

На правах рукописи

ШУШПАННИКОВ ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ

**МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТОВ В ЛИНЕЙНО УПРУГИХ
ТЕЛАХ ПО ДАННЫМ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, профессор
Гольдштейн Роберт Вениаминович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Доброхотов Сергей Юрьевич

доктор физико-математических наук, профессор
Фрейдин Александр Борисович

Ведущая организация: **кафедра теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова**

Защита состоится 27 сентября 2012 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук по адресу: 119526, Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1, ауд. 237.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан 27 августа 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.240.01 при ИПМех РАН
кандидат физико-математических наук

Сысоева Е.Я.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Известно, что дефекты (трещины, полости, жёсткие и упругие включения) являются концентраторами напряжений и в значительной мере обуславливают процессы, приводящие к разрушению упругих тел. Следовательно, имеет большой практический интерес задача обнаружения таких дефектов и определения их параметров – задача идентификации.

С математической точки зрения задача идентификации представляет собой нелинейную обратную задачу. Разработка методов решения таких задач является в настоящее время актуальной фундаментальной научной проблемой.

Целями работы являются:

1. Разработка метода идентификации дефектов в линейно упругих телах по данным статических испытаний (по перемещениям и усилиям на внешней границе упругого тела);
2. Решение задачи идентификации одиночного эллипсоидального дефекта в линейно упругом теле по данным одного статического испытания при помощи разработанного метода;
3. Численный анализ эффективности разработанного метода идентификации.

Методика исследования

Метод идентификации дефектов, предложенный в диссертации, основан на применении функционала взаимности (в англоязычной литературе «reciprocity gap functional»).

Решения задач идентификации получены в рамках данного метода с привлечением классических методов линейной теории упругости.

Для численного анализа эффективности разработанного метода идентификации использовался метод конечных элементов.

Научную новизну работы составляют следующие **результаты, выносимые на защиту**:

1. Разработан метод идентификации дефектов (трещин, полостей, жёстких или упругих включений) в линейно упругих телах по данным статических испытаний;
2. Впервые получено аналитическое решение задачи идентификации геометрических (местоположение, величины и направления полуосей эллипсоида) и механических (упругие модули) параметров эллипсоидального дефекта в анизотропном линейно упругом теле по данным о перемещениях и усилиях на произвольной замкнутой поверхности, содержащей внутри себя дефект. Полученное решение является точным для безграничных упругих тел и приближённым в случае, когда содержащее дефект упругое тело ограничено;
3. Для анализа эффективности разработанного метода идентификации рассмотрен ряд численных примеров, в которых для получения исходных экспериментальных данных вместо реального выполнялся численный эксперимент. Для реализации численных экспериментов в диссертации разработан комплекс специальных программ для пакета ANSYS;

4. Проведенный для ограниченных упругих тел численный анализ показал, что даже в тех случаях, когда дефект находится в непосредственной близости от внешней границы тела, полученные формулы позволяют определять его параметры с довольно высокой точностью. Кроме того продемонстрирована устойчивость полученных результатов по отношению к числу измерений и погрешностям в исходных экспериментальных данных.

Практическая значимость

Задача идентификации дефектов в упругих телах является ключевой проблемой, возникающей при проведении неразрушающего контроля материалов и элементов конструкций.

Практическая значимость диссертации состоит в разработке нового метода идентификации, позволяющего определять геометрические параметры дефекта (трещины, полости, жёсткого или упругого включения), а в случае, когда дефект упругое включение, и его механические параметры (упругие свойства) по данным о перемещениях и усилиях на внешней границе содержащего дефект упругого тела.

Исследования по теме диссертации выполнены в рамках плановой тематики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук «Моделирование и диагностика прочности и разрушения материалов, сред и технических систем с многомасштабной структурой с учетом действия механических нагрузок и физических полей» (Гос. рег. № 03201250707) и проектов, финансируемых Российским фондом фундаментальных исследований (проекты №07-01-00448 и №10-01-00153).

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью постановок решаемых задач и построением точных аналитических решений данных задач. Примеры расчётов, приведённые в диссертации, также подтверждают достоверность полученных результатов.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены на Всероссийских и Международных конференциях:

1. Международная молодёжная научная конференция «XXXII Гагаринские чтения», 4-8 апреля 2006 г., Москва;
2. Международная молодёжная научная конференция «XXXIV Гагаринские чтения», 1-5 апреля 2008 г., Москва;
3. Международная молодёжная научная конференция «XXXVI Гагаринские чтения», 6-10 апреля 2010 г., Москва;
4. Всероссийская конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твёрдого тела», 13-15 октября 2008 г., Пермь;
5. Вторая Международная конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твёрдого тела», 8-11 декабря 2009 г., Казань;
6. 18th European Conference on Fracture, August 30 – September 3 2010, Dresden, Germany;
7. 1st Interquadrennial ICF Conference in Middle East and Africa, November 14-17 2011, Luxor, Egypt.

Основные результаты диссертации также были доложены на Семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук под руководством профессоров В.М. Александрова, В.Н. Кукуджанова, А.В. Манжирова.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 15 печатных работ, 5 из них в журналах из списка ВАК. Список работ представлен в конце автореферата.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, трёх приложений и списка литературы. Общий объём работы составляет 192 страницы, включая 22 рисунка и 44 таблицы. Список литературы содержит 105 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается тематика проведенных в диссертации исследований и формулируются цели диссертации. Приводится обзор работ, посвящённых различным методам решения задач идентификации дефектов в упругих телах по данным статических испытаний. Обосновывается актуальность и научная новизна диссертации. Описывается структура и содержание диссертации.

В первой главе дана строгая математическая постановка решаемой в диссертации задачи идентификации, а также представлено описание метода решения данной задачи. В качестве простейшего примера использования данного метода рассмотрена задача идентификации параметров шарового дефекта в изотропном линейно упругом теле по данным одного статического испытания на одноосное растяжение (сжатие).

При постановке задачи считается, что дефект занимает односвязную область G в трёхмерном пространстве R^3 и представляет собой линейно упругое включение с тензором упругих модулей C_{ijkl}^I . Полость и жёсткое включение рассматриваются как частные случаи упругого включения при $C_{ijkl}^I = 0$ и $C_{ijkl}^I = \infty$, соответственно. Линейно упругое тело с тензором упругих модулей C_{ijkl}^M занимает область $\Omega = R^3 \setminus \bar{G}$, где \bar{G} – замыкание области G . На границе матрицы Ω и включения G предполагается полное сцепление. Прикладываемые к телу нагрузки отвечают однородному напряжённому состоянию на бесконечности σ_{ij}^∞ .

Считается, что на некоторой замкнутой поверхности S , содержащей внутри себя дефект G (Рис.1), известны перемещения $\mathbf{u}^d = (u_1^d, u_2^d, u_3^d)$ и усилия $\mathbf{t}^d = (t_1^d, t_2^d, t_3^d)$. По этим данным требуется определить геометрические параметры дефекта G (местоположение, форму, размер).

