Начальная относительная податливость связей и критический размер концевой области, при достижении которого начинается квазистатическое развитие начальной трещины, указаны выше при описании рис. 5.29. Для трещин длины $2\ell_i$ ($i = 1, 2, 3$) бóльшей начальной, зависимости внешней критической нагрузки разрыва связей на краю концевой области от длины части трещины, свободной от связей, являются кривыми докритического роста. Этим кривым соответствуют следующие параметры трещины с концевой областью: $\ell_1 = 2.936\ell$, $d_{cr,1} = 0.49\ell$, $c_{0,1} = H/\ell_1 = 0.694$; $\ell_2 = 4.600\ell$, $d_{cr,2} = 0.474\ell$, $c_{0,2} = H/\ell_2 = 0.443$; $\ell_3 = 6.776\ell$, $d_{cr,3} = 0.466\ell$, $c_{0,3} = H/\ell_3 = 0.301$. Заметим, что критические напряжения разрыва связей в центре трещины слабо изменяются при увеличении длины трещины $\sigma_{cr,i}/\sigma_f = 1.136, 1.091, 0.998$, $i = 1, 2, 3$. Напряжения вдоль кривых 1, 2, 3 достигают минимума при определенной длине концевой области трещины, что объясняется так же, как поведение аналогичных кривых на рис. 4.7.

Влияние изменения вдоль концевой области трещины относительной податливости линейно-упругих связей на параметры, характеризующие предельное равновесие трещины с концевой областью, рассмотрено, как и в разделе 3.1.1, на примере функций вида (3.4) для $E_1/E_2 = 100$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Для каждой функции зависимости податливости от координаты вдоль концевой области расчет выполнен при увеличении с ростом трещины параметра Ψ от минимального значения, при котором существует первое решение уравнения (5.12). Для функций вида 1 это значение $\Psi = 2.315$, а для функций вида

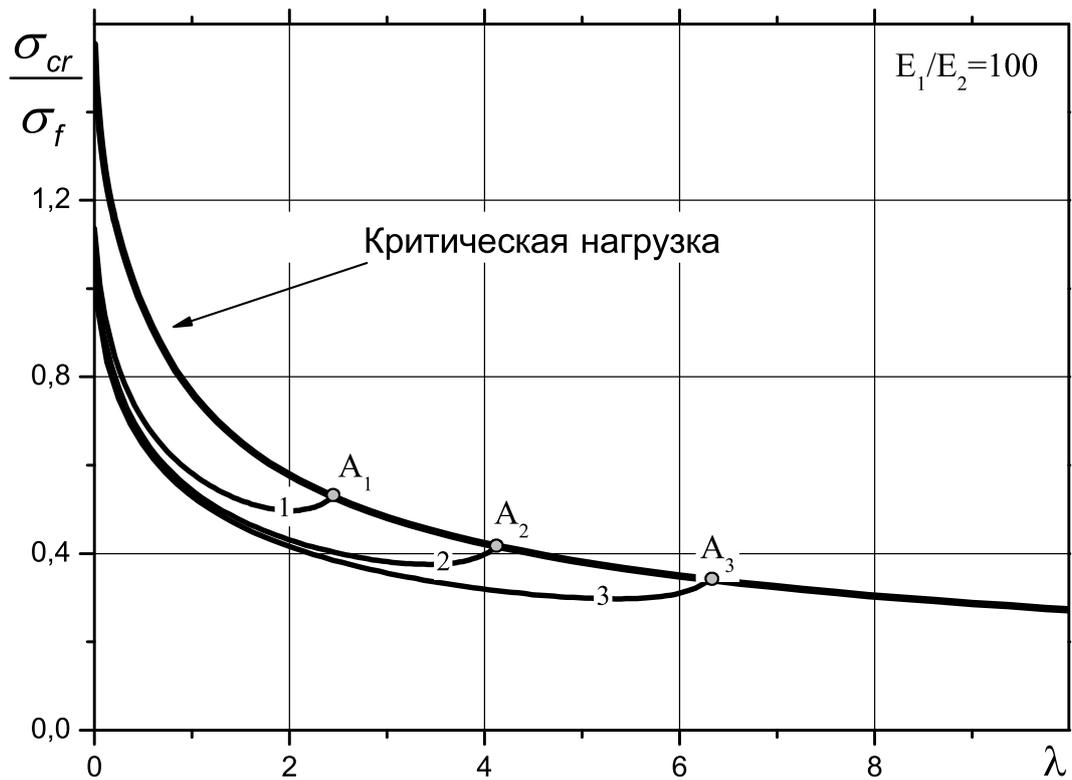


Рис. 5.30. Зависимость критической внешней нагрузки от длины трещины, вариация длины начальной трещины

2 - $\Psi = 0.653$ (см. рис. 3.21). При податливости, постоянной вдоль концевой области трещины, $\Psi = 1.25$ (см. выше). Зависимость критической длины концевой области трещины, нормированной начальной длиной трещины, от относительной длины трещины λ_c приведена на рис. 5.31. Для податливости, возрастающей к вершине трещины, критический размер концевой области достигает минимума при относительно малой длине трещины и возрастает при увеличении длины трещины (кривая 1). Если податливость связей уменьшается к вершине трещины, то критический размер концевой области также уменьшается и при относительно малой длине трещины достигает предельного значения.

Критические напряжения, нормированные величиной (5.17), в зависимости от длины трещины для этих трех случаев представлены на рис. 5.32а. Для функций податливости, постоянных вдоль трещины и возрастающих к вершине трещины, критические напряжения квазистатического роста трещины различаются незначительно. При податливости связей, уменьшающейся

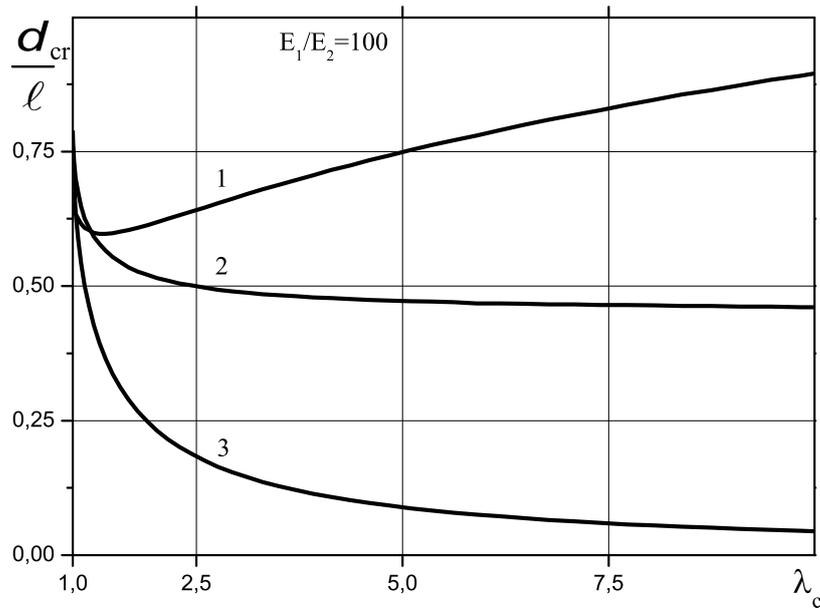


Рис. 5.31. Зависимость критической длины концевой области от длины трещины, 1, 2- см. рис. 3.21, 3- постоянная податливость связей вдоль концевой области трещины

вблизи вершины трещины, напряжения быстро достигают критической величины, т.е. в этом случае разрушающее напряжение практически не зависит от длины трещины (кривая 2).

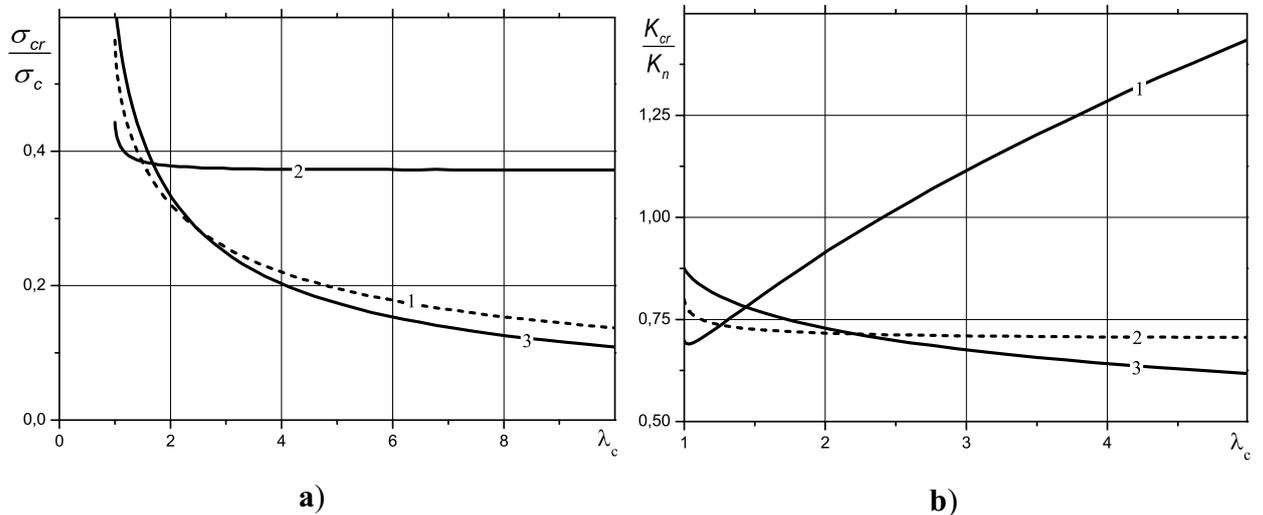


Рис. 5.32. (а)- Критические напряжения и (б) - критические КИН в зависимости от длины трещины, 1, 2- см. рис. 3.21, 3- постоянная податливость связей вдоль концевой области трещины

На рис. 5.32b приведены зависимости от длины трещины критических значений КИН, нормированных величиной K_n , определяемой из равенства

$$\left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_n^2}{16 ch^2(\pi\beta)} = G_c \quad (5.19)$$

где величина G_c определяется аналогично (5.16) с заменой σ_f на σ_c (см. (5.17)). При уменьшении податливости к вершине трещины значения КИН, как и критические размер концевой области и внешняя нагрузка, быстро достигают предельного значения, которое почти не изменяется при квазистатическом росте трещины (кривая 2).

Изложенная выше методика использована для исследования развития трещин на границе соединения различных материалов, соединенных слоем адгезива. Рассмотрены варианты соединений: металл-металл и металл-керамика с полимерным слоем адгезива, в предположении, что толщина слоя адгезива много меньше длины трещины.

Результаты экспериментального исследования трещиностойкости адгезионных соединений и композиционных материалов, подкрепленных волокнами, при различных условиях нагружения приведены в ряде работ, например [288–291].

Для сопоставления расчетных результатов, полученных в данной работе при использовании нелокального критерия разрушения для трещин с концевой областью, использованы материалы работ [289, 290]. Расчеты выполнены для нанокompозита, состоящего из керамической матрицы (Al_2O_3), подкрепленной многостенными углеродными нанотрубками, расположенными в гексагональном порядке и ориентированными вдоль выделенного направления. Методика получения такого нанокompозита на основе пористой керамики с использованием химического осаждения из газовой фазы для формирования нанотрубок и экспериментальные результаты, демонстрирующие эффекты упрочнения при наличии нанотрубок в концевой области трещины, приведены в работе [289], а расчетные оценки трещиностойкости такого материала даны в [290]. Изображения поверхности пористой керамики и нанокompозита с регулярной структурой нанотрубок, полученные методом сканирующей электронной микроскопии, приведены на рис. 5.33, [290]. Оценка трещиностойкости, приведенная в работе [290], выполнена

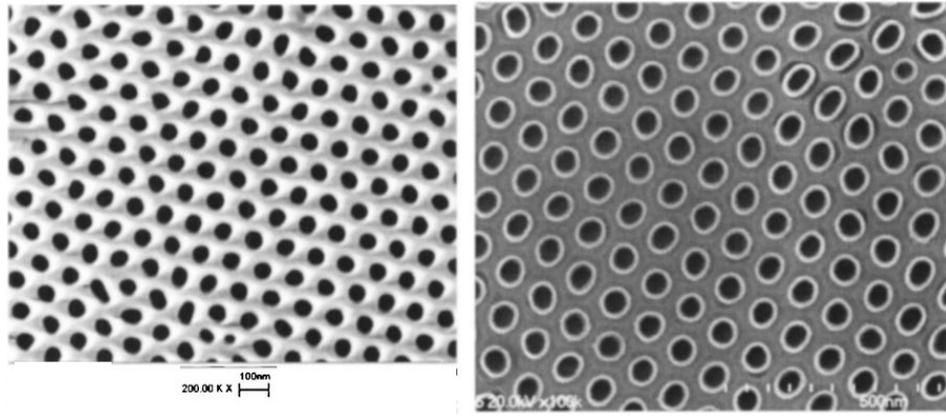


Рис. 5.33. Пористая керамика и гексагональный массив нанотрубок в матрице, из работы [290]

на основе метода конечных элементов для следующих механических свойств материалов: 1) модуль упругости пористой керамики $E_c = 140$ ГПа, 2) модуль упругости многостенных нанотрубок $E_b = 570$ ГПа. Для трещины длины $2\ell = 16.8 \cdot 10^{-6}$ м критическое раскрытие трещины на краю концевой области составляет $u_{cr} = 76 \cdot 10^{-9}$ м. Расчетная оценка трещиностойкости, полученная в [290], для трещины данной длины $K_{Ic} \approx 4.2$ Мпа \cdot м^{0.5}.

Для использования модели концевой области трещины, предложенной в данной работе, заменим дискретный набор волокон-нанотрубок между берегами трещины промежуточным слоем с модулем упругости, соответствующим степени заполнения сечения нанотрубками. По данным [290]: диаметр нанотрубок - $D = 56$ нм, толщина стенки нанотрубки - $t = 4$ нм, расстояние между центрами нанотрубок - $L = 98$ нм (см. также рис. 5.33). С использованием этих данных геометрическая оценка дает модуль упругости связей в концевой области трещины $E_b \approx 200$ ГПа. Будем полагать, что связи в концевой области трещины деформируются упруго до разрыва, см. выражение (1.69), которое представим в форме

$$u = \frac{E_b}{H} \sigma, \quad H = \frac{E_b D}{2E_f \delta \sqrt{\mu_1} \operatorname{th}(\beta_1 L_c)} \quad (5.20)$$

Ввиду отсутствия в работе [290] данных для определения параметра H в (5.20), расчет выполнен при изменении относительной податливости связей в концевой области трещины на промежутке $0.1 \leq c_0 \leq 1$, полагая, что за-

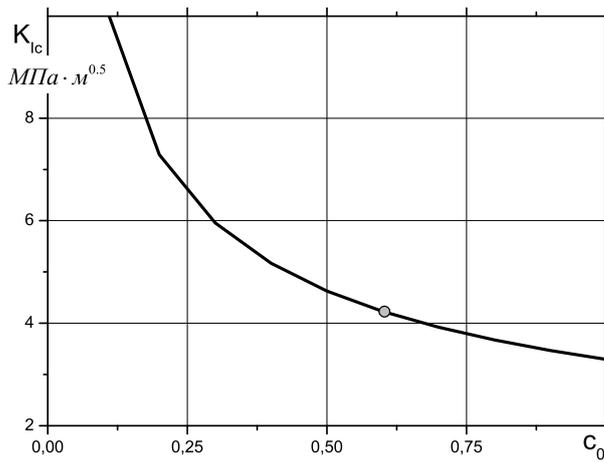


Рис. 5.34. Зависимость трещиностойкости K_{Ic} от относительной податливости связей для нанокompозита

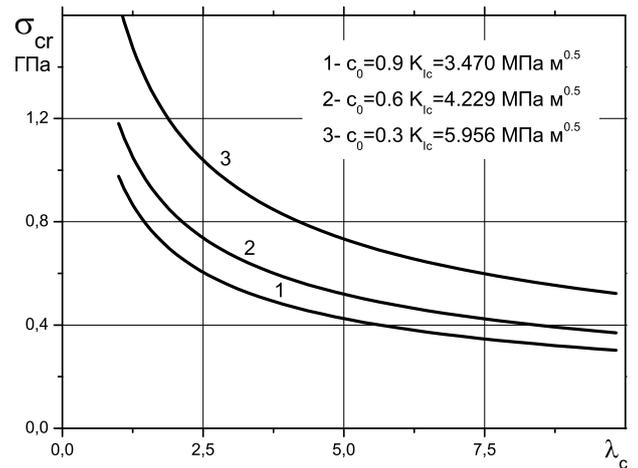


Рис. 5.35. Зависимость критических напряжений от длины трещины

кон деформирования связей в концевой области трещины имеет вид (2.31). Трещиностойкость K_{Ic} определялась из уравнения (5.12) при $K_0 \equiv K_{Ic}$. Зависимость K_{Ic} от относительной податливости связей приведена на рис. 5.34, где точка на графике указывает значение K_{Ic} , полученное в [290], что соответствует относительной податливости связей в концевой области трещины $c_0 = 0.6$ при критическом размере концевой области трещины $d_{cr} \approx 0.1\ell$. В рассмотренном диапазоне значений относительной податливости связей размер концевой области близок к предельному, достигаемому для относительно длинных трещин, слабо зависит от длины трещины и изменяется как $0.016 \leq d_{cr}/\ell \leq 0.173$ при возрастании относительной податливости. Трещиностойкость также соответствует состоянию насыщения и изменяется при росте трещины не более чем на (1-2)%.

С другой стороны, критическое внешнее напряжение существенно изменяется при увеличении длины трещины, (см. рис. 5.35, где приведены зависимости критической внешней нагрузки от длины трещины). Исходя из критической внешней нагрузки $\sigma_{cr} = 1.18$ ГПа для рассматриваемых длины трещины и относительной податливости связей (рис. 5.35, $c_0 = 0.6$), оценим напряжение разрыва нанотрубки в концевой области трещины. Максималь-

ное значение модуля вектора усилий в линейно-упругих связях получим по формуле (3.1). При используемых в расчете механических свойствах материалов и связей $\Psi = 5.517$, тогда $\sigma_m = \sigma_{cr} \sqrt{2\Psi} \approx 3.32$ ГПа. Учитывая соотношение между модулями упругости связей в концевой области трещины и нанотрубок, получаем оценку $\sigma_m = 3.32 * E_c/E_b \approx 10$ ГПа, что удовлетворительно согласуется со значением 15 ГПа, приведенным в работе [290].

5.2.3. Моделирование трещиностойкости соединений материалов. Связи с нелинейной диаграммой деформирования

Рассмотрим эффекты, возникающие при наличии в концевой области трещины связей с нелинейной диаграммой деформирования. Как и в разделе 5.2.1, для анализа используем билинейную зависимость вида (1.77) при следующих механических свойствах материалов и связей: $E_1 = 135$ ГПа, $E_2 = 25$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, $E_b = E_2$ для трещины $2\ell = 10^{-3}$ м. В случае линейно-упругих связей первое решение уравнения (5.12) существует при $c_0 = H/\ell \approx 1.1$ (см. рис. 5.17). При использовании билинейной кривой деформирования связей первое решение уравнения (5.12) существует при $c_0 = H/\ell \approx 0.9$ (см. рис. 5.36).

При заданной длине трещины получаем $H \approx 0.9\ell$. Выбор линейного размера $H = 0.45 \cdot 10^{-3}$ м, модуля упругости связей $E_b = 25$ ГПа и величины раскрытия трещины, соответствующей переходу к нелинейной части кривой деформирования $u_m = 10^{-7}$ м, а также параметров $\eta = 2$, $\delta = 0.5$ (см. раздел 1.3.3), определяет билинейную зависимость с напряжением, соответствующим изменению закона деформирования $\sigma_m = u_m E_b / H \approx 5.56$ МПа, см. рис. 5.37, где также показана зависимость, соответствующая упругому деформированию связей до разрыва при $u = u_{cr}$ и $\sigma_m \approx 1.11$ МПа. Для данной кривой деформирования связей в результате решения системы уравнений (5.11) получаем критический размер концевой области трещины $d_{cr} = 0.731\ell$

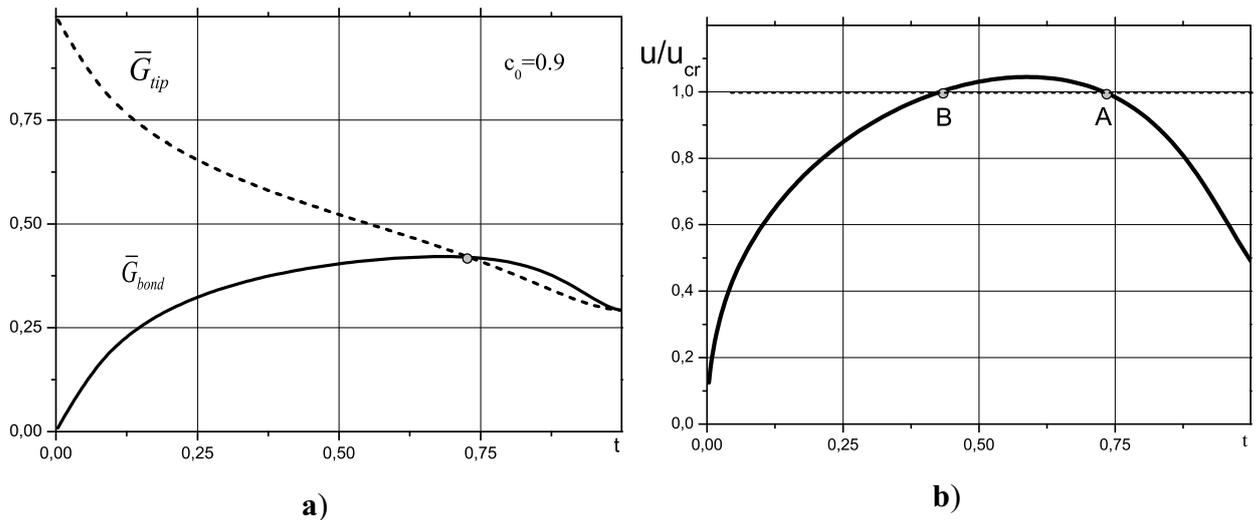


Рис. 5.36. Расчет параметров нелокального критерия разрушения для связей с билинейным законом деформирования, $t = d/\ell$, **а**): Скорость высвобождения энергии деформации и скорость потребления энергии связями, $t_{cr} = d_{cr}/\ell$ - длина концевой области в состоянии предельного равновесия; **б**): Раскрытие трещины на краю концевой области, условие критического раскрытия выполняется в точке А; точка В - недопустимый корень

(см. рис. 5.36) и величину критической внешней нагрузки $\sigma_{cr} = 7.83$ МПа. Параметры кривой деформирования связей сохранялись неизменными при увеличении длины трещины. При неизменном линейном размере H это соответствует уменьшению относительной податливости связей, которая изменялась от $c_0 = 0.9$ до $c_0 = 0.225$ при увеличении начальной трещины в четыре раза.

