На правах рукописи

Шундерюк Михаил Мирославович

Применение метода инвариантной нормализации к построению асимптотических решений некоторых задач гамильтоновой механики

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена в Институте проблем механики РАН им А.Ю. Ишлинского

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Петров Александр Георгиевич**
Официальные оппоненты:	**Самсонов Виталий Александрович,** доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики МГУ, главный научный сотрудник **Зленко Александр Афанасьевич,** кандидат физико-математических наук, доцент, Московский автомобильно-дорожный государственный технический. университет.
Ведущая организация:	Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Защита состоится 25 сентября 2014 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 на базе Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН по адресу: просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

Автореферат разослан 25 августа 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.240.01, к.ф.-м.н. Сысоева Елена Ярославовна

Общая характеристика работы

Одним из самых мощных из имеющихся методов асимптотического интегрирования нелинейных механических гамильтоновых систем является гамильтонова нормальная форма. Нормальная форма значительно упрощает уравнения Гамильтона системы, позволяет по виду нормальной формы судить об устойчивости положения равновесия системы, в том числе в резонансных случаях, а также получать асимптотическое решение при помощи интеграла приближенной системы. Практическое применение метода ограничивается высокой трудоемкостью вычисления гамильтоновой нормальной формы для систем с несколькими степенями свободы, особенно при наличии параметров. Продвижение методов вычисления гамильтоновой нормальной формы для решения задач теоретической механики определяет **актуальность темы** темы диссертации.

Целями работы являются:

1. Решение актуальных задач теоретической механики.
2. Нахождение методом инвариантной нормализации общего вида нормальной формы гамильтонианов механических систем, представленных в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами.

Для достижения цели решались следующие **задачи**:

1. Найти нормальную форму гамильтониана и впоследствии исследовать асимптотические решения следующих задач нелинейной механики:
   - Движения тел вблизи коллинеарных точек либрации пространственной ограниченной круговой задачи трех тел.

- Нелинейные двухмерные колебания тяжелой материальной точки на пружине при резонансах 1:1, 1:3, а также при малом отклонении от резонанса 1:2.

2. Найти общий вид нормальных форм для гамильтонианов, представленных в виде степенных разложений по координатам и импульсам, для случаев:

   - 2 степени свободы: нормальная форма при отсутствии резонанса и при резонансах 1:1, 1:2, 1:3 вплоть до членов 4-го порядка.
   - 3 степени свободы: нормальная форма вплоть до 4-го порядка в отсутствие резонансов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тела, движущегося в окрестностях коллинеарных точек либрации пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. На ее основе получены следующие результаты:

   - Асимптотическое, с точностью до 4-х степеней координат и импульсов, решение в элементарных функциях уравнений Гамильтона системы.
   - Условия финитности асимптотических решений для начальных условий по координатам и импульсам.

2. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тяжелой материальной точки на нелинейной пружине в плоском случае при резонансах 1:1 и 1:3. На ее основе рассчитан период перекачки энергии между степенями свободы колебаний как функция от начальных условий. Рассчитаны период перекачки энергии при малом

отклонении от резонанса 1:2 и минимальная расстройка частот, приводящая к исчезновению эффекта перекачки.

3. Для нелинейных механических гамильтоновых систем, гамильтониан которых представлен в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами, найден общий вид нелинейной нормальной формы. Результаты сведены в таблицы, позволяющие определять нормальные формы гамильтонианов с 2-мя и 3-мя степенями свободы без трудоемких вычислений. Найден общий вид интеграла приближенной системы для некоторых частных случаев ненормализованного квадратичного гамильтониана.

4. Для получения вышеперечисленных результатов разработан программный комплекс, позволяющий автоматически приводить к нормальной форме степенные разложения гамильтонианов механических систем, в том числе при наличии параметров. Программный комплекс также позволяет находить интеграл приближенной системы для случаев, когда квадратичная часть гамильтониана не приведена к нормальной форме.

Научная новизна:

1. Впервые найдена нормальная форма гамильтониана движения тела в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел в зависимости от параметра: приведенной массы двух тяжелых тел.

2. Впервые найдены асимптотики для периодов перекачки энергии между степенями свободы тяжелой материальной точки на пружине в плоском случае при резонансе 1:1 и при малом отклонении от резонанса 1:2 в зависимости от начальных условий.

3. Впервые реализована программа для автоматического расчета квадратичной и нелинейной нормальной формы гамильтонианов, зависящих от произвольного количества параметров, а также позволяющая получить интеграл приближенной системы без приведения квадратичной части гамильтониана к нормальной форме.

Практическая значимость диссертационной работы определяется возможностью применения полученных результатов для быстрого расчета любой гамильтоновой нормальной формы для любой нелинейной механической гамильтоновой системы с параметрами. Для этого достаточно подставить коэффициенты степенного разложения гамильтониана в полученные формулы для коэффициентов нормальной формы. Таким образом, при исследовании нелинейных гамильтоновых систем с параметром появляется интеграл приближенной системы, а по виду нормальной формы можно судить об устойчивости положения равновесия.

