

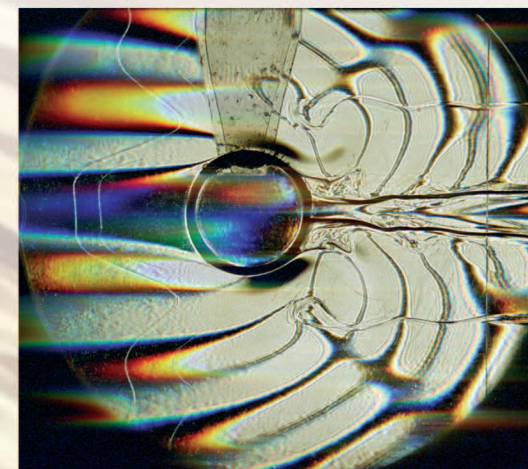


ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ

**16**-я международная конференция -  
- ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ



ФГБУН  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
им. А.Ю. Ишлинского РАН



02-05 декабря 2025 г.

# ВОЛНЫ и ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

МАТЕРИАЛЫ ШКОЛЫ



ФГБУН ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
им. А.Ю. Ишлинского РАН

Москва, 2025 г.

Москва, 2025 г.

*FUNDAMENTAL AND ENVIRONMENTAL FLUID  
MECHANICS*



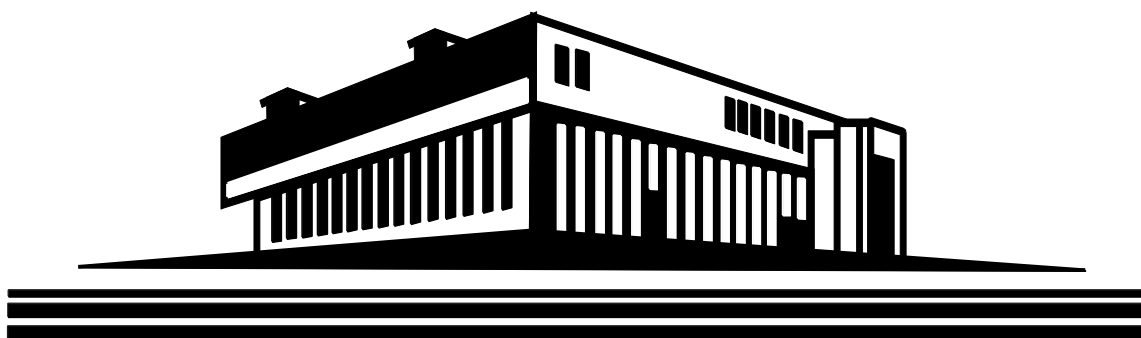
**16-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ –  
ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ**

# **ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ**

Москва, 02 – 05 декабря 2025

# **WAVES AND VORTICES IN COMPLEX MEDIA**

SCIENTIFIC PROGRAMME



Moscow, December 02 – 05, 2025

УДК 532

ББК

22/253

В67

В67

**Волны и вихри в сложных средах:** 16-ая международная конференция – школа молодых ученых; 02 – 05 декабря 2025 г., Москва: Сборник материалов школы. М.: ООО «ИСПО-принт», 2025. – 319 с.

ISBN 978-5-91741-299-3

Материалы 16-ой международной конференции – школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», посвященной обсуждению фундаментальных и прикладных проблем механики жидкостей и газов в природных и промышленных условиях.

*Ключевые слова:* волны, вихри, математическое и лабораторное моделирование, неоднородные жидкости, течения в сложных средах.

УДК 532

ББК 22/253

Proceedings of the 16-th international conference – scientific school of young scientists «Waves and vortices in complex media» dedicated to the discussion of fundamental and applied problems in fluid and gas mechanics for environmental and industrial settings.

*Keywords:* waves, vortices, mathematical and laboratory modelling, inhomogeneous fluids, fluxes in complex media.



© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 2025

**ОРГАНИЗАТОРЫ ШКОЛЫ:**  
*Федеральное государственное бюджетное учреждение*  
**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК**  
*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки*  
**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН**

---

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ ШКОЛЫ**

проф. Ю.Д. Чашечкин – сопредседатель, чл.-корр. РАН С.Е. Якуш – сопредседатель, чл.-корр. РАН Д.А. Губайдуллин – зам. председателя, проф. С.Ф. Урманчеев – зам. председателя, Е.В. Есина – уч. секретарь, д.ф.-м.н. В.Б. Бекежанова. проф. Т. Боднар (Чехия), проф. Р.М. Вильфанд, чл.-корр. РАН А.М. Гайфуллин, д.ф.-м.н. М.Н.Галимзянов, проф. А. Герчински (США), проф. О.Н. Гончарова, д.ф.-м.н. Е.В.Ерманюк, д.ф.-м.н. А.Г. Зацепин, чл.-корр. РАН Н.М. Зубарев, проф. А.Т. Ильичев, акад. Д.М. Климов, проф. А.Д.Косинов, к.ф.-м.н. М.А. Котов, проф. Т.П. Любимова, д.ф.-м.н. А.И. Мизев, проф. А.Н.Осипцов, к.ф.-м.н. А.А. Очиров, проф. Ф. Фрони (Франция), проф. Я. Фукумото (Япония), проф. Х. Чой (Корея), д.ф.-м.н. О.Г. Чхетиани.

### **ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:**

председатель – Ю.Д. Чашечкин (ИПМех РАН), зам.председателя – А.А. Очиров (ИПМех РАН), ученый секретарь – Е.В. Есина (ИПМех РАН), А.Ю. Ильиных (ИПМех РАН), М.А. Котов (ИПМех РАН), В.Е. Прохоров (ИПМех РАН), А.Ю. Садилин (ИПМех РАН), Е.Г. Склянский (ИПМех РАН).

## **НАУЧНАЯ ПРОГРАММА**

- Системы фундаментальных уравнений и конститутивные модели течений сложных сред;
  - Методы математического и лабораторного моделирования течений;
  - Волны, вихри, турбулентность и лигаменты в течениях жидкостей и газов;
  - Механика простых и сложных жидкостей с фазовыми переходами, газожидкостных систем и суспензий, включая течения в электрических или магнитных полях и в экстремальных условиях высоких и низких температур;
  - Устойчивость течений;
  - Электродинамика;
  - Техника современного эксперимента;
  - Технологические приложения.
- 

**Российская академия наук**  
**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН**



**ORGANIZERS:**  
**Russian Academy of Sciences**  
**Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS**

---

**INTERNATIONAL PROGRAM COMMITTEE:**

Prof. Yu.D. Chashechkin (co-chair), Corr.-m. RAS S.E. Yakush (co-chair), Corr.-m. RAS D.A. Gubaidullin (deputy chair), Prof. S.F. Urmacheev (deputy chair), E.V. Esina (sci. sec.), D.Sc. O.G. Chkhetiany, D.Sc. V.B. Bekezhanova, Prof. T.Bodnar (Czech Republic), Prof. H. Choi (Republic of Korea), Prof. Ph. Fraunie (French Republic), Prof. Y. Fukumoto (Japan), Corr.-m. RAS A.M. Gaifullin, D.Sc. M.N. Galimzyanov, Prof. A. Herchinsky (USA), Prof. O.N. Goncharova, D.Sc. E.V. Ermanyuk, Prof. A.T. Ilyichev, Acad. D.M. Klimov, Prof. A.D.Kosinov, Ph.D. M.A. Kotov, Prof. T.P. Lyubimova, D.Sc. A.I. Mizev, Prof. A.N. Osiptsov, Ph.D. A.A. Ochirov, Prof. R.M. Vilfand, D.Sc. A.G. Zatsepin, Corr.-m. RAS N.M. Zubarev

**SCIENTIFIC PROGRAM**

- Systems of fundamental equations and constitutive models of complex media flows;
- Methods of mathematical and laboratory modeling of flows;
- Waves, vortices, turbulence and ligaments in flows of liquids and gases;
- Mechanics of simple and complex fluids with phase transitions; gas-liquid systems and suspensions, including flows in electric or magnetic fields and under extreme conditions of high and low temperatures;
- Stability and instability of flows;
- Electrohydrodynamics;
- Technique of modern experiments;
- Technological applications.

**Russian Academy of Sciences**  
**Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS**

## Предисловие

Научная Программа 16-й международной конференции-школы «Волны и вихри в сложных средах», включали обсуждение таких тем, как: Системы фундаментальных уравнений и конститутивные модели течений сложных сред; Методы математического и лабораторного моделирования течений; Волны, вихри, турбулентность и лигаменты в течениях жидкостей и газов; Механика простых и сложных жидкостей с фазовыми переходами, газожидкостных систем и суспензий; Течения в электрических или магнитных полях и в экстремальных условиях высоких и низких температур; Устойчивость течений; Электродинамика; Техника современного эксперимента; Технологические приложения

В этом году традиционная программа была дополнена отдельными заседаниями, посвященными памяти академика РАН А.Г. Куликовского (1933–2024 гг.). Помимо научной работы в МИАН им. В.А. Стеклова, преподавания в МГУ им. М.В. Ломоносова, Андрей Геннадьевич уделял большое внимание организации и проведению научных семинаров. Он являлся основателем данной серии конференций, был ее многолетним руководителем, а в последние годы – почетным председателем. В работе мемориальной секции, которая проходила на двух заседаниях, своими воспоминаниями и научными результатами поделились пятнадцать известных ученых – учеников, коллег и соратников академика РАН А.Г. Куликовского. По результатам обсуждений докладов академик РАН И.Г. Горячева предложила сохранить данную секцию в Программе последующих конференций. Идея получила полное одобрение присутствующих участников.

В целом на конференции было заслушано 113 докладов – несколько больше, чем в 2024 г. (96 докладов). Больше половины (62 доклада) были представлены молодыми учеными в возрасте до 35 лет. В работе конференции впервые приняли участие группы студентов из МФТИ, МИФИ и ЯрГУ. Результаты своих научных исследований сообщили члены-корреспонденты РАН – А.М. Гайфуллин, И.Л. Ермолов, Н.М. Зубарев, Д.С. Лисовенко, А.В. Слюняев, А.И. Шафаревич, С.Е. Якуш; 33 доктора физико-математических и технических наук, 46 кандидатов наук. В работе конференции также приняли участие ученые из Алжира, Белоруссии, КНР, Мьянмы, США.

Наиболее активно свои результаты представили сотрудники институтов Российской академии наук (ИПМех РАН, ОИ ВТ РАН, ИПМ РАН, ИТФ ИФА РАН, ИО РАН, ИВП РАН, ИАП РАН, МИАН РАН, ФИАН, ИПФ РАН, ИМ УФИЦ РАН, ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, ИМСС УрО РАН, ИЭ УрО РАН, ИГиЛ СО РАН, ИК СО РАН, ИТПМ СО РАН); высших учебных заведений (МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИ МГУ, НИЯУ МИФИ, РУТ МИИТ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Академия водного транспорта, «ВОЕНМЕХ», НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ, НИУ РГУ нефти и газа, РГУ, МИЭМ, МФТИ, ФГБОУ ВО «КГТУ», ЯрГУ и другие); Научных центров (ЦАГИ, НИЦ «Курчатовский институт», АО «ЦКБ МТ «Рубин»); медицинских центров (ОЭХ №7 им. Н.И. Пирогова, ФГБУЗ им. И.В. Давыдовского), представлявшие Москву, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Екатеринбург, Ярославль, Казань, Уфу, Пермь, Новосибирск, Калининград, Томск, Саранск, Севастополь, Долгопрудный, Жуковский, Шатуру, Черноголовку.

Обсуждения докладов показали, что развитие техники наблюдений, методов анализа больших объемов данных, объединение результатов согласованного лабораторного и математического моделирования сложных явлений, открывает новые возможности изучения таких традиционных компонентов течений жидкостей и газов, как волны и вихри, проведения оценки из действия на природные и техногенные объекты. В докладах продемонстрирована важная роль, которую в энергетике и динамике течений играют лигаменты, которые идентифицируются как тонкие волокна и прослойки в высокоразрешающем эксперименте и сингулярные компоненты в полном аналитическом описании. Образование лигаментов обеспечивают процессы конверсии потенциальной поверхностной энергии супрамолекулярных ассоциатов, непрерывно идущие в текучих средах.

Многообразие тем, новые подходы, широкая география сохраняли интерес слушателей к участию в заседаниях, которые практически полностью проходили в очном формате. Аудитория была достаточно полной, активные обсуждения шли в течение всего срока работы конференции.

В отсутствие целевого финансирования научных мероприятий, Оргкомитет считает своей приятной обязанностью поблагодарить всех участников 16-й международной конференции-школы «Волны и вихри в сложных средах», реально поддерживающих открытый обмен научными суждениями – инструмент формирования новых идей, решения традиционных и вновь возникающих научно-практических проблем. Особая благодарность выражается участникам, оказавшим финансовую поддержку конференции.

Поскольку в сложившихся обстоятельствах сборник материалов публикуется после окончания мероприятия, сообщаем о рекомендации участников продолжить работу серии конференций – школ «Волны и вихри в сложных средах» в декабре 2026 года.

Оргкомитет

# ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПРЫЖКИ В ПЛЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ НА СУПЕРГИДРОФОБНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

*А.И. Агеев, А.Н. Осипцов\*, К.В. Смирнов*  
 НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва  
 osiptsov@imec.msu.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрен ряд одномерных задач о структуре «сверхкритических» пленочных течений на обычных и супергидрофобных поверхностях (СГП) при локализованном массоподводе жидкости с формированием «гидравлических прыжков», то есть резких скачков толщины пленки. Получены безразмерные асимптотические уравнения гидравлического приближения для пленки вязкой жидкости на горизонтальной СГП в поле силы тяжести. Рассмотрены две модели трения на СГП, замыкающие постановку задачи об осредненном пленочном течении. Получены уточненные соотношения на прямом гидравлическом прыжке, учитывающие изменение «полного давления», обусловленное наличием пульсационных составляющих в осредненных по толщине пленки уравнениях движения. Предложены приближенные модели для нахождения положения гидравлических прыжков в стационарных одномерных течениях с плоской и осевой симметрией. Приведены примеры численных расчетов одномерных течений с гидравлическими прыжками на СГП с различными «длинами скольжения». Указаны границы областей параметров, при которых возможно «запирание» потока, нарушение одномерности течения и возникновение полигональных гидравлических прыжков.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается изотермическое пленочное течение вязкой жидкости вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности в поле силы тяжести в декартовых ( $x$  – продольная,  $z$  – вертикальная,  $j = 0$ ) или цилиндрических ( $x$  – радиальная,  $j = 1$ ) координатах. Предполагается, что жидкость поступает в пленку от заданного локализованного источника массы (струи, натекающей на стенку, либо щелевого источника). Предполагается, что относительная толщина пленки мала  $H/L \ll 1$ ,  $H$  – характерная толщина пленки (например, в сечении массоподвода),  $L$  – характерная длина смачиваемой области, на которой требуется построить решение. В случае течения вдоль конечной стенки  $L$  имеет порядок длины стенки.