В случае билинейной кривой деформирования (рис. 5.37) получаем энергетическую характеристику G_b (площадь под кривой деформирования связей)

$$G_b = \int_0^{u_{cr}} \sigma(u) du = 0.5\sigma_m u_m (1 + (\eta - 1)(\delta + 1)) \quad (5.21)$$

Для билинейной зависимости из выражения 5.21 получаем $G_b = 0.71$ Дж/м², а при линейно-упругом деформировании до разрыва связей - $G_b = 1.11$ Дж/м². Зависимости энергии разрушения от относительной длины трещины для билинейной кривой деформирования связей в концевой области трещины и линейно-упругого деформирования связей до разрыва приведены на рис. 5.38. Заметное отличие от предельного значения, определяемого выражением (5.21),

наблюдается при $\lambda_c < 1$.

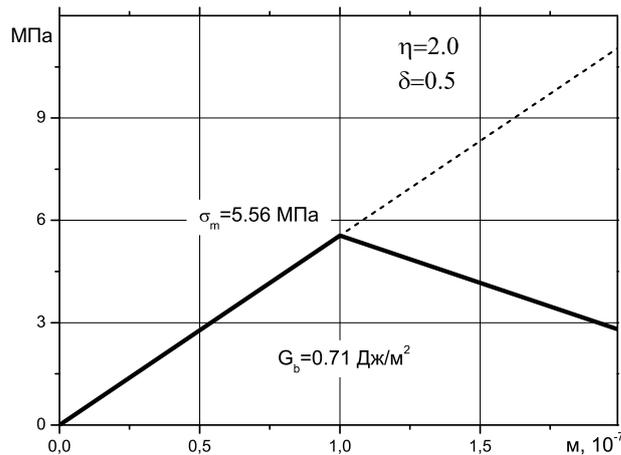


Рис. 5.37. Билинейный и линейно-упругий законы деформирования связей, $H = 0.45 \cdot 10^{-3}$ м, $u_{cr} = 2u_m$, $\delta = 0.5$

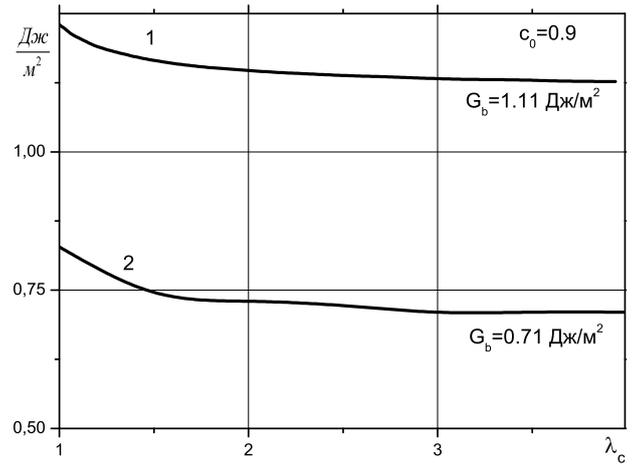


Рис. 5.38. Зависимость энергетической характеристики трещиностойкости от длины трещины, 1-линейные связи, 2-билинейная кривая

При нелинейном законе деформирования связей критический размер концевой области трещины примерно на 30% превышает величину, соответствующую линейно-упругому закону деформирования связей, см. рис. 5.39, где представлены зависимости критического размера концевой области от длины трещины для двух законов деформирования связей. Величина критической внешней нагрузки при нелинейном законе деформирования связей примерно на 15% меньше критической нагрузки при линейно упругих связях в концевой области трещины, см.рис. 5.40, где приведены соответствующие зависимости также для двух законов деформирования связей.

Следующая серия расчетов выполнена при фиксированных длине трещины $2\ell = 10^{-3}$ м, параметрах убывающей ветви билинейной зависимости, использованных выше ($\eta = 2$, $\delta = 0.5$, $u_m = 10^{-7}$ м), и изменении относительной податливости связей на линейно-упругом участке деформирования.

Соответствующие билинейные зависимости для $c_0 = 0.1; 0.075; 0.05$ приведены на рис. 1.13. При уменьшении относительной податливости связей уменьшается линейный размер H и, соответственно, возрастает максимально допустимое упругое напряжение в связях. В таблице 5.2 приведены

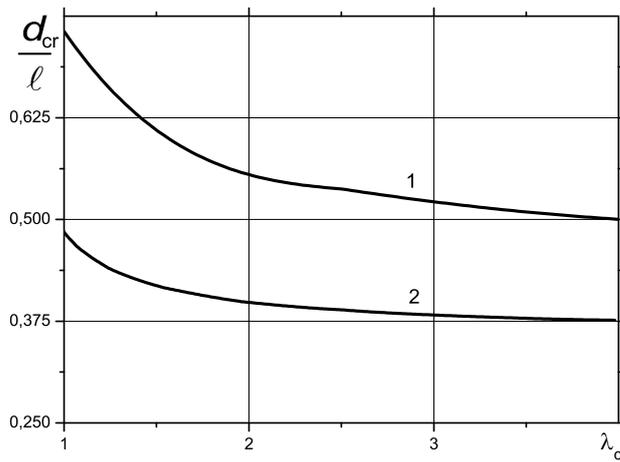


Рис. 5.39. Зависимость критического размера концевой области от относительной длины трещины, 1-билинейная кривая, 2-линейные связи

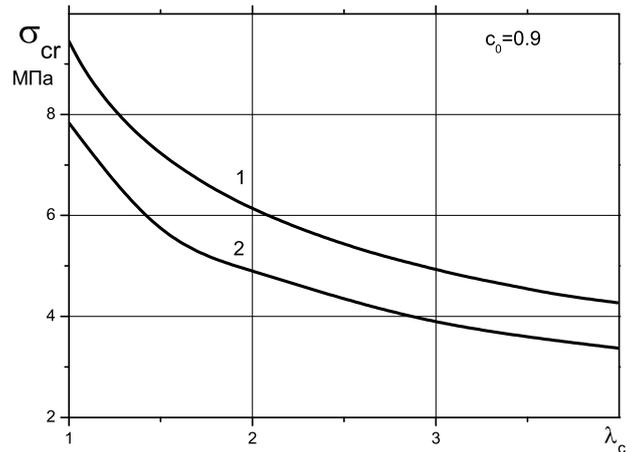


Рис. 5.40. Зависимость критической внешней нагрузки от относительной длины трещины, 1-линейные связи, 2-билинейная кривая

Таблица 5.2. Зависимость параметров разрушения от относительной податливости связей c_0 , А- линейно-упругие связи; В - билинейный закон деформирования связей

c_0	d_{cr}/ℓ		σ_{cr} , МПа		G_{cr} , Дж/м ²	
	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3
0.100	0.041	0.055	25.16	20.00	10.06/10.0	6.37/6.25
0.075	0.030	0.040	29.00	23.00	13.39/13.34	8.45/8.33
0.050	0.020	0.026	35.44	28.40	20.06/20.00	12.70/12.50

результаты расчетов для линейно-упругих связей и билинейного закона деформирования связей. Использованные в расчете значения относительной податливости соответствуют достаточно высокой жесткости связей на начальном линейно-упругом участке деформирования. Ввиду этого, получены малые критические размеры концевой области трещины. В столбцах, помеченных как A_i , $i = 1, 2, 3$, даны результаты линейного расчета, а в столбцах, помеченных как B_i , $i = 1, 2, 3$ - результаты расчета с использованием билинейной зависимости. В столбцах A_3 и B_3 приведены значения адгезионной энергии разрушения, полученные в расчете, (числитель) и определенные по формуле (5.21) (знаменатель). Уменьшение относительной податливости связей приводит к уменьшению критического размера концевой области трещи-

ны, увеличению критического внешнего напряжения и адгезионной энергии разрушения. Ввиду малого критического размера концевой области трещины значения адгезионного энергии разрушения, полученные расчетным путем и по формуле (5.21), отличаются незначительно. Изменения параметров разрушения при использовании билинейной кривой деформирования связей свидетельствуют о снижении трещиностойкости соединения материалов при преобладании в адгезионном соединении связей такого вида.

Влияние степени полимеризации на трещиностойкость соединений полимеров исследована с использованием методики получения кривых деформирования связей в адгезионном слое между различными материалами. Связи являются однозвенными и многозвенными и образованы молекулами полимера-усилителя адгезии, см. раздел 1.3.1. Полагаем, что на границе соединения материалов имеется трещина-дефект длины $2\ell = 10^{-6}\text{м}$, заполненная связями. Кривые деформирования связей для степени полимеризации $N = 300, 500, 800, 1000$ получены при допущении, что при изменении степени полимеризации жесткость участка полимерной цепи между берегами трещины не изменяется и при следующих значениях исходных данных: 1) $T = 433^\circ\text{K}$; 2) $R_1 = 1 \cdot 10^{18}\text{м}^{-2}$; 3) $\alpha = 0.3$; 4) $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-9}\text{м}$; 5) $S = 0.005\text{ Н/м}$; 6) $f_{cr} = f^*$ (см. описание параметров в разделе 1.3.1). При постоянной жесткости молекулярных связей величина u_m , определяющая изменение закона деформирования, является постоянной при возрастании степени полимеризации (см. рис. 5.41). Из выражения (1.49) получаем $u_m = 2.39\text{ нм}$. Отметим, что удельная жесткость связей в концевой области трещины возрастает при увеличении степени полимеризации, см. (1.46). Для рассмотренных значений степени полимеризации принимаем, что критическое раскрытие на краю концевой области трещины является постоянным: $u_{cr} = 10 u_m$. Для каждой кривой деформирования полимерных связей площадь (G_b) под соответствующей кривой (рис. 5.41), находим исходя из аналитического описания кривых деформирования (1.50), которое в данном

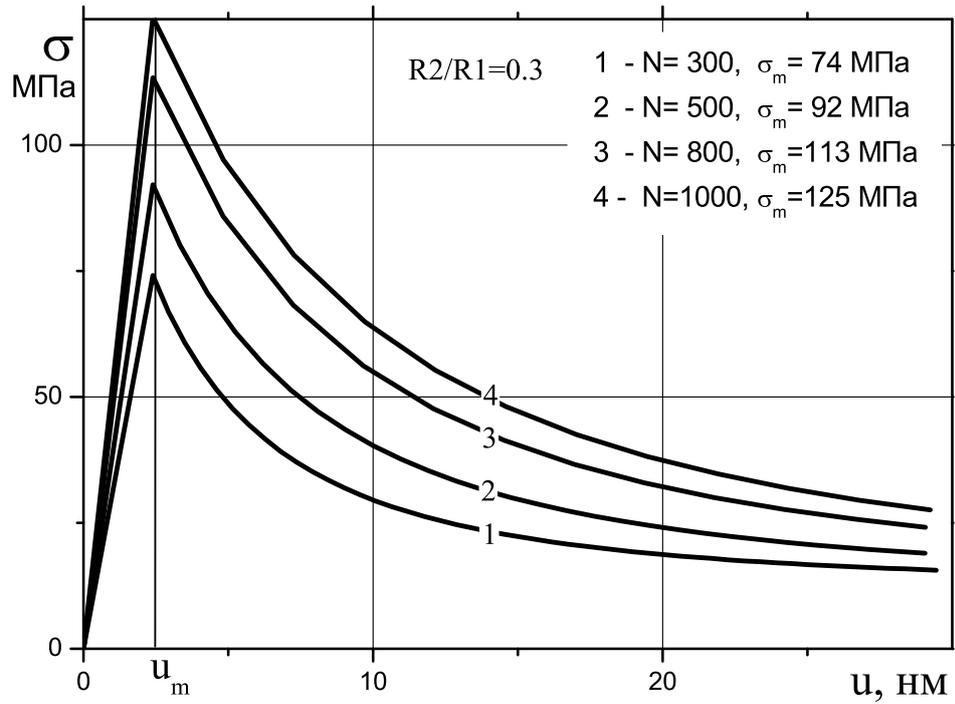


Рис. 5.41. Кривые деформирования связей в концевой области трещины, $u_m = 2.39$ нм

случае принимает форму

$$\sigma(u) = \begin{cases} SR_1(1 + \alpha \sqrt{N})u, & u < u_m \\ f^* R_1 \left(1 + \frac{\alpha \sqrt{N}}{\left(1 + \frac{u-u_m}{h^*}\right)^2} \right), & u_m \leq u \leq u_{cr} \end{cases} \quad (5.22)$$

Получаем

$$G_b = \int_0^{u_{cr}} \sigma(u) du = 0.5\sigma_m u_m + f^* R_1 (u_{cr} - u_m) \left[1 + \frac{\alpha \sqrt{N}}{1 + \frac{u_{cr}-u_m}{h^*}} \right], \quad (5.23)$$

где

$$\sigma_m = SR_1(1 + \alpha \sqrt{N})u_m$$

Для каждого значения степени полимеризации (кривой деформирования связей) выполнялся поиск состояния предельного равновесия трещины заданной длины. При возрастании степени полимеризации критический размер концевой области трещины уменьшается (см. рис. 5.42), что связано увеличением жесткости связей. Внешняя критическая нагрузка

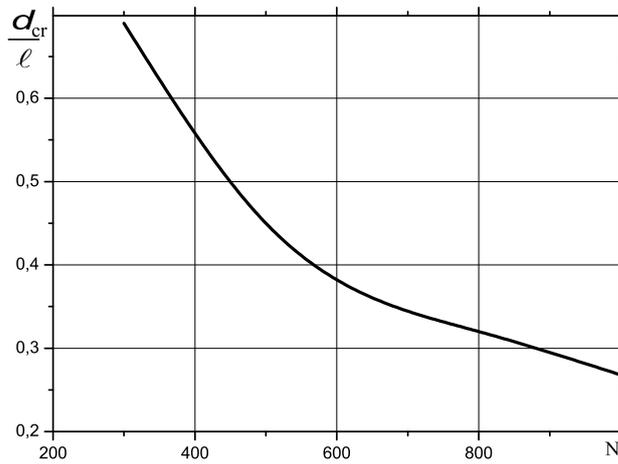


Рис. 5.42. Зависимость критического размера концевой области трещины от степени полимеризации N

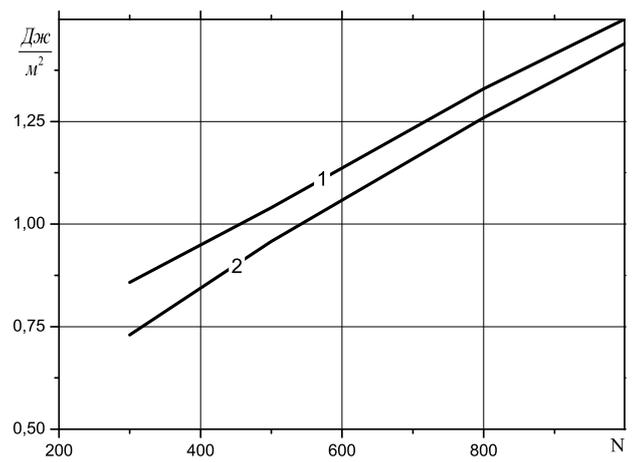


Рис. 5.43. Зависимость энергетической характеристики G_{cr} от относительной от степени полимеризации N

($70 \text{ МПа} \leq \sigma_{cr} \leq 92 \text{ МПа}$) и адгезионная энергия разрушения в состоянии предельного равновесия линейно возрастают при увеличении степени полимеризации, что качественно согласуется с результатами работы [292]. Величина адгезионной энергии разрушения, полученная в расчете примерно на (15-20)%, больше, полученной по формуле (5.23), см. рис.5.43.

Методика формирования кривых в концевой области трещины, исходя из структуры молекулы полимера, является многопараметрической и позволяет строить микромеханические модели разрушения и анализировать влияние различных факторов на прочность и трещиностойкость соединений материалов. В частности, методика использована для исследования трещиностойкости соединений вида полимер-полимер, полимер-металл и полимер-керамика в предположении, что соединительный слой содержит молекулы полимера-усилителя адгезии с однозвенными и многозвенными связями.

5.3. Кинетика связей в концевой области трещины. Формирование дефектов на границе соединения материалов

В разделе представлены примеры использования кинетической модели термофлуктуационного разрушения в сочетании с моделью концевой области трещины для анализа формирования дефектов на границе соединения материалов. Методические расчеты выполнены в предположении, что соединение материалов образовано парой металл-полимер. Внешняя нагрузка полагалась неизменной во времени. Долговечность связей в концевой области трещины (и, в итоге, долговечность соединения материалов) определяется с учетом неоднородного распределения напряжений в концевой области трещины. В результате серии расчетов при различных внешних нагрузках получена зависимость времени образования дефекта от величины приложенного напряжения, которая качественно согласуется с известными экспериментальными результатами для макроскопических образцов. Получены оценки величин внешних напряжений, соответствующих случаю длительной прочности рассматриваемого составного образца и случаю мгновенного разрушения образца. Расчеты выполнены с использованием разработанных компьютерных программ для решения сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений.

5.3.1. Анализ термофлуктуационной модели кинетики связей в концевой области трещины

Применение методики расчета кинетики связей в концевой области трещины, основанной на термофлуктуационной модели разрушения, рассмотрим на примере трещины, заполненной связями (зоны ослабленных связей на границе соединения материалов). Расчеты выполнены для соединения материалов, типичных для изделий микроэлектроники [8]: один из материалов – металл (сплав на основе меди) с модулем упругости $E_1 = 130$ ГПа, а другой

- полимер на основе эпоксидной смолы с модулем упругости $E_2 = 2$ ГПа, коэффициенты Пуассона материалов $\nu_1 = 0.3$ и $\nu_2 = 0.35$, соответственно; модуль упругости связей $E_b = E_2$, размер зоны ослабленных связей, расположенной вдоль границы соединения материалов, $2\ell = 10^{-5}$ м. Закон деформирования связей в процессе расчета принимаем линейно-упругим с податливостью, постоянной вдоль зоны ослабленных связей в начальный момент времени.

При использовании термофлуктуационной модели кинетики связей в концевой области трещины для расчета необходимы, помимо механических свойств материалов и связей, дополнительные исходные данные, характеризующие физические свойства связей. Расчет кинетических зависимостей выполнялся при следующих значениях параметров [182, 185]: базовая температура расчета $T = 350$ К, $qN_A = 8,3$ Дж/моль \cdot К (см. выражение (1.89)), энергия активации разрыва молекулярных связей $U_M = 150$ КДж/моль, $\tau_0 = 10^{-12}$ с, $\mu = 1$, начальная плотность связей вдоль концевой области трещины принималась по данным [170] $n_0 = 10^{18}$ м $^{-2}$. Полагаем, что связи образованы цепями полимерных молекул с размером мономерного звена молекулы $a_m = 10^{-9}$ м. Предельное значение плотности связей на участке образования начального дефекта полагалось равным $n_{cr} = 0.1n_0$. Внешняя растягивающая нагрузка являлась неизменной во времени, $\sigma_0(t) = const$.

Расчет кинетических параметров модели и напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины выполняется в соответствии с алгоритмом, изложенным разделе 2.2.3 - на первом шаге по времени определяются: а) распределение усилий в связях при линейно-упругом законе деформирования связей; б) кинетические параметры связей вдоль концевой области трещины (см. выражения (2.94) и (2.96)); с) вычисляется модифицированная податливость связей вдоль концевой области трещины (2.95) и выполняется переход к следующему временному шагу.

Расчет прекращается при выполнении соответствующего критериаль-

ного условия. При использовании критерия предельной плотности связей полагается, что это условие выполняется на участке длиной $\ell_f = 0.1\ell$, прилегающем к краю концевой области.

Рассмотрим результаты расчета кинетических параметров связей для трещины, заполненной связями в начальный момент времени, с использованием критерия предельной плотности связей.