Особенность коллинеарных точек либрации в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел состоит в том, что в линейной задаче из шести характеристических корней только один положительный. Поэтому в шестипараметрическом семействе орбит существует пятипараметрическое семейство орбит, не имеющих экспоненциального по времени роста ни по одной фазовой переменной. На этих орбитах космический аппарат может оставаться в течение длительного времени, затрачивая небольшое количество топлива на компенсацию развития неустойчивости.

Практической ценностью модели пружинного маятника является ее физическая аналогия двумерным колебаниям атомов внутри молекул, которые в случае резонанса обнаруживаются при спектральном анализе (резонанс Ферми).

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается их сравнением с ранее полученными и опубликованными другими авторами результатами для частных случаев. Например, полученная в зависимости от приведенной массы нормальная форма гамильтониана движения тела в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел сравнивается с ранее вычисленной нормальной формой для частного случая системы Земля-Луна. Для всех задач приводится сравнение асимптотического решения с численным решением задачи для исходного гамильтониана.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и симпозиумах:

- 56-я научная конференция МФТИ (Россия, Москва, 2013).
- 55-я научная конференция МФТИ (Россия, Москва, 2012).
- X Всероссийский съезд по фундаментальным пробемам теоретической и прикладной механики (Россия, Нижний Новгород, 2011).
- XI Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Россия, Москва, 2010).
- Imperial College London. International Workshop on Resonance Oscillations and Stability of Nonsmooth Systems (Великобритания, Лондон, 2009).

Выполнялись доклады на научных семинарах в Институте проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Механико-математическом факультете МГУ, Институте механики МГУ, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ №07-01-00129-а и №11-01-00535-а. В период подготовки диссертации автор работал в Институте проблем

механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, являлся аспирантом Московского физико-технического института на базовой кафедре "Управление динамическими системами".

Личный вклад. Автор разработал программный комплекс для вычисления параметрической нелинейной гамильтоновой формы, самостоятельно и в соавторстве осуществлял решение поставленных задач работы.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 11 – в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации **113** страниц текста с **13** рисунками и 20 таблицами. Список литературы содержит **90** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена общему описанию нелинейных гамильтоновых систем, применению метода возмущений для поиска асимптотических решений. Приводится строгое определение гамильтоновой нормальной формы, квадратичной и нелинейной. Обосновывается польза от нормальной формы гамильтониана. Демонстрируются примеры нормальной формы и того, как она позволяет упрощать решения и исследования гамильтоновых систем. Проводится классификация различных видов нормальных форм квадратичных гамильтонианов в зависимости от числа степеней свободы и значений собственных чисел матрицы квадратичной формы.

Пусть $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ — независимые переменные, $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — функция Гамильтона автономной системы Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$ — неподвижная точка системы (1) и функция $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ в ней аналитична. Тогда функция H разлагается в степенной ряд по $\mathbf{q}, \mathbf{p}$:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{2}$$

где H_k – однородные полиномиальные формы переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ степени k.

Ряд H начинается с квадратичной формы H_2, а степенные разложения правых частей системы (1) — с линейных по переменным $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ членов.

Обозначим $\tilde{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$.

Пусть формальная нелинейная комплексная каноническая замена координат

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + \mathbf{N}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \tag{3}$$

где $\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} (N_1, \ldots, N_{2n})$, $N_j(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ — степенные ряды без свободных и линейных членов, приводит функцию Гамильтона $\tilde{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ к виду

$$h(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum h_{\mathbf{s}}\, z_1^{s_1} \ldots z_n^{s_n} \bar{z}_1^{s_{n+1}} \ldots \bar{z}_n^{s_{2n}}, \quad \dot{z}_j = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Формальная функция Гамильтона (4) называется *комплексной нормальной формой*, если

1. у соответствующей системы Гамильтона матрица линейной части имеет нормальную форму, на диагонали которой расположены собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$;

2. в разложении (4) имеются только *резонансные члены.* Они подчинены условиям

$$s_1\lambda_1 + \ldots + s_n\lambda_n - s_{n+1}\lambda_1 - \ldots - s_{2n}\lambda_n = 0. \tag{5}$$

Брюно А.Д. доказал [6], что для всякой системы (1) существует формальная замена (3), приводящая функцию Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ к нормальной форме (4), (5).

Если исходная система (1) вещественная, то комплексная нормальная форма (4), (5) линейным каноническим преобразованием приводится к вещественной форме. Наиболее простой вид вещественной формы называется гамильтоновой вещественной нормальной формой. Если комплексная нормальная форма определена единственным образом и ее коэффициенты являются инвариантами гамильтониана, то действительные нормальные формы могут быть различными.

Польза от нахождения нормальной формы заключается в том, что для нее всегда выполняется равенство $\{\hat{h}_2, \hat{h}_3 + \hat{h}_4 ...\} = 0$. Таким образом, у автономной системы становится найденным интеграл приближенной системы, что способствует ее аналитическому разрешению.