Отметим, что при постановке задачи упругие свойства линейно упругой матрицы Ω предполагаются известными. Свойства дефекта G предполагаются неизвестными и в общем случае также подлежат определению.

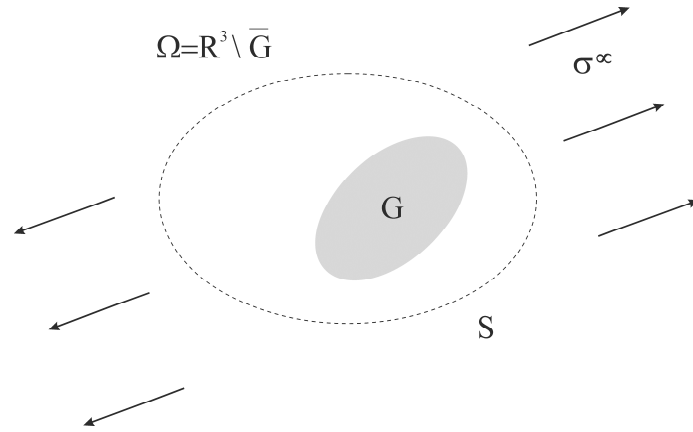


Рис.1. Упругое тело Ω , дефект G и содержащая дефект замкнутая поверхность S .

Для решения поставленной задачи используется метод, основанный на применении функционала взаимности. Функционал взаимности $RG(d, r)$, зависящий от упругого поля в теле с дефектом, обозначаемого верхним индексом d , и произвольного регулярного упругого поля в теле без дефекта, обозначаемого верхним индексом r , определяется следующим образом

$$RG(d, r) = \int_S (t_i^d u_i^r - t_i^r u_i^d) dS \quad (1)$$

Здесь и далее принимается правило суммирования по повторяющимся индексам.

Из принципа взаимности, справедливого для линейно упругих тел, следует, что функционал взаимности (1) не зависит от выбора замкнутой поверхности S , содержащей внутри себя дефект G . Кроме того, данный функционал равен нулю для любого регулярного упругого поля r в случае, когда замкнутая поверхность S не содержит внутри себя дефекта G . В диссертации показано, что в противном случае найдутся такие регулярные упругие поля, для которых функционал взаимности отличен от нуля.

Так как перемещения \mathbf{u}^d и усилия \mathbf{t}^d на замкнутой поверхности S предполагаются известными, то значения функционала взаимности (1) могут быть вычислены для любого заданного регулярного упругого поля r . С другой стороны, значения функционала взаимности определяются параметрами дефекта G . Следовательно, для решения задачи идентификации достаточно выразить неизвестные параметры дефекта через отличные от нуля значения функционала взаимности (1).

Описанный метод справедлив для дефекта произвольной формы. В качестве простейшего примера рассмотрена задача идентификации параметров шарового дефекта в изотропном линейно упругом теле с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M по данным одного статического испытания на одноосное растяжение (сжатие).

Введём декартову систему координат $OX_1X_2X_3$. Будем считать, что направление растяжения (сжатия) совпадает с направлением оси X_3 , $\sigma_{ij}^\infty = \sigma \delta_{i3} \delta_{j3}$, σ – параметр, имеющий размерность напряжения, δ_{ij} – символ Кронекера. Неизвестными геометрическими

параметрами в рассматриваемом случае являются координаты центра дефекта (X_1^0, X_2^0, X_3^0) и его радиус a .

Для выражения параметров дефекта через значения функционала взаимности (1) в диссертации использовалось явное решение прямой задачи о шаровом включении в изотропном линейно упругом пространстве. Для нахождения координат центра дефекта рассматривались регулярные упругие поля с постоянным тензором напряжений и тензорами напряжений, линейно зависящими от координат, следующего вида

$$\sigma^{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \sigma^{L1} = \frac{\sigma}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 \end{pmatrix}, \sigma^{L2} = \frac{\sigma}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 \end{pmatrix}, \sigma^{L3} = \frac{\sigma}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & X_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

где L – параметр, имеющий размерность длины. Для нахождения координат центра дефекта были получены следующие выражения

$$\frac{X_k^0}{L} = \frac{RG(33d, Lk)}{RG(33d, 33)}, \quad k=1, 2, 3 \quad (3)$$

Здесь и далее, чтобы подчеркнуть вид приложенных к телу нагрузок, упругое поле в теле с дефектом, находящимся в условиях одноосного растяжения (сжатия) в направлении оси X_3 , обозначается верхним индексом $33d$.

После нахождения координат центра дефекта для определения его радиуса использовалось регулярное упругое поле с тензором напряжений, квадратично зависящим от координат, записанное в системе координат с началом в центре дефекта $M^0 x_1 x_2 x_3$, $M^0 = (X_1^0, X_2^0, X_3^0)$, $x_i = X_i - X_i^0$, а также регулярные упругие поля с постоянными тензорами напряжений следующего вида

$$\sigma^{11} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^{Q1} = \frac{\sigma}{L^2} \begin{pmatrix} x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_M (x_3^2 - x_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & -x_1^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Для нахождения радиуса дефекта было получено следующее выражение

$$\frac{a^2}{L^2} = -\frac{5RG(33d, Q1)}{RG(33d, 33) - RG(33d, 11)} \quad (5)$$

Формулы (3), (5) позволяют определять геометрические параметры шарового дефекта G независимо от его упругих свойств. В случае если дефект G – шаровое изотропное линейно упругое включение, то после нахождения его геометрических параметров могут быть найдены и его упругие модули: модуль сдвига μ_l и коэффициент Пуассона ν_l . Соответствующие формулы представлены в диссертации.

Формулы (3), (5) являются точными для безграничного упругого тела. Пусть $V \subset R^3$ односвязная область, содержащая дефект G . Предположим, что ограниченное линейно упругое тело занимает область $\Omega = V \setminus \bar{G}$. К внешней границе ∂V тела Ω прикладываются усилия \mathbf{t}^d , порождающие в нём в случае отсутствия дефекта G однородное напряжённое состояние σ_{ij}^∞ , а перемещения \mathbf{u}^d на границе ∂V измеряются. Тогда, полагая в (1) $S = \partial V$, значения функционала взаимности $RG(d, r)$ могут быть вычислены для любого заданного регулярного упругого поля r . При этом следует ожидать, что если дефект G находится достаточно далеко от внешней границы ∂V , то данные значения будут близки к значениям функционала взаимности, вычисленным для безграничного упругого тела. Как следствие, формулы, полученные для безграничного упругого тела, могут быть приближённо использованы для идентификации дефектов в ограниченных упругих телах.

Для иллюстрации эффективности данного подхода в диссертации рассмотрен ряд численных примеров. Во всех примерах, рассмотренных в диссертации, предполагалось, что упругое тело V имеет форму куба $V = \{X : |X_i| \leq 10, i = 1, 2, 3\}$. Для получения данных о перемещениях \mathbf{u}^d на внешней границе ∂V тела Ω проводились численные эксперименты, в которых при заданных нагрузках \mathbf{t}^d прямая задача Неймана для упругого тела V , содержащего дефект G , решалась методом конечных элементов. После решения прямой задачи на границе ∂V определялись перемещения \mathbf{u}^d . Вычисленные значения перемещений моделируют перемещения, измеряемые в эксперименте. С их помощью вычислялись значения функционала взаимности. Далее для идентификации параметров дефектов использовались формулы, полученные в диссертации.