После интегрирования уравнений вязкой жидкости в приближении тонкого слоя по толщине пленки, а также использования кинематического условия на внешней границе слоя получаем интегральные законы сохранения, описывающие осредненное пленочное течение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{x^j} \frac{\partial(x^j h \langle u \rangle)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(h \langle u \rangle)}{\partial t} + \frac{1}{x^j} \frac{\partial(x^j h \langle u^2 \rangle)}{\partial x} = -\frac{1}{Fr^2} h \frac{d(p_e + h)}{dx} - \tau_x, \quad \tau_x = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{x^j} \frac{\partial(x^j h \langle u'^2 \rangle)}{\partial x}$$

Здесь  $Fr^2 = U^2/gH$  – число Фруда,  $p_e$  – безразмерное капиллярное давление на внешней границе слоя. Используются обозначения:

$$u(x, z, t) = \langle u \rangle(x, t) + u'(x, z, t), \quad \langle u \rangle(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz, \quad \langle u^2 \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dz$$

$$\langle u'^2 \rangle = \langle u \rangle'^2 + \langle u'^2 \rangle$$

Для стационарных одномерных течений в пренебрежении капиллярным давлением получаем следующую постановку задачи:

$$x^j <u> h = x_0^j, \quad <u> h \frac{d<u>}{dx} + \frac{1}{Fr^2} h \frac{dh}{dx} = -\tau_x, \quad x = x_0: \quad <u> = h = 1 \quad (1)$$

Здесь  $x_0$  – координата сечения массоподвода в слой. Для замыкания постановки задачи необходимо задать модель трения  $\tau_x$ , то есть профиль  $u(x, z)$ . Функция  $u(x, z)$  должна удовлетворять условиям проскальзывания Навье/прилипания на твердой стенке, отсутствия касательных напряжений на внешней границе слоя и сохранения расхода в пленке. Соответствующий профиль продольной компоненты скорости можно задавать в виде:

$$u(x, z) = A(x) + B(x)z + C(x)z^2 + D(x)z^3$$

В расчетах использовался параболический либо кубический профиль, когда коэффициент  $C$  равнялся нулю. Указанные профили имеют вид:

$$u(x, z) = \frac{3x_0^j(b+z)}{x^j h(3b+h)} - \frac{3z^2 x_0^j}{x^j h^2(6b+2h)}, \quad u(x, z) = \frac{12x_0^j(b+z)}{x^j h(12b+5h)} - \frac{4z^3 x_0^j}{x^j h^3(12b+5h)},$$

где  $b$  – безразмерная, отнесенная к характерной толщине слоя, длина скольжения на СГП, входящая в условие проскальзывания Навье [1].

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СВЕРХКРИТИЧЕСКИХ ( $Fr > 1$ ) ТЕЧЕНИЙ

С использованием условия сохранения массы уравнение для  $<u>$  может быть записано в виде:

$$\frac{(Fr_l^2 - 1)}{<u>} \frac{d<u>}{dx} = \frac{1}{x^j} \left( j - \frac{Fr_l^2 \tau_x x^{2j}}{<u> x_0^j} \right), \quad Fr_l^2 = \frac{Fr^2 <u>^2}{h} = \frac{Fr^2 <u>^3 x^j}{x_0^j}$$

Если в полученном уравнении правая часть не обращается в ноль, тогда производная скорости по координате обращается в бесконечность в точке, где локальное число Фруда ( $Fr_l$ ) становится равным единице, и непрерывное решение не может быть продолжено за эту точку. В газовой динамике, как известно, невозможно безударно затормозить сверхзвуковой поток. В рассматриваемом случае пленочного течения в рамках используемой модели должен возникнуть гидравлический прыжок (аналог ударной волны) в некоторой точке выше по потоку от места, где  $Fr_l = 1$ . Для однозначного определения величины скачка толщины пленки и координаты гидравлического прыжка требуется задать толщину (либо среднюю скорость) пленки в некоторой точке, лежащей вниз по потоку в докритической области за прыжком, где локальное число Фруда еще не достигло единицы. Для неограниченной (полубесконечной) области течения стационарного решения построить нельзя, поскольку в некоторой точке вниз по потоку, вследствие ускорения докритического течения, локальное число Фруда снова достигнет единицы и возникнет еще одна особая точка, в которой производная толщины пленки по координате обратится в минус бесконечность (произойдет «запирание» потока).

Система уравнений (1) по аналогии с газовой динамикой допускает разрывные решения со скачком параметров, соответствующих гидравлическому прыжку. Соотношения на прямом скачке для мелкой воды имеют вид:

$$<u>_1 h_1 = <u>_2 h_2, \quad <u>_1^2 h_1 + \frac{h_1}{2Fr^2} + A_1 = <u>_2^2 h_2 + \frac{h_2}{2Fr^2} + A_2, \quad (2)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют параметрам до и после скачка,  $A_i$  – слагаемые, учитывающие вклад «пульсационной» составляющей скорости в поток импульса. Конкретный вид  $A_i$  определяется выбором профиля скорости. Система (2) при  $A_i = 0$ , помимо тривиального решения без скачка параметров, имеет известное аналитическое решение [2]:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}}{2}, \quad Fr_1^2 = \frac{Fr^2 < u >_1^2}{h_1}$$

Для  $A_i$  не равных нулю система уравнений на скачке также имеет нетривиальное решение, которое находилось численно для различных чисел Фруда и параметров скольжения.

### ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ФОРМЫ СЛОЯ И СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ

Ниже на рис. 1 представлены примеры расчетов формы поверхности слоя  $h(x)$  и значений средней скорости  $\langle u \rangle(x)$  в слое до и после скачка для некоторых значений  $Fr$  и  $Fr_l$ . В сверхкритической области расчеты продолжаются пока  $Fr_l > 1$ . За точку, где  $Fr_l = 1$ , решение продолжить нельзя, поэтому в промежуточную точку при  $x = x_s$  «вставляем» скачок параметров с условиями на скачке. Далее расчет продолжается в докритической области пока  $Fr_l < 1$ , то есть до второй особой точки. В реальных условиях, когда правое граничное условие должно быть выполнено в точке, лежащей ниже точки «запирания» одномерного потока, по-видимому, вместо прямого скачка должна возникнуть система более слабых косых скачков (полигональный скачок, наблюдавшийся в экспериментах [3]).

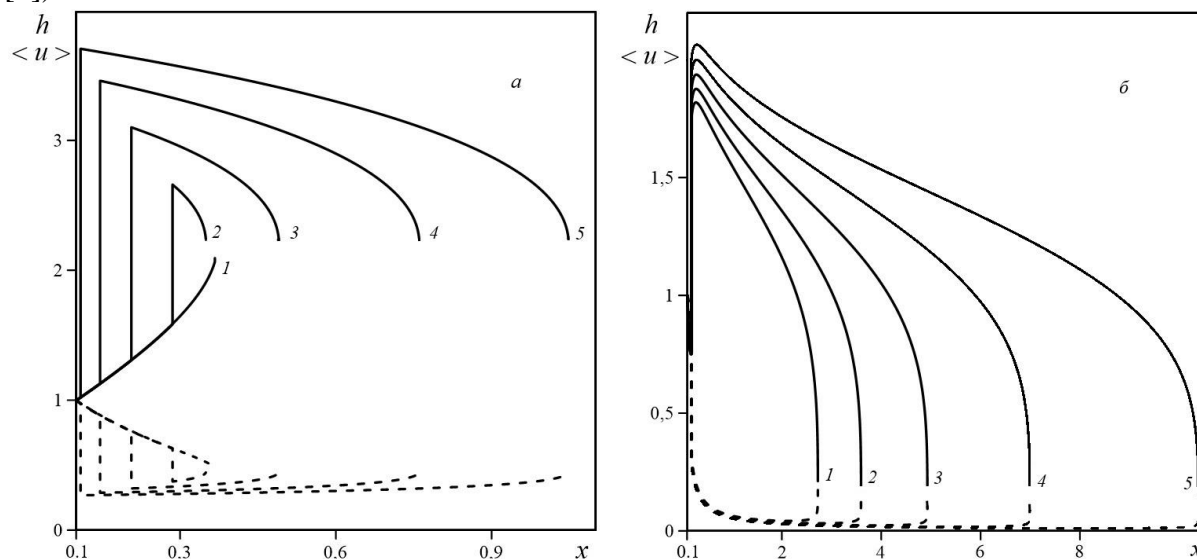


Рис. 1. Форма поверхности слоя (сплошная линия) и средней скорости (пунктирная линия);  
а) плоскопараллельное течение,  $Fr = 3$ ,  $Fr_l = 1.01, 1.5, 2., 2.5, 2.9$  (1–5),  $b = 0$ ,  
б) осесимметричное течение,  $Fr = 2.2$ ,  $Fr_l = 1.8, 1.85, 1.9, 1.95, 2$  (1–5),  $b = 0.1$

Кривые 5 ограничивают область существования решения с заданным значением толщины слоя в докритической области за скачком. Так как вторая особая точка в случае осесимметричного течения находится на значительном удалении от массоподвода, область решения до скачка на рис. 1б не видна. Для других значений  $Fr$ ,  $Fr_l$  и  $b$  кривые подобны представленным на рисунке; отличие заключается в положении скачка при фиксированных значениях  $Fr_l$  или  $b$ , а также положении второй особой точки.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 25-21-00038).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев А.И., Осипцов А.Н. Макро- и микрогидродинамика вязкой жидкости вблизи супергидрофобной поверхности // Коллоидный журнал. 2022. Т. 84. № 4. С. 380-395



2. *Rayleigh L.* On the theory of long waves and bores // Proc. R. Soc. Lond. 1914. A 90. P. 324.
3. *Ellegaard C., et al.* Creating corners in kitchen sink flows // Nature. 1998. V. 392. P. 767–768.

Агеев Алексей Игоревич, ageev@imec.msu.ru

Осипцов Александр Николаевич, osiptsov@imec.msu.ru



## КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОКАЛИЗОВАННОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

*А.И. Аллилуева*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*esina\_anna@list.ru*

Для описания распространения коротких волн в средах различной природы часто используются асимптотические решения гиперболических уравнений, выражающиеся через ВКБ-экспоненты или, при наличии фокальных точек, через канонический оператор Маслова на соответствующих лагранжевых многообразиях. Малым параметром в таких асимптотиках служит отношение длины волны к характерному масштабу изменения характеристик среды. Если среда содержит локализованные неоднородности (например, узкие подводные хребты или пикноклины в океане, слои с резко меняющейся оптической или акустической плотностью и др.), коэффициенты уравнений оказываются зависящими от (вообще говоря, другого) малого параметра, причем зависимость не регулярная - слабые пределы коэффициентов имеют особенности в точках, соответствующих указанным неоднородностям. Стандартная теория коротковолновых асимптотик в такой ситуации, вообще говоря, не работает; в частности, перестраиваются геометрические объекты, определяющие решение. В случае, когда характерный масштаб неоднородности сравним с длиной волны (т.е. соответствующие малые параметры одного порядка), показано, что лагранжевы многообразия, определяющие асимптотику, в точках, задающих особенности коэффициентов, разделяются на несколько связанных компонент, описывающих прошедшие и отраженные волны. Амплитуды этих волн определяются одномерной задачей рассеяния для «эталонного» уравнения, содержащим малого параметра; тем самым, эта вспомогательная задача не связана с теорией геометрических асимптотик.

В настоящей работе разбирается общая ситуация для одномерного волнового уравнения, когда характерная длина волны начального возмущения не сравнима с характерной шириной скачка.

Аллилуева Анна Ивановна, esina\_anna@list.ru



# УПРАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИЕЙ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПОМОЩЬЮ ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.Н. Ананич\*, М.С. Краков

Белорусский национальный технический университет Минск, Беларусь  
aliinaananych@gmail.com

## ВВЕДЕНИЕ

Процесс передачи тепла от стенок канала к текущей жидкости лежит в основе работы множества систем, в том числе теплообменников в микрофлюидике. Поскольку для микрофлюидных устройств характерны небольшие значения числа Рейнольдса, интенсификация теплопередачи за счет турбулентного перемешивания становится невозможной. Одним из способов увеличить скорость теплопередачи является использование магнитных жидкостей. В неоднородном магнитном поле в магнитной жидкости, температура которой неоднородна, возникает сила, которая может способствовать интенсификации теплообмена.

В работах [1-2] было исследовано влияние линейных диполей на интенсивность теплопередачи в плоском канале. Было показано, что увеличение количества диполей, то есть областей неоднородного магнитного поля, усиливает теплообмен. Создание областей неоднородности также возможно с помощью размещения вблизи канала намагничивающихся синусоидальных элементов. Целью работы являлось исследование влияния синусоидальных элементов на термомагнитную конвекцию.

## ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Определяющие уравнения в переменных функция тока–завихренность имеют вид [3]:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \frac{1}{\text{Re}} \Delta\omega + \text{Ri} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \text{Ri}_m \frac{\chi\hat{H}}{1 + \chi\hat{H}} \left[ \left( \frac{\partial\hat{H}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial\hat{H}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \right] \quad (1)$$

$$\Delta\psi = -\omega \quad (2)$$

$$\text{Pe}\mathbf{u} \cdot \nabla\theta = \Delta\theta \quad (3)$$

Здесь  $\theta$  – безразмерная температура,  $\hat{H} = \frac{H}{M_s}$  – безразмерная напряженность магнитного поля,  $M_s$  – намагниченность насыщения жидкости,  $\text{Re} = \frac{\rho u L}{\eta}$  – число Рейнольдса,  $\text{Ri} = \frac{g\beta\Delta T L}{u^2}$  – число Ричардсона,  $\text{Ri}_m = \frac{\mu_0 M_s^2 \beta \Delta T}{\rho u^2}$  – магнитное число Ричардсона,  $\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$  – число Пекле,  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$  – число Прандтля.

Уравнение для скалярного потенциала магнитного поля  $F$  имеет вид:

$$\nabla(\mu \nabla F) = 0, \quad \mu = 1 + \frac{\chi_0(1 - \beta\Delta T\theta)}{1 + \chi_0\hat{H}}, \quad (4)$$

где  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость,  $\chi_0$  – начальная магнитная восприимчивость.

## ГЕОМЕТРИЯ

Численно исследовано ламинарное течение магнитной жидкости в плоском канале в однородном вертикальном магнитном поле (рис. 1). Верхняя и нижняя стенки канала поддерживаются при постоянной температуре  $T_h$ . На входе в канал заданы постоянная

скорость течения  $U$  и постоянная температура  $T_c$ . Синусоидальные элементы с магнитной проницаемостью  $\mu = 1000$  располагаются с обеих сторон от канала. Профили верхнего и нижнего элементов соответствуют следующим формулам:

$$y_1(x) = \frac{h}{2} + A + w + A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right), \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (5)$$

$$y_2(x) = -\frac{h}{2} - A - w + A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \delta)\right), \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (6)$$

Здесь  $h$  - высота канала,  $w$  - толщина стенок канала,  $A$  - амплитуда,  $\lambda$  - длина волны,  $\delta$  характеризует горизонтальное смещение нижнего элемента относительно верхнего.

Расчеты проводились для безразмерного канала высотой  $h = 1$  длиной  $L_2 = 12$  (обезразмеривание проводилось по высоте канала), длина синусоидальных элементов была равна  $L_1 = 10$ , толщина стенок  $w = 0.1$ , смещение  $\delta = \lambda/2$ .