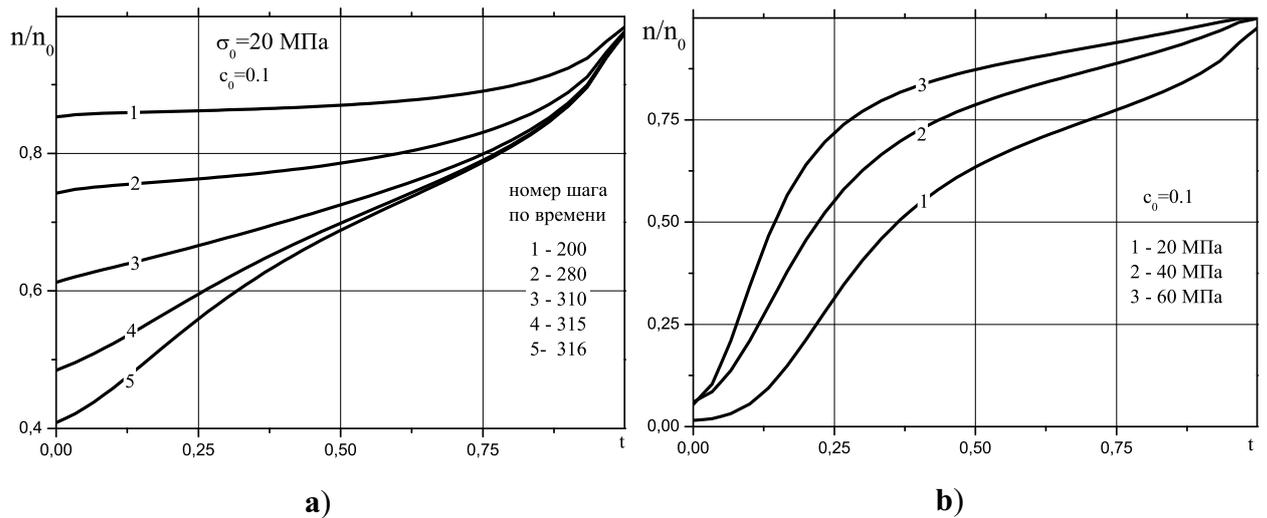


Рис. 5.44. Распределение относительной плотности связей вдоль концевой области трещины: **(а)**- нагрузка 20 МПа, процесс формирования дефекта; **(б)** - распределения после окончания расчета, $t = x/\ell$

Распределения относительной плотности связей на участке $0 \leq t \leq x/\ell$ в процессе формирования дефекта-трещины, свободной от связей, при внешнем напряжении $\sigma_0 = 20$ МПа и относительной податливости связей $c_0 = 0.1$ представлены на рис. 5.44а. При указанной нагрузке критериальное условие выполняется после 318 шагов по времени, размер шага - $\Delta t = 2 \cdot 10^6$ с. Большую часть времени до образования дефекта распад связей вдоль концевой области является незначительным (см. рис. 5.44а), существенное ускорение распада связей на краю концевой области реализуется на последних шагах по времени, что связано с увеличением податливости связей и, соответственно, увеличением работы по деформированию связей.

Распределения относительной плотности связей после окончания расчета при различных внешних нагрузках $\sigma_0 = 20; 40; 60$ МПа и относительной

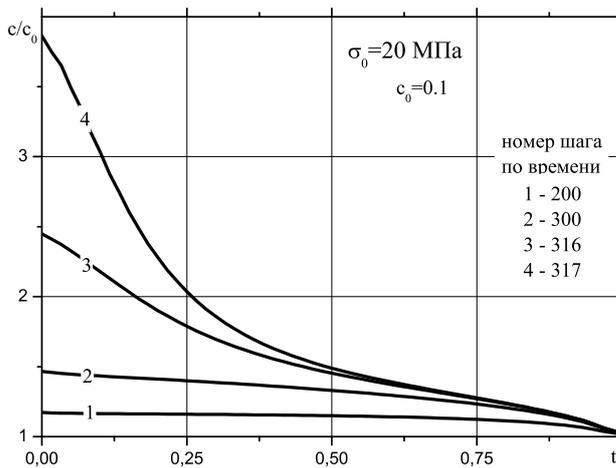


Рис. 5.45. Распределение относительной податливости связей вдоль концевой области трещины, $t = x/\ell$

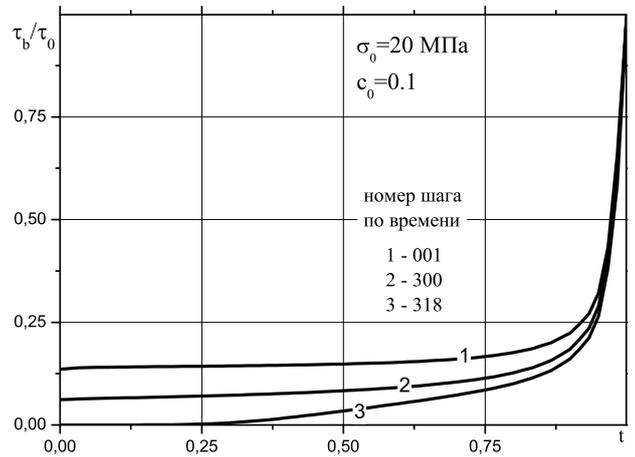


Рис. 5.46. Распределение относительной долговечности связей вдоль концевой области трещины, $t = x/\ell$

податливости связей $c_0 = 0.1$ представлены на рис. 5.44b. При относительно невысоких уровнях внешней нагрузки ($\sigma_0 \leq 20$ МПа) плотность связей меняется вдоль всей зоны ослабленных связей, и к моменту выполнения условия (2.98) зона, в которой это условие выполняется, превышает размер предполагаемого дефекта. Возрастание внешней нагрузки после образования дефекта такого размера может привести к быстрому росту трещины-дефекта. Время, за которое достигается необходимое снижение плотности связей $t_f > 10^8$ с, и, таким образом, нагрузка $\sigma_0 \sim 20$ МПа характеризует длительную прочность составной конструкции.

При средних уровнях нагрузки ($40 \text{ МПа} \leq \sigma_0 \leq 60 \text{ МПа}$) время образования начального дефекта существенно сокращается и составляет $t_f \approx 5.0 \cdot 10^7$ с. Снижение плотности связей происходит относительно медленно и, фактически, вплоть до момента времени t_f , при котором выполняется условие (2.98), плотность связей вдоль всей зоны остается достаточно большой. При возрастании внешней нагрузки этот эффект проявляется более сильно. Заметим, что в точке $x = \ell$, где $u(\ell, t) = 0$, распад связей происходит только по термофлуктуационному механизму. При высоких уровнях нагрузок, ввиду малости t_f , в вершине зоны ослабленных связей не происходит заметного

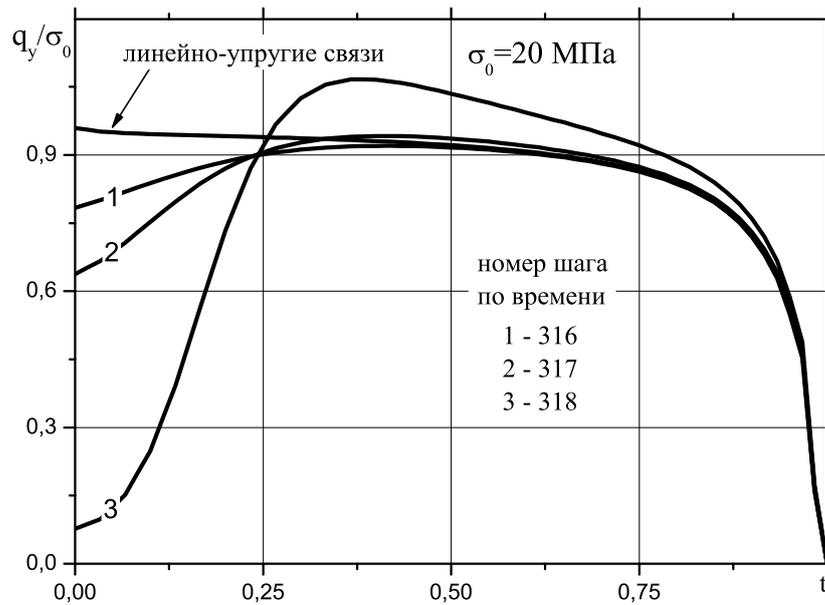


Рис. 5.47. Релаксация напряжений в концевой области трещины, $d = \ell$, $t = x/\ell$

распада связей (см. рис. 5.44b). При относительно низких нагрузках значительный распад связей происходит и вблизи вершины зоны. В этом случае естественно предположить, что одновременно с образованием начального дефекта происходит развитие зоны ослабленных связей.

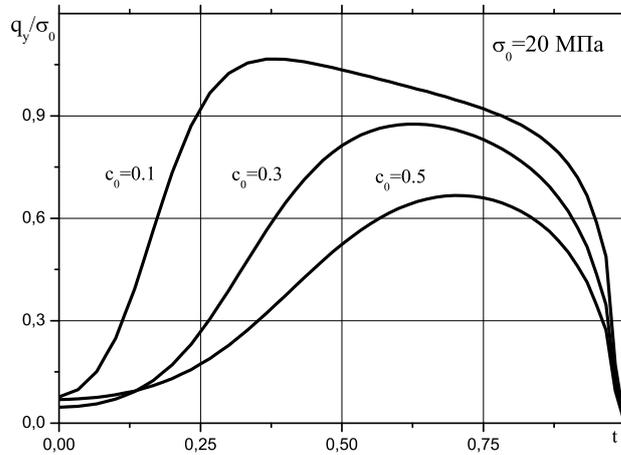


Рис. 5.48. Релаксация напряжений в концевой области трещины при различной начальной податливости связей, $d = \ell$, $t = x/\ell$

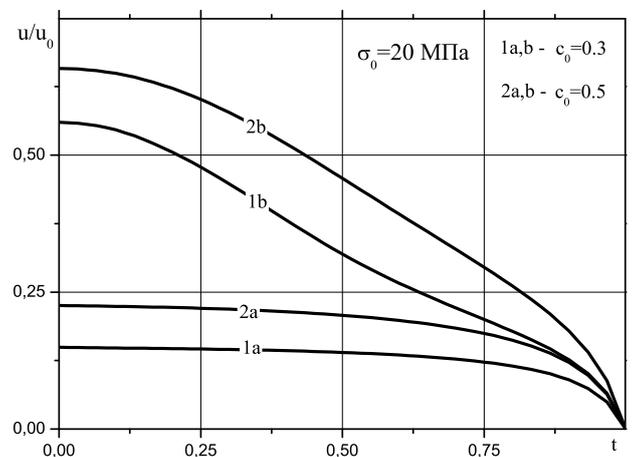


Рис. 5.49. Изменение раскрытия трещины при распаде связей, $t = x/\ell$

При решении СИДУ изменение плотности связей вдоль концевой области трещины моделируется переменной податливостью связей. Соответственно с изменением плотности связей, податливость связей слабо меняется большую часть времени и значительно возрастает на последних шагах по

времени. На рис. 5.45 представлены распределения относительной податливости связей (функции γ , см. (1.33)) для нескольких шагов по времени, включая предпоследний шаг расчета $m = 317$. Максимальное значение относительной податливости на краю концевой области на этом шаге - $c/c_0 \approx 4$. На последнем шаге расчета плотность связей на участке $\ell_f = 0.1\ell$ мала (см. рис. 5.44b) и максимальное значение относительной податливости на краю концевой области достигает величины $c/c_0 \approx 66$.

Долговечность связей вдоль концевой области трещины (см.(2.94)) определяется в процессе вычисления относительной податливости, учитывающей изменение плотности связей. На рис. 5.46 приведены распределения относительной долговечности связей вдоль концевой области трещины (τ_0 определяется в (1.88)). При линейно-упругом решении без учета кинетики связей $\tau_b/\tau_0 = 1$ распределение, соответствующее первому шагу 001, вычисляется с учетом кинетики связей после линейно-упругого решения. Заметное изменение долговечности связей наблюдается на последних шагах решения.

Распад связей в концевой области трещины приводит к увеличению податливости связей и снижению усилий в связях (релаксации напряжений). Распределения модуля вектора усилий в связях вдоль концевой области трещины приведено на рис. 5.47. Значительная релаксация усилий в связях происходит на последних шагах решения, в соответствии с нарастанием податливости связей вдоль концевой области трещины.

Возрастание начальной относительной податливости связей в концевой области трещины приводит к снижению усилий в связях, см. раздел 3.1.1. При неизменной внешней нагрузке это приводит к увеличению времени распада связей до выполнения критериального условия и расширению части концевой области трещины, в которой происходит существенный распад связей и релаксация напряжений (см. рис.5.48). При уменьшении плотности связей и, соответственно, увеличении их податливости происходит рост раскрытия трещины (см. рис.5.49), что, при достижении величины крити-

ческого раскрытия, приводит к началу разрыва связей в центре трещины.

5.3.2. Формирование трещин из зоны ослабленных связей на границе соединения материалов

Будем называть временем образования начального дефекта время формирования части трещины длины ℓ_f , свободной от связей, на краю зоны ослабленных связей, $|x| \leq \ell$. В итоге, длина концевой области трещины сокращается и становится равной $d = \ell - \ell_f$. Зависимости времени образования начального дефекта ($t_0 = 1c$ здесь и далее) от размера концевой области трещины при различных значениях начальной относительной податливости связей ($\sigma_0 = 10$ МПа) приведены на рис. 5.50. При каждом значении относительной длины концевой области d/ℓ размер зоны, свободной от связей, полагался равным $\ell_f = 0.1d(0)$ и рассматривался как один шаг приращенния длины дефекта ($0.1d(0)$ - размер концевой области трещины при начале расчета).

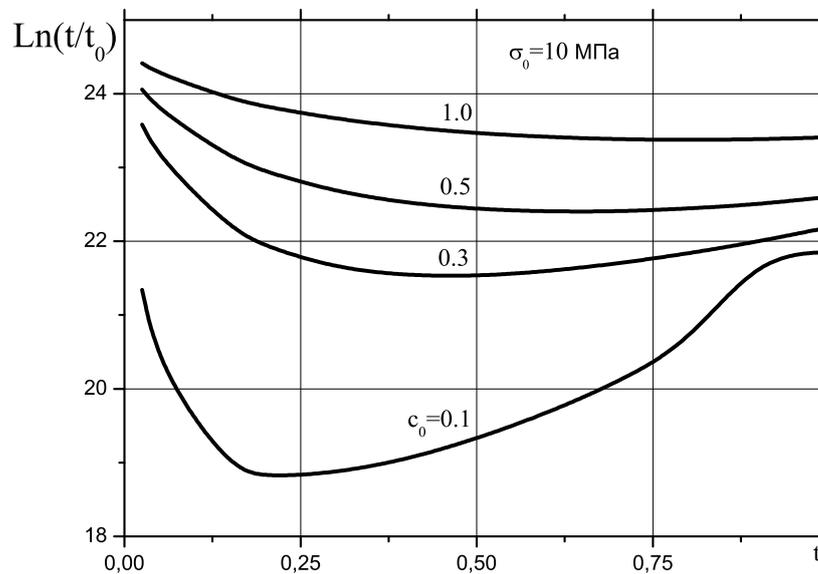


Рис. 5.50. Зависимость времени образования начального дефекта от длины концевой области трещины при начале расчета, $t = d/\ell$

Ход кривых на рис. 5.50 соответствует зависимостям на рис. 3.4: а) для концевых областей с бóльшим коэффициентом концентрации напряжений

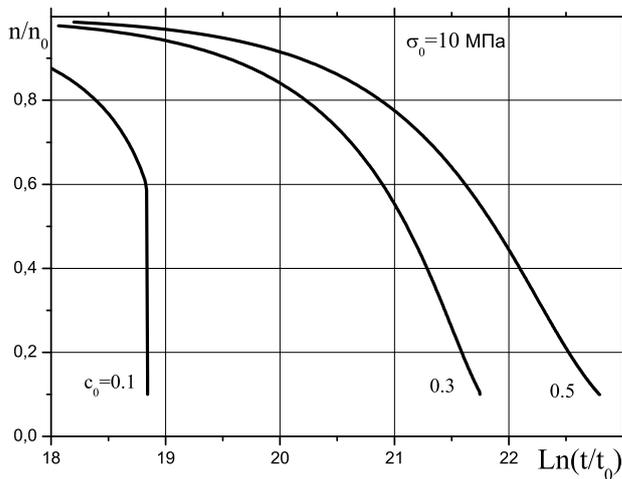


Рис. 5.51. Эволюция относительной плотности связей на краю концевой области трещины, n_0 - начальная плотность связей

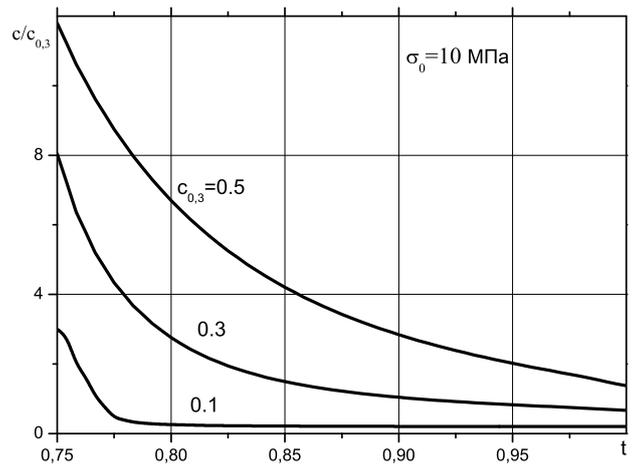


Рис. 5.52. Распределение относительной податливости связей вдоль концевой области трещины, $d(0)/\ell = 0.25$, $t = x/\ell$

время образования начального дефекта меньше; б) увеличение начальной податливости связей (что также можно рассматривать как уменьшение модуля упругости одного из материалов или как уменьшение модуля упругости связей, см. (2.29)) и соответствующее этому уменьшение напряженности связей приводит к увеличению долговечности соединения. Отметим, что изменение начальной податливости связей от $c_0 = 0.1$ до $c_0 = 0.3$ приводит к увеличению долговечности соединения более чем на порядок. Различие значений времен образования начального дефекта минимально при $d/\ell = 1$, так как распределения усилий вдоль трещины, заполненной связями, слабо изменяются при изменении относительной податливости связей.

Рассмотрим изменение кинетических параметров концевой области трещины в процессе формирования начального дефекта для $d(0)/\ell = 0.25$ при $0.1 \leq c_0 \leq 0.3$, что соответствует зоне относительно высокой напряженности связей (см рис. 3.4). Эволюция относительной плотности связей на краю концевой области трещины на участке длины $\ell_f = 0.1d(0)$ при $d(0)/\ell = 0.25$ и $\sigma_0 = 10$ МПа показана на рис. 5.51. Скорость распада связей существенно зависит от их относительной податливости, причем распад связей значительно ускоряется при снижении их начальной податливости ниже определенного

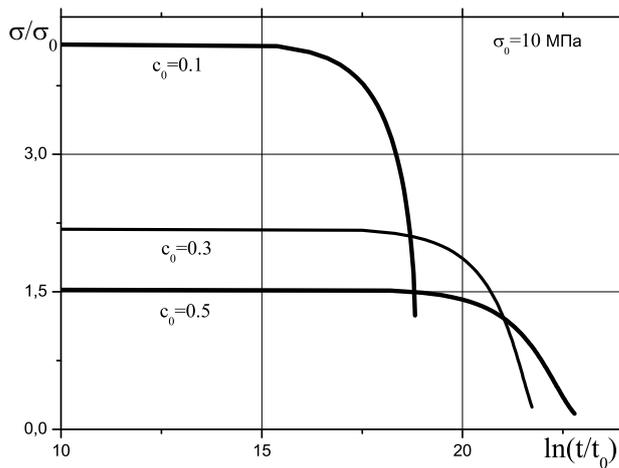


Рис. 5.53. Эволюция модуля вектора усилий в связях на краю концевой области трещины, $d(0)/\ell = 0.25$

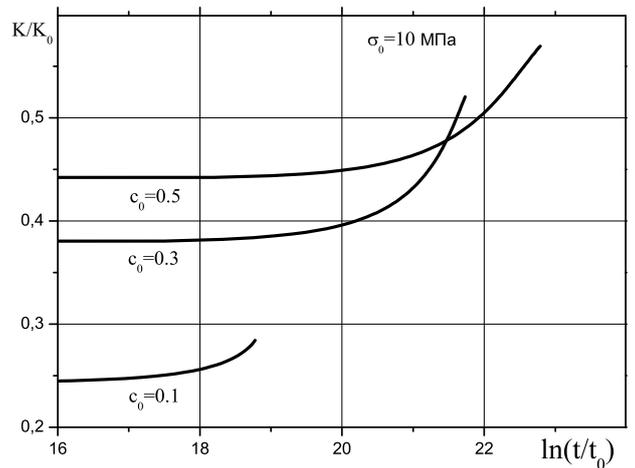


Рис. 5.54. Эволюция модуля КИН при возрастании податливости связей в концевой области трещины, $d(0)/\ell = 0.25$

предела. Распределения относительной податливости связей вдоль концевой области трещины на последнем шаге формирования дефекта для различных значений начальной относительной податливости приведены на рис. 5.52. Нормировка всех распределений выполнена величиной $c_{0,3} = 0.5$. Как и в случае трещины, заполненной связями, увеличение податливости приводит к расширению зоны распада связей.