В Таблице 1 представлены результаты идентификации шаровых полостей, имеющих объём $|G| = 4\pi/3 \approx 4.1888$, соответствующий радиусу a равному 1, и различные координаты центра (X_1^0, X_2^0, X_3^0) , в изотропном линейно упругом теле (модуль Юнга $E_M = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_M = 0.25$) по данным испытания на одноосное растяжение. Заданные координаты центра (X_1^0, X_2^0, X_3^0) представлены в первом столбце таблицы. Найденные параметры представлены в остальных столбцах таблицы.

(X_1^0, X_2^0, X_3^0)	X_1^0	X_2^0	X_3^0	$ G $
(0,0,0)	0.000	0.000	0.000	4.128
(0,3,0)	0.000	3.000	0.000	4.128
(0,6,0)	0.000	6.000	0.000	4.138
(0,0,3)	0.000	0.000	3.001	4.132
(0,0,6)	0.000	0.000	6.007	4.175
(3,3,3)	3.000	3.000	3.000	4.133
(6,6,6)	5.999	5.999	6.003	4.195

Таблица 1. Результаты идентификации шаровых полостей, имеющих различные координаты центра.

Результаты, представленные в Таблице 1, показывают, что формулы, полученные для безграничного упругого тела, позволяют с высокой точностью определять параметры дефекта в ограниченном упругом теле, включая случаи, когда дефект расположен в непосредственной близости от его границы. Примеры идентификации шаровых жёстких и линейно упругих изотропных включений, рассмотренные в диссертации, подтверждают данный вывод.

Во второй главе рассмотрена задача идентификации параметров произвольного эллипсоидального дефекта в изотропном линейно упругом теле по данным одного статического испытания на одноосное растяжение (сжатие). Получено аналитическое решение данной задачи, справедливое в том числе для вырожденного эллипсоидального дефекта – эллиптической трещины.

Пусть G – эллипсоид. Считается, что матрица Ω – изотропное линейно упругое тело с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M , а заданные нагрузки, соответствуют одноосному растяжению (сжатию) тела в направлении оси X_3 , $\sigma_{ij}^\infty = \sigma \delta_{i3} \delta_{j3}$. Неизвестными геометрическими параметрами в данном случае являются координаты центра дефекта (X_1^0, X_2^0, X_3^0) , величины полуосей эллипсоида a_1, a_2, a_3 и их направления $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Для решения задачи идентификации достаточно выразить данные параметры через значения функционала взаимности (1).

В примере, рассмотренном в первой главе, связь параметров шарового дефекта и значений функционала взаимности, соответствующих различным регулярным упругим полям, была найдена с использованием явного вида решения прямой задачи. В случае эллипсоидального дефекта решение прямой задачи громоздко, поэтому его использование приводит к усложнению задачи идентификации. Подход, предложенный в диссертации, позволяет выразить геометрические параметры эллипсоидального дефекта через значения функционала взаимности без использования явного вида решения прямой задачи, а с использованием лишь основных его свойств.

Используя свойство постоянства упругих полей внутри эллипсоидального дефекта, получены следующие эквивалентные представления для функционала взаимности

$$RG(d, r) = \Delta e_{ij}^I \int_G \sigma_{ij}^r dX, \quad RG(d, r) = \Delta \sigma_{ij}^I \int_G e_{ij}^r dX \quad (6)$$

где верхним индексом I обозначено упругое поле внутри дефекта, $\Delta e_{ij}^I = \bar{e}_{ij}^I - e_{ij}^I$, $\Delta \sigma_{ij}^I = \sigma_{ij}^I - \bar{\sigma}_{ij}^I$, \bar{e}_{ij}^I и $\bar{\sigma}_{ij}^I$ – деформации и напряжения, отвечающие напряжениям σ_{ij}^I и деформациям e_{ij}^I , в материале с тензором упругих модулей C_{ijkl}^M , соответственно.

Обозначим верхними индексами mn регулярные упругие поля с постоянными напряжениями следующего вида

$$\sigma_{ij}^{mn} = \frac{\sigma}{2} (\delta_{in} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \quad (7)$$

При этом поля с верхними индексами 11 и 33 соответствуют регулярным упругим полям в (2), (4). Обозначим верхним индексом kld упругое поле в теле Ω , находящемся в условиях действия напряжений $\sigma_{ij}^{\infty} = \sigma_{ij}^{kl}$ на бесконечности. Для значений функционала взаимности, аргументами которого являются упругие поля с верхними индексами kld и mn , введём следующие обозначения

$$R_{klmn} = RG(kld, mn) \quad (8)$$

Подставляя (7) в (6), для R_{33mn} получим

$$R_{33mn} = \sigma |G| \Delta e_{mn}^I \quad (9)$$

где $|G|$ – объём дефекта G .

Для нахождения координат центра эллипсоидального дефекта в диссертации использовались регулярные упругие поля с постоянными напряжениями (7) и напряжениями (2), линейно зависящими от координат. Подставляя (2) в (6) и используя (9), для нахождения координат центра дефекта были получены следующие выражения

$$\frac{X_1^0}{L} = \frac{RG(33d, L1)}{R_{3333}}, \quad \frac{X_2^0}{L} = \frac{RG(33d, L2)}{R_{3333}}, \quad \frac{X_3^0}{L} = \frac{R_{3333}RG(33d, L3) + 2R_{3313}RG(33d, L1)}{R_{3333}^2} \quad (10)$$

После нахождения координат центра эллипсоидального дефекта для определения оставшихся геометрических параметров использовались регулярные упругие поля с постоянными напряжениями (7) и регулярные упругие поля с тензорами напряжений, квадратично зависящими от координат, записанные в системе координат $M^0 x_1 x_2 x_3$ с началом в центре дефекта. При этом задача об определении величин и направлений полуосей эллипсоида G сведена к задаче о нахождении компонент z_{ij} симметричной матрицы \mathbf{Z} , определяемых следующими равенствами

$$\int_G x_i x_j dx = \frac{|G|}{5} z_{ij} \quad (11)$$

Собственные значения матрицы \mathbf{Z} равны квадратам величин полуосей эллипсоида – a_1^2 , a_2^2 , a_3^2 , а соответствующие им собственные векторы направлены вдоль осей эллипсоида – \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , \mathbf{e}'_3 . Все регулярные упругие поля, использующиеся для нахождения компонент z_{ij} , в случае изотропного линейно упругого тела Ω , находящегося в условиях одноосного растяжения (сжатия) в направлении оси X_3 , выписаны в диссертации в явном виде. Кроме поля $Q1$, определённого в (4), использовались следующие регулярные упругие поля