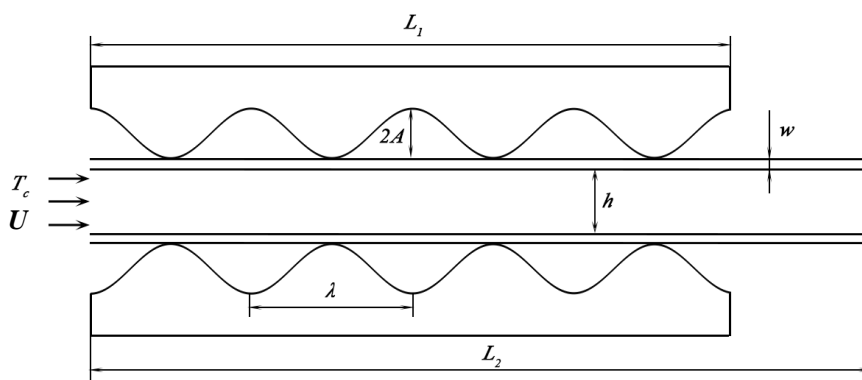


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Все последующие результаты были получены для  $A = 0,4$ ,  $Re = 5$ ,  $Pr = 10$ ,  $Ri = 0,1$ ,  $Rim = 50$ ,  $H = 5$ . Установлено, что при увеличении длины волны синусоидальных намагничивающихся элементов среднее значение числа Нуссельта растет (рис. 2). Увеличение среднего значения числа Нуссельта для длины волны 1,67 составляет 21,87% по сравнению с течением в отсутствие магнитного поля.

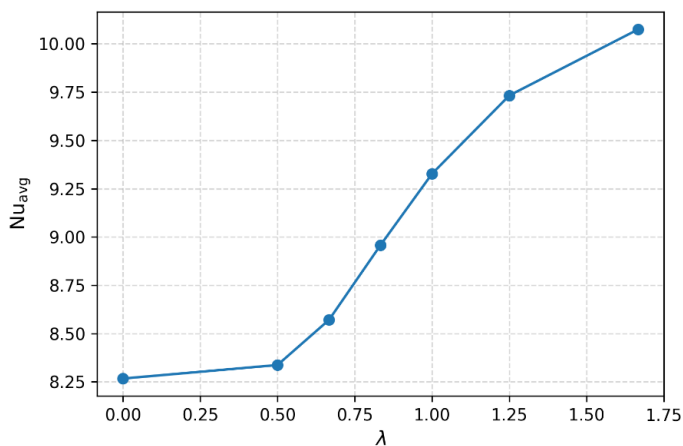


Рис. 2. Зависимость среднего значения числа Нуссельта от длины волны

Волнообразное поведение средней температуры вдоль канала обусловлено образованием вихрей (рис. 3). На рис. 4 представлено распределение средней температуры вдоль канала для различных значений длины волны, где  $\lambda = 0$  – течение в отсутствие магнитного поля. В начале канала средняя температура для всех значений длины волны меньше, чем при  $\lambda = 0$ . Это объясняется сильным возвратным течением, возникающим благодаря образованию вихрей. Для  $\lambda = 0,5$  средняя температура вдоль канала оказывается меньше, чем в случае отсутствия магнитного поля.

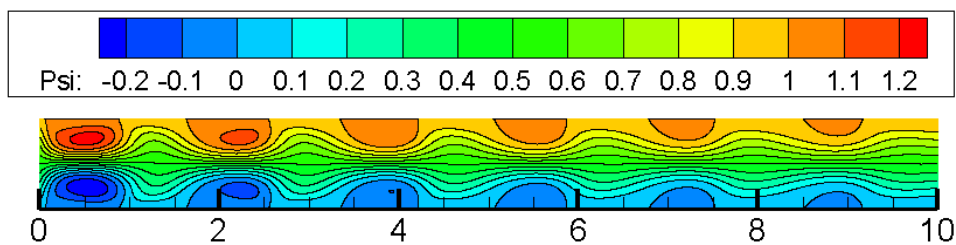


Рис. 3. Линии тока для  $\lambda = 1,67$

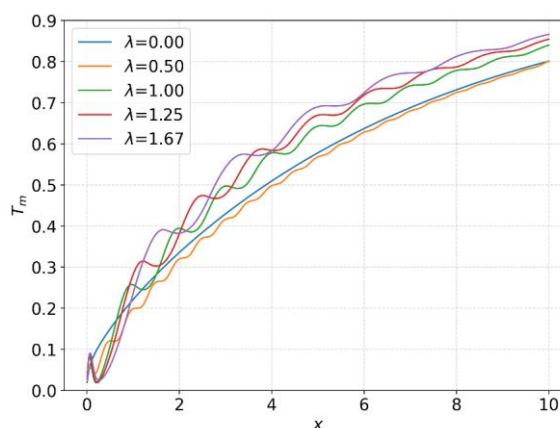


Рис. 4. Распределение средней температуры вдоль канала

Выбор  $\lambda$  зависит от целевой средней температуры. Однако различие в средней температуре для разных значений длины волны при  $\lambda \geq 1$  становится менее значимым к концу канала. Это связано с тем, что по мере движения жидкости в канале ее температура растет и температурные градиенты уменьшаются. Соответственно, влияние термомагнитной конвекции ослабевает и интенсивность вихрей вдоль канала уменьшается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ganguly, R., Sen, S. and Puri, I.K., 2004. Heat transfer augmentation using a magnetic fluid under the influence of a line dipole. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 271(1), pp.63-73.
2. Ghorbani, B., Ebrahimi, S. and Vijayaraghavan, K., 2018. CFD modeling and sensitivity analysis of heat transfer enhancement of a ferrofluid flow in the presence of a magnetic field. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 127, pp.544-552.
3. Krakov, M.S. and Nikiforov, I.V., 2018. Natural convection in a horizontal cylindrical enclosure filled with a magnetic nanofluid: Influence of the uniform outer magnetic field. *International Journal of Thermal Sciences*, 133, pp.41-54.

Ананич Алина Николаевна, aliinaananich@gmail.com  
Краков Михаил Самуилович, mskrakov@gmail.com

— ♦ ♦ ♦ —

# СТАБИЛИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛАЗЕРНОГО ПРОБОЯ В СКРЕЩЕННЫХ ЛУЧАХ

*В.Н. Андросенко\*, М.А. Котов, Н.Г. Соловьев, М.В. Торчик, А.Н. Шемякин,  
М.Ю. Якимов*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
androsenko@ipmnet.ru*

## ВВЕДЕНИЕ

Импульсно-периодический оптический разряд (ИПОР), в отличие от непрерывного оптического разряда (НОР) [1, 2] обладает значительно большей температурой плазмы и многократно увеличенным потоком излучения в УФ-диапазоне благодаря своей локализации в области с высокой интенсивностью лазерного излучения, намного ближе к перетяжке луча, чем НОР. Существует перспектива использования ИПОР в областях применения НОР, в которых важно наличие стабильного и яркого излучения в УФ-диапазоне, в частности, в микроэлектронной промышленности для инспекции результатов литографии [3], поэтому исследование стабильности и яркости ИПОР является актуальной задачей.

В данной работе проведены исследования импульсно-периодических оптических разрядов (ИПОР), поддерживаемых излучением импульсно-периодического волоконного лазера на длине волны  $\lambda = 1.064$  мкм в области пересечения двух сфокусированных лучей в ксеноне при высоком давлении. Схема эксперимента представлена на рис. 1.

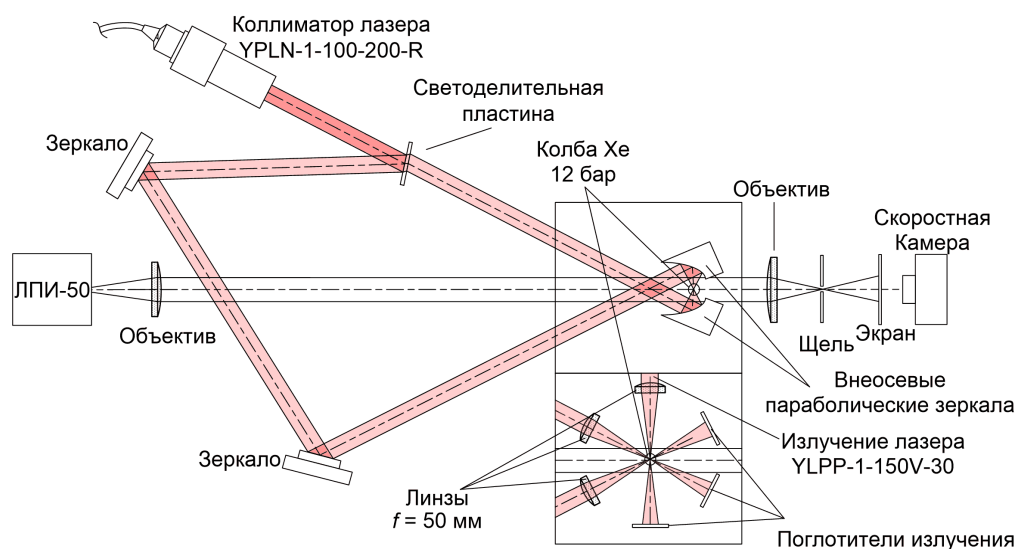


Рис. 1. Луч лазера YPLN-1-100-200-R разделяется на два. Оба луча фокусируются в центре колбы с ксеноном внеосевыми параболическими зеркалами ( $f/3.5$ ), пересекаясь под углом  $120^\circ$ . В конфигурации с тремя лучами фокусировка происходит с помощью линз с  $f = 50$  мм, пересекаясь под углами  $60^\circ$ . В центре показан теневой прибор.

В работе [4] отмечалось, что при поддержании ИПОР в одном луче образуется квазистационарный турбулентный поток, направленный навстречу падающему лучу (рис. 2,а). В результате нарушаются условия фокусировки и стабильность ИПОР. В экспериментах данной работы показано, что при ИПОР в области пересечения двух сфокусированных лучей генерируется поток в направлении, поперечном оптическим осям обоих



лучей. На кадрах скоростной съёмки (рис. 2, *b*) он выглядит как два потока, направленных вверх и вниз, тогда как оси лучей ориентированы горизонтально. Благодаря этому возрастает стабильность и яркость ИПОР.

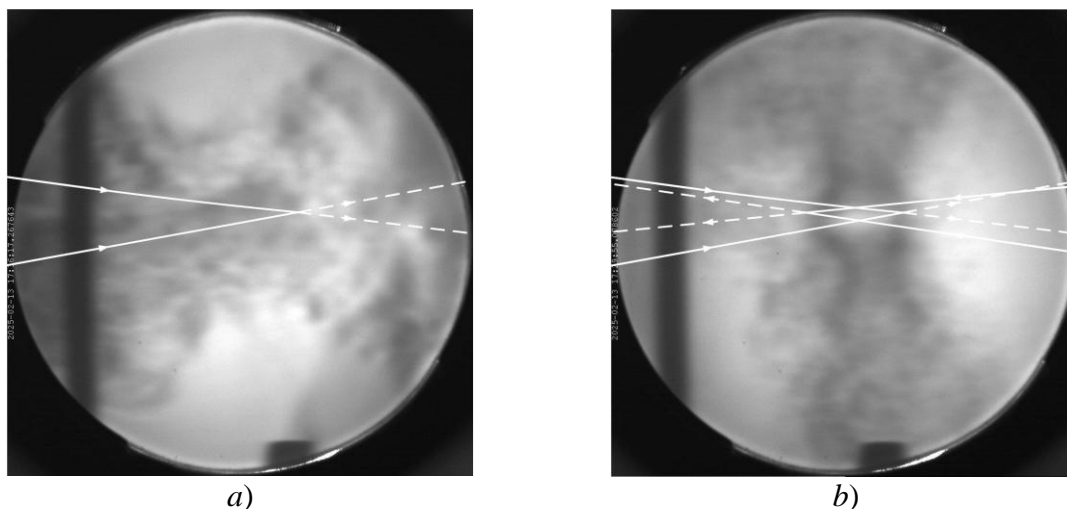


Рис. 2. Кадры скоростной теневой съёмки (1000 к/с) потоков, генерируемых ИПОР. (а) Случай одного луча; (б) случай двух лучей, пересекающихся в зоне ИПОР. Частота повторения импульсов  $f_p = 20$  кГц, длительность импульсов 100 нс, энергия в импульсе 0.4 мДж (а), 0.8 мДж (б). Размер кадров 2.74x2.74 мм.

С помощью ФЭУ измерены пульсации интегрального излучения плазмы в пересекающихся лучах. Осциллограммы пульсаций яркости плазмы в пересекающихся лучах представлены на рис. 3. Нестабильность пульсаций составила около 10%. При учёте скажкости, равной 3.14 для частоты повторения импульсов  $f_p = 200$  кГц, яркость в импульсе в области непрерывного спектра достигает 700 мВт/(мм<sup>2</sup>·нм·ср), а в линии 230 нм достигает 1400 мВт/(мм<sup>2</sup>·нм·ср).

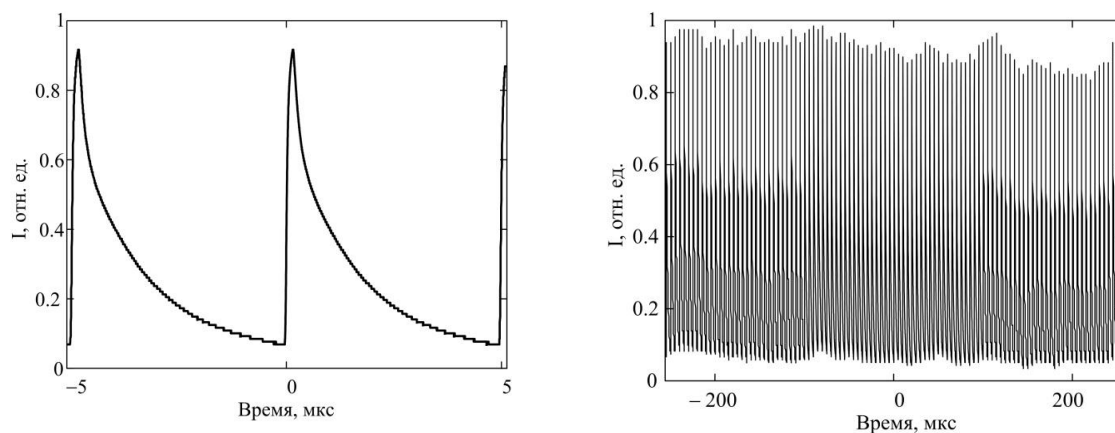


Рис. 3. Временная нестабильность яркости ИПОР в пересекающихся лучах при частоте повторения импульсов лазерного излучения  $f_p = 200$  кГц.

Как показали наблюдения, нестабильность ИПОР в схеме пересекающихся пучков связана с тем, что область инициирования разряда смещается от импульса к импульсу. С целью найти способ устранения этого источника нестабильности исследована возможность дальнейшей стабилизации ИПОР путём ввода в область разряда дополнительного сфокусированного импульсно-периодического излучения высокой интенсивности.

В эксперименте (рис. 1) два лазерных луча от источника YLPN-1-100-200-R фокусировались в разрядном объёме лампы с использованием линз с фокусным расстоянием

$f = 50$  мм. В область пересечения их перетяжек вводился третий – стабилизирующий – луч импульсного волоконного лазера YLPP-1-150V-30 с  $\lambda = 1.064$  мкм, сфокусированного линзой  $f = 50$  мм. Стабилизирующее излучение подавалось с частотой  $f_p = 71$  кГц при средней мощности 30 Вт. Длительность импульса составляла 5 нс, что при энергии 0.42 мДж обеспечивало пиковую мощность более 84 кВт. Этого значения оказалось достаточно для надёжного инициирования пробоя в каждом импульсе. Фотография плазмы ИПОР в трехлучевой схеме представлена на рис. 4.