Вторая глава посвящена существующим в настоящее время алгоритмам поиска нормальной формы гамильтонианов, как квадратичных, так и нелинейных. Приводится предложенный В.Ф. Журавлёвым алгоритм инвариантной нормализации и описание его реализации при выполнении диссертационной работы. Демонстрируется общий вид нормальной формы гамильтониана для нескольких степеней свободы и при наличии резонансов между модами колебаний.

Алгоритмы вычисления канонических нормализующих замен (3) и нормальных форм (4), (5), классифицирируются по способу определения канонической замены: с помощью производящей функции и посредством рядов Ли. Метод определения замены с помощью производящей функции был предложен Биркгоффом и основан на подборе коэффициентнов производящей функции [3]. Метод определения замены через ряды Ли основается на составлении гомологического уравнения

$$\hat{F}_k(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = H_0(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) * G_k(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) + M_k(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}),$$

$$M_1 = F_1, \;\; M_2 = F_2 + F_1 * G_1 + \frac{1}{2} H_0 * G_1^2,$$

$$M_3 = F_3 + \sum_{i+j=3} \left(F_i * G_j + \frac{1}{2} H_0 * G_i * G_j \right) + \frac{1}{2} F_1 * G_1^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{6} H_0 * G_1^3, \ldots$$

Здесь G_i – полином генератора порядка i, F_i – полином исходного гамильтониана порядка i, $\hat{F}_i$ – полином нормализованного гамильтониана порядка i. Гомологические уравнения решаются последовательно по мере нахождения функций M_i.

Для решения гомологического уравнения может применяться чисто алгебраический метод, предложенный Деприи Хори в классической работе по нахождению нормальной формы гамильтониана в окрестностях треугольных точек либрации в задаче трех тел [16]. На каждой итерации метода разрешается специальная система алгебраических уравнений, из которой получаются все необходимые полиномы. В.Ф. Журавлёв предложил [8] метод разрешения гомологического уравнения, основанный на вычислении на каждой итерации метода аналитической квадратуры от функции M_k вдоль решений квадратичного гамильтониана.

$$\int_0^t M_k(\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}})dt = t\,\hat{F}_k(\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}}) + G_k(\mathbf{Z},\bar{\mathbf{Z}}) - G(t). \qquad (6)$$

Отсюда видно, как из квадратуры (6) можно найти коэффициенты нормальной формы $\hat{F}_k$ и генератора G_k: нормальная форма $\hat{F}_k$ равна коэффициенту при t, а G_k – свободное не зависящее от времени слагаемое. Причем в данном методе не обязательно применять переменные Биркгофа и нормализовать квадратичную часть. Как оказалось, такой метод позволяет находить нормальную форму значительно быстрее ранее использовавшихся методов и хорошо пригоден для нормализации систем с параметрами.

Представленные в работе результаты были получены благодаря применению метода, предложенного В.Ф. Журавлёвым [8], реализованного в среде символьного программирования Wolfram Mathematica. Блок-схема алгоритма нормализации приведена на рис. 1. В программе используется специально созданная для целей работы библиотека, содержащая в себе реализацию основных функций гамильтоновой механики: вычисление валентности замен, работа с симплектическими матрицами, вычисление скобок Пуассона, быстрое решение уравнений Гамильтона, диагонализация матрицы квадратичного гамильтониана и др.

В работе рассмотрено приведение к нормальной форме гамильтонианов, заданных в виде степенных разложений. Коэффициенты при всех мономах гамильтонианов считаются параметрами. Коэффициенты нормальной формы гамильтониана находятся в виде функции от параметров исходного гамильтониана. Полученные результаты позволяют получать коэффициенты нормальной формы гамильтониана В результате получается универсальный метод нахождения нормальной формы, основанный на прямой подстановке исходных коэффициентов степенного разложения в формулы для коэффициентов нормальной формы.