$$\begin{aligned}
\sigma^{Q2} &= \frac{\sigma}{L^2} \begin{pmatrix} x_2^2 - x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3^2 - x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}, \sigma^{Q6} = \frac{\sigma}{L^2} \begin{pmatrix} -2x_1x_2 & x_2^2 - x_3^2 & 0 \\ x_2^2 - x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_1x_2 \end{pmatrix} \\
\sigma^{Q3} &= \frac{\sigma}{L^2} \begin{pmatrix} x_1^2 - x_3^2 & 0 & -2x_1x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x_1x_3 & 0 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix}, \sigma^{Q4} = \frac{\sigma}{L^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1x_3 & -x_1x_2 \\ 0 & -x_1x_2 & x_1x_3 \end{pmatrix}, \sigma^{Q5} = \frac{\sigma}{L^2} \begin{pmatrix} -x_2x_3 & 0 & -x_1x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x_1x_2 & 0 & x_2x_3 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (4) и (12) в (6) и используя (9), для нахождения компонент z_{ij} симметричной матрицы \mathbf{Z} была получена система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
-(R_{3333} + \nu_M R_{3322})z_{11} + (R_{3311} + \nu_M R_{3322})z_{33} &= 5L^2 RG(33d, Q1) \\
(R_{3333} - R_{3322})z_{11} - (R_{3333} - R_{3311})z_{22} + (R_{3322} - R_{3311})z_{33} &= 5L^2 RG(33d, Q2) \\
-(R_{3333} - R_{3311})z_{11} + (R_{3333} - R_{3311})z_{33} - 4R_{3313}z_{13} &= 5L^2 RG(33d, Q3) \\
-2R_{3323}z_{12} + (R_{3333} - R_{3322})z_{13} &= 5L^2 RG(33d, Q4) \\
-2R_{3313}z_{12} + (R_{3333} - R_{3311})z_{23} &= 5L^2 RG(33d, Q5) \\
2R_{3312}z_{22} - 2R_{3312}z_{33} + 2(R_{3333} - R_{3311})z_{12} &= 5L^2 RG(33d, Q6)
\end{aligned} \tag{13}$$

После решения системы уравнений (13) строится симметричная матрица $\mathbf{Z} = (z_{ij})$. Собственные значения данной матрицы равны квадратам величин полуосей эллипсоида – a_1^2 , a_2^2 , a_3^2 , а соответствующие им собственные векторы направлены вдоль осей эллипсоида – \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , \mathbf{e}'_3 . Таким образом, задача идентификации геометрических параметров произвольного эллипсоидального линейно упругого включения в изотропной линейно упругой матрице по результатам одного статического испытания на одноосное растяжение (сжатие) решена.

Отметим, что полученные формулы справедливы также для вырожденного эллипсоидального дефекта – эллиптической трещины (считая, что наименьшая полуось эллипсоида a_3 , для эллиптической трещины имеем $a_3 = 0$). При этом координаты центра эллиптической трещины определяются по формулам (10). Далее находятся компоненты матрицы \mathbf{Z} . В случае эллиптической трещины одно из собственных значений данной матрицы равно нулю, а соответствующий этому собственному значению собственный вектор направлен по нормали \mathbf{N} к плоскости трещины. Два других собственных значения равны квадратам величин полуосей эллипса – a_1^2 , a_2^2 , а соответствующие им собственные векторы направлены вдоль осей эллипса – \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 .

Полученные формулы позволяют определять геометрические параметры эллипсоидального дефекта G независимо от его упругих свойств. В случае если дефект G – эллипсоидальное включение, то после нахождения его геометрических параметров могут быть найдены и его упругие модули. В диссертации показано, что упругие модули изотропного линейно упругого включения могут быть найдены по результатам одного

статического испытания. При этом для определения модуля сдвига μ_I и коэффициента Пуассона ν_I включения были получены следующие выражения

$$\frac{\mu_I}{\mu_M} = 1 + \frac{\Delta e_{33}^I - \Delta e_{11}^I}{-(S_{33pq} - S_{11pq})\Delta e_{pq}^I + e_{33}^\infty - e_{11}^\infty}, \quad \frac{1 + \nu_I}{1 - 2\nu_I} = \left(\frac{\mu_I}{\mu_M}\right)^{-1} \frac{1 + \nu_M}{1 - 2\nu_M} \left(1 + \frac{\sum_{p=1}^3 \Delta e_{pp}^I}{\sum_{k=1}^3 (-S_{kkpq}\Delta e_{pq}^I + e_{kk}^\infty)} \right) \quad (14)$$

где S_{klpq} – компоненты тензора Эшелби, приведенные в первом приложении к диссертации, e_{kl}^∞ – деформации, отвечающие напряжениям σ_{ij}^∞ в материале с тензором упругих модулей C_{ijkl}^M , а величины Δe_{pq}^I находятся по формуле (9).

Полученные формулы являются точными в случае безграничного упругого тела. Для иллюстрации эффективности разработанного подхода для ограниченных упругих тел в диссертации рассмотрен ряд численных примеров. Во всех рассмотренных в данной главе численных примерах форма, упругие свойства и условия нагружения содержащего дефект упругого тела такие же, как и в примерах, рассмотренных в первой главе.

В Таблице 2 представлены примеры идентификации параметров эллипсоидальных включений с центром в точке $(X_1^0, X_2^0, X_3^0) = (0, 0, 0)$, объемом $|G| = 4\pi/3 \approx 4.1888$, равным объёму шара радиуса 1, соотношениями полуосей $\rho_1 = a_3/a_1 = 0.5$, $\rho_2 = a_2/a_1 = 0.9$, ориентацией, определяемой углами Эйлера $(\varphi, \theta, \psi) = (45^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$, и различными упругими свойствами, определяемыми отношением модулей сдвига $\mu_I\mu_M^{-1}$ и коэффициентом Пуассона ν_I . Заданные значения $\mu_I\mu_M^{-1}$ и ν_I представлены в первом столбце таблицы. Найденные параметры представлены в остальных столбцах таблицы.

$\mu_I\mu_M^{-1}, \nu_I$	X_1^0	X_2^0	X_3^0	ρ_1	ρ_2	$ G $	φ	θ	ψ	$\mu_I\mu_M^{-1}$	ν_I
2.0,0.3	0.000	0.000	0.000	0.509	0.901	4.330	44.958°	44.755°	44.832°	1.928	0.300
0.5,0.3	0.000	0.000	0.000	0.504	0.903	4.207	45.413°	44.957°	44.508°	0.500	0.300
2.0,0.1	0.000	0.000	0.000	0.509	0.901	4.341	44.900°	44.829°	44.931°	1.944	0.107
0.5,0.1	0.000	0.000	0.000	0.504	0.899	4.221	44.882°	44.965°	44.876°	0.501	0.103
2.0,0.4	0.000	0.000	0.000	0.508	0.901	4.328	44.947°	44.717°	45.040°	1.915	0.395
0.5,0.4	0.000	0.000	0.000	0.499	0.898	4.167	44.881°	44.823°	45.126°	0.498	0.401

Таблица 2. Результаты идентификации эллипсоидальных упругих включений, имеющих различные упругие свойства.