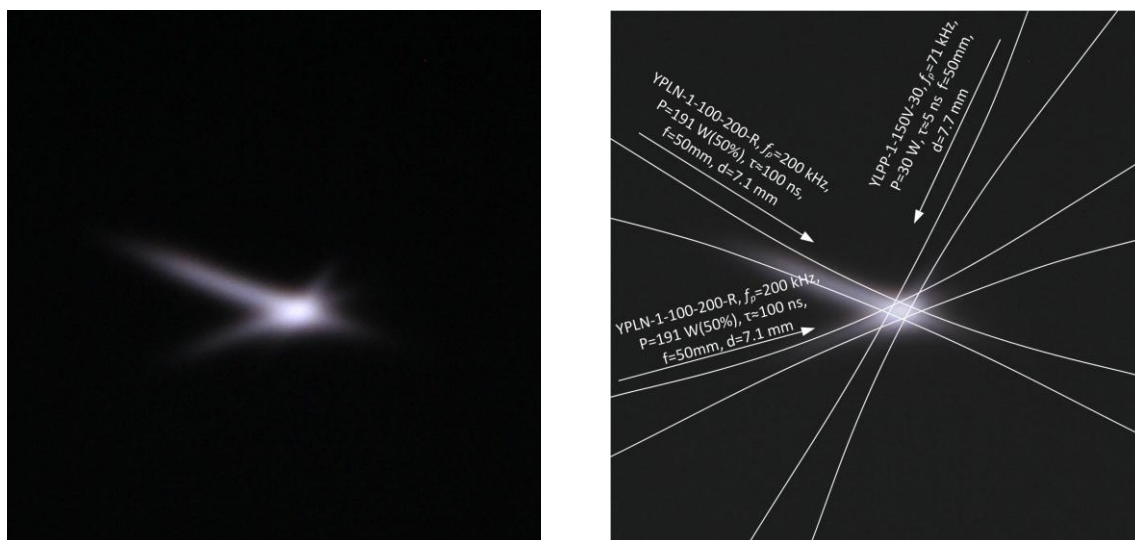


Рис. 4. Фотография ИПОР в двух скрещенных под углом  $53^\circ$  лучах с введённым лучом стабилизирующего лазера. Границы лучей обозначены условными белыми линиями.

Ввод стабилизирующего излучения привёл к существенному повышению устойчивости ИПОР. Дополнительный сфокусированный лазерный луч обеспечивал формирование затравочной плазмы в определенной части разрядной области, что, в свою очередь, способствовало устойчивости пробоя в импульсах основного излучения. Подобная схема продемонстрировала эффективность как в конфигурации с одним лучом, так и в случае двух пересекающихся.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500440-9) с использованием оборудования, полученного по программе обновления приборной базы Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райзер Ю.П. О возможности создания светового плазмотрона и необходимой для этого мощности. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. В. 3. С. 195-199.
2. Генералов Н.А., Зимаков В.П., Козлов Г.И., Масюков В.А., Райзер Ю.П. Непрерывно горящий оптический разряд // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т.11. В. 9. С. 447-449.
3. Bezel I. et al. High power laser-sustained plasma lightsources for KLA-Tencor broadband inspection tools, in: 2015 Conf, Lasers Electro-Opt, CLEO, 2015, pp. 1–2, [https://doi.org/10.1364/CLEO\\_AT.2015.ATu4M.2](https://doi.org/10.1364/CLEO_AT.2015.ATu4M.2).
4. Androsenko V. N., Kotov M. A., Solovyov N. G., Shemyakin A. N., Yakimov M. Yu. Gas flows generated by pulse-periodic optical breakdown and quiet optical discharge // Physics of Fluids. 2024. Vol. 36. 104112.

Андросенко Владислав Николаевич, androsenko@ipmnet.ru  
Котов Михаил Алтаевич, kotov@ipmnet.ru  
Соловьев Николай Германович, solovyov@lantanlaser.ru  
Торчик Марина Васильевна, mari.torchick@ipmnet.ru  
Шемякин Андрей Николаевич, shemyakin@lantanlaser.ru  
Якимов Михаил Юрьевич, yakimov@lantanlaser.ru



## ОСОБЕННОСТИ ПРОХОЖДЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ПЕСКЕ

*А.Т. Ахметов<sup>1,\*</sup>, И.К. Гималтдинов<sup>1</sup>, А.Ф. Мухаметзянов<sup>1</sup>, Р.Ф. Гизатуллин<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа*

*<sup>2</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа*

*alfir@anrb.ru*

### ВВЕДЕНИЕ

Любые волны механического происхождения (ударные, акустические, цуги), особенно высокочастотные, хорошо поглощаются в песчаных средах. Но возможна ситуация, когда амплитуда волны увеличивается и проходит в толщу песка с усилением. Такие парадоксальные процессы возникают, к примеру, в ударных трубах. Не менее удивительны эффекты, возникающие при распространении ударно-волновых импульсов во влажных песках. Использовалась вертикальная ударная труба (УТ) с секцией насыпных сред (СНС). После разрыва диафрагмы в УТ формируется ударно-волновой импульс (УВИ), который распространяется вниз и отражается от поверхности песка с удвоением амплитуды. Более 99% её интенсивности отражается и распространяется вверх, далее она отражается от верхнего торца ударной трубы, переотраженная волна повторно взаимодействует с поверхностью песка. В небольшом слое песка высокочастотные компоненты, возникающие при отражениях, сглаживаются. При отражении от твердой поверхности (сталь, уплотненный песок) крутизна фронта импульса кратно возрастает, амплитуда шумов существенно возрастает на собственных частотах датчика.

Пьезоэлектрические датчики типа ЛХ-610 (собственная частота 20 кГц) расположены на боковых стенках трубы в соответствии со схемой установки, приведенной на рис. 1 а. Насыпная среда состояла из уплотненного газоводонасыщенного песка (пористость 39,2 %), концентрация водной фазы определялась как отношение объема воды к объему пор в процентах. Водонасыщение при малых концентрациях осуществлялось при помощи пульверизатора, песок предварительно просушивался в вакуумном шкафу, масса песка составляла 880 г.

Было обнаружено, что форма переотраженного импульса при распространении в песке существенно отличается от формы основного [1], его скорость вдвое меньше скорости основного импульса, амплитуда пика в 1,5 раза выше, при прохождении в песке он намного меньше поглощается, по сравнению с основным (рис 1 б). Эти изменения обусловлены структурными преобразованиями в уплотненной песчаной насыпке, произошедшими при воздействии основного УВИ. То есть, переотраженный импульс как-бы выполняет роль зондирующего УВИ. Следующие друг за другом основной и переотраженные УВИ (13 мс) образуют последовательность импульсов, но наиболее существенные изменения наблюдаются на первом из них.

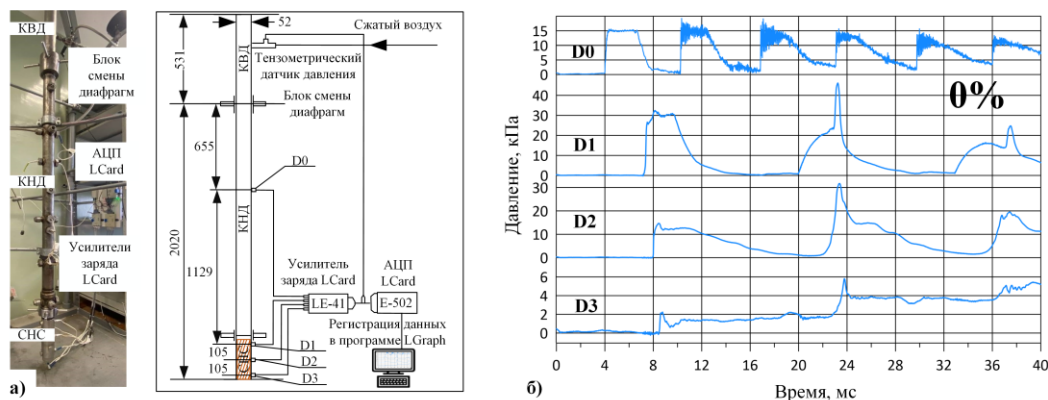


Рис. 1. Схема ударной трубы (а). Эпюры давления ударно-волновых импульсов в воздухе (D0) и на трех уровнях (D1, D2, D3) в сухом песке (б)

Наличие воды в насыпной среде существенно влияет на характеристики УВИ, распространяющегося в песке. Даже небольшое содержание воды в количестве 2% существенно влияет на формирование зондирующего УВИ, усиленный пик не формируется, но зондирующий импульс поглощается слабее основного. На датчике D3 не формируются пики, импульсы доходят в виде «ступенек», на которых генерируются высокочастотные колебания 3 кГц.

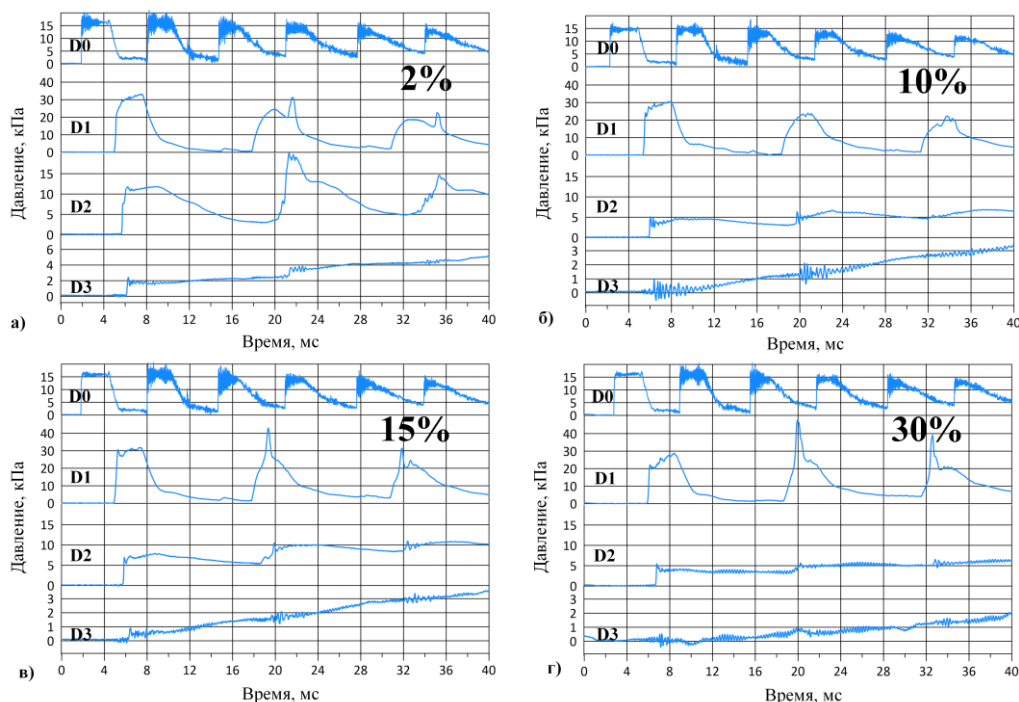


Рис. 2. Эпюры давления ударно-волновых импульсов в воздухе (D0) и на трех уровнях в песке (D1, D2, D3) при водосодержаниях 2% - 30%.

При концентрации воды 10 %, зондирующий импульс на глубине 2 см (датчик D1) мало отличается от основного, а на уровне датчиков D2 и D3 обнаруживаются только высокочастотные колебания в виде цугов с частотой 3 кГц, амплитуды которых, весьма неожиданно, возрастают на нижнем датчике (рис 2). При водосодержании 15 % у зондирующего УВИ формируется «пузырьковый» пик, и он лучше проходит до датчика D2, но на нижний датчик доходят лишь цуги с небольшой амплитудой колебаний с частотой порядка 4-5 кГц. Пик зондирующего импульса возрастает при содержании воды 30%, но с глубиной поглощается, на следующих датчиках мы обнаруживаем лишь звон частотой

4 кГц, хотя основной УВИ дает небольшую «ступеньку». От 10% до 30% УВИ создают высокочастотные колебания, генерируемые не только во время действия импульсов, но и между ними.

Максимальный «пузырьковый» импульс возникает при 60% водосодержании, основной и зондирующие УВИ практически полностью поглощаются, но генерируют колебания малой амплитуды на частоте 4 кГц которые, как и в предыдущих случаях, существуют как во время действия импульсов, так и между ними (рис 3). Амплитуда основного импульса на датчике D1 усиливается втрое при 70% водосодержания по сравнению с его значением на датчике D0. Пузырьковый пик не формируется, импульсы хорошо проходят до среднего датчика без высокочастотных колебаний, до нижнего датчика - в виде ступенек с высокочастотными колебаниями 2,6 кГц, фон – 6 кГц. При 80% водосодержании поглощение выше, чем при 70%, до нижнего датчика доходят лишь цуги с более низкой частотой 2 кГц. При 100% водонасыщении основной и зондирующий импульсы несущественно отличаются друг от друга, проходят в виде ступенек и на нижнем датчике генерируются высокочастотные колебания частотой 4 кГц.

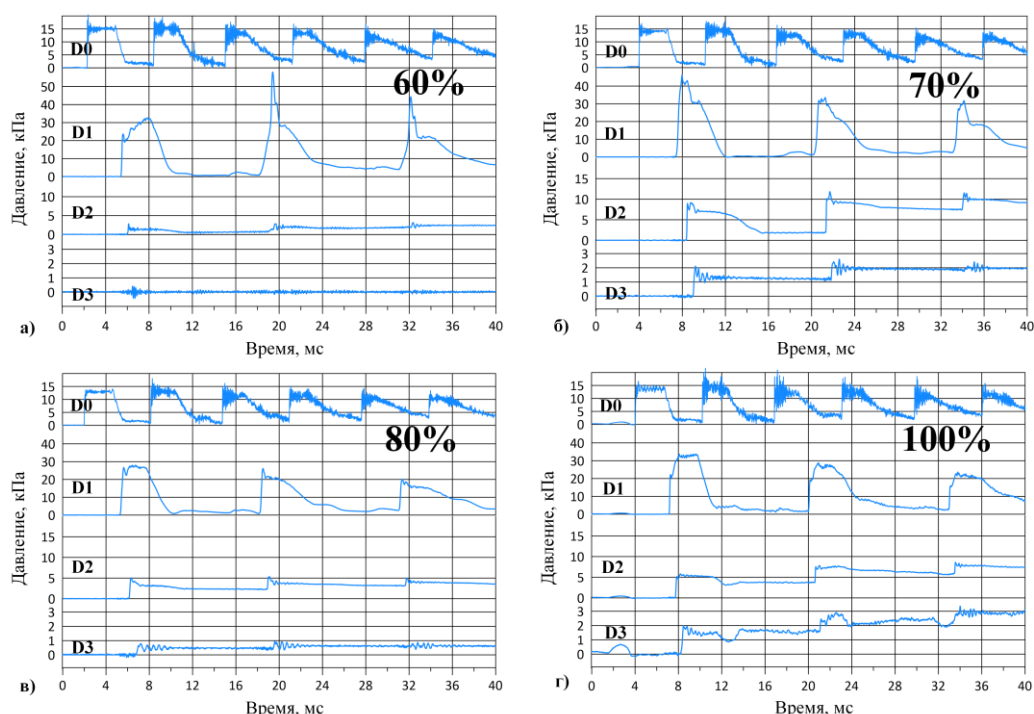


Рис. 3. Эпюры давления ударно-волновых импульсов в воздухе (D0) и на трех уровнях в песке (D1, D2, D3) при водосодержаниях 60% - 100%.