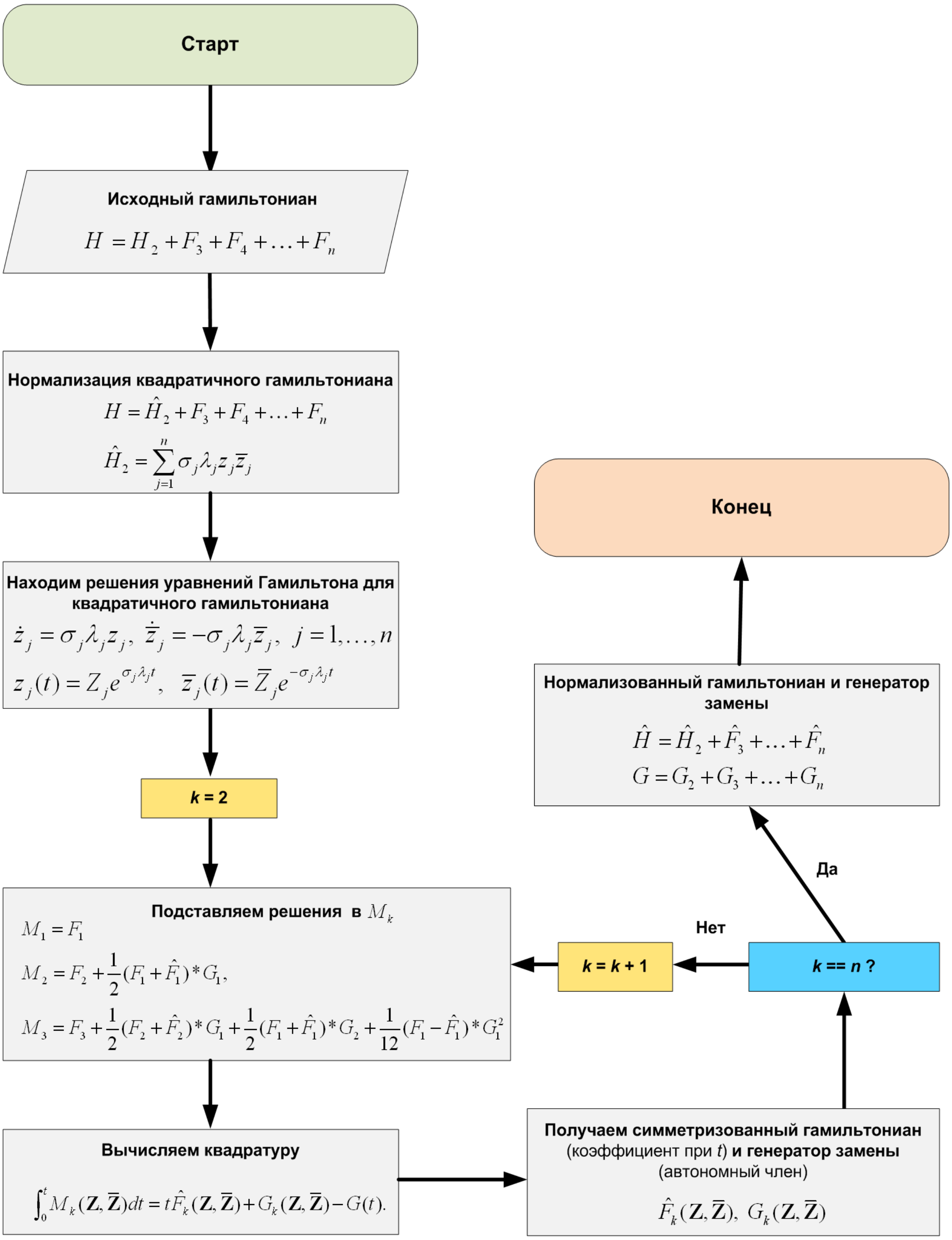

Рис. 1: Блок-схема алгоритма нормализации гамильтониана

Например, пусть задан гамильтониан

$$\begin{gathered} h(z_1, z_2, \bar z_1, \bar z_2) = h_2 + h_3 + h_4, \\ h_2 = \lambda_1 z_1 \bar z_1 + \sigma \lambda_2 z_2 \bar z_2, \\ h_3 = \sum_{i+j+l+m=3} a_{\{i,j,l,m\}} z_1^i z_2^j \bar z_1^l \bar z_2^m, \\ h_4 = \sum_{i+j+l+m=4} b_{\{i,j,l,m\}} z_1^i z_2^j \bar z_1^l \bar z_2^m. \end{gathered} \tag{7}$$

В h_3 содержится 20 слагаемых, а в h_4 35, $\sigma = \pm 1$.

В результате применения программы получается следующее выражение для нормальной формы:

$$\begin{gathered} \hat h(Z_1, Z_2, \bar Z_1, \bar Z_2) = \hat h_2 + \hat h_3 + \hat h_4, \\ \hat h_2 = \lambda_1 Z_1 \bar Z_1 + \sigma \lambda_2 Z_2 \bar Z_2, \quad \hat h_3 = 0, \\ \hat h_4 = c_{20} (Z_1 \bar Z_1)^2 + c_{11} Z_1 \bar Z_1 Z_2 \bar Z_2 + c_{02} (Z_2 \bar Z_2)^2, \\ c_{20} = \sum_i^5 \frac{\Phi_{20}^i}{\Delta_{20}^i}, \quad c_{11} = \sum_i^7 \frac{\Phi_{11}^i}{\Delta_{11}^i}, \quad c_{02} = \sum_i^5 \frac{\Phi_{02}^i}{\Delta_{02}^i}. \end{gathered} \tag{8}$$

Параметры для c_{20}:

i	Δ_{20}^i	Φ_{20}^i
1	1	$b_{\{2,0,2,0\}}$
2	λ_1	$-3\left(a_{\{1,0,2,0\}} a_{\{2,0,1,0\}} + a_{\{0,0,3,0\}} a_{\{3,0,0,0\}}\right)$
3	λ_2	$-\sigma a_{\{1,0,1,1\}} a_{\{1,1,1,0\}}$
4	$2\lambda_1 - \sigma\lambda_2$	$a_{\{0,1,2,0\}} a_{\{2,0,0,1\}}, \sigma = 1; \quad -a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{2,1,0,0\}}, \sigma = -1$
5	$2\lambda_1 + \sigma\lambda_2$	$-a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{2,1,0,0\}}, \sigma = 1; \quad a_{\{0,1,2,0\}} a_{\{2,0,0,1\}}, \sigma = -1$

Выражения для коэффициентов c_{11} и c_{02} аналогичны. Такие же результаты получены для следующих случаев:

- 2 степени свободы: нормальная форма при отсутствии резонанса и при резонансах 1:1, 1:2, 1:3 вплоть до членов 4-го порядка, для положительной и отрицательной сигнатур.