Распад связей приводит к возрастанию раскрытия трещины, релаксации напряжений и увеличению модуля КИН. Существенная релаксация напряжений и возрастание модуля КИН происходит на заключительном этапе формирования дефекта (см. рис. 5.53 и 5.54). Значения модуля КИН нормированы величиной K_0 - модулем КИН от действия внешней нагрузки для трещины без связей, см. формулу (2.65) при $\tau_0 = 0$.

Зависимость времени образования начального дефекта длины $0.1d(0)$ ($d(0) = \ell$) от величины приложенного напряжения получена в результате серии расчетов при различных внешних нагрузках, $10 \text{ МПа} \leq \sigma_0 \leq 70 \text{ МПа}$. В качестве базовой принималась температура $T = 350 \text{ К}$ с энергией активации распада межатомных связей U_M (рис. 5.55). При температурах $T = 375 \text{ К}$ и

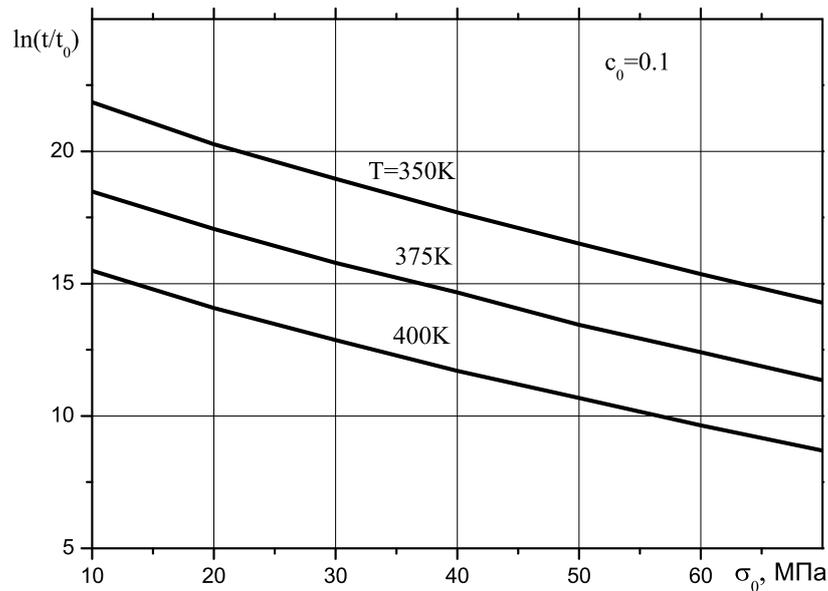


Рис. 5.55. Зависимость времени образования начального дефекта от внешней нагрузки, $d/\ell = 1$

$T = 400K$ энергия активации определялась из зависимости (1.89) в форме

$$U(T) = U_M - qN_A \Delta T,$$

где $\Delta T = 25K, 50K$, соответственно, а величина qN_A определена в разделе 5.3.1. В указанном диапазоне нагрузок эта зависимость качественно согласуется с результатами, полученными для макроскопических образцов [181, 182]. Экстраполяция результатов в предположении, что зависимость на рис. 5.55 является линейной в логарифмическом масштабе, позволяет получить оценку внешнего напряжения, соответствующего быстрому разрушению, $\sigma_0 \approx 150$ МПа при $T = 400K$.

Следующая серия расчетов выполнена в предположении, что формирование трещины, свободной от связей, (т.е. $\ell_f = \ell$) происходит из зоны ослабленных связей (трещины, заполненной связями, $d/\ell = 1$) и выполняется за $M = 10$ шагов для значений температур $T = 350K, 375K, 400K$ (пересчет энергии активации рассмотрен выше). По окончании каждого шага расчета длина части трещины, свободной от связей, увеличивается на величину $\Delta \ell_f = 0.1\ell_f$ и составляет $\ell_f = i\Delta \ell_f$, $1 \leq i \leq M$. Зависимости скорости роста части трещины, свободной от связей, (см. 2.105) от относительной длины

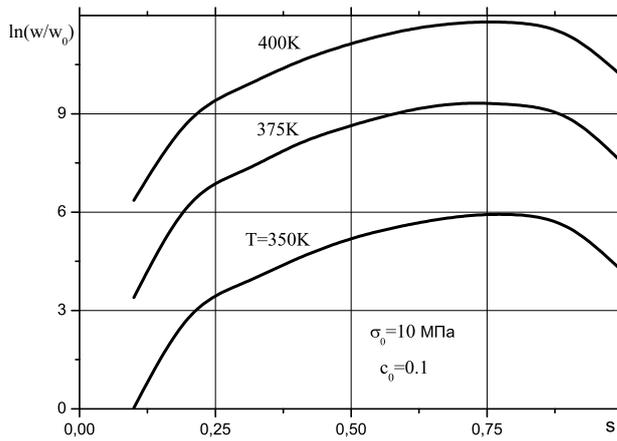


Рис. 5.56. Зависимость скорости роста части трещины свободной от связей от $s = \ell_f/\ell$ -относительной длины этой части трещины

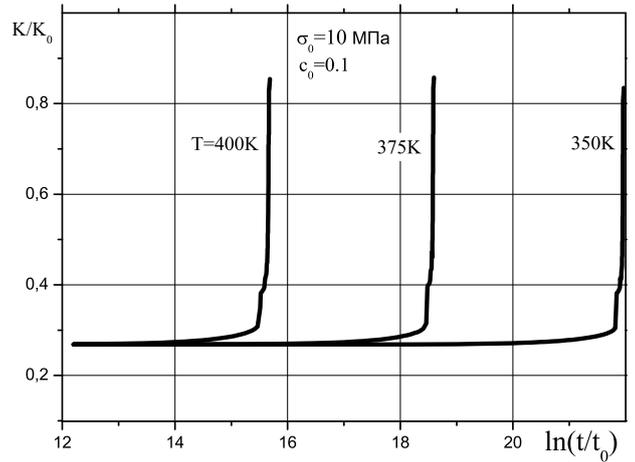


Рис. 5.57. Эволюция КИН в процессе роста части трещины свободной от связей

этой части трещины показаны на рис. 5.56. Значения скорости роста дефекта $w(\ell_f)$ нормированы величиной w_0 , пропорциональной скорости приращения одного шага дефекта при однородной нагрузке на связи σ_0 :

$$w_0 = \frac{\ell}{Mt_h}, \quad t_h = \tau_0 e^{(U_0 - A_0)/RT}, \quad A_0 = N_A \sigma_0 a_m^3$$

На начальных этапах роста трещины скорость наибольшая, далее темп возрастания скорости снижается, и на последних шагах приращения длины трещины, свободной от связей, скорость роста трещины снижается. Этот эффект объясняется тем, что связи на участке начального дефекта, примыкающем к его вершине, подвергаются распаду с начала процесса. Ввиду этого, когда часть трещины, свободная от связей, составляет $\ell_f \sim (8 \div 9) \Delta\ell_f$, плотность связей на всей оставшейся части начального дефекта мала, податливость связей существенно возрастает по сравнению с исходной, и, соответственно, напряжения в связях значительно снижаются. Это приводит к уменьшению работы по деформированию связей и, соответственно, снижению скорости роста трещины. Изменение КИН со временем в процессе роста части трещины, свободной от связей, для рассмотренного выше примера показано на рис. 5.57. При распаде связей их упрочняющий эффект снижает-

ся и КИН возрастает. Наибольший прирост КИН происходит на последних этапах роста дефекта, когда величина КИН стремится к соответствующему значению для трещины без связей. Полагая (для консервативной оценки), что отношения времен, за которые достигается наибольшее увеличение КИН, пропорционально долговечности соединения, получаем, что возрастание температуры (в рассматриваемом диапазоне) на $\Delta T = 25K$ приводит к снижению долговечности соединения более чем на порядок.

Рассмотрим применение методики термофлуктуационного распада связей в концевой области трещины для анализа развития магистральной трещины в пористом материале. В рамках кинетической модели полагаем:

- в пористом материале, ввиду неоднородного распределения пор, имеется зона повышенной пористости;
- зона повышенной пористости рассматривается как зона ослабленных связей в материале и моделируется трещиной, заполненной связями, плотность которых, ввиду их термофлуктуационного распада, уменьшается со временем под действием внешней нагрузки;
- процесс развития трещины состоит из двух этапов: а) кинетического формирования начальной трещины-дефекта, свободной от связей, (зоны с разрушенным межпоровым пространством) с одновременным ростом пористости в остальной части зоны ослабленных связей (этот этап определяет долговечность пористой структуры); б) квазистатического роста трещины с концевой областью (зоной повышенной пористости).

Расчеты выполнены на примере пористого кремния, широко применяемого в микроэлектронике, а также в биологии и медицине, пористость которого может варьироваться от 5 до 95 %, [293, 294]. Среднее значение модуля упругости пористого материала принималось $E = 100$ ГПа. Полагалось, что в материале имеется зона повышенной пористости длиной 10 микрон. Так как размер пор в кремнии изменяется от 2 до 50-100 нанометров [293], то при рассмотрении зоны длиной 10 микрон возможно её моделирование в

рамках механики сплошного тела. Зона повышенной пористости рассматривалась как зона ослабленных связей, в которой начальная плотность связей меньше, чем плотность связей в окружающем материале. Степень уменьшения плотности связей определяется пористостью рассматриваемой зоны. В качестве первого приближения использовался линейный закон уменьшения начальной плотности связей при увеличении пористости ослабленной зоны.

Полагалось, что начальная пористость ослабленной зоны изменяется от 25% до 75%. Соответственно, начальная плотность связей в модели трещины-дефекта с концевой областью составляет от 75% до 25% плотности связей окружающего материала. Размер начальной зоны, свободной от связей, принимался равным 0.1 от размера начального дефекта.

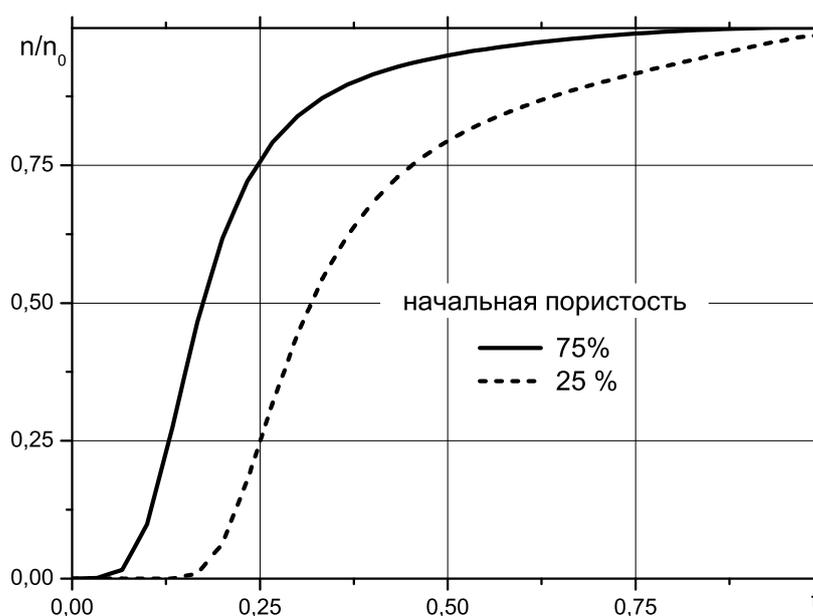


Рис. 5.58. Распределение относительной плотности связей вдоль зоны повышенной пористости после формирования начальной трещины, $t = d/\ell$

Установлено, что при внешней нагрузке 30 МПа и изменении начальной пористости в указанном диапазоне, долговечность пористой структуры (время образования начального дефекта, свободного от связей) экспоненциально уменьшается при возрастании пористости. При малых значениях начальной пористости долговечность больше и, соответственно, на большей части зоны происходит заметная деструкция связей (увеличение пористости,

см. рис. 5.58) и снижение их долговечности, а также релаксация напряжений в концевой области. В таком случае возможно быстрое разрушение после исчерпания ресурса пористой структуры. При больших значениях начальной пористости (75%) долговечность структуры существенно меньше, но деструкция связей и сопутствующие процессы охватывают только малую часть зоны ослабленных связей. В этом случае до наступления быстрого разрушения возможен этап докритического и квазистатического роста трещины.

5.3.3. Термофлуктуационная модель разупрочнения нанокomпозиционных материалов

Одна из основных проблем, возникающих при создании нанокomпозиционных материалов, - низкая прочность на границе сопряжения поверхности нанотрубки и полимерной матрицы. Наиболее эффективный подход к решению этой проблемы сопряжения связан с функционализацией нанотрубок, т.е. с присоединением к их поверхности функциональных химических групп, что значительно повышает прочность на границе соединения нанотрубки и полимера [175]. В данном разделе, в качестве примера использования методики термофлуктуационного распада связей, приведены результаты расчетов с учетом кинетики связей на границе раздела нанотрубка – полимер, выполненных с целью исследования влияния функционализации поверхности нанотрубок на долговечность соединения.

Расчеты выполнены для нанокomпозиционного материала с наполнителем в виде углеродных нанотрубок. Механические свойства компонент нанокomпозиционного материала по данным работы [175] следующие: модуль упругости нанотрубки $E_1 = 1 \text{ ТПа}$, модуль упругости полимерной матрицы зависит от типа полимера и может изменяться в пределах $E_2 = 5 - 50 \text{ ГПа}$, коэффициенты Пуассона материалов $\nu_1=0.35$ и $\nu_2=0.3$, соответственно. На-

чальная податливость связей в концевой области трещины на границе раздела между материалами определяется выражением (1.33).

Полагаем, что зона ослабленных связей расположена на границе соединения нанотрубки и матрицы (см. рис. 1.12), а размер зоны ослабленных связей принимаем равным по данным работы [175] средней длине непрерывного участка нанотрубки в композите $L_c = 2\ell = 200$ нм. Связи в промежуточном слое между нанотрубкой и матрицей образованы цепями полимерных молекул с размером мономерного звена молекулы $a_m \sim 10^{-9}$ м. Закон деформирования связей в процессе расчета полагался линейно-упругим с податливостью, постоянной вдоль зоны ослабленных связей в начальный момент времени. Расчет кинетических зависимостей выполнялся при значениях параметров модели, указанных в разделе 5.3.1, и температуре $T = 323$ К. Размер начального дефекта полагался равным $\ell_f = 0.1\ell$. Предельное значение плотности связей на участке образования начального дефекта принималось равным $n_{cr} = 0.1n_0$. Внешняя нагрузка, неизменная во времени, $\sigma_0(t) = 50$ МПа.

Для моделирования влияния функционализации поверхности нанотрубок на параметры длительной прочности нанокомпозита выполнены расчеты при различных значениях модуля упругости промежуточного слоя между нанотрубкой и матрицей E_b : а) $E_b/E_2 = 1$; $E_b/E_2 = 2.5$; $E_b/E_2 = 5.0$. Значение модуля упругости полимера принималось равным $E_2 = 10$ ГПа.

Распределение относительной долговечности связей $(\tau(x)/\tau_s)$, где $\tau_s = \tau_0 e^{U_0/kT}$ - долговечность связи без нагрузки) вдоль концевой области трещины для трех рассмотренных значений модуля упругости связей показано на рис. 5.59. Увеличение жесткости связей приводит в заметному увеличению долговечности связей в концевой области трещины и, соответственно, к увеличению времени образования начального дефекта (увеличению долговечности соединения). При соотношении модуля упругости связей в E_b в трех расчетах как 1.0 : 2.5 : 5.0 получены времена образования начального

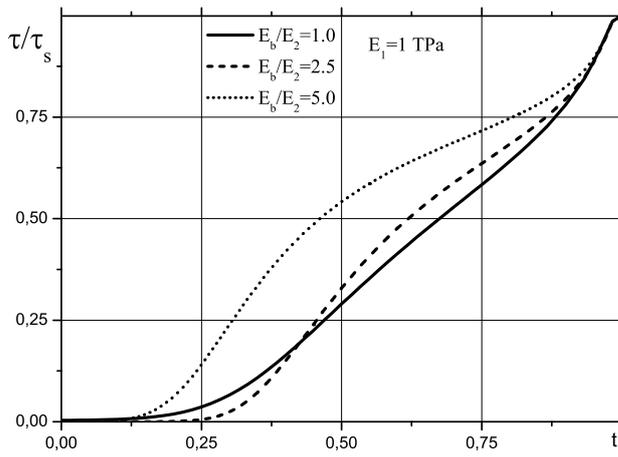


Рис. 5.59. Распределение относительной долговечности связей на границе между нанотрубкой и матрицей, $t = x/\ell$

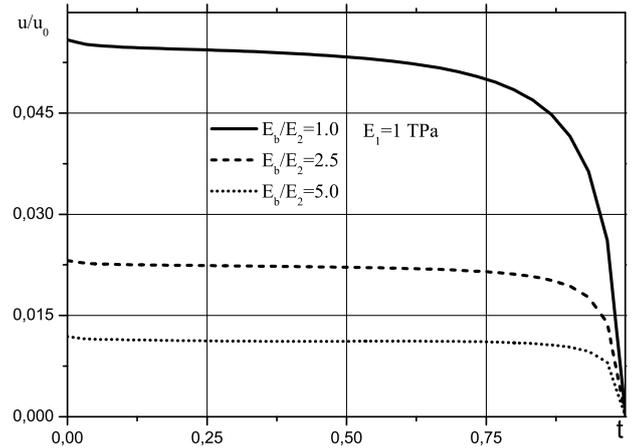


Рис. 5.60. Раскрытие трещины при различной податливости связей, $t = x/\ell$

дефекта T_f , которые соотносятся следующим образом 1.0 : 1.46 : 1.89. Увеличение долговечности при возрастании жесткости связей вызвано уменьшением работы по деформированию связи для более жестких связей. Этот эффект проявляется при рассмотрении начальной зоны ослабленных связей как трещины с концевой областью, заполненной связями. Для трещины, заполненной связями, распределение упругих напряжений вдоль концевой области практически не зависит от жесткости связей, тогда как раскрытие трещины (см. рис. 5.60, раскрытие трещины u нормировано величиной u_0 раскрытия в центре трещины без связей, расположенной на границе соединения материалов) существенно уменьшается при возрастании жесткости связей, что и приводит к уменьшению работы по деформированию связей.

Распределение относительной плотности связей вдоль концевой области трещины для трех рассмотренных случаев показано на рис. 5.61. Скорость распада связей существенно зависит от их податливости, которая уменьшается при увеличении модуля упругости связей, причем распад связей значительно ускоряется при снижении их начальной податливости ниже определенного предела. Распад связей приводит к увеличению модуля КИН, причем скорость изменения модуля КИН значительно увеличивается

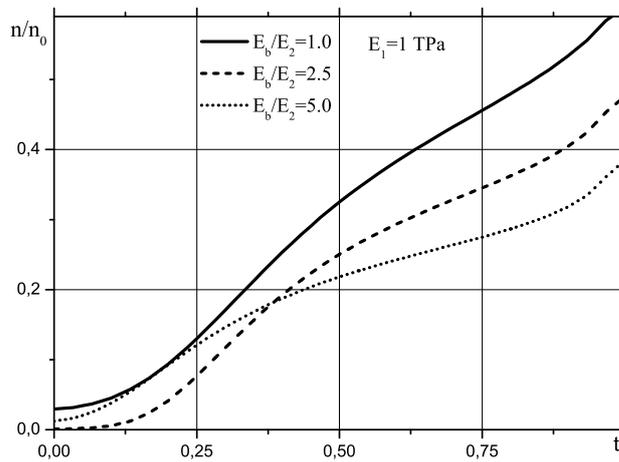


Рис. 5.61. Распределение относительной плотности связей вдоль концевой области трещины, $t = x/\ell$

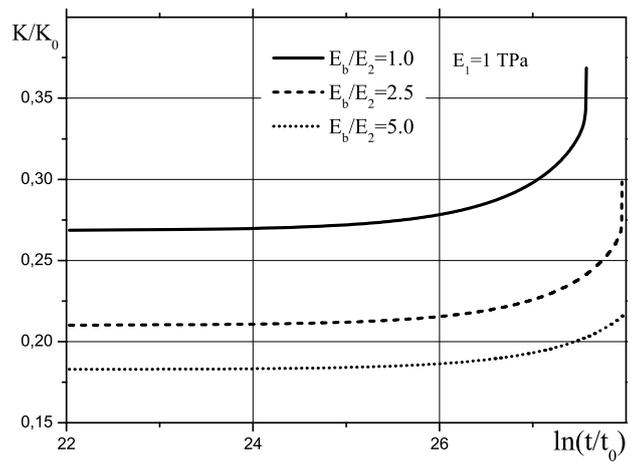


Рис. 5.62. Эволюция модуля КИН при различной податливости связей концевой области трещины

на заключительном этапе формирования дефекта (см. рис. 5.62). Значения модуля КИН нормированы величиной K_0 - модулем КИН от действия внешней нагрузки для трещины без связей на границе раздела материалов.

Ввиду сильной зависимости расчетных параметров от исходных данных (что связано с экспоненциальной зависимостью долговечности в формуле (1.88)), практический интерес при использовании этой методики представляет сравнительный анализ соединений различных материалов при соответствующих условиях нагружения.