Скорость основного импульса с увеличением концентрации воды изменялась не-монотонно в пределах от 120 до 230 м/с, с минимальным значением при 80%, а скорость зондирующего импульса монотонно росла от 60 до 180 м/с.

В водогазосодержащей песчаной насыпной среде при воздействии следующих друг за другом (13 мс) УВИ формируется пузырьковый пик зондирующих импульсов в диапазоне от 15% до 60%, генерируются высокочастотные колебания от 2 до 5 кГц в нижних слоях песка, как в виде цугов, так и виде непрерывных колебаний во всем диапазоне водосодержания. Обнаруживается утроение основного УВИ с искажением формы при 70% водосодержании. Генерация высокочастотных колебаний и образование «пузырькового» пика обусловлено формирующимися кластерами пузырьков при хорошем смачивании песчинок водой.



## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00274, <https://rscf.ru/project/24-11-00274/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметов А.Т., Гималтдинов И.К., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф., Богданов Д.Р. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48. № 1. С. 23-26.

Ахметов Альфир Тимирзянович, [alfir@anrb](mailto:alfir@anrb)  
Гималтдинов Ильяс Кадирович, [iljas\\_g@mail.ru](mailto:iljas_g@mail.ru)  
Мухаметзянов Артур Фанилевич, [tuargya@mail.ru](mailto:tuargya@mail.ru)  
Гизатуллин Ренат Фаргатович, [giz-renat@yandex.ru](mailto:giz-renat@yandex.ru)



## ОТКЛИК ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ НА РАСПРЕДЕЛЕННОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

*Д.А. Ашуров*

*Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва  
[ashurovda@my.msu.ru](mailto:ashurovda@my.msu.ru)*

Ключевая особенность начального участка затопленных струй – тонкий сдвиговый слой. Чувствительность этого слоя к возмущениям открывает возможности для активного управления течением. В данной работе исследуется отклик ламинарной затопленной струи на распределенное гармоническое воздействие.

Эволюцию бесконечно малых возмущений на фоне основного течения описывают линеаризованные уравнения Навье-Стокса:  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}$ , с учетом условия несжимаемости  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , где  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  – возмущение скорости, а  $p$  – возмущение давления[1]. Для изучения отклика основного течения на внешнее воздействие эти уравнения можно записать в следующем виде:  $Bq_t = Aq + q^f$ , где  $q = (u, v, w, p)$ . Максимальный отклик системы на гармоническое воздействие с частотой  $\omega$

в данном случае можно определить как  $R(\omega) = \max_{q^f} \frac{|(A - i\omega B)^{-1} q^f|}{|q^f|} = |(A - i\omega B)^{-1}|_2$ [2].

Предположим, что струя круглая и её профиль скорости не развивается вниз по потоку, тогда основной профиль скорости не зависит от координаты вдоль оси струи и угла и мы можем искать решения в виде  $(u, v, w, p) = (F, G, H, P)e^{i(\alpha x + m\theta)}$ . В этом случае мы будем получать максимальный отклик для каждой из гармоник. Переписывая уравнения и определение максимального отклика после такой подстановки получим, что максимальный отклик гармоники  $(\alpha, m)$  определяется следующим образом –  $R(\omega)_{\alpha, m} = |(A(\alpha, m) - i\omega B(\alpha, m))|_2$ [3]. В такой формулировке мы можем найти максимальный отклик при помощи сингулярного разложения, он будет численно равен наибольшему сингулярному числу матрицы  $(A(\alpha, m) - i\omega B(\alpha, m))$ .

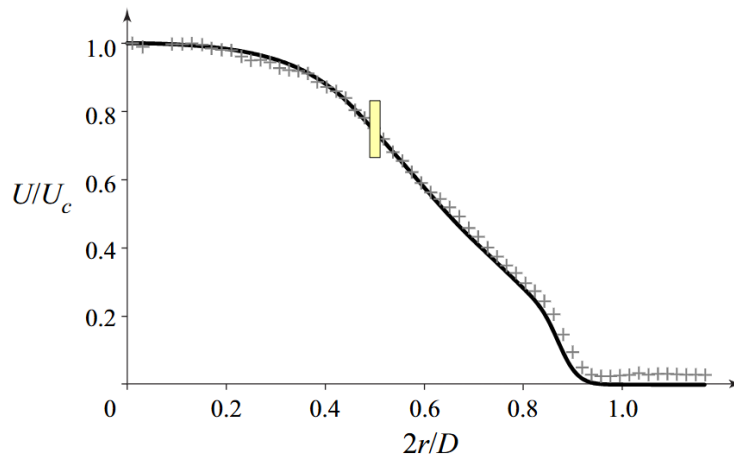


Рис. 1. Экспериментально измеренный профиль струи, который использовался в расчетах отклика.

В результате проведенных расчетов получены кривые откликов каждой из гармоник  $(\alpha, m)$  на внешнее гармоническое воздействие. Для большинства рассчитанных значений частота наиболее энергичного отклика соответствовала частоте наименее устойчивой собственной моды. Анализ показал, что при уменьшении  $\alpha$  спектр отклика системы становится более узкополосным: полоса частот, где наблюдается значительное усиление ( $R \geq 10$ ), сужается, однако в её пределах резонансные пики становятся более выраженными, что приводит к росту среднего значения отклика в этой области. Проведенное параметрическое исследование ( $0 \leq \alpha \leq 11$ ,  $m = 0, \dots, 6$ ) показало, что истинные резонансы системы остаются доминирующими: ни в одном из случаев псевдорезонансный отклик не превзошел их по амплитуде. Так же во всех исследованных случаях обнаружен низкочастотный резонанс, обусловленный взаимодействием со сплошным спектром.

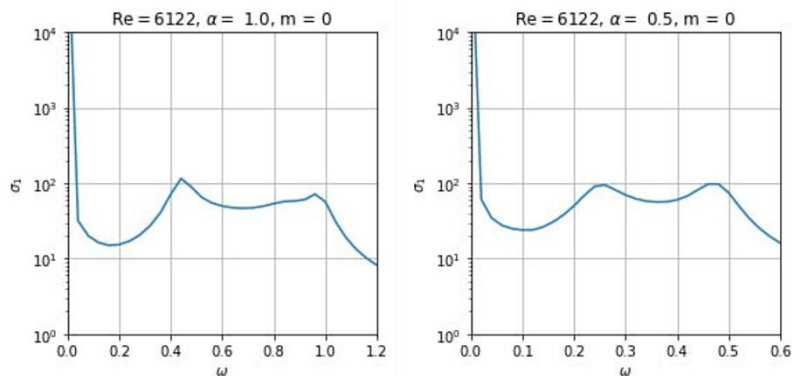


Рис. 2. Зависимость отклика от частоты для осесимметричных гармоник при  $\alpha = 1, 0.5$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 25-19-00278.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.
2. Schmid P. J., Henningson D. S. Stability and transition in shear flows. – Springer Science & Business Media, 2012. – Т. 142.

3. Schmid P. J. Nonmodal stability theory // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2007. – Т. 39. – №. 1. – С. 129-162.

Ашуров Денис Абдулвагабович, ashurovda@my.msu.ru



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СТАИ РЫБ ОДИНОЧНЫМ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ

В.Г. Байдулов

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*baydulov@gmail.com*

Рассматривается обратная задача определения положения группы источников по известному волновому полю внутренних волн, как в глубине жидкости, так и на поверхности. Обсуждается вопрос определения условий замены группы единственным движущимся источником. При движении источника с постоянной скоростью поле течения движется вместе с источником и стационарно в системе координат связанной с источником. При движении источника на поверхности жидкости такие волны называются корабельными. Экспериментально движение источника в однородно стратифицированной жидкости исследовалось в работе [1]. В серии теоретических работ ряда авторов [2–4] была построена асимптотическое решение задачи, в том числе и в случае источника, движущегося под углом к горизонту.

*Теоретическая модель.* Рассматривается наиболее типичное горизонтальное движение тела с постоянной скоростью  $\mathbf{v}_0$  в неограниченной экспоненциально стратифицированной жидкости ( $\rho = \rho_0 \exp(-bz) + \rho'(\mathbf{r}, t)$ ,  $bg = N^2$ ,  $N$  – частота плавучести). В качестве модели выбрана модель идеальной жидкости в приближении Буссинеска. Основным безразмерным параметром является число Фруда  $Fr = v_0 / Nh$ , где  $h$  – размер тела (Ниже используется параметр обратный числу Фруда  $a = 1 / Fr$ ). Движущееся тело моделируется массовым источником  $m(\mathbf{r}, t) = m_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t)$ .

Для источника, движущегося с постоянной скоростью, поле течения оказывается стационарным в системе координат, связанной с источником. Асимптотическое решение задачи [3] на больших расстояниях дает выражение для вертикального смещения частиц жидкости в системе координат источника

$$z \sim \frac{N}{2\rho U^2} \frac{xz}{r^2 r_\perp} (x^2 y^2 + r_\perp^4)^{1/2} \cos \left[ a \frac{|z|}{r_\perp} r \right] \quad (1)$$

где  $r_\perp^2 = y^2 + z^2$ ,  $r^2 = x^2 + r_\perp^2$  – координаты точки наблюдения в системе отсчета  $(x, y, z)$ , связанной с источником,  $H(x)$  – функция Хевисайда.

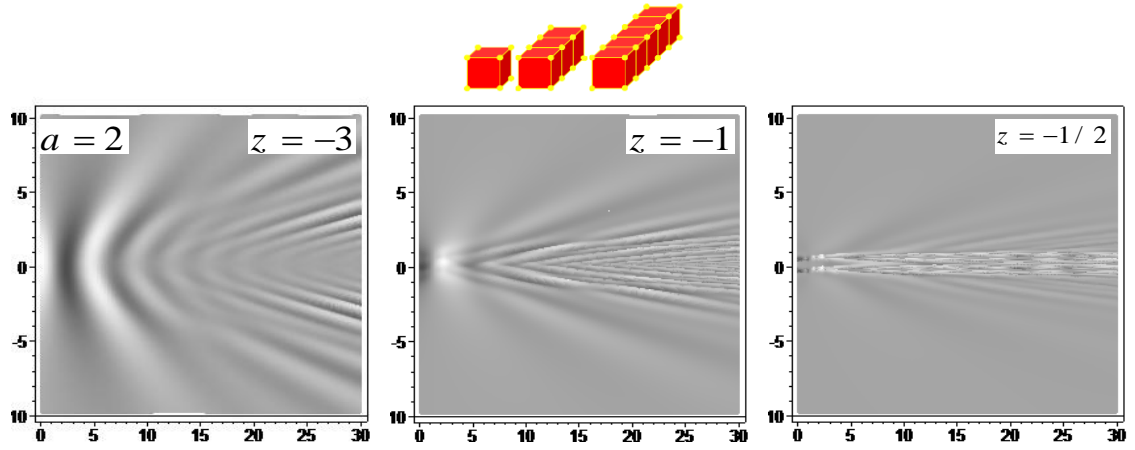


Рис. 1

Горизонтальные сечения поля вертикальных отклонений на разных расстояниях от источника приведены на Рис. 1. Были рассчитаны картины, порождаемые группой источников состоящих из набора кубов, в вершинах которых были расположены источники. Число кубов выстроенных в линию, параллельную линии движения источников, варьировалось, варьировался также и размер каждой ячейки. Результаты расчетов показали, что при удалении от источника на несколько характерных длин (2–3) линейная суперпозиция поля группы источников может быть заменена единственным источником, интенсивность которого равна суммарной интенсивности источников одного куба. При этом горизонтальная протяженность группы источников слабо влияет на асимптотику волнового поля.

Выражение для вертикальных смещений частиц жидкости позволяет рассчитать положение движущегося источника. Пусть существует возможность измерять вертикальные смещения в горизонтальной плоскости, над которой двигается источник и по данным измерений требуется определить его положение и скорость. Пусть распределенные средства измерения (датчики солёности) расположены вдоль параллельных прямых (рис. 2). Вдали от источника линии равного уровня вертикальных смещений близки к прямым (аналитически это лучше всего видно на примере нулей вертикального смещения). Тогда скорость движения источника определяется по данным измерений в четырех точках, каждая пара которых фиксирует соседние нули волны. Учитывая, что волновая картина неподвижна в системе координат источника, а относительно лабораторной системы движется с постоянной скоростью, получаем (Рис. 2, слева)

$$\dot{y}_1^1 = v_y + k_1 v_x, \dot{y}_1^2 = v_y + k_2 v_x, k_i = \frac{Dy^i}{Dx} = \frac{1}{x_2} (y_1^i - y_2^i)$$

Откуда окончательно имеем:  $v_x = \frac{\dot{y}_1^1 - \dot{y}_1^2}{k_1 - k_2}$ ,  $v_y = \frac{k_2 \dot{y}_1^1 - k_1 \dot{y}_1^2}{k_2 - k_1}$ .

Чтобы определить положение источника выберем систему отсчета  $(X, Y, Z)$ , движущуюся вместе с источником (Рис. 2, фиолетовая система координат). Пусть в момент измерения начала подвижной и связанной с датчиками лабораторной (зеленый цвет) систем координат, совпадают. Лабораторная система координат при этом повернута на угол  $\alpha$ . При этом координаты источника и точки наблюдения имеют значения  $(X_0, Y_0, Z_0)$  и  $(x_m + X_0, y_m + Y_0, z + Z_0)$ . Обращая внимание, что нули вертикального смещения определяется нулями косинуса, входящего в выражение (1) для первого и второго нуля, положения которых определяются выражениями

$$\frac{z}{r_{\perp,1}} r_1 = \frac{p}{2a} \text{ и } \frac{z}{r_{\perp,2}} r_2 = 3 \frac{p}{2a}$$

т.е. в точках с координатами  $(x, y, z)$ , которые связаны соотношением

$$kx = \sqrt{y^2 + z^2},$$

где  $k^{-1} = \sqrt{\frac{p^2}{4a^2 z^2} (2n-1)^2 - 1}$  ( $n$  – номер нуля  $z$ ), вертикальное смещение частиц жидкости обращается в нуль. Зависимости  $x(y)$  уже достаточно близко от источника становятся близкой к прямому виду  $y = kx$ . Для двух соседних нулей  $z$  порядков  $n$  и  $n+1$  эти прямые пересекаются в месте расположения источника, что позволяет определить связь между горизонтальными координатами источника  $(X_0, Y_0)$ , номером нуля и глубиной погружения источника  $Z_0$ . Таким образом, общее число неизвестных оказывается равным четырем, что позволяет решить задачу определения положения источника по данным измерения нулей вертикального смещения жидкости в четырех точках, расположенных в горизонтальной плоскости.

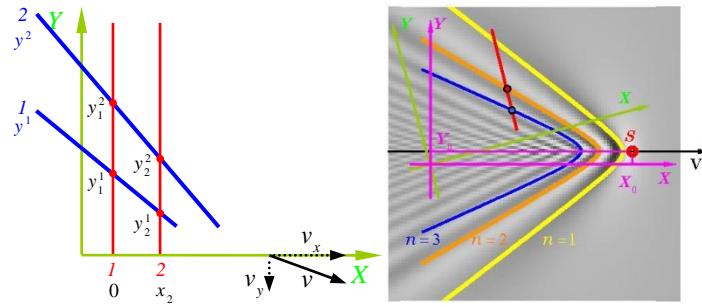


Рис. 2. Линии нулей вертикального смещения жидкости в системе координат источника на фоне данных численного моделирования полученных для двух разных значений вертикального положения источника от плоскости расположения датчиков.