- 3 степени свободы: нормальная форма вплоть до 4-го порядка в отсутствие резонансов, положительная сигнатура.

- Частный случай неприведенного к нормальной форме квадратичного гамильтониана (2 степени свободы):

$$h_2 = E + \omega K,$$

$$E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + p_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_2^2 + p_2^2\right),$$

$$K = q_1 p_2 - p_1 q_2,$$

$$h_3 = 0, \quad h_4 = \sum_{i+j+l+m=4} b_{\{i,j,l,m\}} q_1^i q_2^j p_1^l p_2^m$$

  В этом случае алгоритм инвариантной нормализации позволяет найти интеграл $\left\{\hat{h}_2, \hat{h}_3 + \hat{h}_4\right\} = 0$

В **третьей главе** приведено решение задачи о движениях тела в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел, полученное с помощью алгоритма инвариантной нормализации.

Рассматривается движение тела малой массы m_3 под действием притяжения двух небесных тел, обладающих конечными массами m_1 и m_2 (например, движение космического аппарата, притягиваемого Землей и Луной). Для определенности считается $m_1 > m_2$, а также $m_1 + m_2 = 1$. Предполагается, что тело малой массы не влияет на движение конечных масс, движение всех трех тел происходит в одной плоскости, а также тела конечных масс движутся по круговым орбитам. Точки, в которых тело малой массы находится в состоянии относительного равновесия по отношению к телам конечных масс, называют точками либрации.

В ограниченной задаче трех тел существуют три коллинеарных точки либрации, лежащие на прямой, соединяющей тела конечных масс, и две треугольные точки либрации, расположенные таким образом, что два тела и точки либрации образуют равносторонние треугольники.

Тела массой m_1 и m_2 располагаются на безразмерном единичном расстоянии друг от друга, ось абсцисс вводится параллельно отрезку, соединяющему массы, а ось ординат – перпендикулярно. Центр масс системы с находится на расстоянии $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ от тела с массой m_1. Так как $m_1 > m_2$, то $0 < \mu < 1/2$. Коллинеарные точки либрации обозначены через L_1, L_2 и L_3, а треугольные через L_4 и L_5 (рис. 2). Начало координат располагается в точке либрации L_1. Координаты тела малой массы обозначены через x,y и z.

Движения тел в окрестностях треугольных точек либрации хорошо изучены, в том числе с учетом влияния Солнца и других тел, а также в случае пространственной эллиптической задачи. Для них найдены три типа периодических движений, условия устойчивости, рассмотрены все типы резонансов [5, 10, 16].

Все три коллинеарные точки либрации круговой ограниченной задачи трех тел неустойчивы по Ляпунову. Несмотря на это, расположение космического аппарата в любой из неустойчивых точек либрации является выгодным для решения ряда задач.

Особенность коллинеарных точек либрации состоит в том, что в линейной задаче из шести характеристических корней только один положительный. Поэтому в шестипараметрическом семействе орбит существует пятипараметрическое семейство орбит, не имеющих экспоненциального по времени роста ни по одной фазовой переменной. На этих орбитах космический аппарат может оставаться в течение длительного времени, затрачивая небольшое количество топлива на компенсацию развития неустойчивости.

Благодаря этому факту задача ранее привлекла внимание

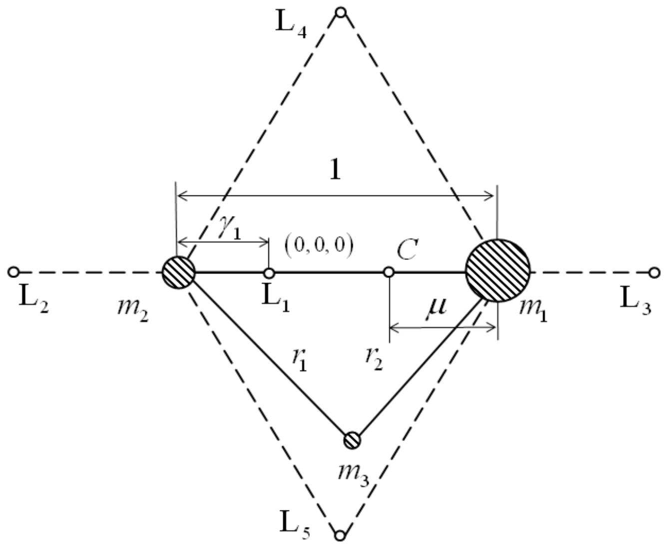

Рис. 2: Коллинеарные точки либрации в плоской ограниченной круговой задаче трех тел

таких авторов, как Маркеев А.П., Лидов М.Л., Вашковьяк М.А., Gomez G., Jorba A. и др. Исследования проводились с использованием гамильтоновой нормальной формы численно для систем Земля-Луна и Солнце-Земля, включая случай эллиптической задачи [9, 10, 17].