В Таблице 3 представлены примеры идентификации параметров эллиптических трещин с центром в точке $(X_1^0, X_2^0, X_3^0) = (0, 0, 0)$, площадью $|G| = \pi \approx 3.1416$, равной площади круга радиуса 1, ориентацией, определяемой углами Эйлера $(\varphi, \theta, \psi) = (30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$, и различным соотношением полуосей ρ_2 . Заданные значения соотношения полуосей ρ_2 представлены в первом столбце таблицы. Найденные параметры представлены в остальных столбцах таблицы.

ρ_2	X_1^0	X_2^0	X_3^0	ρ_2	$ G $	φ	θ	ψ
0.2	0.000	0.000	0.000	0.187	2.926	28.487°	44.461°	61.071°
0.4	0.000	0.000	0.000	0.393	3.062	30.092°	44.948°	59.857°
0.5	0.000	0.000	0.000	0.494	3.066	30.258°	44.821°	59.851°
0.6	0.000	0.000	0.000	0.596	3.084	30.103°	44.791°	59.965°
0.9	0.000	0.000	0.000	0.896	3.073	29.850°	44.725°	59.518°
1.0	0.000	0.000	0.000	1.000	3.116	29.764°	45.058°	84.394°

Таблица 3. Результаты идентификации эллиптических трещин, имеющих различное соотношение полуосей.

Результаты, приведенные в Таблицах 1,2, а также примеры идентификации эллипсоидальных полостей, эллипсоидальных жёстких включений и эллиптических трещин, имеющих различные координаты центра и ориентацию, рассмотренные в диссертации, демонстрируют высокую эффективность разработанного метода идентификации.

В третьей главе рассмотрена задача идентификации параметров эллипсоидального дефекта в произвольно анизотропном линейно упругом теле по данным одного статического испытания, не обязательно являющегося испытанием на одноосное растяжение (сжатие). Получены аналитические выражения для нахождения координат центра дефекта, а также представлена процедура нахождения регулярных упругих полей, позволяющих выразить компоненты z_{ij} симметричной матрицы \mathbf{Z} через значения функционала взаимности.

Пусть G – эллипсоид. Считается, что матрица Ω – анизотропное линейно упругое тело с тензором упругих модулей C_{ijkl}^M , а приложенные к телу нагрузки, соответствуют произвольному однородному напряжённому состоянию σ_{ij}^∞ в теле без дефекта G . Для решения задачи идентификации достаточно выразить неизвестные геометрические параметры эллипсоидального дефекта G через значения функционала взаимности (1).

Рассмотрим регулярные упругие поля с постоянными напряжениями (7). Для значений функционала взаимности, соответствующих данным полям введём следующее обозначение $M_{mn} = RG(d, mn)$. Величины M_{mn} образуют симметричный тензор второго ранга. Следовательно, найдётся такая система координат $OY_1Y_2Y_3$, в которой данный тензор имеет диагональный вид.

Для нахождения координат центра эллипсоидального дефекта в диссертации использовались регулярные упругие поля с постоянными напряжениями и напряжениями, линейно зависящими от координат, записанные в системе координат $OY_1Y_2Y_3$ и имеющие в этой системе координат вид (2) (при этом X_i в (2) следует заменить на Y_i). Для нахождения координат центра дефекта были получены следующие выражения.

$$\frac{X_i^0}{L} = \cos(X_i, Y_k) \frac{Y_k^0}{L}, \quad \frac{Y_k^0}{L} = \frac{RG(d, \widetilde{Lk})}{\widetilde{M}_{33}} \quad (15)$$

где верхней волнистой линией обозначены регулярные упругие поля, записанные в системе координат $OY_1Y_2Y_3$, а $\widetilde{M}_{33} = RG(d, \widetilde{33})$.

После нахождения координат центра дефекта задача о нахождении величин и направлений полуосей эллипсоида G сводится к задаче о нахождении компонент z_{ij} (11) симметричной матрицы \mathbf{Z} . Собственные значения матрицы \mathbf{Z} равны квадратам величин полуосей эллипсоида – a_1^2 , a_2^2 , a_3^2 , а соответствующие им собственные векторы направлены вдоль осей эллипсоида – \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , \mathbf{e}'_3 . Для нахождения компонент матрицы \mathbf{Z} используются регулярные упругие поля с тензорами напряжений, квадратично зависящими от координат, записанные в системе координат $M^0x_1x_2x_3$ с началом в центре дефекта. Явный вид данных полей в случае изотропной линейно упругой матрицы Ω и случае нагрузок, соответствующих одноосному растяжению (сжатию) тела в направлении оси X_3 , представлен во второй главе диссертации. Процедура нахождения регулярных упругих полей, обозначаемых верхним индексом Qst , $s = 1, 2, 3$, $t = 1, 2, 3$, позволяющих выразить компоненты матрицы \mathbf{Z} через значения функционала взаимности (1), в случае анизотропной линейно упругой матрицы Ω и случае нагрузок, соответствующих произвольному однородному напряжённому состоянию в теле без дефекта, представлена в настоящей главе диссертации.

Тензоры деформаций e_{ij}^{Qst} для регулярных упругих полей Qst запишем в виде

$$e_{ij}^{Qst} = \frac{1}{L^2} \alpha_{ijkl}^{st} x_k x_l \quad (16)$$

где α_{ijkl}^{st} – коэффициенты, удовлетворяющие равенствам $\alpha_{ijkl}^{st} = \alpha_{jikl}^{st} = \alpha_{ijlk}^{st} = \alpha_{ijkl}^{ts}$.

Из условий совместности деформаций следуют 6 уравнений относительно α_{ijkl}^{st}

$$\alpha_{ijmn}^{st} + \alpha_{mnij}^{st} - \alpha_{injm}^{st} - \alpha_{jmin}^{st} = 0 \quad (17)$$

Из уравнений равновесия следуют 9 уравнений относительно α_{ijkl}^{st}

$$C_{ikmn}^M \alpha_{mnkl}^{st} = 0 \quad (18)$$

Кроме того, на коэффициенты α_{ijkl}^{st} были наложены 6 дополнительных условий

$$\frac{1}{5L^2} \alpha_{pqkl}^{st} K_{pq} = \frac{1}{2} (\delta_{sk} \delta_{tl} + \delta_{sl} \delta_{tk}) \quad (19)$$

где $K_{pq} = RG(d, \widehat{pq})$, а индекс \widehat{pq} обозначает регулярные упругие поля с постоянными деформациями вида $e_{ij}^{mn} = (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) / 2$.

Равенства (17), (18), (19) представляют собой неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_{ijkl}^{st} . Всего 21 уравнение относительно 36 неизвестных α_{ijkl}^{st} . Система уравнений является недоопределённой и может быть записана в виде

$$\mathbf{A} \mathbf{d}^{st} = \mathbf{b}^{st} \quad (20)$$

где \mathbf{A} – матрица системы размера 21×36 , \mathbf{d}^{st} – вектор неизвестных величин α_{ijkl}^{st} размера 36×1 ; \mathbf{b}^{st} – вектор правых частей неоднородной системы линейных алгебраических уравнений размера 21×1 .