Обозначая координаты нулей вертикального смещения порядков  $m = n$  и  $n+1$ , через  $(x_m, y_m, Z_0)$  и определяя коэффициенты наклона прямых как  $k_m = DY_m / DX_m$ , приходим к выражениям

$$X_0 = \frac{k_n k_{n+1} (Y_{n+1}^i - Y_n^i) + k_{n+1} X_n^i - k_n X_{n+1}^i}{k_{n+1} - k_n}, Y_0 = \frac{k_{n+1} Y_{n+1}^i - k_n Y_n^i + X_n^i - X_{n+1}^i}{k_{n+1} - k_n}$$

$$Z_0 = Z - \frac{p/a}{b_{n+1} - b_n}, n = \frac{1}{2} \frac{b_{n+1} + b_n}{b_{n+1} - b_n}, b_n^2 = k_n^2 + 1$$

Результаты аналитических расчетов подтверждаются совпадением с данными численного моделирования задачи о волновом поле, порождаемом локализованным движущимся источником в стратифицированной жидкости, приведенными на рис. 2.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 24-61-00025 (<https://rscf.ru/project/24-61-00025/>).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д. Вихревые системы спутного стратифицированного течения за сферой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 82–90.
2. Voisin B. Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 1. Green's function and point sources // J. Fluid Mech. 1991. V. 231. P. 439–480.
3. Voisin B. Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 2. Moving point sources // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 333–374.
4. Scase M.M., Dalziel S.B. Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2004. V. 498. P. 289–313.
5. Байдулов В.Г. О задаче определения положения источника внутренних волн // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 36–44.

Байдулов Василий Геннадьевич, baydulov@gmail.com



## О РЕАЛИЗАЦИИ УСЛОВИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПЛЕНКОЙ ПАВ

*Д.Ф. Белоножко*

*Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, Ярославль  
belonozhko@mail.ru*

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, пленка поверхностно-активного вещества (ПАВ) оказывает демпфирующее действие на капиллярно-гравитационные волны, распространяющиеся по поверхности вязкой жидкости. Это влияние не монотонно. С увеличением модуля упругости пленки декремент волнового движения заданной длины волны растёт и достигает максимума. При дальнейшем увеличении упругости декремент монотонно уменьшается и в бесконечном пределе приближается примерно к половине своего максимального значения. Декремента максимален, когда совпадают частоты капиллярно-гравитационных волн и волн Марангони, вызванных волновым перераспределением поверхностной концентрации ПАВ [1].

Если же вязкая жидкость находится в вибрационном поле, то для каждой частоты вибрации имеется своё пороговое значение амплитуды вибрации, выше которого на поверхности жидкости появляется известная периодическая структура – рябь Фарадея [2–4]. В связи с описанной способностью ПАВ влиять на свободное волновое движение, естественно предположить, что и в вибрационном поле будет наблюдаться немонотонное влияние упругости плёнки на величину порогового значения амплитуды вибраций, обеспечивающего появление ряби Фарадея. Проверке этой гипотезы и посвящена настоящая работа.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Задача решалась в декартовой системе координат  $Oxyz$ , в которой вязкая несжимаемая жидкость плотности  $\rho$  и кинематической вязкости  $\nu$  заполняет полупространство  $z < 0$ . Учитывалось действие направленного вниз поля тяжести  $\mathbf{g}$ . Считалось, что по сво-

бодной поверхности жидкости равномерно распределено ПАВ с поверхностной плотностью  $\Gamma_0$ . Исследовалась устойчивость периодического волнового возмущения с амплитудой  $a$  и волновым числом  $k$ , распространяющегося по свободной поверхности жидкости в положительном направлении оси  $Ox$ . В процессе искажения поверхности происходит перераспределение ПАВ. Его поверхностная концентрация оказывается функцией времени и горизонтальной координаты  $\Gamma = \Gamma(t, x)$ . Локальные изменения в концентрации вызывают локальные изменения величины коэффициента поверхностного натяжения  $\gamma$ . В качестве модели зависимости  $\gamma = \gamma(\Gamma)$  принималось, что изменение локального значения концентрации ПАВ мгновенно сказывается на локальном значении коэффициента поверхностного натяжения в соответствии с изотермой  $\gamma = \gamma(\Gamma)$ , считающейся известной. Поле скоростей жидкости удовлетворяет системе уравнений вязкой несжимаемой жидкости с соответствующими граничными условиями:

$$z < \xi: \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}; \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad \mathbf{U} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_z \quad (1)$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = v; \quad p - 2\rho\nu(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) - \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (2)$$

$$-\rho\nu[(\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + (\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U})] + \nabla_s \gamma = 0; \quad (3)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  - орты осей;  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  - орты внешней нормали и касательной к возмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости  $z = \xi \equiv \xi(t, x, z)$ .

**ПРИНЦИП РАСЧЕТА.** Решение задачи осуществлялось в линейном приближении по малому параметру, равному отношению амплитуды волнового возмущения к длине волны в безразмерных переменных, в которых  $\rho = g = \gamma = 1$ . Следуя известной методике [5], составлялось уравнение границы зон устойчивости системы по отношению к параметрической раскачке на плоскости параметров  $(\Omega^2, q)$ . Расчеты ограничивались рассмотрением границ первой и второй зон, описываемых уравнением:

$$\begin{vmatrix} M_{-3} & -q & 0 & 0 \\ -q & M_{-1} & -q & 0 \\ 0 & -q & M_1 & -q \\ 0 & 0 & -q & M_3 \end{vmatrix} = 0; \quad M_n = \left( \Omega^2 - \frac{n^2(n^2 - 4in\delta + 4\delta^2 Q_n + \Pi(1 + Q_n))}{n^2 + \Pi Q_n} \right);$$

$$\Omega^2 = \frac{k(1+k^2)}{\omega^2}; \quad Q_n = \sqrt{1 + \frac{in}{\delta}} - 1; \quad \delta = \frac{\nu k^2}{\omega}; \quad q = 2ak; \quad \omega = \sqrt{k(1+k^2)}.$$

Безразмерный параметр  $\Omega$  равен отношению собственной частоты капиллярно-гравитационных волн на поверхности невязкой жидкости к половине частоты колебаний контейнера. Безразмерный параметр  $\Pi$  количественно характеризует упругость плёнки ПАВ, измеренную в единицах своего характерного масштаба равного  $k^3/(\rho \omega^2)$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты показали, что для заданной частоты вибрационного поля максимальное пороговое значение амплитуды, необходимое для возникновения ряби Фарадея наблюдается при тех же значениях упругости плёнки ПАВ, при которых максимально демпфируются волны с частотой, равной половине частоты вибрационного поля. При этом по-

роговое значение увеличивается на порядок по сравнению с жидкостью без ПАВ. Полученный результат подтверждает резонансный характер природы взаимодействия капиллярно-гравитационных волн и волн Марангони.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ролдугин В. И. Физикохимия поверхности: Учебник-монография. 2011 Долгопрудный. Изд. Дом «Интеллект». – 568 с.
2. Faraday M. XVII. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces //Philosophical transactions of the Royal Society of London. – 1831. – №. 121. – P. 299-340.
3. T. B. Benjamin, F. Ursell The Stability of the Plane Free Surface of a Liquid in Vertical Motion //Proc. Roy. Soc. A. 1954. V.225, No4, P. 505-515
4. Kumar K. Linear theory of Faraday instability in viscous liquids //Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1996. – T. 452. – №. 1948. – P. 1113-1126.
5. Белоношко Д. Ф. О Пороговом значении амплитуды вертикальных вибраций, вызывающих рябь Фарадея на заряженной поверхности вязкой жидкости// Известия РАН. Серия Физическая, 2024, том 88, № 1, с. 146–151.

Белоношко Дмитрий Федорович, belonozhko@mail.ru



### ИССЛЕДОВАНИЯ ВАКУУМНОГО ЗАХВАТНОГО УСТРОЙСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМОГО В РОБОТАХ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ РАБОТЕ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

Б.Ф. Бельченко, М.М. Князьков, Г.Н. Нагайцев\*, П.П. Остриков, Е.А. Семенов,  
А.Н. Суханов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
nagajcev@ipmnet.ru

Надежность сцепления вакуумных захватных устройств, используемых на роботах вертикального перемещения, является одним из важнейших критериев функционирования таких роботов на вертикальных поверхностях объектов морского базирования. Выполнение работ по обслуживанию вертикальных поверхностей различными типами роботов часто производится в сложных условиях и связано с постоянными динамическими воздействиями на роботов, возникающими от волн (см. Рис.1) и ветра (см. Рис.2).

Надежность сцепления тем более важна при использовании на подобных роботах вакуумных захватных устройств, где в качестве генератора вакуума используется воздушный эжектор. Время их фиксации на поверхности перемещения в водной и смешанной средах значительно возрастает в связи с тем, что из области вакуумирования захватного устройства необходимо удалить не только воздух, но и воду. Скорость истечения водо-воздушной смеси из области вакуумирования под присоской значительно замедляет процесс установления заданного значения разрежения. Одним из способов решения данной проблемы является использование вакуумных мембранных насосов в качестве генераторов вакуума при использовании роботов под водой или на границе сред. Однако уровень разрежения под присоской при перемещении робота в воздушной среде при использовании таких насосов будет недостаточным для удержания его на вертикальных

поверхностях. Возможно использование комбинированной системы генерации вакуума в захватных устройствах, на воздухе воздушный эжектор, а под водой и на границе сред мембранный насос, однако в этом случае система будет сложной, более энергоемкой и занимать большое количества места на борту робота, что снизит его грузоподъемность, компактность и общую эффективность его использования.



*Рис. 1. PTK, TAS GLOBAL для подводной очистки корпусов судов.*



*Рис. 2. PTK, Envirobot на корпусе судна.*

Поэтому в ходе исследования проверялась гипотеза о том, что если подавать колебания с определенной частотой на захватное устройство, то они могли бы способствовать увеличению скорости фиксации с поверхностью вакуумных захватных устройств, использующих в составе воздушный эжектор. Для проведения эксперимента был разработан стенд, на котором реализована возможность подавать колебания на захватное устройство с заданной частотой и амплитудой (см. Рис.3).



*Рис. 3. Испытательный стенд*

Стенд представляет собой жесткую раму, собранную из алюминиевого профиля. В его верхней части располагается следящий пневмопривод. С помощью него можно задавать длину (амплитуду) перемещения штока, который передает колебания на захватное

устройство, расположенное в нижней части стенда и представляющего из себя вакуумную присоску с гофрой диаметром 100 мм. В процессе экспериментов испытательный стенд погружался в бассейн на глубину до 2 м (см. Рис. 4).

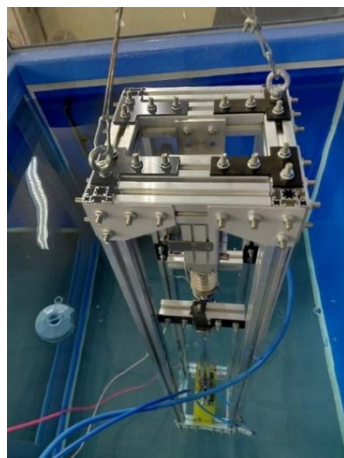


Рис. 4. Испытательный стенд внутри бассейна

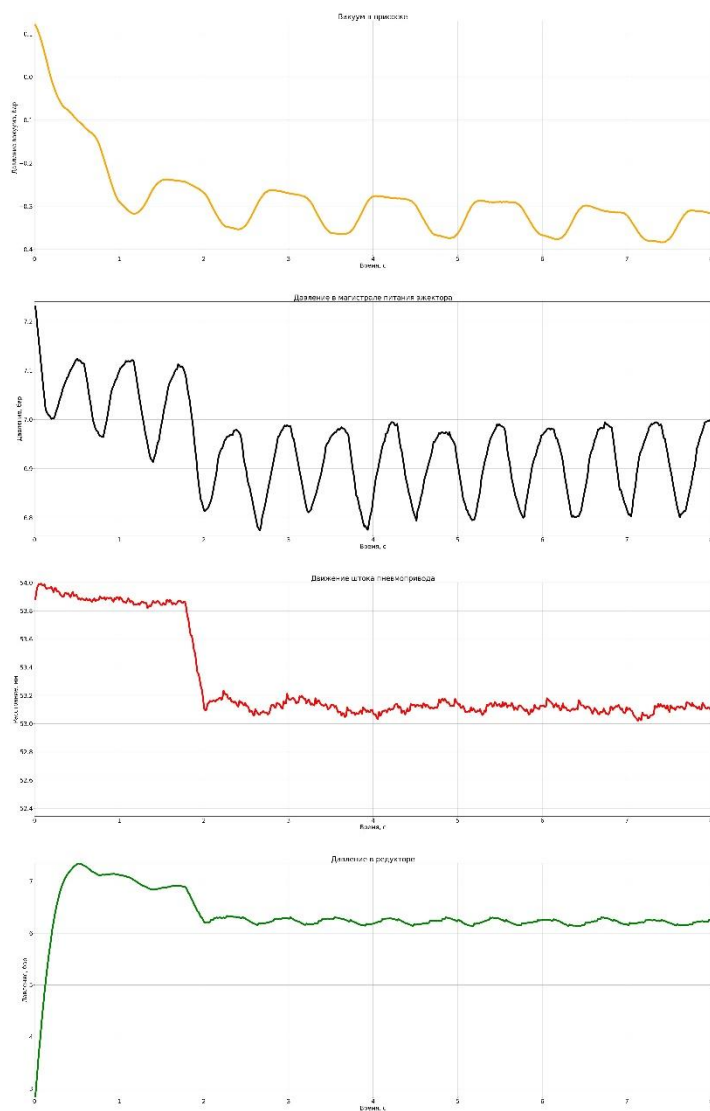


Рис. 5. Пример визуализации данных со всех датчиков

В рамках работы были произведены тестовые запуски системы, стенд опускался на глубину 1,5 метра под воду, и в момент начала образования вакуума в присоске к ней прикладывались нормальные знакопеременные усилия с попыткой оторвать ее, но с ограниченной амплитудой, чтобы происходила лишь деформация присоски.

Пример визуализации полного набора данных: уровень вакуума в присоске, питающее давление всей системы, перемещение штока пневмоцилиндра и питающее давление эжектора (см. Рис. 5).

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 23-11-00067 (Вакуумные захватные устройства для роботов, эксплуатируемых в воздушной, жидкой и пограничной средах).

Бельченко Филипп Михайлович, philepp@mail.ru  
Князьков Максим Михайлович, ipm\_labrobotics@mail.ru  
Нагайцев Георгий Николаевич, nagajcev@ipmnet.ru  
Павел Павлович Остриков, ostricov93@yandex.ru  
Семенов Евгений Александрович, sim1165@mail.ru  
Суханов Артем Николаевич, sukhonov-artiom@yandex.ru



## **ВЫСОКОАМПЛИТУДНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ РТУТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ БОЛЬШИХ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗКАХ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**

*Д.А. Бердюгин\*, Я.И. Листратов*

*Российский государственный университет им. Косыгина, Москва*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва*

*berdyugindaniel@gmail.com*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Исследования жидкометаллических теплоносителей имеют важную роль при проектировании перспективных энергетических устройств по типу «ТОКОМАК» [1]. Сильные магнитные поля совместно с большими тепловыми нагрузками, появление которых предполагается в термоядерных реакторах, изменяют характер гидродинамических и теплообменных процессов внутри течения жидкого металла. Одно из интересных явлений, которые необходимо учитывать при разработке теплообменников и узлов, - возникновение высоких по амплитуде низкочастотных температурных пульсаций. Их появление обусловлено совместным воздействием сил плавучести и поперечного магнитного поля [2].