Заключение

Цель проведенных исследований состояла в разработке моделей формирования и развития трещин по границам соединения материалов с учетом взаимосвязи нормальной и касательной мод деформирования и кинетики связей между материалами; в разработке методов исследования процессов разрушения слоистых структур, а также в решении новых задач механики разрушения для трещин со связями в концевой области, на границе соединения материалов. В диссертации получены следующие результаты:

1. На основе рассмотрения зоны процесса разрушения как концевой области трещины разработаны модели формирования и развития трещин по границам соединения материалов, учитывающие взаимосвязь нормальной и касательной мод деформирования в концевой области трещины, а также кинетику адгезионных связей в рамках термофлуктуационной теории разрушения. Для адгезионных соединений полимеров, а также композиционных материалов, армированных волокнами, получены законы деформирования связей в концевой области трещины, основанные на микромеханических моделях; разработан метод оценки долговечности связей в концевой области трещины, основанный на термофлуктуационной теории разрушения.
2. Разработаны методы решения задач механики разрушения для трещин на границе соединения материалов с концевой областью, размер которой не является малым по сравнению с характерным размером трещины; автором получена новая система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для исследования напряженно-деформированного состояния в концевой области трещины, на границе соединения полуплоскостей из различных материалов, позволяющая определять нормальную и касательную составляющие усилий в связях при нелинейном законе деформирования связей и учете термофлуктуационной

кинетики связей; получены выражения для определения коэффициентов интенсивности напряжений с учетом усилий в связях, приложенных к берегам трещины в концевой области; для анализа напряженно-деформированного состояния тел конечного размера с криволинейными трещинами со связями в концевой области, на границе соединения материалов, разработана методика, основанная на методе граничных интегральных уравнений.

3. Разработаны алгоритмы и компьютерные программы, реализующие численное решение сингулярных интегро-дифференциальных и граничных интегральных уравнений для структур, содержащих трещины с концевой областью на границе соединения материалов; выполнено численное исследование решения системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для трещин с линейно-упругими и нелинейными связями в концевой области; методом граничных интегральных уравнений получены и исследованы решения новых задач механики разрушения для трещин со связями в концевой области на границе соединения материалов;
4. В работе предложен новый вариант нелокального критерия разрушения, учитывающий работу по деформированию связей в концевой области трещины, позволяющий контролировать продвижение концевой области и вершины трещины; для формулировки критерия разрушения использованы энергетические характеристики трещины - скорость высвобождения энергии деформации и скорость потребления энергии деформации связями; исходя из двух условий разрушения (достаточного - энергетического и необходимого - кинематического), исследованы режимы докритического и квазистатического роста трещины; выполнен сравнительный теоретический анализ применения предложенного энергетического и известного силового критериев разрушения для задачи о квазистатическом росте трещины в однородном теле при дей-

ствии внешней нагрузки нормальной плоскости трещины и постоянных усилиях в связях в концевой области трещины; предложен критерий формирования трещин в зоне ослабленных связей на границе соединения материалов, основанный на анализе кинетики связей.

5. С использованием моделей трещины с концевой областью и разработанных методов расчета напряженно-деформированного состояния для кусочно-однородных структур с трещинами, выполнено исследование влияния механических свойств материалов и связей на коэффициенты интенсивности напряжений и энергетические характеристики трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов; рассмотрены эффекты упрочнения материала связями; выполнен анализ трещиностойкости соединений материалов при линейно-упругом и нелинейном законах деформирования связей в концевой области трещины; исследован процесс формирования дефектов на границе соединения материалов при учете кинетики связей в концевой области трещины; установлено хорошее согласование результатов, полученных на основе разработанных автором методов расчета и критериев формирования и развития трещин с известными экспериментальными и расчетными данными.

Использование разработанных в диссертации моделей и методов исследования процессов формирования и развития трещин вдоль границ соединения материалов дает возможность с единых позиций рассматривать процессы разрушения адгезионных соединений и композиционных материалов, включая стадии зарождения дефектов, формирования и роста трещин на различных масштабных уровнях. Разработанные автором компьютерные программы для расчета теплового и напряженно-деформированного состояния кусочно-однородных конструкций, а также расчета коэффициентов интенсивности напряжений, являются эффективным аппаратом для численного исследования новых задач механики прочности и разрушения.

Приложение

1. Интегро-дифференциальные уравнения для прямолинейной трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов

Получим производные от раскрытия трещины при наличии произвольных нормальных и касательных напряжений на берегах трещины, расположенной на границе соединения материалов.

Производные $u'_{y+}(x)$, $u'_{x+}(x)$ перемещений верхнего берега трещины длины 2ℓ имеют вид (см. [113], выражение (6.13))

$$u'_{y+}(x) - iu'_{x+}(x) = \frac{k_1 + \alpha}{8\mu_1\alpha} \left[(1 - \alpha)(\sigma_{xy}(x) + i\sigma_{yy}(x)) - \frac{1 + \alpha}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left(\frac{\ell - |x|}{\ell + |x|} \right)^{-i\beta\text{sgn}x} \times \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \left(\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi} \right)^{-i\beta} (\sigma_{yy}(\xi) - i\sigma_{xy}(\xi)) d\xi \right] \quad (\text{П.1})$$

В рассматриваемом случае нормальные и касательные напряжения на поверхности трещины равны соответствующим компонентам усилий от действия связей в концевой области трещины $\sigma_{yy}(x) = q_y(x)$ и $\sigma_{xy}(x) = q_x(x)$.

Отношение производных перемещений нижнего и верхнего берегов трещины равно [113]

$$\frac{u'_{y-}(x)}{u'_{y+}(x)} = \frac{u'_{x-}(x)}{u'_{x+}(x)} = -\frac{\mu_1(k_2\alpha + 1)}{\mu_2(k_1 + \alpha)}, \quad (\text{П.2})$$

где α определяется выражением (1.7).

Используя выражения (П.1)-(П.2) получаем:

$$(u'_{y+}(x) - u'_{y-}(x)) - i(u'_{x+}(x) - u'_{x-}(x)) = \frac{1}{4(1 + \alpha)} \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) [(1 - \alpha)(q_x(x) + iq_y(x)) - \frac{1 + \alpha}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left(\frac{\ell - |x|}{\ell + |x|} \right)^{-i\beta\text{sgn}(x)} \times \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \left(\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi} \right)^{-i\beta} (q_y(\xi) - iq_x(\xi)) d\xi], \quad (\text{П.3})$$

где учтено, что

$$\frac{1}{4(1+\alpha)} \left(\frac{k_1+1}{\mu_1} + \frac{k_2+1}{\mu_2} \right) \equiv \frac{1}{8\alpha} \left(\frac{k_1+\alpha}{\mu_1} + \frac{k_2\alpha+1}{\mu_2} \right)$$

Выполним преобразования выражения (2.21) с учетом условий симметрии (2.22), (2.23) и представления для усилий в концевой области (1.29).

Подставим представление для усилий в связях (1.29) в выражение для интеграла в (П.3)

$$I(x, \xi) = \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \left(\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi} \right)^{-i\beta} (q_y(\xi) - iq_x(\xi)) d\xi = \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) - ip_x(\xi)) d\xi \quad (\text{П.4})$$

Так как $q_y(x) = q_x(x) = 0$ при $|x| < \ell - d$, то интеграл $I(x, \xi)$ можно записать так:

$$\begin{aligned} I(x, \xi) &= I_1(x, \xi) + I_2(x, \xi) = \\ &= \int_{-\ell}^{-\ell+d} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) - ip_x(\xi)) d\xi + \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) - ip_x(\xi)) d\xi \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

В первом интеграле $I_1(x, \xi)$ выполним замену $\xi \rightarrow -\xi$ и поменяем местами пределы интегрирования. С учетом условий симметрии (2.22), (2.23) получим:

$$I_1(x, \xi) = \mp \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi + x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi \quad (\text{П.6})$$

Подставляя выражение (П.6) в соотношение (П.5), получим:

$$\begin{aligned} I(x, \xi) &= I_1(x, \xi) + I_2(x, \xi) = \\ &= \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \mp \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi + x} \right) p_y(\xi) d\xi - i \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi + x} \pm \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \right) p_x(\xi) d\xi = \\ &= 2 \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} \left[R_1(x, \xi) p_y(\xi) - iR_2(x, \xi) p_x(\xi) \right] d\xi \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

В выражениях (П.6) и (П.7) верхние знаки относятся к задаче 1 (растяжение), а нижние - к задаче 2 (сдвиг). Ядра последнего интеграла в (П.7) также зависят от вида нагружения.

Для задачи 1

$$R_1(x, \xi) = xR(x, \xi), \quad R_2(x, \xi) = \xi R(x, \xi) \quad (\text{П.8})$$

Для задачи 2

$$R_1(x, \xi) = \xi R(x, \xi), \quad R_2(x, \xi) = xR(x, \xi), \quad (\text{П.9})$$

где

$$R(x, \xi) = \frac{\sqrt{\ell - \xi^2}}{\xi^2 - x^2}$$

После замены переменных $s = x/\ell$, $t = \xi/\ell$ получаем выражение для производной раскрытия трещины $u_Q(s)$ от действия связей в концевой области:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_Q(s)}{\partial s} = & \frac{A(1 - \alpha)}{4(1 + \alpha)} (q_x(s) + iq_y(s)) - \\ & - \frac{A}{2\pi \sqrt{1 - s^2}} \left(\frac{1 - s}{1 + s} \right)^{-i\beta} \int_{1-\frac{d}{\ell}}^1 [R_1(s, t) p_y(t) - iR_2(s, t) p_x(t)] dt \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Преобразуем уравнение (2.24) к форме, удобной для численного решения.

Выделяя действительные и мнимые части выражения (2.17), получаем производные раскрытия трещины при однородной внешней нагрузке:

$$\frac{\partial u_{\infty y}(s)}{\partial s} = \frac{A}{4\text{ch}(\pi\beta) \sqrt{1 - s^2}} (A \sigma_0 + B \tau_0) \quad (\text{П.11})$$

$$\frac{\partial u_x(s)}{\partial s} = \frac{A}{4\text{ch}(\pi\beta) \sqrt{1 - s^2}} (A \tau_0 - B \sigma_0), \quad (\text{П.12})$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2\beta \sin \phi(s) - s \cos \phi(s) \\ B &= 2\beta \cos \phi(s) + s \sin \phi(s) \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Выделяя действительные и мнимые части уравнения (2.24), получаем с учетом (П.11) и (П.12) систему сингулярных интегрально-дифференциальных

уравнений (соответствующие обозначения – разделе 2.1.1):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \gamma_1(s, \sigma)}{\partial s} q_y(s) + \gamma_1(s, \sigma) \frac{dq_y(s)}{ds} - \frac{\pi \Psi(1 - \alpha)}{2(1 + \alpha)} q_x(s) + \\ & + \frac{\Psi}{\sqrt{1 - s^2}} \left[\cos \phi(s) G_y(s, \xi) - \sin \phi(s) G_x(s, \xi) \right] = \\ & = \frac{\pi \Psi (A \sigma_0 + B \tau_0)}{2 \Sigma_0 \operatorname{ch}(\pi \beta) \Sigma_0 \sqrt{1 - s^2}} \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \gamma_2(s, \sigma)}{\partial s} q_x(s) + \gamma_2(s, \sigma) \frac{dq_x(s)}{ds} + \frac{\pi \Psi(1 - \alpha)}{2(1 + \alpha)} q_y(s) + \\ & + \frac{\Psi}{\sqrt{1 - s^2}} \left[\sin \phi(s) G_y(s, \xi) + \cos \phi(s) G_x(s, \xi) \right] = \\ & = \frac{\pi \Psi (A \tau_0 - B \sigma_0)}{2 \Sigma_0 \operatorname{ch}(\pi \beta) \sqrt{1 - s^2}} \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Здесь

$$G_y(s, \xi) = \int_{1-\frac{d}{\ell}}^1 R_1(s, t) p_y(t) dt, \quad G_x(s, \xi) = \int_{1-\frac{d}{\ell}}^1 R_1(s, t) p_x(t) dt, \quad \xi = \frac{d}{\ell} \quad (\text{П.16})$$

$$q_y(s) = p_y(s) \cos \phi(s) - p_x(s) \sin \phi(s) \quad (\text{П.17})$$

$$q_x(s) = p_y(s) \sin \phi(s) + p_x(s) \cos \phi(s)$$

$$\phi(s) = \beta \ell n \frac{1 - s}{1 + s} \quad (\text{П.18})$$

Преобразуем производные усилий в связях $q_{y,x}(s)$ в уравнениях (П.14) и (П.15) с учетом представления (2.25), записанного в тригонометрической форме (П.17).

Получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{dq_y(s)}{ds} = \cos \phi(s) \frac{dp_y(s)}{ds} - \sin \phi(s) \frac{dp_x(s)}{ds} + \\ & + \frac{2\beta}{1 - s^2} \left(p_y(s) \sin \phi(s) + p_x(s) \cos \phi(s) \right) \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} & \frac{dq_x(s)}{ds} = \sin \phi(s) \frac{dp_y(s)}{ds} + \cos \phi(s) \frac{dp_x(s)}{ds} - \\ & - \frac{2\beta}{1 - s^2} \left(p_y(s) \cos \phi(s) - p_x(s) \sin \phi(s) \right) \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Производные функций $p_{y,x}(s)$ в (П.19)-(П.20) имеют, с учетом асимптотического представления (2.68), следующий вид:

$$\frac{dp_{y,x}(s)}{ds} = \sqrt{1-s} \frac{df_{1,2}(s)}{ds} - \frac{f_{1,2}(s)}{2\sqrt{1-s}} \quad (\text{П.21})$$

Подставляя последнее выражение, а также представление (2.68) для функций $p_{y,x}(s)$ в (П.19) и (П.20), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dq_y(s)}{ds} &= \sqrt{1-s} \left(\cos \phi(s) \frac{df_1(s)}{ds} - \sin \phi(s) \frac{df_2(s)}{ds} \right) - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{1-s}} (f_1(s) \cos \phi(s) - f_2(s) \sin \phi(s)) + \\ &+ \frac{2\beta \sqrt{1-s}}{1-s^2} (f_1(s) \sin \phi(s) + f_2(s) \cos \phi(s)) \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_x(s)}{ds} &= \sqrt{1-s} \left(\sin \phi(s) \frac{df_1(s)}{ds} + \cos \phi(s) \frac{df_2(s)}{ds} \right) - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{1-s}} (f_1(s) \sin \phi(s) + f_2(s) \cos \phi(s)) - \\ &- \frac{2\beta \sqrt{1-s}}{1-s^2} (f_1(s) \cos \phi(s) - f_2(s) \sin \phi(s)) \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

После подстановки выражений (2.68), (П.17) и (П.22) в уравнение (П.14), получаем:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{1-s} \frac{\partial \gamma_1(s, \sigma)}{\partial s} - \frac{\gamma_1(s, \sigma)}{2\sqrt{1-s}} \right) (f_1(s) \cos \phi(s) - f_2(s) \sin \phi(s)) + \\ &\gamma_1(s, \sigma) \sqrt{1-s} \left(\cos \phi(s) \frac{df_1(s)}{ds} - \sin \phi(s) \frac{df_2(s)}{ds} \right) + \\ &+ \sqrt{1-s} \left(\frac{2\beta \gamma_1(s, \sigma)}{1-s^2} - \frac{\pi \Psi(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} \right) (f_1(s) \sin \phi(s) + f_2(s) \cos \phi(s)) + \quad (\text{П.24}) \\ &+ \frac{\Psi}{\sqrt{1-s^2}} \left[\cos \phi(s) G_y(s, \xi) - \sin \phi(s) G_x(s, \xi) \right] = \\ &= \frac{\pi \Psi (A \sigma_0 + B \tau_0)}{2 \Sigma_0 \operatorname{ch}(\pi \beta) \Sigma_0 \sqrt{1-s^2}} \end{aligned}$$

Аналогично, после подстановки выражений (2.68), (П.17) и (П.23) в уравне-

ние (П.15), получаем:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{1-s} \frac{\partial \gamma_2(s, \sigma)}{\partial s} - \frac{\gamma_2(s, \sigma)}{2\sqrt{1-s}} \right) (f_1(s) \sin \phi(s) + f_2(s) \cos \phi(s)) + \\
 & \gamma_2(s, \sigma) \sqrt{1-s} \left(\sin \phi(s) \frac{df_1(s)}{ds} + \cos \phi(s) \frac{df_2(s)}{ds} \right) - \\
 & - \sqrt{1-s} \left(\frac{2\beta \gamma_2(s, \sigma)}{1-s^2} - \frac{\pi \Psi(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} \right) (f_1(s) \cos \phi(s) - f_2(s) \sin \phi(s)) + \quad (\text{П.25}) \\
 & + \frac{\Psi}{\sqrt{1-s^2}} \left[\sin \phi(s) G_y(s, \xi) + \cos \phi(s) G_x(s, \xi) \right] = \\
 & = \frac{\pi \Psi (A \tau_0 - B \sigma_0)}{2 \Sigma_0 \text{ch}(\pi \beta) \sqrt{1-s^2}}
 \end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при однородных неизвестных, перепишем уравнение (П.24) в форме

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos \varphi(s)}{\sqrt{1-s}} \left\{ (1-s) \gamma_1(s, \sigma) \left[\frac{df_1(s)}{ds} - \text{tg} \varphi(s) \frac{df_2(s)}{ds} \right] + \right. \\
 & + f_1(s) \left[\gamma_1(s, \sigma) \left(\frac{2\beta}{1+s} \text{tg} \varphi(s) - \frac{1}{2} \right) - (1-s) \left(\frac{\pi \Psi(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} \text{tg} \varphi(s) - \frac{\partial \gamma_1(s, \sigma)}{\partial s} \right) \right] \\
 & + f_2(s) \left[\gamma_1(s, \sigma) \left(\frac{2\beta}{1+s} + \frac{\text{tg} \varphi(s)}{2} \right) - (1-s) \left(\frac{\pi \Psi(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} + \frac{\partial \gamma_1(s, \sigma)}{\partial s} \text{tg} \varphi(s) \right) \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{\Psi \cos \varphi(s)}{\sqrt{1-s^2}} \left[G_y(s, \xi) - \text{tg} \varphi(s) G_x(s, \xi) \right] = \frac{\pi \Psi (A \sigma_0 + B \tau_0)}{2 \Sigma_0 \text{ch}(\pi \beta) \Sigma_0 \sqrt{1-s^2}} \quad (\text{П.26})
 \end{aligned}$$

Умножая обе части уравнения (П.26) и аналогичного ему, следующего из уравнения (П.25), на величину

$$\frac{\cos \varphi(s)}{\sqrt{1-s}}$$

, получаем в матричной форме итоговую систему уравнений (2.69) относительно неизвестных $f_{1,2}(s)$

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{df_1}{ds} \\ \frac{df_2}{ds} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \Psi \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix}, \quad (\text{П.27})$$

где элементы матриц определяются выражениями (2.70)-(2.75).

2. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений для трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов

Интеграл в выражении (2.59) преобразуем с учетом представления усилий в связях в форме (1.29), а также учитывая, что $q_y(x) = q_x(x) = 0$ при $|x| \leq \ell - d$

$$\begin{aligned} & \int_{-\ell}^{+\ell} \left(\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi} \right)^{0.5+i\beta} (q_y(\xi) + iq_x(\xi)) d\xi = \\ & = \int_{-\ell}^{-\ell+d} \sqrt{\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi}} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi + \int_{\ell-d}^{\ell} \sqrt{\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi}} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi \quad (\text{П.28}) \end{aligned}$$

В первом интеграле в правой части выражения (П.28) выполним замену $\xi = -\xi$ и поменяем местами пределы интегрирования. С учетом условий симметрии (2.22) и (2.23) получим (здесь и в выражении (П.30) верхние знаки относятся к задаче 1, а нижние - к задаче 2):

$$\int_{-\ell}^{-\ell+d} \sqrt{\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi}} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi = \pm \int_{\ell-d}^{\ell} \sqrt{\frac{\ell - \xi}{\ell + \xi}} (p_y(\xi) - ip_x(\xi)) d\xi \quad (\text{П.29})$$

Подставляя выражение в правой части (П.29) вместо первого интеграла в правой части (П.28), получим ($t = \xi/\ell$):

$$\begin{aligned} & \ell \left[\int_{1-d/\ell}^1 \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \pm \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right) p_y(t) dt + i \int_{1-d/\ell}^1 \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \mp \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right) p_x(t) dt \right] = \\ & = 2\ell \int_{1-d/\ell}^1 (F_1(t)p_y(t) + iF_2(t)p_x(t)) dt \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

где функции $F_{1,2}(t)$ имеют вид:

$$\text{Задача1 : } F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad F_2(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \quad (\text{П.31})$$

$$\text{Задача2 : } F_1(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad F_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (\text{П.32})$$

3. Вычисление интегралов при дискретизации СИДУ

Рассмотрим вычисление интегралов в дискретном представлении СИДУ (2.85). Интегрирование выполняется в параметрических координатах элемента $|\eta| \leq 1$, а каждый из интегралов имеет вид

$$I_{ij,m}^{(k)}(s_n) = \int_{-1}^{+1} G_{ij}(s_n, t^{(k)}(\eta)) N_m(\eta) J^{(k)}(\eta) d\eta, \quad (\text{П.33})$$

где k - номер элемента, $t^{(k)}(\eta)$ - параметрическая координата в пределах элемента, $m=1,2,3$ - номера узлов элемента.