После нахождения коэффициентов α_{ijkl}^{st} , удовлетворяющих уравнениям (20), для определения компонент z_{st} симметричной матрицы \mathbf{Z} используются регулярные упругие поля Qst с тензорами деформаций, имеющими вид (16). При этом справедливы следующие равенства

$$z_{st} = RG(d, Qst) \quad (21)$$

Отметим, что если $\det(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) \neq 0$, то система уравнений (20) разрешима и имеет бесконечное множество решений. Каждому из этих решений соответствует регулярное упругое поле Qst , которое может быть использовано для определения компонент матрицы \mathbf{Z} . В диссертации показано, что одно из частных решений системы уравнений (20) может быть записано в виде

$$\mathbf{d}^{st} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}^{st} \quad (22)$$

Для иллюстрации эффективности разработанного подхода для идентификации эллипсоидального дефекта в ограниченном анизотропном линейно упругом теле по данным испытания, не обязательно являющегося испытанием на одноосное растяжение (сжатие), в диссертации рассмотрен ряд численных примеров.

В Таблице 4 представлены примеры идентификации параметров эллипсоидальных полостей с центром в точке $(X_1^0, X_2^0, X_3^0) = (1, 2, 3)$, объёмом $|G| = 4\pi/3 \approx 4.1888$, равным объёму шара радиуса 1, соотношениями полуосей $\rho_1 = 0.25$, $\rho_2 = 0.5$, ориентацией, определяемой углами Эйлера $(\varphi, \theta, \psi) = (30^\circ, 40^\circ, 50^\circ)$, в анизотропном линейно упругом теле V в форме куба по данным испытания на двухосное растяжение, $\sigma_{ij}^\infty = \sigma (\delta_{i2} \delta_{j2} + \delta_{i3} \delta_{j3})$.

Результаты, представленные в Таблице 4, получены в предположении, что в кристаллографической системе координат упругие свойства анизотропной матрицы Ω соответствуют свойствам ортотропного топаза. Заданные значения углов Эйлера $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, характеризующих ориентацию кристаллографической системы координат матрицы Ω , представлены в первом столбце Таблицы 4. Найденные значения параметров эллипсоидальной полости представлены в остальных столбцах таблицы.

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$	X_1^0	X_2^0	X_3^0	ρ_1	ρ_2	$ G $	φ	θ	ψ
$(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	1.000	2.000	3.000	0.260	0.501	4.372	29.926°	39.963°	50.061°
$(45^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$	1.000	2.000	3.000	0.259	0.501	4.343	29.841°	39.919°	50.136°
$(45^\circ, 45^\circ, 30^\circ)$	1.000	2.000	3.000	0.259	0.501	4.354	29.888°	39.934°	50.100°
$(45^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$	1.000	2.000	3.000	0.259	0.501	4.350	29.898°	39.945°	50.085°
$(45^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$	1.000	2.000	3.000	0.259	0.501	4.343	29.923°	39.949°	50.069°

Таблица 4. Результаты идентификации эллипсоидальных полостей в анизотропных линейно упругих телах, имеющих различные упругие свойства.

Результаты идентификации эллипсоидального дефекта в анизотропных линейно упругих телах, имеющих различные упругие свойства, по данным испытания на двухосное растяжение, приведенные в Таблице 4, а также примеры идентификации эллипсоидальных дефектов и эллиптических трещин по данным других видов испытаний, рассмотренные в диссертации, демонстрируют высокую эффективность разработанного метода идентификации.

В четвёртой главе численно исследуется возможность использования полученных формул для идентификации дефектов, имеющих неэллипсоидальную форму, а также чувствительность результатов идентификации эллипсоидальных дефектов по отношению к числу измерений и погрешностям в исходных экспериментальных данных.

Пусть форма дефекта G заранее неизвестна. Тогда, зная перемещения \mathbf{u}^d на границе ∂V ограниченного упругого тела V и предположив, что дефект G является эллипсоидальным, можно определить его параметры по формулам, полученным в диссертации.

Графические сравнения геометрии полостей в форме правильных четырёхугольных пирамид с центром в точке $(X_1^0, X_2^0, X_3^0) = (0, 0, 0)$, объёмом $|G| = 4\pi/3 \approx 4.1888$, равным объёму шара радиуса 1, и ориентацией, определяемой углами Эйлера $(\varphi, \theta, \psi) = (30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$, с геометрией восстановленных аппроксимирующих эллипсоидов представлены на Рис.2. Форма, упругие свойства и условия нагружения содержащего дефект упругого тела такие же, как и в примерах, рассмотренных в первой главе.

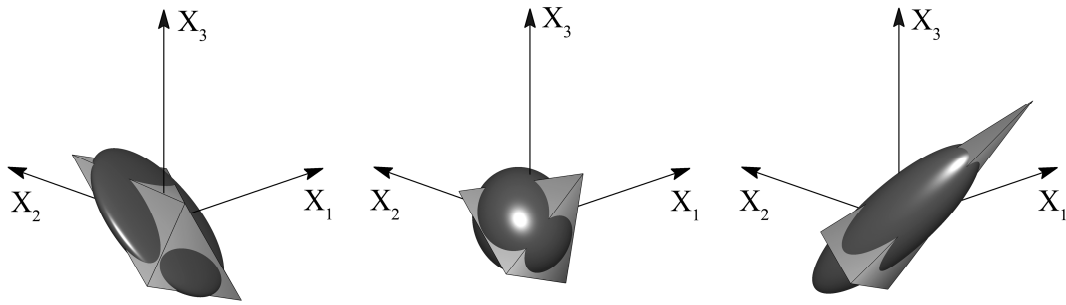


Рис.2. Графические сравнения геометрии дефектов в форме правильных четырёхугольных пирамид с геометрией построенных аппроксимирующих эллипсоидов.

Графические сравнения проекций треугольной трещины с центром в точке $(X_1^0, X_2^0, X_3^0) = (0, 0, 0)$, площадью $|G| = \pi \approx 3.1416$, равной площади круга радиуса 1, и ориентацией, определяемой углами Эйлера $(\varphi, \theta, \psi) = (30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$, с проекциями восстановленного аппроксимирующего эллипса на различные координатные плоскости представлены на Рис.3 (Рис.3,а – плоскость X_1X_2 , Рис.3,б – плоскость X_1X_3 , Рис.3,в – плоскость X_2X_3). Форма, упругие свойства и условия нагружения содержащего дефект упругого тела такие же, как и в примерах, рассмотренных в первой главе.

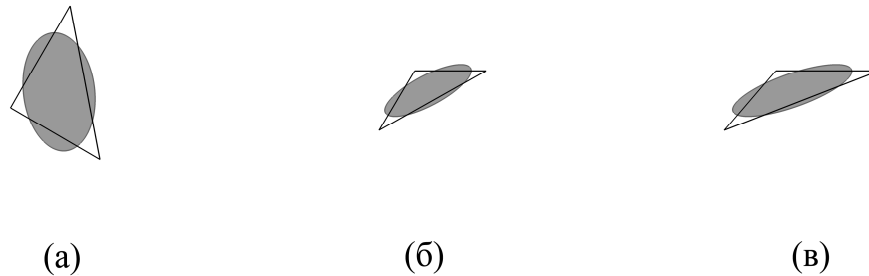


Рис.3. Графические сравнения проекций треугольной трещины с проекциями построенного аппроксимирующего эллипса на различные координатные плоскости.