### **ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ**

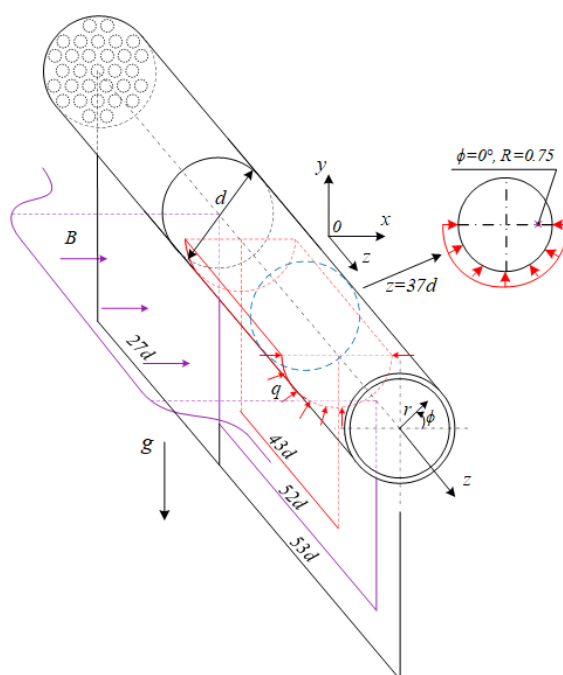
Впервые при помощи экспериментального метода [3, 4] были обнаружены anomalously высокие низкочастотные квазипериодические пульсации температуры ртути при смешанной турбулентной конвекции и воздействии поперечного магнитного поля в горизонтальной трубе, подогреваемой снизу. Эксперименты проводились в следующей в следующих режимных параметрах:  $Re = 10^4$ ,  $Gr = 3,5 \cdot 10^7$ ,  $Ha = 0 - 300$ . В отсутствие

влияния магнитного поля температурные пульсации внутри потока ртути аналогичны развитому турбулентному течению с учетом особенностей влияния смешанной конвекции. Повышение индукции магнитного поля до значения  $Ha = 100$  приводит к ламинизации потока и почти полному подавлению пульсаций. Дальнейшее увеличение до  $Ha = 300$  изменяет структуру потока таким образом, что амплитуда пульсаций резко увеличивается до высоких значений, генерируемая на уединенной частоте.

Исследование подобных эффектов экспериментальными методами ограничено возможностью создания установки, воспроизводящей реальные параметры работы ядерного реактора. Для решения таких задач используются методы численного моделирования, одним из которых является метод DNS (Direct numerical solution). Решение задачи о смешанной конвекции ртути в круглой горизонтальной трубе с наличием неоднородного обогрева в поперечном магнитном поле было показано в нескольких работах [5, 6]. Метод прямого численного моделирования позволяет получить комплексную информацию о сложной структуре потока жидкого металла в условиях воздействия больших электромагнитных сил и сил плавучести.

### МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящей работе проводится прямое численное моделирование смешанной конвекции ртути в горизонтальной трубе с нижним обогревом в поперечном магнитном поле. Отличие данного исследования от предыдущих заключается в увеличенной по длине области влияния магнитного поля [8], что меняет задачу и приводит к дополнительным эффектам, ранее необнаруженным в [3, 4]. Тестовый участок данной конфигурации представлен на рис. 1.



Математическая постановка задачи состоит из уравнений неразрывности, импульса и энергии, а также уравнения для потенциала и закона Ома. Решение проводится при использовании квазистатического приближения [5]. Свойства ртути были взяты из справочника по теплофизическим свойствам [8] при средней температуре входа и выхода экспериментальной сессии.



## РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты были сопоставлены с результатами последних экспериментов, выполненных в расширенном диапазоне режимных параметров [7], откуда и была взята конфигурация для расчётной модели. Режимные параметры были выбраны следующие:  $Re = 7000 - 15000$ ,  $Gr = 3 - 9 \cdot 10^7$ ,  $Ha = 0 - 1200$ . Помимо режимных параметров, взятых из эксперимента, область исследования были расширения до значений чисел подобия, предполагаемые в реальных теплообменных узлах blankets и divertors [9]

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Государственного задания № FSWF-2023-0017 (Соглашение № 075-03-2023-383 от 18 января 2023 г.) в сфере научной деятельности на 2023-2025 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smolentsev S.* Physical background, computations and practical issues of the magnetohydrodynamic pressure drop in a fusion liquid metal blanket // *Fluids*. – 2021. – Т. 6. – №. 3. – С. 110.
2. *Lorenzetto P. et al.* EU contribution to the procurement of blanket first wall and divertor components for ITER // *Fusion Engineering and Design*. – 2018. – Т. 136. – С. 975-982.
3. *Genin L. G. et al.* Temperature fluctuations in a heated horizontal tube affected by transverse magnetic field // *Proc. 8th PAMIR Conf. Fund. Appl. MHD, Borgo, Corsica, France*. – 2011. – Т. 37.
4. *Беляев И. А. и др.* Пульсации температуры в МГД-потоке жидкого металла в горизонтальной неоднородно обогреваемой трубе // *Теплофизика высоких температур*. – 2015. – Т. 53. – №. 5. – С. 773-781.
5. *Zikanov O., Listratov Y. I., Sviridov V. G.* Natural convection in horizontal pipe flow with a strong transverse magnetic field // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2013. – Т. 720. – С. 486-516.
6. *Listratov Y. et al.* Numerical simulations of mixed convection in liquid metal flow within a horizontal pipe with transverse magnetic field // *Fluid Dynamics Research*. – 2018. – Т. 50. – №. 5. – С. 051407.
7. *Рознин И. М.* Пульсации температуры в МГД потоке жидкого металла в горизонтальных неоднородно обогреваемых каналах // *Радиоэлектроника, электротехника и энергетика*. – 2020. – С. 815-815.
8. *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – Рипол Классик, 1963.
9. *Akhmedagayev R., Zikanov O., Listratov Y.* Magnetoconvection in a horizontal duct flow at very high Hartmann and Grashof numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2022. – Т. 931. – С. A29.

Бердюгин Даниил Александрович, berdyugindaniel@yandex.ru  
Листратов Ярослав Игоревич, yaroslav.listratov@yandex.ru



# ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ СО СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ГЕНЕРАЦИИ

*В.В. Булатов*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
internalwave@mail.ru*

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрена задача о распространении линейных внутренних гравитационных волн в слое вязкой стратифицированной среды конечной глубины с горизонтальными фоновыми сдвиговыми течениями при критических режимах волновой генерации. В плоской постановке обсуждены новые модельные физические постановки задач, в которых могут возникать критические режимы, в частности генерация волн периодическим колебанием дна. Для произвольных распределений сдвиговых течений и частоты плавучести, удовлетворяющих условиям Майлса-Ховарда и естественным условиям регулярности, предложено модельное уравнение, описывающее основные особенности решений вблизи критического уровня. Для реальных параметров стратифицированных сред, используя асимптотики модельного уравнения получены оценки пространственных масштабов, на которых необходимо учитывать вязкость среды.

В геофизической гидродинамике существует класс актуальных задач по изучению динамики волн в неоднородных средах, анизотропия которых связана с эффектами стратификации среды и неоднородностью фоновых сдвиговых течений. Одной из таких важных для различных геофизических приложений задач является изучение процессов генерации и распространения внутренних гравитационных волн (ВГВ) в стратифицированной среде при наличии фоновых сдвиговых течений. В частности, нестационарные или осциллирующие источники возмущений являются одним из механизмов генерации достаточно интенсивных ВГВ в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах. Такие источники возбуждения могут иметь как природный (схлопывание области турбулентного перемешивания, быстрая подвижка океанического дна, распространение интенсивных атмосферных возмущений), так и антропогенный (подводные и надземные взрывы) характеры. Генерация ВГВ сдвиговыми течениями представляют собой важный для геофизических приложений пример взаимодействия волн с гидродинамическими потоками, так как при распространении волновых пакетов в сдвиговых стратифицированных потоках возникают специфические эффекты, связанные с усилением и поглощением возбуждаемых этих пакетов. Это происходит, в частности, при наличии резонансных слоев, в которых скорость потока совпадает с фазовой или групповой скоростью внутренних гравитационных волн. Критические слои играют важную роль в механизме гидродинамической неустойчивости сдвиговых течений: резонансное взаимодействие волн с критическими слоями является важным механизмом генерации и поглощения различных типов волн в атмосфере Земли, океане, искусственных стратифицированных средах, а также в движущейся плазме. Сильное взаимодействие распространяющихся волн с потоком возможно в тех слоях стратифицированных сред, где частота возбуждаемой волны совпадает с частотами собственных колебаний неоднородного потока, так как в этом случае резонанс обусловлен равенством групповой скорости волны со скоростью некоторого слоя среды, и, в результате может происходить захват волнового пакета в окрестности резонанса. Для исследования динамики ВГВ в средах со сдвиговыми фоновыми течениями фундаментальную роль играет число Ричардсона, так как, например, при некоторых значениях этого числа в окрестности критического слоя волновой пакет бесконечно долго приближается к некоторой пространственной точке, и его амплитуда неограниченно растет. В общем виде получить общий

критерий усиления амплитуды ВГВ в окрестности критического уровня, то есть выразить его непосредственно через параметры потока, не представляется возможным, однако для некоторых модельных течений возможно получить аналитическое представление такого критерия, выделить, детально исследовать и классифицировать основные модели взаимодействия сдвиговых течений и волн. Очевидно, также, что эффект заметного увеличения амплитуды ВГВ стратифицированным потоком определяется глобальными условиями, то есть зависит не только от деталей профиля потока в некоторой окрестности критической точки, но и от свойств волнового поля, поведение которого определяется всеми параметрами среды, в том числе вязкостью [1-3].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей работе рассматриваются ВГВ в конечном слое произвольно стратифицированной среды с фоновыми сдвиговыми течениями для критических режимов волновой генерации с учетом вязкости. Линейные ВГВ описываются в приближении Буссинеска уравнением [1-4]

$$\frac{D^2}{Dt^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W - \frac{D}{Dt} \left( \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta W - \nu \frac{D}{Dt} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 W = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y},$$

где  $(U(z), V(z))$  - компоненты скорости сдвигового течения на горизонте  $z$ ,  $N^2(z)$  - квадрат частоты Брента-Вайсяля (частоты плавучести),  $W$  - вертикальная компонента скорости ВГВ. Уравнение рассматривается в слое стратифицированной среды конечной глубины  $-H < z < 0$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ ,  $\nu$  - кинематическая вязкость. На поверхности  $z = 0$  используется приближение «твердой крышки», отфильтровывающее поверхностные волны, формулировка граничных условий на дне  $z = -H$  определяется особенностями постановок конкретных физических задач. В природных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) ВГВ могут обмениваться энергией с фоновыми сдвиговыми течениями. Если вертикальный градиент скорости течений велик, то сдвиговые течения могут отдавать энергию волнам, то есть соответствующие колебания могут быть неустойчивыми. Известно условие Майлса-Ховарда для числа Ричардсона  $Ri(z)$ , при выполнении которого не существуют неустойчивых собственных волн, имеющее вид:  $Ri(z) \geq \frac{1}{4}$ ,  $Ri(z) = N^2(z) / ((\frac{dU}{dz})^2 + (\frac{dV}{dz})^2)$ . Если выполнено условие Майлса-Ховарда, то соответствующая спектральная задача не имеет комплексных собственных значений. Характерные значения чисел Ричардсона в акваториях Мирового океана при отсутствии динамической неустойчивости фоновых сдвиговых течений могут находиться в интервалах от 2 до 20. Рассмотрим далее одномерное сдвиговое течение ( $U(z) \neq 0, V(z) = 0$ ) и плоскую задачу, то есть решения, не зависящие от горизонтальной переменной  $y$ , с гармонической зависимостью от времени и горизонтальной координаты  $x$ :  $W(t, x, y, z) = \exp(i(\omega t - kx))v(z, \omega)$ , где за ось  $Ox$  принято направление распространения волны и функция  $v(z, \omega)$  определяется из соответствующего решения уравнения Тейлора-Гольдштейна. Если на некотором горизонте  $z = Z$ , который называется критически.,  $x$ -компонента скорости течений  $U(z)$  совпадает с фазовой скоростью  $C = \omega/k$ , тогда происходит поглощение волновой энергии, то есть передача части энергии волны средним сдвиговым течениям. Горизонт  $z = Z$ , на котором  $\omega = kU(z)$ , является особой точкой уравнения, при этом поведение функции  $v(z, \omega)$  по обе стороны от значения  $z = Z$  определяется правилом обхода этой особой точки. Физически осмысленное решение – это решение, полученное аналитическим продолжением из области  $\text{Im } \omega > 0$ .

Волновое поле  $W(t, x, y, z) = \exp(i(\omega t - kx))v(z)$  вблизи критического уровня можно представить в виде суммы двух слагаемых:  $W_+$  и  $W_-$ , где  $W_+$  - соответствует волне, переносящей энергию снизу вверх, а  $W_-$  - волне, переносящей энергию сверху вниз. Каждая из этих волн при пересечении критического уровня скачком убывает по амплитуде в  $\exp(-\pi\mu)$  раз, где  $\mu = \sqrt{Ri(Z) - \frac{1}{4}}$ , это означает поглощение энергии ВГВ на критическом уровне, то есть передачу энергии сдвиговыми течениями части энергии ВГВ. Этот результат допускает простую физическую интерпретацию: при  $\text{Im } \omega = 0$  волновая энергия любого собственного колебания  $W(t, x, y, z) = \exp(i(\omega t - kx))v(z)$  должна сохраняться, а при наличии критического уровня часть энергии ВГВ поглощается, переходя в энергию средних течений. Поэтому критические уровни могут возникать только для вынужденных колебаний с заданной частотой  $\omega_0$ , то есть, например, колебаний, описываемых соответствующим неоднородным уравнением с правой частью (распределением источников) вида  $\exp(i(\omega_0 t - kx))f(z)$  при некоторой функции  $f(z)$ . Технически проще рассматривать ВГВ, возбуждаемые не источниками, а колебаниями дна, то есть рассматривать однородное уравнение с неоднородным граничным условием в виде:  $W = \exp(i(\omega_0 t - kx))$  при  $z = -H$  и  $W = 0$  при  $z = 0$ . Тогда определяя решение в форме:  $W(t, x, y, z) = \exp(i(\omega_0 t - kx))v(z)$ , можно получить, что  $v(z)$  удовлетворяет уравнению Тейлора-Гольдштейна с заданными значениями  $\omega$  и  $k$  и граничными условиями:  $v(0) = 0, v(-H) = 1$ . Очевидно, что такое решение уже обладает критическим уровнем. Однако такая подстановка представляет собой физическую идеализацию, предполагающую, что осцилляции продолжаются неограниченно долго. Поэтому, более естественной представляется постановка задачи, в которой колебания дна начинаются в некоторый момент времени, то есть рассматривать решение, удовлетворяющее граничным и начальным условиям:  $W(t, x, 0) = 0, W(t, x, -H) = 0 (t < 0), W(t, x, -H) = \exp(-i(\omega_0 t - kx)) (t > 0), W(t, x, z) \equiv 0 (t < 0)$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$  решение задачи должно стремиться к функции, имеющей особую точку при  $z = Z$ . При любом конечном  $t$  это решение должно быть регулярной функцией  $z$ , поэтому представляет интерес вопрос о том, как решение стремится к пределу  $t \rightarrow \infty$ , то есть, как устанавливается критический уровень. Рассмотрим далее среднее сдвиговое течение ( $U(z) \neq 0, V(z) = 0$ ) и не зависящее от переменной  $y$  решение  $W(t, x, z)$ . Будем предполагать, что значение  $\omega_0$  находится внутри интервала  $I_k = (I_-(k), I_+(k))$ , где  $I_{\pm}(k)$  - минимальное (максимальное) значения функции  $kU(z)$  на интервале изменения вертикальной координаты от  $-H$  до нуля. Это означает, что фазовая скорость колебаний дна совпадает со скоростью течения  $U(z)$  на некотором горизонте  $z = Z$ . Тогда можно ожидать, что при  $t \rightarrow \infty$  решение  $w(t, z)$  будет стремиться к некоторому предельному решению, то есть к гармонически зависящей от времени функции  $\exp(-i\omega_0 t)v(\omega_0, z)$ , где функция  $v(\omega_0, z)$  является решением уравнения Тейлора - Гольдштейна. Для частного случая постоянного распределения  $N^2(z)$  и линейной функции  $U(z)$  решение  $W(t, x, z)$  совпадает с гармоническим решением со сколь угодно малой относительной погрешностью  $\varepsilon$  для всех  $z$  вне некоторой переходной зоны  $S(t)$  - окрестности критического уровня  $z = Z$ , размер которой стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  как  $A(\varepsilon)/t$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $A(\varepsilon) \rightarrow \infty$ . Качественный характер выхода поведения решений на предельные при наличии критического уровня можно представить следующим образом: вне переходной зоны решение совпадает с  $w(z)$ , внутри переходной зоны должен происходить плавный переход с одной ветви функции  $w(z)$  на другую. При увеличении  $t$  ширина переходной зоны уменьшается, но качественный вид переходной зоны, как функции от переменной  $t(z - Z)$  не должен меняться. При  $t \rightarrow \infty$  вблизи критического уровня вертикальные компоненты скорости