Ядро в интеграле (П.33) имеет вид

$$G_{ij}(s, t) = U_{ij}(s, t)H(s, t), \quad (\text{П.34})$$

где $U_{ij}(s, t)$ -гладкие функции, а функция $H(s, t)$ имеет особенность при $s = t$ (см. (2.72)). Интегрирование в (П.33) выполняется с учетом указанной особенности функции $H(s, t)$, и рассматриваются два случая расположения узловой точки s_n : (а) точка s_n расположена вне элемента, по которому выполняется интегрирование; (б) точка s_n принадлежит элементу, по которому выполняется интегрирование. В первом случае функции в (П.33) являются ограниченными и интегрирование выполняется по квадратурным формулам Гаусса 4 порядка. Во втором случае выполняется регуляризация подынтегральной функции, позволяющая определить главное значение интеграла

$$\int_a^b \frac{\phi(t)}{t-s} dt = \int_a^b \frac{\phi(t) - \phi(s)}{t-s} dt + \phi(s) \ln \left| \frac{b-s}{s-a} \right|, \quad (\text{П.35})$$

где $a < s < b$, $\phi(s)$ -значение функции в точке s .

При переходе к дискретному представлению (2.85) интегралы вида (П.33) содержат, кроме ядра $H(s, t)$, функции формы элемента $N_m(\eta)$ и якобиан преобразования $J^{(k)}(\eta)$. Пусть $e=1,2,3$ локальные номера узловой точки s_n на элементе с номером k . Согласно известному свойству функций формы

элементов

$$N_m(\xi_e) = \begin{cases} 0, & m \neq e \\ 1, & m = e, \quad m, e = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (\text{П.36})$$

Умножение ядер интегралов в (П.33) на функции $N_m(\xi_e)$, обладающие свойством (П.36), позволяет исключить особенность интеграла при $m \neq e$. Ввиду этого, регуляризация выполняется только для тех узлов элемента, содержащего узловую точку s_n , для которых номер функции формы совпадает с локальным номером узловой точки ($m = e$). Для узловых точек s_n с четными номерами ($n/2 = k, m = 2$) для интеграла (П.33) после регуляризации получим:

$$I_{ij,2}^{(k)}(s_n) = \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(s_n, t^{(k)}(\eta)) - \phi(s_n, s_n)}{t^{(k)}(\eta) - s_n} N_2(\eta) J^{(k)}(\eta) d\eta, \quad (\text{П.37})$$

$$\phi(s_n, t^{(k)}(\eta)) = \frac{(1 - t^{(k)}(\eta)) \sqrt{1 + t^{(k)}(\eta)}}{t^{(k)}(\eta) + s_n} U_{ij}(s_n, t^{(k)}(\eta)) \quad (\text{П.38})$$

$$\phi(s_n, s_n) = \frac{(1 - s_n) \sqrt{1 + s_n}}{2s_n} U_{ij}(s_n, s_n) \quad (\text{П.39})$$

Узловые точки с нечетными номерами n принадлежат одновременно двум соседним элементам с номерами $k_1 = (n - 1)/2$ и $k_2 = (n + 1)/2$. Параметрическое представление координаты на этих элементах $t_1(\eta) \equiv t^{(k_1)}(\eta)$ и $t_2(\eta) \equiv t^{(k_2)}(\eta)$, соответственно. Сумма интегралов по соседним элементам ($m=1$ и $m=3$) после регуляризации принимает вид:

$$I_{ij,3}^{(k_1)}(s_n) + I_{ij,1}^{(k_2)}(s_n) = \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(s_n, t_1(\eta)) - \phi(s_n, s_n)}{t_1(\eta) - s_n} N_3(\eta) J^{(k_1)}(\eta) d\eta + \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(s_n, t_2(\eta)) - \phi(s_n, s_n)}{t_2(\eta) - s_n} N_1(\eta) J^{(k_2)}(\eta) d\eta \quad (\text{П.40})$$

где функции $\phi(\dots)$ определяются выражениями (П.38) и (П.39). Выражения (П.37) и (П.40) не содержат особенностей в подынтегральной функции

и вычисляются по квадратурным формулам Гаусса. Для повышения точности вычисления интегралов после регуляризации выполняется квадратичное преобразование параметрических координат [295], позволяющее разместить узлы гауссовых точек вблизи узловой точки s_n , причем для узлов с четными номерами интеграл предварительно разделяется на сумму двух интегралов по подэлементам $(-1, 0)$ и $(0, +1)$. Логарифмическое слагаемое в (П.40) отсутствует ввиду эквидистантного расположения узловых точек.

При $n = 1$ узловая точка $s_1 = \lambda$ принадлежит только первому элементу и вместо выражения (П.40) используется следующее:

$$I_{ij,1}^{(1)}(s_1) = \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(\rho, t_1(\eta)) - \phi(\rho, \rho)}{t_1(\eta) - \rho} N_1(\rho) J^{(1)}(\rho) d\eta + \phi(\rho, \rho) J^{(1)}(\eta_o) N_1(\eta_o) \ln \left(\frac{s_3 - \rho}{\rho - s_1} \right), \quad (\text{П.41})$$

где $\rho = s_1 + \kappa h$, $\eta_o = -1 + \kappa$, параметр κ определяет сдвиг узловой точки s_1 от края интервала $[\lambda, 1]$. Установлено, что достаточно стабильные результаты получаются при $0 \leq \kappa < 1$. В расчетах используется значение $\kappa = 0.5$. При $\lambda_1 = 0$ полагаем $s_1 = 0.001$.

4. Оценка точности методики численного решения

Оценка точности изложенной выше методики численного решения СИДУ выполнена для сингулярных интегральных уравнений, имеющих аналитическое решение. Как известно, интегральные тождества для полиномов Чебышева имеют вид [296]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{U_i(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt = -T_{i+1}(x), \quad -1 < x < 1, \quad (\text{П.42})$$

где

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \cos\theta = x \quad (\text{П.43})$$

полиномы Чебышева первого и второго родов, соответственно ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Уравнение (П.42) решалось на интервале $|x| \leq 1$ для $i = 0, 1, 2, 3$ в предположении, что $U_i(t)$ - неизвестная функция. Полиномы (П.43) вычислялись из рекуррентных соотношений [296]:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1$$

$$U_n(x) = T_n(x) + xU_{n-1}(x)$$

Условие однозначности решения для СИУ (П.42) имеет вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} U_i(t) \sqrt{1-t^2} dt = D, \quad D = \begin{cases} 0, & i > 0 \\ 0.5, & i = 0 \end{cases} \quad (\text{П.44})$$

Заметим, что в конечных точках интервала $x_0 = \pm 1$ второе слагаемое в (П.35) равно нулю, т.к. $\phi(x_0) \equiv 0$. В этом случае значение интеграла в (П.35) вычислялось при $x_0 = \pm(1 - 0.00001)$. Интервал $|x| \leq 1$ разбивался на N квадратичных элементов ($2N + 1$ узлов), точки коллокации выбирались совпадающими с узловыми точками. Для каждой точки коллокации записывалось дискретное представление уравнения (П.42), соответствующее одной строке матрицы вида (2.86). В узле с номером $M = N + 1$ записывалось дискретное представление условия однозначности (П.44).

В результате тестирования установлено, что отличие численного решения СИУ (П.42) от известного аналитического даже при $i = 3$ не превышает 3-5% при числе элементов $N = 30 - 35$ (аналитическое решение - полином четвертой степени). Таким образом, изложенная выше методика численного решения является достаточно эффективной и применимой для СИУ с ядром вида $\phi(\xi) / (\xi - x)$, где $\phi(\xi)$ - полиномиальная функция.

5. Вычисление интегралов при расчете перемещений вне зоны связи

Вычисления по формулам (2.34) и (2.35) выполняются для каждой точки x_0 вне концевой области трещины ($0 \leq x_0 < \ell - d$). Так как вне концевой области трещины $q_{x,y}(x) = 0$, то первые интегралы в правой части выражений (2.34) и (2.35) вычисляются только вдоль концевой области ($\ell - d \leq x < \ell$). Вычисления выполняются однократно, так как для всех точек вне концевой области трещины эти интегралы одинаковы. Заметим, что в выражениях для однородного тела при ($\alpha = 1$) эти интегралы отсутствуют.

Второй интеграл в выражении (2.34) представим так (для (2.35) аналогично):

$$\int_{x_0}^{\ell} \frac{F_1(x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} dx = \int_{x_0}^{\ell-d} \frac{F_1(x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} dx + \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{F_1(x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} dx \quad (\text{П.45})$$

Второе слагаемое в выражении (П.45) одинаково для всех точек вне концевой области трещины и вычисляется только один раз.

Внутренние интегралы в (П.45) (функции $F_{1,2}(x)$, см. (2.40) и (2.44) вычисляются методом Гаусса с учетом особенностей подынтегральной функции, аналогично тому, как это выполняется при вычислении коэффициентов влияния в дискретной форме СИДУ. Внешний интеграл в выражении (П.45) вычисляется методом Симпсона. Разбиение на безразмерном отрезке концевой области $\left[1 - \frac{d}{\ell}; 1\right]$ берется таким же, как и при решении СИДУ – узловые точки для вычисления интеграла совпадают с узлами элементов на участке концевой области трещины. Отметим, что последний интеграл в (П.45) имеет устранимую особенность при $x = \ell$. Вклад в последний интеграл (П.45) от функции при $x = \ell$ при вычислении этого интеграла методом Симпсона определяется линейной экстраполяцией в вершину трещины по значениям интеграла в точках с координатами $x_1 = \ell - \Delta h$ и $x_2 = \ell - \chi \Delta h$, $\chi = 0.075$, здесь $\Delta h = \frac{d}{2N}$ – полудлина квадратичного элемента при размещении $2N + 1$ узловой точки вдоль концевой области.

6. Вычисление интегралов при расчете КИН и скорости потребления энергии связями

При действии внешних нормальных нагрузок для интегралов в (2.60) имеем с учетом (2.68) и (П.31):

$$\int_{1-d/\ell}^1 (F_1(t)p_y(t) + iF_2(t)p_x(t)) dt = \int_{1-d/\ell}^1 \frac{(f_1(t) + itf_2(t))}{\sqrt{1+t}} dt \quad (\text{П.46})$$

Для первого из интегралов в (П.46) имеем:

$$\int_{1-d/\ell}^1 \frac{f_1(t)}{\sqrt{1+t}} dt = \sum_{k=1}^{k=N} \sum_{m=1}^{m=3} \int_{-1}^{+1} \frac{N_m(\eta) f_{1,2(k-1)+m}}{\sqrt{1+t(\eta)}} J^{(k)}(\eta) d\eta \quad (\text{П.47})$$

Остальные интегралы в (2.60) при растягивающей и сдвиговой нагрузках вычисляются аналогично (П.47). Интегрирование в (5.6) выполняется по аналогичной схеме, а для представления производных функций используется выражение (2.81). Например, для вычисления последнего интеграла в (5.6) можно записать:

$$\int_{1-d/\ell}^1 s q_y^2(s) \frac{d\gamma_1(s)}{ds} ds = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{-1}^{+1} t(\eta) \left(\sum_{m=1}^{m=3} q_{y,2(k-1)+m} N_m(\eta) \right)^2 \times \left(\sum_{m=1}^{m=3} \frac{dN_m(\eta)}{d\eta} \frac{\gamma_{1,2(k-1)+m}}{J_m^{(k)}(\eta)} \right) J^{(k)}(\eta) d\eta, \quad (\text{П.48})$$

Где $q_{y,2(k-1)+m}$ – узловые значения нормальных напряжений в связях, а $\lambda_{1,2(k-1)+m}$ – узловые значения податливости в связях.

7. Вычисление параметров энергетического условия разрушения

Перемещения верхнего берега трещины определяются выражением [14]:

$$u(x) = \frac{1}{E} \left(2\sigma_0 - \frac{4P_0}{\pi} \arccos \frac{h}{\ell} \right) \sqrt{\ell^2 - x^2} + \frac{P_0}{\pi E} [(x-h)F(\ell, x, h) - (x+h)F(\ell, x, -h)] \quad (\text{П.49})$$

где E - модуль упругости материала, $E = E_0$ - для плоского напряженного состояния и $E = E_0/(1 - \nu_0^2)$ - для состояния плоской деформации, ν_0 - коэффициент Пуассона, $h = \ell - d$ (рис. 2.1), функция влияния $F(\ell, x, \xi)$ имеет вид [14]:

$$F(\ell, x, \xi) = \ln \frac{\ell^2 - x\xi - \sqrt{(\ell^2 - x^2)(\ell^2 - \xi^2)}}{\ell^2 - x\xi + \sqrt{(\ell^2 - x^2)(\ell^2 - \xi^2)}} \quad (\text{П.50})$$

Перемещения на краю концевой области трещины определяются из выражения (П.49) при $x = h, h = \ell - d$:

$$u(h) = \frac{2}{E} \left(\sigma_0 - \frac{2P_0}{\pi} \arccos \frac{h}{\ell} \right) \sqrt{\ell^2 - h^2} - h \frac{4P_0}{\pi E} \ln \frac{h}{\ell} \quad (\text{П.51})$$

С учетом обозначений (4.46) последнее выражение можно представить так ($t = d/\ell$):

$$u(1-t) = \frac{2\sigma_0\ell}{E} [B(t) - Z_0(A(t)B(t) + C(t))] \quad (\text{П.52})$$

Условие (4.48) следует из выражений (П.52) и (4.28) ($\sigma_0 = \sigma_{cr}$)

$$2u(1-t) = \delta_{cr} \quad (\text{П.53})$$

Рассмотрим вычисление интеграла и производной в соотношении (4.43)

$$J(d, \ell) = \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\ell-d}^{\ell} u(x) dx \quad (\text{П.54})$$

Подстановка выражения (П.49) в интеграл (П.54) дает ($h = \ell - d$)

$$\int_{\ell-d}^{\ell} u(x) dx = \underbrace{\frac{1}{E} \left(2\sigma_0 - \frac{4P_0}{\pi} \arccos \frac{h}{\ell} \right) \int_{\ell-d}^{\ell} \sqrt{\ell^2 - x^2} dx}_{J_1} + \int_{\ell-d}^{\ell} u_0(x) dx, \quad (\text{П.55})$$

где

$$u_0(x) = \frac{P_0}{\pi E} [(x-h)F(\ell, x, h) - (x+h)F(\ell, x, -h)] \quad (\text{П.56})$$

Первый интеграл в правой части соотношения (П.55) определяется как

$$J_1 = \frac{1}{2E} \left(2\sigma_0 - \frac{4P_0}{\pi} \arccos \frac{h}{\ell} \right) \left(\ell^2 \arccos \frac{h}{\ell} - h \sqrt{\ell^2 - h^2} \right) \quad (\text{П.57})$$

Второй интеграл в правой части соотношения (П.55) можно записать с учетом обозначений (П.56) как

$$J_2 = \int_{\ell-d}^{\ell} u_0(x) dx = \frac{P_0}{2\pi E} \int_{\ell-d}^{\ell} [F(\ell, x, h) d\xi_1 - F(\ell, x, -h) d\xi_2], \quad (\text{П.58})$$

$$\xi_1 = (x-h)^2, \quad \xi_2 = (x+h)^2$$

Выполняя интегрирование по частям, в (П.58) получим:

$$J_2 \frac{\pi E}{P_0} = \underbrace{0.5 [(x-h)^2 F(\ell, x, h) - (x+h)^2 F(\ell, x, -h)]}_{A} \Big|_{\ell-d}^{\ell} -$$

$$0.5 \int_{\ell-d}^{\ell} \left[(x-h)^2 \frac{\partial F(\ell, x, h)}{\partial x} dx - (x+h)^2 \frac{\partial F(\ell, x, -h)}{\partial x} dx \right], \quad (\text{П.59})$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_B$$

где

$$\frac{\partial F(\ell, x, h)}{\partial x} = \frac{2}{x-h} \sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{\ell^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial F(\ell, x, -h)}{\partial x} = \frac{2}{x+h} \sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{\ell^2 - x^2}} \quad (\text{П.60})$$

После подстановки пределов интегрирования в часть *A* выражения (П.59), а также выражения (П.60) в часть *B* выражения (П.59) и выполняя интегрирование, получим:

$$J_2 = \int_{\ell-d}^{\ell} u_0(x) dx = \frac{2P_0}{\pi E} \left[2h^2 \ln \frac{h}{\ell} + h \arccos \frac{h}{\ell} \sqrt{\ell^2 - h^2} \right] \quad (\text{П.61})$$

Подставляя соотношения (П.57) и (П.61) в правую часть выражения (П.54) и вычисля производную, получаем ($t = d/\ell$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ определяются в (4.46)):

$$J = \frac{\partial}{\partial \ell} (J_1 + J_2) = \frac{2\sigma_0 \ell}{E} [A(t) - B(t)] - \frac{4P_0 \ell}{\pi E} \{A(t) [A(t) - 2B(t)] - 2C(t)\}$$

После подстановки последнего соотношения в выражение (4.43) и некоторых преобразований получаем соотношения (4.45) и (4.46).

Литература

1. Берлин А. А., Басин В. Е. Основы адгезии полимеров. Москва, Химия, 1974. С. 392.
2. Кинлок Э. Адгезия и адгезивы: наука и технологии, пер. с англ. М.: Мир, 1991. С. 484.
3. Мэтьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. М.: Техносфера, 2004. С. 408.
4. Gurumurthy C., Kramer E. J., Hui C.-Y. Controlling Interfacial Interpenetration and Fracture Properties of Polyimide/Epoxy Interfaces // *The Journal of Adhesion*. 2006. Vol. 82, no. 3. P. 239–266.
5. Lee H.-Y., Yu J. Adhesion strength of leadframe/EMC interfaces // *Journal of Electronic Materials*. 1999. Vol. 28, no 12. P. 1444–1447.
6. Roche A. A., Aufray M., Bouchet J. The Role of the Residual Stresses of the Epoxy-Aluminum Interphase on the Interfacial Fracture Toughness // *The Journal of Adhesion*. 2006. Vol. 82, no. 9. P. 867–886.
7. Качанов Е. Б., Тамарин Ю. А. Пути повышения сопротивления усталости лопаток турбины из жаропрочных сплавов // *Технология лёгких сплавов*. 2009. № 2. С. 40–46.
8. Khanna V. K. Adhesion-delamination phenomena at the surfaces and interfaces in microelectronics and MEMS structures and packaged devices // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2011. Vol. 44, no. 3. P. 1–19.
9. Chen J., Bull S. J. Approaches to investigate delamination and interfacial toughness in coated systems: an overview // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2011. Vol. 44, no. 3. P. 034001–034019.
10. Tran H., Shirangi M. H., Pang X., Volinsky A. Temperature, moisture and mode-mixity effects on copper leadframe/EMC interfacial fracture toughness // *International Journal of Fracture*. 2014. Vol. 185, no 1-2. P. 115–127.

11. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 3. С. 434–444; Прямолинейные трещины в плоских пластинках №4. С.706–721; Связь с энергетическими теориями №5. С.893–900.
12. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–53.
13. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
14. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968. С. 246.
15. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960. Vol. 8, no. 2. P. 100 – 104.
16. Mai Y.-W., Lawn B. R. Crack-Interface Grain Bridging as a Fracture Resistance Mechanism in Ceramics: II, Theoretical Fracture Mechanics Model // Journal of the American Ceramic Society. 1987. Vol. 70, no. 4. P. 289–294.
17. Budiansky B., Amazigo J. C., Evans A. G. Small-scale crack bridging and the fracture toughness of particulate-reinforced ceramics // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1988. Vol. 36, no. 2. P. 167 – 187.
18. Cox B. N., Marshall D. B. Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue // Acta Metallurgica et Materialia. 1994. Vol. 42, no. 2. P. 341 – 363.
19. Budiansky B., Cui Y. L. On the tensile strength of a fiber-reinforced ceramic composite containing a crack-like flaw // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1994. Vol. 42, no. 1. P. 1 – 19.
20. Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements // Cement and Concrete Research. 1976. Vol. 6, no. 6. P. 773 – 781.

21. Болотин В. В., Лебедев В. Л., Мурзаханов Г. Х., Нефедов С. В. Модель роста дисковой трещины малоциклового усталости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 3. С. 54–61.
22. Греков М. А., Морозов Н. Ф. О дисковых равновесных трещинах // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64, № 1. С. 172–175.
23. Морозов Н. Ф., Паукшто М. В. Дискретные и гибридные модели механики разрушения. Изд-во СПбГУ, 1995. С. 160.
24. Elices M., Guinea G. V., Gomez J., Planas J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges // Engineering Fracture Mechanics. 2002. Vol. 69, no. 2. P. 137 – 163.
25. Корнев В. М., Кургузов В. Д. Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения // Прикл. механика и техн. физика. 2010. № 6. С. 153–163.
26. Nemat-Nasser S., Hori M. Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites // Mechanics of Materials. 1987. Vol. 6, no. 3. P. 245 – 269.
27. Греков М. А., Морозов Н. Ф. О равновесных трещинах в композитах, армированных однонаправленными волокнами // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70, № 6. С. 1063–1075.
28. Morozov N., Paukshto M., Ponikarov N. On the Problem of Equilibrium Length of a Bridged Crack // Journal of Applied Mechanics. 1997. Vol. 64, no. 2. P. 427–430.
29. Goldstein R., Perelmuter M. Modeling of Bonding at an Interface Crack // International Journal of Fracture. 1999. Vol. 99, no 1-2. P. 53–79.
30. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 94–112.