Результаты, представленные на Рис.2,3, а также примеры идентификации полостей в форме цилиндров, параллелепипедов и правильных треугольных пирамид, а также прямоугольных трещин и трещины, имеющей невыпуклую форму, рассмотренные в диссертации, демонстрируют хорошее соответствие между геометрией реального дефекта и геометрией аппроксимирующего эллипсоида (эллипса в случае трещины).

Во всех численных примерах, рассмотренных в диссертации, для вычисления значений функционала взаимности (1) каждая грань куба V разбивалась на $m \times m$ одинаковых квадратных элементов. Для каждого элемента перемещения \mathbf{u}^d вычислялись в 9 точках методом конечных элементов. При этом перемещения, получаемые методом конечных элементов, моделируют перемещения, измеряемые в эксперименте. Общее число точек, в которых вычислялись перемещения \mathbf{u}^d обозначим $N_m = 6 \times 9 \times m \times m$. После нахождения

перемещений интегралы (1) по соответствующим элементам вычислялись с помощью квадратурной формулы Гаусса с 9 узлами.

Исследована чувствительность результатов идентификации по отношению к числу измерений N_m . Установлено, что для надёжной идентификации дефекта размер элементов, разбивающих грани куба, должен быть сопоставим с размерами дефекта.

Исследована чувствительность результатов идентификации по отношению к случайным погрешностям в исходных данных о перемещениях \mathbf{u}^d . При этом погрешность в исходных данных моделировалась случайным вектором \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \tilde{E} \tilde{\mathbf{e}} \quad (23)$$

где \tilde{E} случайная величина, распределённая по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием $m = 0$ и среднеквадратическим отклонением s , а $\tilde{\mathbf{e}}$ – случайный единичный вектор с координатами, равномерно распределёнными по полусфере $\{X : X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1, X_3 \geq 0\}$. Условие $m = 0$ соответствует отсутствию в исходных данных систематической погрешности.

Значения функционала взаимности определяются величиной возмущения $\Delta \mathbf{u}$, вносимого дефектом в однородное упругое поле, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^d - \mathbf{u}^0$, \mathbf{u}^0 – вектор перемещений в упругом теле V без каких-либо дефектов, условия нагружения которого соответствуют условиям нагружения исходного тела с дефектом. В качестве меры для величины возмущения $\Delta \mathbf{u}$ была выбрана следующая величина

$$\overline{\Delta u} = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} |\Delta \mathbf{u}(X^j)| \quad (24)$$

где X^j , $j = 1, \dots, N_m$ – координаты точки на границе ∂V тела V , в которой выполняется j -ое измерение.

Очевидно, что для надёжной идентификации дефекта погрешности при измерении перемещений должны быть малы по сравнению с величиной $\overline{\Delta u}$.

При заданном значении параметра s к каждой компоненте вычисленного вектора перемещений \mathbf{u}^d добавлялся независимым образом случайный вектор погрешности \mathbf{E} .

В Таблице 5 представлен пример идентификации параметров эллипсоидальной полости с центром в точке $(X_1^0, X_2^0, X_3^0) = (1, 2, 3)$, объёмом $|G| = 33.5103$, равным объёму шара радиуса 2, соотношениями полуосей $\rho_1 = 2.0$, $\rho_2 = 1.5$ и ориентацией, определяемой углами Эйлера $(\varphi, \theta, \psi) = (30^\circ, 40^\circ, 50^\circ)$, при $s = 0.07 \overline{\Delta u}$. Принимая во внимание случайный характер погрешности, представлены 4 реализации случайной величины. Форма, упругие свойства и условия нагружения содержащего дефект упругого тела такие же, как и в примерах, рассмотренных в первой главе.

	X_1^0	X_2^0	X_3^0	ρ_1	ρ_2	$ G $	φ	θ	ψ
1	0.997	1.997	3.024	2.448	1.794	27.083	33.043	42.429	50.500
2	1.000	2.006	3.005	2.285	1.639	31.641	25.083	36.237	53.730
3	1.003	1.993	3.009	1.723	1.355	37.068	28.410	38.957	47.667
4	1.001	2.000	3.004	2.023	1.422	32.484	35.706	36.270	42.873

Таблица 5. Результаты идентификации эллипсоидальной полости при $s = 0.07\overline{\Delta u}$.

Результаты, представленные в Таблице 5, а также результаты идентификации эллипсоидальных полостей и эллиптических трещин, полученные в диссертации для других значений параметра s (максимальное рассмотренное значение $s = 0.1\overline{\Delta u}$), показали, что даже при наличии шума в исходных экспериментальных данных предложенный метод идентификации позволяет определять параметры дефекта с хорошей точностью.

В пятой главе представлено описание численных процедур, использованных во всех рассмотренных в диссертации примерах для моделирования эксперимента. Кроме того, описана процедура вычисления значений функционала взаимности, по данным о перемещениях и усилиях на внешней границе тела.

Численный эксперимент предполагает решение прямой задачи Неймана для упругого тела V при заданных на его границе ∂V усилиях \mathbf{t}^d . При этом перемещения \mathbf{u}^d , получаемые из решения прямой задачи, моделируют перемещения, измеряемые в эксперименте. Схематически численный эксперимент можно представить состоящим из трёх основных этапов (Рис.4).

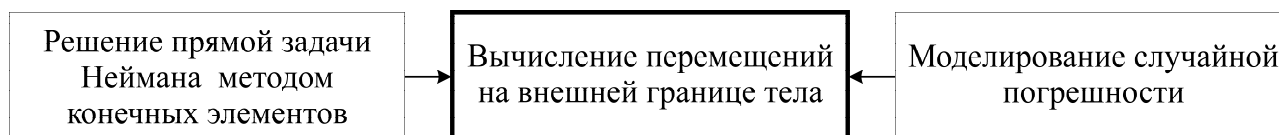


Рис.4. Схематическое представление численного эксперимента.

В диссертации для решения прямых задач для тел с дефектами использовался метод конечных элементов, реализованный в программном комплексе ANSYS (версия 11.0). Особое внимание при решении прямых задач методом конечных элементов было уделено построению расчётных сеток для тел с дефектами (трещинами, полостями, жёсткими и линейно упругими включениями).

Представлено подробное описание процедуры построения расчётных сеток, справедливой для всех типов дефектов, рассмотренных в диссертации. Описанная процедура реализована в программном комплексе ANSYS. Пример использования данной процедуры для построения расчётной сетки для упругого тела в форме куба, содержащего эллипсоидальную полость, представлен на Рис.5.