В настойщей работе в результате применения алгоритма инвариантной нормализации найдены гамильтоновы нормальные формы для всех трех коллинеарных точек либрации вплоть до членов 4-го порядка. При этом все коэффициенты нормальной формы найдены как аналитические функции от исходных параметров (приведенная масса тяжелых тел). Проведено сравнение полученных результатов с численными расчетов и ранее известными работами для случаев Земля-Луна и Солнце-Земля. Получены аналитические решения уравнений Гамильтона для найденных нормальных форм, а также условиях финитности и периодичности для этих решений. При помощи генератора нормализующей замены условия финитности решений были записаны в исходных переменных до нормализации гамильтониана, что позволило выделить в шестимерном пространстве начальных условий пятимерной подпространство, в котором неустойчивость нарастает значительно медленней за счет обнуления в решениях членов при главной экспоненте $\exp \lambda t$, где λ – единственное положительно собственно число.

Четвертая глава содержит постановку задачи о нелинейных двухмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине и ее асимптотическое решение при помощи аппарата нормальной формы. Задача решается при отсутствии резонанса и при резонансах 1:1 и 1:3 между модами колебаний. Рассматривается также случай расстройки резонанса 1:2 при внесении малого возмущения в частоту одной из мод колебаний. Оказывается, что для асимптотического решения подобной задачи также применим алгоритм инвариантной нормализации.

Задача о пружинном маятнике была рассмотрена впервые А.А. Виттом и Г.С. Гореликом [7] и с тех пор изучалась во многих работах (В.Н. Богаевский, А.П. Маркеев, А.Х. Найфе, А.Г. Петров, В.М. Старжинский, [4, 7, 11, 12, 13, 15]). В [12] с учетом квадратичной нелинейности методом уравнений в вариациях задача сведена к уравнению для амплитуды колебаний. Исследование заканчивается констатацией того, что полученное уравнение может быть проинтегрировано в эллиптических функциях Якоби. В [4, 15] найдено периодическое решение при резонансе частот 1:2. Показано, что колебаний по вертикали являются неустойчивы по отношению к малому начальному отклонению груза по горизонтали. Получена главная асимтотика для периода, в течение которого происходит перестройка вертикальных колебаний в горизонтальные. В [15] применяется метод Ляпунова-Пуанкаре, а в работе [11] - метод нормальной формы. В последней работе исследованы общие свойства нелинейных условно-периодических движений в малой окрестности положения равновесия гамильтоновой системы как для случая точной соизмеримости частот 2:1, так и при наличии расстройки. Изучены вопросы орбитальной устойчивости коротко-периодических и долго-периодических решений. При помощи КАМ-теории показано, что большинство условно-периодических решений сохраняется и для системы с полным гамильтонианом. Задача о качающейся пружине рассматривается как частный пример системы с гамильтонианом, относящимся к исследуемому классу.

А.Г. Петровым получена [13] асимптотическая зависимость периода перекачки энергии между модами колебаний от начальных условий в случае резонанса 1:2, а также рассмотрен пространственный случай (резонанс 1:1:2)[14].

Практической ценностью модели пружинного маятника является ее физическая аналогия двумерным колебаниям атомов внутри молекул, которые в случае резонанса обнаруживаются при спектральном анализе (резонанс Ферми). Впервые эта аналогия была отмечена еще А.А. Виттом и Г.С. Гореликом [7].

Целью исследований, проводимых в диссертации, являлся поиск асимптотической зависимости периода перекачки энергии между модами колебаний от начальных условий для различных соотношений между частотами колебаний: резонанс 1:1 и малое отклонение от резонанс 1:2.

В случае линейного закона зависимости силы натяжения от удлинения пружины ("линейная пружина") частота колебаний вертикальной моды всегда выше частоты колебаний горизонтальной моды. Для нелинейной пружины частоты могут быть равными. Это приводит к появлению в этой системе резонанса нового типа 1:1, не исследованного до сих пор. Этот вопрос и является основным предметом обсуждения. Для этого резонанса, так же как и для резонанса 1:2, получено решение, описывающее процесс перекачки энергии от одной моды колебаний к другой. Кроме того, исследован нерезонансный случай. В отличие от резонанса 1:2 здесь недостаточно исследовать гамильтониан с точностью до кубических членов, а требуется также учитывать члены четвертого порядка.