31. Перельмутер М. Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, № 1. С. 152–171.
32. Дженна Ф., Перельмутер М. Н. Микромеханическое моделирование периодонтальной связки при растяжении и сдвиге: Нелинейные соотношения напряжение-деформация в замкнутой форме // Российский журнал биомеханики. 2007. Т. 11, № 2. С. 15–40.
33. Perelmuter M. Bridged interface cracks under transient thermal loading // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2007. Vol. 7, no. 1. P. 4030033–4030034.
34. Perelmuter M. Analysis of cracks with bridged zone of large scale // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2008. Vol. 8, no. 1. P. 10231–10232.
35. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 2. С. 22–39.
36. Genna F., Perelmuter M. Speeding-up Finite Element analyses by replacing the linear equation solver with a Boundary Element code. Part 1: 2D linear elasticity // Computers & Structures. 2010. Vol. 88, no. 13-14. P. 845 – 858.
37. Perelmuter M. N. Mechanical modelling of nanotube-polymer adhesion // NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. 2011. Vol. 2, no. 2. P. 119–125.
38. Перельмутер М. Модели трещины с взаимодействием берегов для нанокомпозитов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 514–516.
39. Перельмутер М. Н. Трещина на границе раздела материалов с нелинейными связями в концевой области // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, № 1. С. 152–173.
40. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. О кинетике формирования и роста трещин на границе соединения материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 4. С. 32–49.

41. Перельмутер М. Н. Анализ напряженного состояния в концевой области трещины на границе раздела материалов методом граничных элементов // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 415–426.
42. Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // Computational Mechanics. 2013. Vol. 51, no 4. P. 523–534.
43. Perelmuter M. Kinetics of interfacial crack bridged zone degradation // Journal of Physics: Conference Series. 2013. Vol. 451, no 1. P. 012–020.
44. Перельмутер М. Н. Трещина с взаимодействием берегов: нелинейные кривые деформирования связей и сходимость численного решения // Известия Тульского Государственного Университета, Естественные науки. 2013. № 2-1. С. 96–108.
45. Perelmuter M. Nonlocal criterion of bridged cracks growth: Weak interface // Journal of the European Ceramic Society. 2014. Vol. 34, no. 11. P. 2789–2798.
46. Perelmuter M. Modeling Formation and Growth of Cracks on the Material Interface // Procedia Materials Science. 2014. Vol. 3, no. 1. P. 1075 – 1080.
47. Perelmuter M. Nonlocal criterion of bridged cracks growth: analytical analysis // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226, no 2. P. 397–418.
48. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина со связями на границе раздела материалов // Препринт ИПМех РАН № 568. Москва. 1996. С. 72.
49. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе раздела материалов с нелинейным взаимодействием берегов // Препринт ИПМех РАН № 619. Москва. 1998. С. 42.
50. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование зарождения дефектов на границе раздела материалов // Препринт ИПМех РАН № 648. Москва. 1999. С. 20.

51. Перельмутер М. Н. Моделирование сдвиговой прочности нанокompозитов // Препринт ИПМех РАН № 769. Москва. 2004. С. 50.
52. Perelmuter M. N. Micromechanical model of the periodontal ligament // Preprint IPMech RAS № 756. Moscow. 2004. P. 48.
53. Перельмутер М. Н. Двухпараметрический критерий зарождения и роста трещин // Препринт ИПМех РАН № 777. Москва. 2005. С. 65.
54. Перельмутер М. Н. Интегрально-дифференциальные уравнения для трещин с нелинейным взаимодействием берегов. Анализ сходимости решения // Препринт ИПМех РАН № 903. Москва. 2010. С. 43.
55. Перельмутер М. Н. Решение задач для трещин со связями в концевой области на границе раздела материалов методом граничных интегральных уравнений // Препринт ИПМех РАН № 1015. Москва. 2012. С. 58.
56. Goldstein V., R. Bakirov V. F., Osipenko N. M., Perelmuter M. N. Modeling of adhesion fracture energy of polymer-metal joint // Proceedings of the Institute of Physics and Technology of the Russian Academy of Sciences. 1996. Vol. 11. P. 77–92.
57. Goldstein R. V., Bakirov V. F., Perelmuter M. N. Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints // Proceedings of the Institute of Physics and Technology of the Russian Academy of Sciences. 1997. Vol. 13. P. 115–125.
58. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики. Сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. М: Физматлит, 2003. С. 221–238.
59. Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости нанокompозитов // Нанокompозиты: исследования производство и применение / Под ред. А. А. Берлин, И. Г. Ассовский. 2004. С. 203–206.
60. Перельмутер М. Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области. Предельные случаи. // Актуальные проблемы механики. Механика деформируемого твердого тела. Сборник трудов. М: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. – М.: Наука, 2009. С. 166–179.

61. Perelmuter M. Integro-Differential Equations for Stress Analysis in the Bridged Zone of Interface Cracks // Integral Methods in Science and Engineering / edited by C. Constanda, P. J. Harris. Birkhauser Boston, 2011. P. 287–298.
62. Перельмутер М. Н. Метод граничных интегральных уравнений в задачах о трещинах со взаимодействующими берегами // Развитие идей Л.А. Галина в механике / Под ред. И. Г. Горячевой. Ижевск. Регулярная и хаотическая динамика, 2012. С. 353–377.
63. Kuznetsov S. V., Kulikovski A. N., Perelmuter M. N. State of the art in the BEM applications to fracture mechanics of anisotropic media // Proceeding of the International Conference on Fracture (ICF8), Kiev (Ukraine). 1993. P. 373–380.
64. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина со связями в концевой зоне на границе раздела материалов и адгезионная энергия разрушения // Труды IX конференции по прочности и пластичности, Москва, ИПМех РАН. Т. 2. 1996. С. 78–85.
65. Perelmuter M. N. An interface crack with bonds under tension and shear loading // 6th Int. Conference on Biaxial / Multiaxial Fatigue and Fracture. Vol. 2. Portugal, Barselona: 2001. P. 1015–1022.
66. Perelmuter M. Fracture Criterion for Cracks with Bridged Zone // IUTAM Symposium on Asymptotics, Singularities and Homogenisation in Problems of Mechanics / Ed. by A. Movchan. Springer Netherlands, 2004. Vol. 113 of Solid Mechanics and Its Applications. P. 261–270.
67. Perelmuter M. Growth of cracks bridged by nanofibers // 11th International Conference on Fracture. Vol. 5. Turin, Italy, March 20-25, 2005. P. 3854–3859.
68. Perelmuter M. Models of nanofibrous composite fracture toughness // 17th European Conference on Fracture / Ed. by J. Pokluda. Vol. 2. Brno, Czech Republic: Curran Associates, Inc., 2008. P. 1733–1740.

69. Perelmuter M. Fracture modeling of interface junctions on the base of multiscale crack bridging concept // 12th International Conference on Fracture. Vol. 5. Ottawa, Canada; July 12-17, 2009. P. 4112–4120.
70. Perelmuter M. Bridged cracks growth criterion // The Proceedings of XXXVIII summer school “Advanced Problems in Mechanics”. St-Petersburg: 2010. — July, 1-5. P. 512–518.
71. Perelmuter M. Modeling degradation and self-healing of materials on the basis of the crack bridging approach // Proceedings of 3rd International Conference on Self-Healing Materials. Bath, UK: 2011. — 27-29 June. P. 158–159.
72. Perelmuter M. BEM analysis of structures with bridged cracks // Proceedings of the 8th UK Conference on Boundary Integral Methods / University of Leeds, UK. Leeds, UK: 2011. — 4-5th July. P. 215–222.
73. Perelmuter M. Analysis of Two Nonlocal Criteria of Bridged Cracks Growth // Proceedings 19th European Conference of Fracture. Kazan, Russia: 2012. — August 26-31. P. 1–8.
74. Perelmuter M. Bridged crack approach to model materials self-healing // Proceedings of Fourth International Conference on self-healing materials. Belgium, Ghent: 2013. — 16-20 June. P. 138–141.
75. Perelmuter M. BIEM analysis of structures with curvilinear bridged cracks // Proceedings of the 9th UK Conference on Boundary Integral Methods / University of Aberdeen. Aberdeen, UK: 2013. — 8-9 July. P. 1–8.
76. Perelmuter M. Boundary Element Analysis of Fibre-Reinforced Composites and Adhesion Joints with Bridged Cracks // Advances in Boundary Element and Meshless Techniques XV, Proceeding of BeTeq-2014, Published by EC Ltd. UK. 2014. P. 287–294.
77. Prandtl L. A thought model for the fracture of brittle solids. Translated from German edition (1933) by Knauss W.G. // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no 2. P. 105–109.

78. Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН ССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.
79. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М. : Наука, 1974. С. 312.
80. Gurson A. L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I - Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media // Journal of Engineering Materials and Technology. 1977. Vol. 99, no. 1. P. 2–15.
81. Tvergaard V., Hutchinson J. W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1992. Vol. 40, no. 6. P. 1377 – 1397.
82. Broberg K. V. Cracks and Fracture. Academic Press, San Diego, 1999. P. 752.
83. Глаголев В. В., Маркин А. А. Модели процесса деформирования и разделения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 2. С. 148–157.
84. Гольдштейн Р. В., Шаталов Г. А. Моделирование процессов разрушения в рамках обобщенной модели атомистической трещины нормального отрыва // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 151–164.
85. Слепьян Л. И. О дискретных моделях в механике разрушения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 46–59.
86. Rubinstein A. A., Wang P. The fracture toughness of a particulate-reinforced brittle matrix // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1998. Vol. 46, no. 7. P. 1139–1154.
87. Stang H., Olesen J. F., Poulsen P. N., Dick-Nielsen L. On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials // Materials and Structures. 2007. Vol. 40, no 4. P. 365–374.
88. Болотин В. В. Модель усталостной трещины с концевой зоной // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 12. С. 61–67.

89. Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения материалов // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 1. С. 170–179.
90. Jin Z.-H., Sun C. T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bi-materials // Engineering Fracture Mechanics. 2005. Vol. 72, no. 12. P. 1805 – 1817. I.
91. Park K., Paulino G. H., Roesler J. Cohesive fracture model for functionally graded fiber reinforced concrete // Cement and Concrete Research. 2010. Vol. 40, no. 6. P. 956 – 965.
92. Willis J. R. A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1967. Vol. 15, no. 3. P. 151 – 162.
93. Ишлинский А. Ю. Сопоставление двух моделей развития трещин в твердом теле // Изв. АН ССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 168–177.
94. Rice J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35, no. 2. P. 379–386.
95. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. С. 256.
96. Ritchie R. O. Mechanisms of fatigue-crack propagation in ductile and brittle solids // International Journal of Fracture. 1999. Vol. 100, no 1. P. 55–83.
97. Sorensen B. F., Gamstedt E. K., Ostergaard R. C., Goutianos S. Micromechanical model of cross-over fibre bridging - Prediction of mixed mode bridging laws // Mechanics of Materials. 2008. Vol. 40, no. 4-5. P. 220 – 234.
98. Nairn J. A. Analytical and numerical modeling of R curves for cracks with bridging zones // International Journal of Fracture. 2009. Vol. 155. P. 167–181.

99. Shao Y., Zhao H. P., Feng X. Q., Gao H. Discontinuous crack-bridging model for fracture toughness analysis of nacre // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2012. Vol. 60, no. 8. P. 1400–1419.
100. Zimmermann E. A., Ritchie R. O. Bone as a Structural Material // *Advanced Healthcare Materials*. 2015. Vol. 4, no. 6. P. 28–45.
101. Lena M. R., Klug J. C., Sun C. T. Composite Patches as Reinforcements and Crack Arrestors in Aircraft Structures // *Journal of Aircraft*. 1998. Vol. 35, no. 2. P. 318–323.
102. Wang C. H. Fatigue crack closure analysis of bridged cracks representing composite repairs // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2000. Vol. 23, no. 6. P. 477–488.
103. Мовчан А. А., Казарина С. А. Механика активных композитов, содержащих волокна или слои из сплава с памятью формы // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1996. Т. 2, № 2. С. 29–48.
104. Мовчан А. А., Мовчан И. А., Сильченко Л. Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. № 3. С. 118–130.
105. Мовчан А. А., Казарина С. А. Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // *Физическая мезомеханика*. 2012. Т. 15, № 1. С. 105–116.
106. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1959. Vol. 49, no. 2. P. 199–204.
107. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // *Известия АН СССР. Механика и машиностроение*. 1962. С. 131–137.
108. Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел // *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27, № 5. С. 957–962.

109. England A. H. A Crack Between Dissimilar Media // Journal of Applied Mechanics. 1965. Vol. 32, no. 2. P. 400–402.
110. Erdogan F. Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials With Cracks // Journal of Applied Mechanics. 1965. Vol. 32, no. 2. P. 403–410.
111. Sih G. C., Rice J. R. The Bending of Plates of Dissimilar Materials With Cracks // Journal of Applied Mechanics. 1964. Vol. 31, no. 3. P. 477–482.
112. Rice J. R., Sih G. C. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media // Journal of Applied Mechanics. 1965. Vol. 32, no. 2. P. 418–423.
113. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. С. 295.
114. Dundurs J. Effect of Elastic Constants on Stress In A Composite Under Plane Deformation // Journal of Composite Materials. 1967. Vol. 1, no. 3. P. 310–322.
115. Rice J. R. Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks // Journal of Applied Mechanics. 1988. Vol. 55, no. 1. P. 98–103.
116. Hills D. A., Barber J. R. Interface cracks // International Journal of Mechanical Sciences. 1993. Vol. 35, no. 1. P. 27 – 37.
117. Malyshev B. M., Salganik R. L. The strength of adhesive joints using the theory of cracks // International Journal of Fracture Mechanics. 1965. Vol. 1, no 2. P. 114–128.
118. Comninou M. The Interface Crack // Journal of Applied Mechanics. 1977. Vol. 44, no. 4. P. 631–636.
119. Симонов И. В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. 1985. № 6. С. 969–976.
120. Comninou M. An overview of interface cracks // Engineering Fracture Mechanics. 1990. Vol. 37, no. 1. P. 197 – 208.
121. Comninou M., Schmueser D. The Interface Crack in a Combined Tension-Compression and Shear Field // Journal of Applied Mechanics. 1979. Vol. 46, no. 2. P. 345–348.

122. Simonov I. V. An interface crack in an inhomogeneous stress field // *International Journal of Fracture*. 1990. Vol. 46, no 3. P. 223–235.
123. Delale F., Erdogan F. On the Mechanical Modeling of the Interfacial Region in Bonded Half-Planes // *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55, no. 2. P. 317–324.
124. Mishuris G. Interface crack and nonideal interface concept (Mode III) // *International Journal of Fracture*. 2001. Vol. 107, no 3. P. 279–296.
125. Suo Z., Hutchinson J. W. Interface crack between two elastic layers // *International Journal of Fracture*. 1990. Vol. 43, no 1. P. 1–18.
126. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела // *Прикладная математика и механика*. 1964. Т. 28, № 6. С. 1061–1069.
127. Kassir M. K., Bregman A. M. The stress intensity factor for a penny-shaped crack between two dissimilar materials // *Trans. of the ASME. Series E. Journal of Applied Mechanics*. 1972. Vol. 39, no. 1. P. 308–310.
128. Willis J. R. The penny-shaped crack on an interface // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1972. Vol. 25, no. 3. P. 367–385.
129. Bregman A. M., Kassir M. K. Thermal fracture of bonded dissimilar media containing a penny-shaped crack // *International Journal of Fracture*. 1974. Vol. 10, no 1. P. 87–98.
130. Antipov Y. A. An exact solution of the 3-D-problem of an interface semi-infinite plane crack // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1999. Vol. 47, no. 5. P. 1051 – 1093.
131. Shifrin E. I., Brank B., Surace G. Analytical-Numerical Solution of Elliptical Interface Crack Problem // *International Journal of Fracture*. 1998. Vol. 94, no. 3. P. 201–215.
132. Греков М. А. Плоская задача для трещины, расположенной между двумя линейно-упругими средами // *Прикладная математика и механика*. 1994. Т. 69, № 1. С. 146–158.

133. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. С. 640.
134. Sun C. T., Jih Z. H. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // *Engineering Fracture Mechanics*. 1987. Vol. 28, no. 1. P. 13 – 20.
135. Rice J. R., Suo Z., Wang J. S. Mechanics and thermodynamics of brittle interfacial failure in bimaterial systems // In: *Metal Ceramic Interfaces* / Ed. by M. Ruhle, A. G. Evans, M. F. Ashby, J. P. Hirth. Pergamon Press, Oxford, 1990. P. 269–294.
136. Hutchinson J. W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials // *Advances in applied mechanics*. Elsevier, 1991. Vol. 29. P. 63–191.
137. Willis J. R. Fracture mechanics of interfacial cracks // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1971. Vol. 19, no. 6. P. 353 – 368.
138. Suo Z. Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1990. Vol. 427, no. 1873. P. 331–358.
139. Banks-Sills L., Ikeda T. Stress intensity factors for interface cracks between orthotropic and monoclinic material // *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 167, no 1. P. 47–56.
140. Zak A. R., Williams M. L. Crack Point Stress Singularities at a Bi-Material Interface // *J. Appl. Mech*. 1963. Vol. 30, no. 1. P. 142–143.
141. Cook T. S., Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, no. 8. P. 677 – 697.
142. Swenson D. O., Rau J., C. A. The stress distribution around a crack perpendicular to an interface between materials // *International Journal of Fracture Mechanics*. 1970. Vol. 6, no 4. P. 357–365.
143. Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П. О торможении трещины на границе раздела различных упругих тел // *Изв. АН ССР. Механика твердого тела*. 1978. № 4. С. 120–128.

144. Ming-Yuan H., Hutchinson J. W. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials // *International Journal of Solids and Structures*. 1989. Vol. 25, no. 9. P. 1053 – 1067.
145. Chen S. H., Wang T. C., Kao-Walter S. A crack perpendicular to the bimaterial interface in finite solid // *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40, no. 11. P. 2731 – 2755.
146. Martin E., Poitou B., Leguillon D., Gatt J. M. Competition between deflection and penetration at an interface in the vicinity of a main crack // *International Journal of Fracture*. 2008. Vol. 151, no 2. P. 247–268.
147. Raju I. S., Dattaguru B. Review of Methods for Calculating Fracture Parameters for Interface Crack Problems // *Computational Mechanics-95* / edited by S. Atluri, G. Yagawa, T. Cruse. Springer Berlin Heidelberg, 1995. P. 2020–2026.
148. Banks-Sills L. Review on Interface Fracture and Delamination of Composites // *Strain*. 2014. Vol. 50, no. 2. P. 98–110.
149. Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения двух материалов // *Препринт ИПМех РАН № 620*. Москва. 1998. P. 24.
150. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла на границе раздела различных сред // *Прикладная механика*. 1999. Vol. 35, no. 1. P. 63–68.
151. Tvergaard V., Hutchinson J. W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41, no. 6. P. 1119 – 1135.
152. Needleman A. A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding // *Journal of Applied Mechanics*. 1987. Vol. 54, no. 3. P. 525–531.
153. Kishimoto K., Omiya M., Yang W. Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive zone model // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2002. Vol. 99, no. 1-2. P. 198 – 206.

154. Freed Y., Banks-Sills L. A new cohesive zone model for mixed mode interface fracture in bimetals // *Engineering Fracture Mechanics*. 2008. Vol. 75, no. 15. P. 4583 – 4593.
155. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33, № 2. С. 212–222.
156. Ентов В. М. О роли структуры материала в механике разрушения // *Изв. АН ССР. Механика твердого тела*. 1976. № 3. С. 110–118.
157. Rose L. R. F. Crack reinforcement by distributed springs // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1987. Vol. 35, no. 4. P. 383 – 405.
158. Parvin M., Knauss W. G. Damage induced constitutive response of a thermo-plastic related to composites and adhesive bonding // *International Journal of Fracture*. 1990. Vol. 42, no 1. P. 57–72.
159. Sorensen B. F., Kirkegaard P. Determination of mixed mode cohesive laws // *Engineering Fracture Mechanics*. 2006. Vol. 73, no. 17. P. 2642 – 2661.
160. Zhu Y., Liechti K. M., Ravi-Chandar K. Direct extraction of rate-dependent traction-separation laws for polyurea/steel interfaces // *International Journal of Solids and Structures*. 2009. Vol. 46, no. 1. P. 31 – 51.
161. Stigh U., Alfredsson K. S., Andersson T. et al. Some aspects of cohesive models and modelling with special application to strength of adhesive layers // *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 165, no 2. P. 149–162.
162. Gowrishankar S., Mei H., Liechti K. M., Huang R. A comparison of direct and iterative methods for determining traction-separation relations // *International Journal of Fracture*. 2012. Vol. 177, no 2. P. 109–128.
163. Rose J. H., Smith J. R., Guinea F., Ferrante J. Universal features of the equation of state of metals // *Phys. Rev. B*. 1984. — Mar. Vol. 29. P. 2963–2969.
164. Budiansky B., Evans A. G., Hutchinson J. W. Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites // *International Journal of Solids and Structures*. 1995. Vol. 32, no. 3-4. P. 315 – 328.