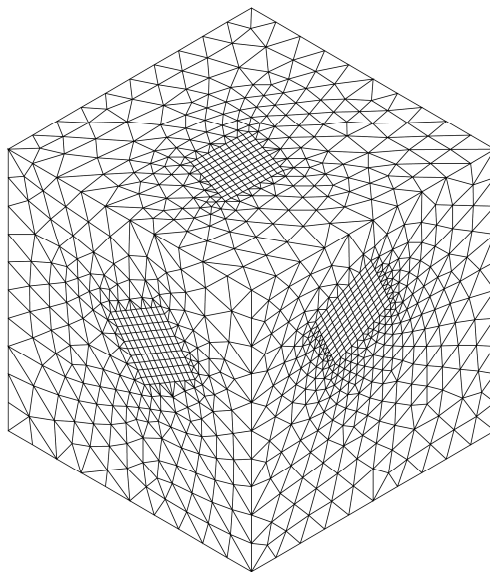


Рис.5. Пример расчётной сетки для упругого тела в форме куба, содержащего эллипсоидальную полость.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

В первом Приложении представлены известные аналитические выражения для компонент тензора Эшелби для изотропных и анизотропных линейно упругих тел. Данный тензор входит в решение прямой задачи об эллипсоидальном включении и используется во второй главе диссертации для определения упругих модулей дефекта.

Во втором Приложении представлен пример использования внутреннего языка программного комплекса ANSYS – APDL (ANSYS Parametric Design Language) для решения прямой задачи об эллипсоидальной полости и вычисления перемещений на внешней границе упругого тела. Данный программный комплекс используется во всех рассмотренных в диссертации численных примерах для моделирования эксперимента.

В третьем Приложении представлен пример реализации на языке Fortran процедур вычисления значений функционала взаимности по данным о перемещениях и усилиях на внешней границе упругого тела, добавления к исходным данным о перемещениях случайной погрешности и определения параметров дефекта.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложен метод идентификации дефектов в линейно упругих телах по данным о перемещениях и усилиях на внешней границе тела, полученным в одном статическом испытании;
2. С использованием данного метода получено решение задачи идентификации эллипсоидального дефекта (трещины, полости, жёсткого или линейно упругого включения) в анизотропном линейно упругом теле. При этом для определения геометрических параметров дефекта (координат центра, размеров и ориентации)

получены явные аналитические выражения. Полученное решение является точным для безграничных упругих тел и приближённым в случае, когда содержащее дефект упругое тело ограничено;

3. Предложенный метод решения задачи идентификации позволяет разделить её так, что геометрические параметры эллипсоидального дефекта определяются независимо от его упругих свойств. В случае, когда дефект – изотропное линейно упругое включение, также получены аналитические формулы для определения его упругих модулей;
4. Для анализа эффективности разработанного метода идентификации рассмотрен ряд численных примеров, в которых для получения исходных экспериментальных данных вместо реального выполнялся численный эксперимент. Для реализации численных экспериментов в диссертации разработан комплекс специальных программ для пакета ANSYS;
5. Рассмотрены численные примеры, показывающие, что даже в тех случаях, когда дефект расположен в непосредственной близости от внешней границы тела, полученные формулы позволяют определять его геометрические и механические параметры с довольно высокой точностью;
6. Численно исследована возможность использования полученных результатов для идентификации дефектов, имеющих неэллипсоидальную форму. Показано, что во всех рассмотренных случаях эллипсоид (эллипс в случае трещины), восстановленный по данным о перемещениях и усилиях на внешней границе тела, достаточно точно аппроксимирует реальный дефект (дефекты в форме цилиндра, параллелепипеда, правильной четырёхугольной и треугольной пирамид, а также прямоугольные, треугольные трещины и трещину, имеющую невыпуклую форму);
7. Численно исследована устойчивость полученных результатов по отношению к числу измерений и случайным погрешностям в исходных экспериментальных данных. Показано, что для надёжной идентификации дефекта расстояния между точками, в которых выполняются измерения, должны быть сопоставимы с размерами дефекта. Установлено, что даже при наличии шума в исходных экспериментальных данных, параметры дефекта определяются с хорошей точностью.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification // Int. J. Fract. 2007. V.147. N.1-4. P.45-54.**
2. **Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to elastostatic inverse problems // C.R. Mecanique. 2008. V.336. N.1-2. P.108-117.**
3. **Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // Inv. Probl. 2010. V.26. N.5. 055001.**
4. **Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // Int. J. Solids Struct. 2011. V.48. P.1154-1163.**
5. **Капцов А.В., Шифрин Е.И., Шушпанников П.С. Определение параметров плоской эллиптической трещины в изотропном линейно упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение // Изв. РАН. МТТ. 2012. №4. С.71-87.**

6. Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of defects in an elastic body by means of the boundary measurements // Key Engineering Forum. 2012 (в печати).
7. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И., Шушпанников П.С. Применение инвариантных интегралов к задаче идентификации дефектов в упругом теле по результатам статических испытаний. В сб.: «Актуальные проблемы механики» (ред. Гольдштейн Р.В.). М.: Наука, 2009. С.76-90.
8. Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification. In: "Defects and Material Mechanics" (Eds. Dascalu C., Maugin G., Stolz C.), Proc. International Symposium on Defect and Material Mechanics (ISDMM), March 25-29, 2007, Aussois, France. Dordrecht: Springer, 2008. P.45-54.
9. Шушпанников П.С. Решение задачи об определении положения и характеристик эллипсоидального включения по данным экспериментов над деформируемым телом. Научные труды Международной молодёжной научной конференции «XXXII Гагаринские чтения», 4-8 апреля 2006 г., Москва. М.: МАТИ, 2006. Т.1. С.173
10. Шушпанников П.С. Обратная задача идентификации дефектов в упругом теле. Научные труды Международной молодёжной научной конференции «XXXIV Гагаринские чтения», 1-5 апреля 2008, Москва. М.: МАТИ, 2008. Т.1. С. 228-230.
11. Шушпанников П.С. Применение функционала взаимности для решения задачи идентификации эллипсоидального дефекта в упругом теле. Научные труды Международной молодёжной научной конференции «XXXVI Гагаринские чтения», 6-10 апреля 2010, Москва. М.: МАТИ, 2010. Т.1. С.236-238.
12. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И., Шушпанников П.С. Применение инвариантных интегралов для решения задачи идентификации дефекта в упругом теле. Тезисы докладов Всероссийской конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твёрдого тела». 13-15 октября 2008, Пермь. С.35.
13. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И., Шушпанников П.С. Применение функционала взаимности для решения задачи идентификации сфероидальной поры и сфероидального жёсткого включения в упругом теле. Труды Второй международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твёрдого тела». 8-11 декабря 2009 г., Казань. Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. С.130-133.
14. Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of reciprocity gap functional to the problem of spheroidal defect identification. In Proc. 18th European Conference on Fracture "Fracture of Materials and Structures from Micro to Macro Scale". 30 August – 3 September 2010, Dresden, Germany (CD Proceedings).
15. Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of the reciprocity gap method for the problem of elliptic crack identification. In: Proc. 1st Interquadrennial ICF Conference in Middle East and Africa. 14-17 November 2011, Luxor, Egypt (CD Proceedings).

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТОВ В ЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛАХ ПО ДАННЫМ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Шушпанников Павел Сергеевич

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати _____ 2012 г. Заказ № __. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук
119526, Москва, проспект Вернадского, д.101, корп.1