Решения гамильтоновых уравнений нормальной формы показали, что периодическая перестройка колебаний между вертикальной и горизонтальной модами происходит только в случае резонансов 1:1 и 1:2. При резонансе 1:2 этот эффект проявляется в квадратичных членах уравнения, а при резонансе 1:1 – с учетом кубических членов. Во всех остальных случаях, как при наличии резонанса, так и при его отсутствии, колебания происходят с двумя постоянными частотами, мало отличающимися от частот линейного приближения. Для резонанса 1:2 найдена максимальная расстройка частоты, при которой эффект перекачки энергии от одной моды колебаний к другой исчезает.

На рис. 3 изображен пружинный маятник с двумя степенями свободы: тяжелая точка, качающаяся в вертикальной плоскости на пружине, причем пружина считается невесомой.

Использованы следующие обозначения: k – жесткость пружины, l – ее длина вположении покоя груза, m – масса груза, lx, ly – координаты груза, lR – длина пружины, где

$$R = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}$$

Декартова система координат имеет начало в точке O - положении покоя груза. Оси x и y направлены по вертикали и горизонтали соответственно.

Натяжение пружины меняется по следующему нелинейному закону:

$$T = \frac{k\varepsilon\left(lR - l_0\right)^3}{l_0^3} + \frac{k\left(lR - l_0\right)}{l_0} \qquad (9)$$

где l_0 – длина ненагруженной пружины.

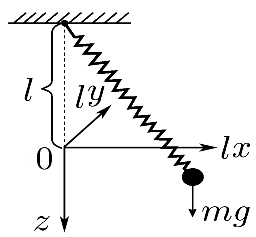

Рис. 3: Тяжёлая точка на пружине

При помощи алгоритма инвариантной нормализации исходный гамильтониан приводится к нормальной форме вплоть до членов 4-го порядка при различных соотношениях частот колебаний.

Для случая резонанса 1:1 решаются уравнения Гамильтона для нормальной формы и рассчитываются асимптотические решения, отображающие эффект периодической перекачки энергии между модами колебаний:

$$y(t) = Y(t)\cos t, \quad x(t) = X(t)\cos(t),$$

$$Y(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{sech}\left(2\mathrm{mx}_0^2\left(\mathrm{t}-\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right)+\mathrm{sech}\left(2\mathrm{mx}_0^2\left(\mathrm{t}-\frac{3\mathrm{T}}{2}\right)\right)+...\right]$$

$$X(t) = \sqrt{c^2 - Y^2(t)}, m = -\frac{3(\lambda+1)}{32\lambda^2}$$

$$Y_{\max} = \frac{x_0}{2}, \quad X_{\min} = \sqrt{c^2 - \frac{x_0^2}{2}} \approx \frac{x_0}{2}$$

Здесь T – период перекачки энергии, $c = X(t)^2 + Y(t)^2$ – энергетический интеграл системы. Для периода перекачки справедливо выражение

$$T \approx \frac{1}{2mx_0^2}\ln\left(\frac{4x_0^2}{y_0^2}\right)$$

Расчет на рис. 4 представлен для случая $x_0 = 0.1, \quad y_0 = 0.001$.

Найдены также нормальный формы гамильтониана для нерезонансного случая и для случая резонанса 1:3. В обоих случаях уравнения Гамильтона для нормализованного гамильтониана легко решить аналитически. Решения имеют вид обычных независимых колебаний по обоим степеням свободы, содержащие малую поправку к частоте, зависящую от амплитуды колебаний. Такие решения качественно не отличаются от нерезонансного случая.

Аналогичным методом рассчитаны асимптотическая зависимость периода перекачки энергии при малом отклонении от

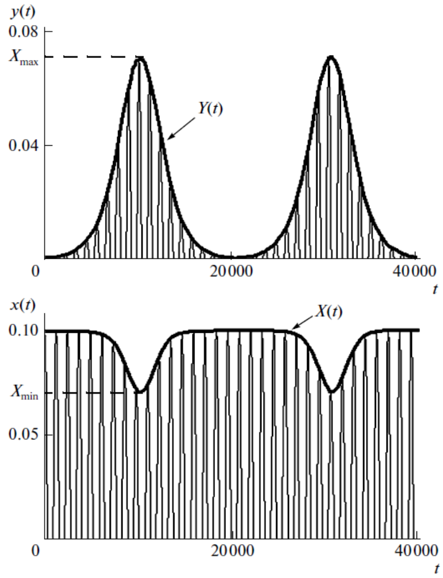

Рис. 4: Перекачка энергии между степенями свободы системы при резонансе 1:1

резонанса 1:2 от начальных условий и минимальная расстройка частот, приводящая к исчезновению эффекта перекачки.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тела, движущегося в окрестностях коллинеарных точек либрации пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. На ее основе получены следующие результаты:

   - Асимптотическое, с точностью до 4-х степеней координат и импульсов, решение в элементарных функциях уравнений Гамильтона системы.
   - Условия финитности асимптотических решений для начальных условий по координатам и импульсам.

2. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов

4-го порядка для тяжелой материальной точки на нелинейной пружине в плоском случае при резонансах 1:1 и 1:3. На ее основе рассчитан период перекачки энергии между степенями свободы колебаний как функция от начальных условий. Рассчитаны период перекачки энергии при малом отклонении от резонанса 1:2 и минимальная расстройка частот, приводящая к исчезновению эффекта перекачки.

3. Для нелинейных механических гамильтоновых систем, гамильтониан которых представлен в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами, найден общий вид нелинейной нормальной формы. Результаты сведены в таблицы, позволяющие определять нормальные формы гамильтонианов с 2-мя и 3-мя степенями свободы без трудоемких вычислений. Найден общий вид интеграла приближенной системы для некоторых частных случаев ненормализованного квадратичного гамильтониана.

4. Для получения вышеперечисленных результатов разработан программный комплекс, позволяющий автоматически приводить к нормальной форме степенные разложения гамильтонианов механических систем, в том числе при наличии параметров. Программный комплекс также позволяет находить интеграл приближенной системы для случаев, когда квадратичная часть гамильтониана не приведена к нормальной форме.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Петров А.Г., Шундерюк М.М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 2. С. 27-40.**

2. **Шундерюк М.М. Гамильтонова нормальная форма в окрестностях точки либрации L1 ограниченной круговой задачи трех тел // ДАН. Механика. Т. 441, № 1, С. 44-49, 2011.**

3. **Шундерюк М.М. Гамильтоновы нормальные формы в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел // ПММ. Том 76. Вып. 4, 2012. С. 587-600.**

4. Шундерюк М.М. О нелинейных двумерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине в случае резонанса 1:1 // Труды 50-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук": Часть III. Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.:МФТИ, 2007. С. 162-164.

5. Shunderyuk M. On nonlinear resonance oscillations of a spring supported point particle // June 25, 2009. Imperial College London. International Workshop on Resonance Oscillations and Stability of Nonsmooth Systems.

6. Шундерюк М.М. Нормальная форма в окрестности точки либрации L2 ограниченной круговой задачи трех тел // Труды 52-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук": Часть III. Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.:МФТИ, 2009. С. 194-197.

7. Журавлёв В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Асимптотическая симметризация гамильтоновых систем: учебно-методическое пособие. М.:МФТИ, 2010. 56с.

8. Шундерюк М.М. Нормальная форма в окрестности точки либрации L1 ограниченной круговой задачи трех тел // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XI Международной конференции. Москва, ИПУ РАН, 1-4 июня 2010 г. М.: ИПУ РАН, 2010. С.441-442.

9. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтониана в окрестности точки либрации L1 ограниченной пространственной круговой задачи трех тел // Труды 53-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук". Часть III. Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.: МФТИ, 2010. С. 128-129.

10. Шундерюк М.М. Гамильтонова нормальная форма в окрестностях коллинеарных точек либрации пространственной круговой задачи трех тел. // X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, № 4, часть 5, 2011. С. 2621-2622.

11. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтониана в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной пространственной круговой задачи трех тел. // Труды 54-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2011. С. 229-230.

12. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтониана в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной

пространственной эллиптической задачи трех тел // Труды 55-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.: МФТИ, 2012. С. 106-107.

13. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтонианов, представленных в виде степенных рядов с произвольными коэффициентами // Труды 56-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.: МФТИ, 2013. С. 106-107.

Список используемой литературы

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 408 с.

2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 3. М.: 1985. 304 с.

3. Биркгоф Д.Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.

4. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 255 с.

5. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 296с.

6. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды Московского математического общества. 1972. Т 26. С. 199–238.

7. Витт А.А., Горелик Г.С., Колебаний упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем // Журн. техн. физики. 1933. Т. 3, N2-3. с.294-307.

8. Журавлёв В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем// ПММ., 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356-365.

9. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А., Маркеев А.П. Полуаналитический метод расчета движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации // Космич. исслед. 1976. Т. 14. № 6. С. 909.

10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

11. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1//ПММ. Том 63. Вып. 5, 1999. С. 757-769.

12. Найфе А.Х. Методы теории возмущений. М.: Мир, 1976. = Nayfeh A.H. Perturbation Methods. New York: J. Wiley, 1973.

13. Петров А.Г. Нелинейные колебания качающейся пружины при резонансе // Изв. РАН. Механика твердого тела. №5, 2006 г. С. 18-28.

14. Петров А.Г., Фомичев А.В. О нелинейных трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине//Изв. РАН. Механика твердого тела. № 5. 2008. С. 15–26.

15. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.:Наука, 1977. 255 с.

16. Deprit A., Deprit-Bartholome. Stability of the triangular Lagrangian points. – Astron. Journ., 1967, v. 72, N 2, p. 173.

17. Jorba A., Masdemont J. Dynamics in the centre manifold of the collinear points of the Restricted Three Body Problem. // Phys. D, 1999. V. 132. P. 189-213.

18. Szebehely V. Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies. NY; L.: Acad. Press, 1967 = Себехей В. Теория орбит. М.: Наука, 1982. 656 с.