165. Xu D.-B., Hui C. Y., Kramer E. J., Creton C. A micromechanical model of crack growth along polymer interfaces // *Mechanics of Materials*. 1991. Vol. 11, no. 3. P. 257 – 268.
166. Creton C., Kramer E. J., Hui C. Y., Brown H. R. Failure mechanisms of polymer interfaces reinforced with block copolymers // *Macromolecules*. 1992. Vol. 25, no. 12. P. 3075–3088.
167. Ji H., De Gennes P. G. Adhesion via connector molecules: the many-stitch problem // *Macromolecules*. 1993. Vol. 26, no. 3. P. 520–525.
168. Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Статистическая физика макромолекул. Наука, 1989. С. 341.
169. Hui C. Y., Ruina A., Creton C., Kramer E. J. Micromechanics of crack growth into a craze in a polymer glass // *Macromolecules*. 1992. Vol. 25, no. 15. P. 3948–3955.
170. Washiyama J., Kramer E. J., Creton C. F., Hui C.-Y. Chain Pullout Fracture of Polymer Interfaces // *Macromolecules*. 1994. Vol. 27, no. 8. P. 2019–2024.
171. Cox H. L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials // *British Journal of Applied Physics*. 1952. Vol. 3. P. 72–79.
172. Kelly A., Tyson W. Tensile properties of fibre-reinforced metals: Copper/tungsten and copper/molybdenum // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1965. Vol. 13, no. 6. P. 329 – 350.
173. Marshall D. B. I., Cox B. N., Evans A. G. The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites // *Acta Metallurgica*. 1985. Vol. 33, no. 11. P. 2013 – 2021.
174. Thostenson E. T., Ren Z., Chou T.-W. Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review // *Composites Science and Technology*. 2001. Vol. 61, no. 13. P. 1899 – 1912.
175. Thostenson E. T., Li W. Z., Wang D. Z. et al. Carbon nanotube/carbon fiber hybrid multiscale composites // *Journal of Applied Physics*. 2002. Vol. 91, no. 9. P. 6034–6037.

176. Дьячкова Т. П., Филатова Е. Ю., Горский С. Ю. Модифицирование многослойных углеродных нанотрубок полианилином и исследование свойств полученных материалов // Композиты и наноструктуры. 2013. № 1. С. 5–18.
177. Wong M., Paramsothy M., Xu X. J. et al. Physical interactions at carbon nanotube-polymer interface // Polymer. 2003. Vol. 44, no. 25. P. 7757 – 7764.
178. Frankland S. J. V., Harik V. M. Analysis of carbon nanotube pull-out from a polymer matrix // Surface Science. 2003. Vol. 525, no. 1-3. P. L103 – L108.
179. Barber A. H., Cohen S. R., Eitan A. et al. Fracture Transitions at a Carbon-Nanotube/Polymer Interface // Advanced Materials. 2006. Vol. 18, no. 1. P. 83–87.
180. Barber A. H., Cohen S. R., Kenig S., Wagner H. D. Interfacial fracture energy measurements for multi-walled carbon nanotubes pulled from a polymer matrix // Composites Science and Technology. 2004. Vol. 64, no. 15. P. 2283 – 2289.
181. Журков С. Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестник АН СССР. 1968. № 3. С. 46–52.
182. Регель В. Г., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. С. 560.
183. Владимиров В. И. Физическая природа разрушения металлов. М.: Металлургия, 1984. С. 280.
184. Кауш Г. Разрушение полимеров. М.: Мир, 1981. С. 440.
185. Бартенев Г. М. Прочность и механизм разрушения полимеров. М.: Химия, 1984. С. 279.
186. Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Механика разрушения полимеров. Киев: Наук. Думка, 1988. С. 224.

187. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Салганик Р. Л. О кинетике распространения трещин. Общие представления. Трещины близкие к равновесным // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1966. № 5. С. 82–92.
188. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Салганик Р. О кинетике распространения трещин. Флуктуационное разрушение // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 1. С. 122–134.
189. Salganik R. L. The adhesive joint fracture due to crack propagation affected by heat and active agent concentration // International Journal of Fracture. 1994. Vol. 65, no 2. P. 141–159.
190. Salganik R., Rapoport L., Gotlib V. A. Effect of Structure on Environmentally Assisted Subcritical Crack Growth in Brittle Materials // International Journal of Fracture. 1997. Vol. 87, no 1. P. 21–46.
191. Hills D. A., Kelly P. A., Dai D. N., Korsunsky A. M. Solution of Crack Problems, The Distributed Dislocation Technique. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996. P. 297.
192. Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л. Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 69–82.
193. Билби Б., Эшелби Д. Дислокации и теория разрушения // Под ред. Г. Либовица. М.:Мир. Разрушение, 1973. Т. 1. С. 112–203.
194. Tada H., Paris P. C., Irwin G. The Stress Analysis of Cracks Handbook, 2nd ed. Paris Productions Inc., St. Louis, USA, 1985.
195. Li R., Chudnovsky A. The stress intensity factor Green's function for a crack interacting with a circular inclusion // International Journal of Fracture. 1994. Vol. 67, no 2. P. 169–177.
196. Weitsman Y. Nonlinear Analysis of Crazes // Trans ASME J App. Mech. 1986. Vol. 53. P. 97–103.
197. Штремель М. А. Эффективность мостов в трещине // Физика металлов и металловедение. 2007. Т. 103, № 4. С. 353–363.

198. Huang N. C. On the Size of the Cohesive Zone at the Crack Tip // Journal of Applied Mechanics. 1985. Vol. 52, no. 2. P. 490–492.
199. Ungsuwarungstri T., Knauss W. G. A Nonlinear Analysis of an Equilibrium Craze. Part I - A nonlinear analysis of an equilibrium craze // Journal of Applied Mechanics. 1988. Vol. 55, no. 1. P. 44–52.
200. Knauss W. G. Time Dependent Fracture and Cohesive Zones // Journal of Engineering Materials and Technology. 1993. Vol. 115, no. 3. P. 262–267.
201. Lee K. Y., Choi H. J. Boundary element analysis of stress intensity factors for bimaterial interface cracks // Engineering Fracture Mechanics. 1988. Vol. 29. P. 461 – 472.
202. Yuuki R., Cho S. B. Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials // Engineering Fracture Mechanics. 1989. Vol. 34, no. 1. P. 179 – 188.
203. Tan C. L., Gao Y. L. Treatment of bimaterial interface crack problems using the boundary element method // Engineering Fracture Mechanics. 1990. Vol. 36, no. 6. P. 919 – 932.
204. Raveendra S. T., Banerjee P. K. Computation of stress intensity factors for interfacial cracks // Engineering Fracture Mechanics. 1991. Vol. 40, no. 1. P. 89 – 103.
205. Dong Y., Wang Z., Wang B. On the computation of stress intensity factors for interfacial cracks using quarter-point boundary elements // Engineering Fracture Mechanics. 1997. Vol. 57, no. 4. P. 335 – 342.
206. Ikeda T., Sun C. T. Stress intensity factor analysis for an interface crack between dissimilar isotropic materials under thermal stress // International Journal of Fracture. 2001. Vol. 111. P. 229–249.
207. Hadesfandiari A. R., Dargush G. F. Analysis of bi-material interface cracks with complex weighting functions and non-standard quadrature // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 48, no. 10. P. 1499 – 1512.

208. Liu Y.-F., Masuda C., Yuuki R. An efficient BEM to calculate weight functions and its application to bridging analysis in an orthotropic medium // *Computational Mechanics*. 1998. Vol. 22. P. 418–424.
209. Rauchs G., Thomason P. F., Withers P. J. Finite element modelling of frictional bridging during fatigue crackgrowth in fibre-reinforced metal matrix composites // *Comput Mater Sci*. 2002. Vol. 25, no. 5. P. 166–173.
210. Cudzilo B. E., Tan C. L. Numerical fracture mechanics analysis of cracked fibre-metal laminates with cut-outs // *Electronic J. Boundary Elements*. 2003. Vol. 3, no. 1. P. 336 – 403.
211. Selvadurai A. P. S. Crack-bridging in a unidirectionally fibre-reinforced plate // *Journal of Engineering Mathematics*. 2010. Vol. 68, no 1. P. 5–14.
212. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. С. 224.
213. Loeber J. F., Sih G. C. Green's Function for Cracks in Nonhomogeneous Materials // *Journal of Applied Mechanics*. 1967. Vol. 34, no. 1. P. 240–243.
214. Ni L., Nemat-Nasser S. Bridged interface cracks in anisotropic bimetals // *Philosophical Magazine A*. 2000. Vol. 80, no. 11. P. 2675–2693.
215. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations // *Methods of analysis and solutions of crack problems / edited by G. C. Sih*. Springer Netherlands, 1973. Vol. 1 of *Mechanics of fracture*. P. 368–425.
216. Miller G. R., Keer L. M. A numerical technique for the solution of singular integral equations of second kind // *Quart. of Appl. Math.* 1985. — January. no. 1. P. 455–465.
217. Kurtz R. D., Farris T. N., Sun C. T. The numerical solution of Cauchy singular integral equations with application to fracture. 1994. Vol. 66, no. 2. P. 139–154.
218. Ильюшин А. А. Пластичность. Упругопластические деформации. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 376.

219. Ворович И. И., Лебедев Л. П. Функциональный анализ и его приложения в механике сплошной среды. М.: Вуз. кн, 2000. С. 316.
220. Биргер И. А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 113–119.
221. Lauterwasser B. D., Kramer E. J. Microscopic mechanisms and mechanics of craze growth and fracture // Philosophical Magazine A. 1979. Vol. 39, no. 4. P. 469–495.
222. Вавакин А. С., Козырев Ю. И., Салганик Р. Л. Напряженно-деформированное состояние вблизи кончика трещины в полиметилкрилате // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 2. С. 111–120.
223. Kunz-Douglass S., Beaumont P., Ashby M. A model for the toughness of epoxy-rubber particulate composites // Journal of Materials Science. 1980. Vol. 15, no 5. P. 1109–1123.
224. Gonzalez-Chi P. I., Young R. J. Crack bridging and fibre pull-out in polyethylene fibre reinforced epoxy resins // Journal of Materials Science. 1998. Vol. 33, no 24. P. 5715–5729.
225. Pezzotti G., Muraki N., Maeda N. et al. In Situ Measurement of Bridging Stresses in Toughened Silicon Nitride Using Raman Microprobe Spectroscopy // Journal of the American Ceramic Society. 1999. Vol. 82, no. 5. P. 1249–1256.
226. Peterlik H. Crack bridging stresses in alumina during crack extension // Journal of Materials Science Letters. 2001. Vol. 20, no 18. P. 1703–1705.
227. Dassios K. G., Galiotis C., Kostopoulos V., Steen M. Direct in situ measurements of bridging stresses in {CFCCs} // Acta Materialia. 2003. Vol. 51, no. 18. P. 5359 – 5373.
228. Walton J. R., Weitsman Y. Deformations and Stress Intensities Due to a Craze in an Extended Elastic Material // Journal of Applied Mechanics. 1984. Vol. 51, no. 1. P. 84–92.

229. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. С. 494.
230. Blandford G. E., Ingraffea A. R., Liggett J. A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1981. Vol. 17, no. 3. P. 387–404.
231. Кузнецов С. В. Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных сред // *Изв. АН ССР. Механика твердого тела*. 1989. № 4. С. 50–54.
232. Perelmuter M. N., Kuznetsov S. V. BEM analysis of 3D stresses concentration problems of anisotropic composite structures // *Proc. of European Conference on Computational Mechanics (ECCM99, Munich)* / Ed. by V. Wunderlich. 1999. P. 826–837.
233. Гольдштейн Р. В., Григорьев А. Г., Перельмутер М. Н. Применение метода граничных элементов для исследования термонапряженного состояния плоских и осесимметричных конструкций с концентраторами напряжений и трещинами // *Научно-технический отчет ЦИАМ им. П.И. Баранова, № 11358*. 1989. С. 1–150.
234. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. С. 524.
235. Balas J., Sladek J., Sladek V. Stress analysis by boundary element methods. *Studies in Applied Mechanics*, 23. Elsevier Scientific Publications, Amsterdam, 1990. P. 682.
236. Перельмутер М. Н. Применение метода граничных элементов при исследовании пространственного напряженного состояния составных конструкций // *Сб. Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении / Труды ЦИАМ*. Т. 1237, №4. 1989. С. 74–99.
237. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Метод граничных элементов в задачах концентрации напряжений и механики разрушения // *ИПМех АН СССР, Препринт*. 1990. № 460. С. 1–60.

238. Martinez J., Dominguez J. On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1984. Vol. 20, no. 10. P. 1941–1950.
239. Comninou M. The Interface Crack in a Shear Field // *Journal of Applied Mechanics*. 1978. Vol. 45, no. 2. P. 287–290.
240. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // *Journal of Elasticity*. 1980. Vol. 10, no 2. P. 203–212.
241. Sun C. T., Qian W. A treatment of interfacial cracks in the presence of friction // *International Journal of Fracture*. 1998. Vol. 94, no 4. P. 371–382.
242. Bui H., Oueslati A. The sliding interface crack with friction between elastic and rigid bodies // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. Vol. 53, no. 6. P. 1397 – 1421.
243. Li Y. N., Liang R. Y. The theory of the boundary eigenvalue problem in the cohesive crack model and its application // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41, no. 2. P. 331 – 350.
244. Белов Е. Б., Линьков А. М. Об условиях потери устойчивости при разупрочнении на взаимодействующих поверхностях трещин // *Исследования по механике строительных конструкций и материалов*. 1995. Т. 86– 92.
245. Линьков А. М. О размере концевой зоны и скорости распространения разрыва смещений // *Прикладная математика и механика*. 2005. Т. 69, № 1. С. 144–149.
246. Алехин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г. Синтез слоистых материалов и конструкций Новосибирск: ИГ СО АН СССР. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988. Р. 130.
247. Аннин Б. Д. Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел. Изд-во Ин-та гидродинамики, Новосибирск, 2005. С. 203.
248. Аннин Б. Д., Баев Л. В., Волчков Ю. М. Уравнения слоистого пакета с учётом поперечных сдвигов и обжатия // *Изв. РАН. Механика твёрдого тела*. 2014. № 1. С. 77–86.

249. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача / Под ред. Е. И. Шемякина. Изд-во «НАУКА». Новосибирск, 1983. С. 239.
250. England A. H. An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion // Journal of Applied Mechanics. 1966. Vol. 33, no. 3. P. 637–640.
251. Perlman A. B., Sih G. C. Elastostatic problems of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials // International Journal of Engineering Science. 1967. Vol. 5, no. 11. P. 845 – 867.
252. Toya M. A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1974. Vol. 22, no. 5. P. 325 – 348.
253. Prasad P. B. N., Simha K. R. Y. Interface crack around circular inclusion: SIF, kinking, debonding energetics // Engineering Fracture Mechanics. 2003. Vol. 70, no. 2. P. 285 – 307.
254. Chao R., Laws N. The Fiber-Matrix Interface Crack // Journal of Applied Mechanics. 1997. Vol. 64, no. 4. P. 992–999.
255. Gao Z. A Circular Inclusion With Imperfect Interface: Eshelby's Tensor and Related Problems // Journal of Applied Mechanics. 1995. Vol. 62, no. 4. P. 860–866.
256. Xie M., Levy A. J. Defect propagation at a circular interface // International Journal of Fracture. 2007. Vol. 144, no. 1. P. 1–20.
257. Mantic V. Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. Application of a coupled stress and energy criterion // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46, no. 6. P. 1287 – 1304.
258. Tavara L., Mantic V., Graciani E., Paris F. BEM analysis of crack onset and propagation along fiber-matrix interface under transverse tension using a linear elasticity - brittle interface model // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2011. Vol. 35, no. 2. P. 207 – 222.

259. Греков М. А. Метод возмущений в задаче о деформации двухкомпонентного композита со слабо искривленной границей раздела // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2004. № 1. С. 81–88.
260. Греков М. А., Малькова Ю. В. Силовые и энергетические характеристики упругого поля у вершины криволинейной межфазной трещины // Вестник СПбГУ. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 3. С. 17–27.
261. Греков М. А. Два типа дефектов межфазной поверхности // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, № 4. С. 678–697.
262. Финкель В. М. Физические основы торможения разрушения. М.:Металлургия, 1977. С. 359.
263. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.:Наука, 1985. С. 502.
264. Wang C. H., Rose L. R. F. A crack bridging model for bonded plates subjected to tension and bending // International Journal of Solids and Structures. 1999. Vol. 36, no. 13. P. 1985 – 2014.
265. Shaw T., Liniger E., Bonilla G., Doyle J. Experimental Determination of the Toughness of Crack Stop Structures // International Interconnect Technology Conference, IEEE 2007. Burlingame, CA: 2007. P. 114–116.
266. Lenci S. Melan's Problems With Weak Interface // Journal of Applied Mechanics. 1999. Vol. 67, no. 1. P. 22–28.
267. Lenci S., Menditto G. Weak interface in long fiber composites // International Journal of Solids and Structures. 2000. Vol. 37, no. 31. P. 4239 – 4260.
268. Klarbring A., Movchan A. B. Asymptotic modelling of adhesive joints // Mechanics of Materials. 1998. Vol. 28, no. 1-4. P. 137 – 145.
269. Lenci S. Analysis of a crack at a weak interface // International Journal of Fracture. 2001. Vol. 108, no 3. P. 275–290.

270. Симонов И. В. Взаимодействие системы ослабленных зон на границе раздела упругих сред в поле растягивающих напряжений // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. С. 140–151.
271. Antipov Y., Avila-Pozos O., Kolaczkowski S., Movchan A. Mathematical model of delamination cracks on imperfect interfaces // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38, no. 36-37. P. 6665 – 6697.
272. Banks-Sills L., Salganik R. An asymptotic approach applied to a longitudinal crack in an adhesive layer // International Journal of Fracture. 1994. Vol. 68, no 1. P. 55–73.
273. Vellender A., Mishuris G., Movchan A. Weight Function in a Bimaterial Strip Containing an Interfacial Crack and an Imperfect Interface. Application to Bloch-Floquet Analysis in a Thin Inhomogeneous Structure with Cracks // Multiscale Modeling and Simulation. 2011. Vol. 9, no. 4. P. 1327–1349.
274. Mishuris G., Piccolroaz A., Vellender A. Boundary integral formulation for cracks at imperfect interfaces // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2014. Vol. 67, no. 3. P. 363–387.
275. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. no. 3. P. 112–125.
276. Корнев В. М. Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // Прикл. механика и техн. физика. 2002. Т. 43. С. 153–161.
277. Кургузов В. Д., Корнев В. М. Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев // Прикл. механика и техн. физика. 2013. № 1. С. 179–194.
278. Новожилов В. В. К основам теории равновесных трещин в хрупких телах // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33, № 5. С. 797–812.

279. Grekov M. A., Morozov N. F. Some modern methods in mechanics of cracks // *Modern Analysis and Applications. Operator Theory: Advances and Applications* / Ed. by V. Adamyan. Birkhauser, 2009. Vol. 191. P. 127–142.
280. Линьков А. М. Потеря устойчивости, характерный линейный размер и критерий Новожилова-Нейбера в механике разрушения // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. № 6. С. 98–111.
281. Wnuk M. P. Nature of fracture in relation to the total potential energy // *J. Phys. D: Brit. J. Appl. Phys.* 1968. Vol. 1, no. 2. P. 217–236.
282. McCartney L. N. Mechanics of Matrix Cracking in Brittle-Matrix Fibre-Reinforced Composites // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1987. Vol. 409, no. 1837. P. 329–350.
283. Cornetti P., Pugno N., Carpinteri A., Taylor D. Finite fracture mechanics: A coupled stress and energy failure criterion // *Engineering Fracture Mechanics*. 2006. Vol. 73, no. 14. P. 2021 – 2033.
284. Cornetti P., Mantic V., Carpinteri A. Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49, no. 7. P. 1022–1032.
285. Weißgraeber P. B. W. Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, no. 14–15. P. 2383 – 2394.
286. Ungsuwarungsri T., Knauss W. G. A Nonlinear Analysis of an Equilibrium Craze. Part II - Simulations of Craze and Crack Growth // *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55, no. 1. P. 53–58.
287. Toya M. On mode I and mode II energy release rates of an interface crack // *International Journal of Fracture*. 1992. Vol. 56, no 4. P. 345–352.
288. Vine K., Cawley P., Kinloch A. J. The correlation of non-destructive measurements and toughness changes in adhesive joints during environmental attack // *The Journal of Adhesion*. 2001. Vol. 77, no. 2. P. 125–161.

289. Xia Z., Riester L., Curtin W. et al. Direct observation of toughening mechanisms in carbon nanotube ceramic matrix composites // *Acta Materialia*. 2004. Vol. 52, no. 4. P. 931 – 944.
290. Xia Z., Curtin W. A., Sheldon B. W. Fracture Toughness of Highly Ordered Carbon Nanotube/Alumina Nanocomposites // *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2004. Vol. 126, no. 3. P. 238–244.
291. Campilho R., Moura D., Gonzalves D. et al. Fracture toughness determination of adhesive and co-cured joints in natural fibre composites // *Composites Part B: Engineering*. 2013. Vol. 50. P. 120 – 126.
292. Creton C., Kramer E. J., Brown H. R., Hui C.-Y. Adhesion and fracture of interfaces between immiscible polymers: from the molecular to the continuum scale. 2002. Vol. 156 of *Adv. Polym. Sci. - Molecular Simulation Fracture Gel Theory*. P. 53–136.
293. Зимин С. П. Пористый кремний - материал с новыми свойствами // *Соросовский образовательный журнал*. 2004. № 1. С. 101–107.
294. Ксенофонтова О. И., Васин А. В., Егоров В. В. и др. Пористый кремний и его применение в биологии и медицине // *Журнал технической физики*. 2014. Т. 84, № 1. С. 67–78.
295. Telles J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. Vol. 24, no. 5. P. 959–973.
296. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. С. 832.