волнового поля могут увеличиваться, и поэтому могут быть существенными диссипативные слагаемые, которыми обычно пренебрегают. Это обстоятельство может дать один из возможных критериев установления критического слоя. Обозначим через  $R$  окрестность критического уровня, в котором для установившегося решения существенно влияние вязкости. Если переходная зона  $S(t)$  включает в себя область  $R$ , то вязкость можно не учитывать, так как, тогда вне  $S(t)$ , где решение близко к предельному, вязкость не сказывается. Если же при росте  $t$  область  $S(t)$  оказывается внутри  $R$ , то это означает, что вязкость уже сказывается на волновом поле вне переходной зоны  $S(t)$ . Для оценки влияния вязкости среды на формирование критического уровня можно использовать следующий подход. Очевидно, что вязкость существенная лишь вблизи критического уровня  $z = Z$ , где при достаточно больших значениях  $t$  можно построить модельное уравнение, решение которого при  $v = 0$  совпадает с асимптотикой решений вблизи критического уровня, то есть при малых  $|z - Z|$  и  $t \rightarrow \infty$ . Построенные аналитические и решения показывают, в частности, что при достаточно больших значениях  $|z - Z|$ , решение модельного уравнения при  $t \rightarrow \infty$  совпадает с пределом решения в отсутствие вязкости, и при малых значениях  $|z - Z|$  происходит плавный переход с одной ветви решений в виде на другую. Тогда можно получить оценку для пространственного масштаба этой зоны по переменной  $|z - Z|$  в виде:  $R \sim |z - Z| < const$ . Для проведения численных оценок были использованы типичные значения основных параметров, характерных для условий реального океана: волновое число  $k = 0.02 \text{ м}^{-1}$ , соответствующая длина волны равна  $100\pi \approx 314$  метрам, градиент сдвигового течения  $B = 0.01 \text{ с}^{-1}$ , кинематическая вязкость  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ , число Ричардсона  $Ri = 0.5$ . Тогда, для значения малого параметра  $\delta \sim 0.1$ , можно получить, что масштаб пространственной зоны  $R$ , где влияние вязкости на формирование критического слоя значительно, составляет порядка десяти сантиметров. В то же время, характерные пространственные масштабы переходной зоны, формирующей критический уровень, для таких параметров могут составлять не менее нескольких метров. Поэтому полученные оценки показывают, что для реальных океанологических задач, при изучении формирования критических уровней влияние вязкости стратифицированной среды в первом приближении можно не учитывать. Очевидно также, что если пространственные масштабы переходной зоны, в которой происходит переход решений от одной ветви к другой, относительно малы, то влиянием вязкости на формирование критического уровня пренебрегать уже нельзя. В общем случае увеличение амплитуд возбуждаемых ВГВ в слое вязкой стратифицированной среде с фоновыми сдвиговыми течениями при различных критических режимах волновой генерации определяется также внешними условиями среды, то есть зависит не только от профиля потока скорости, частоты плавучести в некоторой окрестности критической точки, но и от свойств волнового поля в целом, поведение которого также определяется всем течением. Поэтому существенного прогресса в прояснении роли вязкости в формировании критического уровня, оценки его характерных пространственных масштабов с учетом реальной гидрологии природных и искусственных вязких стратифицированных сред можно ожидать при построении более общих нелинейных моделей взаимодействия сдвиговых течений и волн.

#### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена в рамках государственного задания №FFGN-2024-0005.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Bulatov V.V. Wave dynamics of stratified media with variable shear flows // Fluid Dynamics. 2023. V.58 (Supl.2). S219-S229.

2. Булатов В.В. Аналитические свойства решений уравнения внутренних гравитационных волн с течениями для критических режимов волновой генерации // Труды МИАН. 2023.V. 322. Р.71–82.
3. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Динамика поверхностных и внутренних гравитационных волн в гидрофизических средах. - М.: Физматлит, 2025. 320 с.
4. Булатов В.В. Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированной вязкой среде с фоновыми сдвиговыми течениями при критических режимах генерации // Прикладная математика и механика. 2025. Т.89. №.3. С.484–493.

Булатов Виталий Васильевич, [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)



## ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА И ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

В.В. Булатов

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
*[internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)*

Решена задача о дальних волновых полях на границе тонкого ледяного покрова и однородной жидкости конечной глубины, генерируемых импульсным источником возмущений под ледяным покровом. Предполагается, что ледяной покров является сплошным, его горизонтальные масштабы существенно превышают длины возбуждаемых волн, и при достаточно общих условиях моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы. В линейном приближении получено интегральное представление решения и с помощью метода стационарной фазы построено асимптотическое представление решения для различных режимов волновой генерации. Результаты численных расчетов для реальных значений морской среды показывают, что асимптотика стационарной фазы достаточно хорошо описывает волновое поле малых возмущений границы раздела льда и жидкости конечной глубины на расстояниях порядка десятка метров и нескольких десятков секунд. Таким образом, асимптотические выражения для волновых полей позволяют с достаточной степенью точности исследовать амплитудно-фазовую структуру поверхностных возмущений ледяного покрова вдали от источников возмущений. Исследована пространственная и временная эволюции волновых пакетов возмущения ледяного покрова, распространяющихся от импульсного источника возмущений.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с активным освоением морских и океанических ресурсов арктических регионов России, развитием технологической инфраструктуры, включая строительство ледовых аэродромов, представляет большой интерес изучение волновых возмущений на границе льда и подстилающей морской среды. Одной из таких задач является проблема изучения волн, генерируемых на ледяных плитах различными источниками возмущений. Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным, его горизонтальные масштабы существенно превышают длины возбуждаемых волн, и при достаточно общих условиях моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы. Одной из моделей генерации волновых возмущений на границе ледяного

покрова можно считать предположение о возбуждении колебаний интенсивным импульсным воздействием природного и антропогенного характеров. Возможен также механизм, обусловленный интенсивной деформацией водного столба (или столба жидкости) подо льдом, кроме того, одним из заметных источников возбуждения ледяного покрова могут являться интенсивные цуги внутренних гравитационных волн. Как правило, физика таких гидродинамических явлений достаточно сложна, и волновое поле вблизи источников не может быть описано в рамках линейной теории. Однако возможно сформулировать определенные начальные и граничные условия для решения гидродинамических задач в линейном приближении, и исследовать волновое поле в дальней зоне, при этом такие условия могут определяться из результатов прямого численного моделирования ближнего поля с учетом нелинейных уравнений гидродинамики, или из сугубо оценочных (полуэмпирических) соображений. Для проведения оценочных расчетов необходимо подбирать параметры использованной модели источника так, чтобы приблизить смоделированные волновые системы к реально наблюдаемым волновым картинам. Таким образом, математические модели волновой генерации могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок, так как в этих заданных а priori модельных условиях заложено много реальной информации, на основе которой линейная теория вдали от нелокальных источников возмущений может давать удовлетворительные результаты. Используя модельные представления для описания нелокальных источников, волновые возмущения на границе ледяного покрова в дальней зоне можно описать сравнительно простыми аналитическими формулами. Типичным подходом к исследованию волновой картины, создаваемой различными источниками (механическое разрушение ледников, сопровождаемое ледотрясениями, отколами айсбергов, резкими подвижками льда при его соскальзывании в воду с подстилающего основания осадочных пород вблизи «точки заземления» покровных ледников, колебания атмосферного давления, движение внешней нагрузки, которой может быть обычный автотранспорт, самолет на режимах взлета или посадки, суда на воздушной подушке, движение погруженного тела, обтекание жидкостью неровности дна, подвижка дна, подводное землетрясение, надводный или подводный взрывы) в линейном приближении, является представление волнового поля через преобразование Фурье и затем построение асимптотик соответствующих интегралов в дальней зоне [1-5].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматриваются волновые возмущения на поверхности раздела слоя однородной жидкости с плотностью  $\rho_0$  конечной толщины  $H$  и ледового покрова с плотностью  $\rho_1$  толщины  $h$ . В момент времени  $t = 0$  импульсный источник, расположенный в точке  $(0, 0, z_0)$ ,  $-H < z_0 < 0$ , мгновенно выбрасывает объем жидкости  $Q$ . Плоскость  $Oxy$  совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости и льда. Обозначим через  $\varphi(x, y, z, t)$  потенциал возмущений скорости:  $\nabla\varphi = (u, v, w)$ , тогда в линейном приближении математическая постановка задачи формулируется следующим образом [3-5]

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = Q\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - C\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + B\Delta^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, z = 0; \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, z = -H; \varphi \equiv 0, t < 0$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $A = \frac{h\rho_1}{\rho_0}$ ,  $B = \frac{Eh^3}{12\rho_0(1-\nu_0^2)}$ ,  $C = \frac{\sigma h}{\rho_0}$ ,  $g$  – ускорение свободного падения,  $E$  – модуль Юнга льда,  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma$  – начальное напряжение. Задача рас-



смаатривается в области  $-H < z < 0$ ,  $-\infty < x, y < +\infty$ . Решение задачи строится с помощью преобразования Фурье по переменным  $x, y, t$ . Тогда выражение для возвышения поверхности раздела льда и жидкости имеет вид

$$\eta(r, t) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k \operatorname{ch}(k(z_0 + H))}{(Ak \operatorname{th}(kH) + 1) \operatorname{ch}(kH)} J_0(kr) \cos(\Omega(k)t) dk$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \Omega^2(k) = \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4) \operatorname{th}(kH)}{Ak \operatorname{th}(kH) + 1}$$

где  $J_0$ - функция Бесселя нулевого порядка. Заменим функцию Бесселя  $J_0(kr)$  на ее асимптотику при  $kr \gg 1$ :  $J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos(kr - \frac{\pi}{4})$ . Получающийся в результате интеграл можно представить в виде

$$\eta(r, t) \approx I_-(r, t) + I_+(r, t), I_\pm(r, t) = Q \int_0^\infty \frac{f(r, k)}{\sqrt{k}} \cos(t\beta_\pm(k) - \frac{\pi}{4}) dk$$

$$\beta_\pm(k) = kV \pm \Omega(k), V = \frac{r}{t}, f(r, k) = \frac{k \operatorname{ch}(k(z_0 + H))}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{r} (Ak \operatorname{th}(kH) + 1) \operatorname{ch}(kH)}$$

Рассматривались асимптотики  $I_\pm(r, t)$  при  $r, t \rightarrow \infty$  и фиксированных значениях  $V$ , то есть в точке, движущейся в радиальном направлении со скоростью  $V$ . Интеграл  $I_+(r, t)$  экспоненциально мал. Асимптотика  $I_-(r, t)$ , вычисляется с помощью метода стационарной фазы

$$I_-(r, t) \approx Q(f(r, K_1) \sqrt{\frac{2\pi}{tK_1 \Omega''(K_1)}} \sin(t(K_1 V - \Omega(K_1))) + f(r, K_2) \sqrt{-\frac{2\pi}{tK_2 \Omega''(K_2)}} \cos(t(K_2 V - \Omega(K_2))))), V_1 < V < V_2$$

$$I_-(r, t) \approx Q(f(r, K_1) \sqrt{\frac{2\pi}{tK_1 \Omega''(K_1)}} \sin(t(K_1 V - \Omega(K_1))))), V > V_2$$

где  $\overline{V_1}$  - минимальная групповая скорость распространения волновых возмущений,  $V_2 = \sqrt{gH} > V_1$  - групповая скорость длинных волн,  $K_{1,2}$  - стационарные точки фазовой функции. Результаты численных расчетов для реальных значений морской среды показывают, что асимптотика стационарной фазы достаточно хорошо описывает волновое поле малых возмущений границы раздела льда и жидкости конечной глубины на расстояниях порядка десятка метров и нескольких десятков секунд. В дальнейшем для решения ряда важных практических задач и приложений, используя операцию свертки, можно рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемых распределенными в пространстве нелокальными и нестационарными источниками возмущений. Полученные асимптотические результаты позволяют исследовать поверхностные возмущения ледяного покрова, которые могут быть зарегистрированы с помощью радиолокационных и оптических систем, и несут информацию не только об источниках генерации, но и о характеристиках морской среды подо льдом, что важно, в том числе для изучения реакции ледяного покрова на различные гидродинамические возмущения, процессов распада ледяных полей, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках государственного задания №FFGN-2024-0005.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. - М.: Наука, 2015. 735 с.
2. Morozov E. G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. - Berlin: Springer, 2018. 317 p.
3. Velarde M. G., Tarakanov R. Yu., Marchenko A. V. (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. - Berlin: Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
4. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Динамика поверхностных и внутренних гравитационных волн в гидрофизических средах. - М.: Физматлит, 2025. 320 с.
5. Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Морозов Е.Г. Дальние поля волновых возмущений от импульсного источника под ледяным покровом. // ДАН. Науки о земле. 2025. Т.524. №1. С.133-138

Булатов Виталий Васильевич, [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)



*Памяти академика РАН А.Г.Куликовского*

## **ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ: МОДОВАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ**

*В.В. Булатов*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
[internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)*

Целью работы является исследование модовой структуры решений, описывающих генерацию внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах с модельными распределениями частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений, что позволяет определять основные качественные характеристики поведения дисперсионных соотношений при малых волновых числах в зависимости от номера моды. Рассмотрена задача о построении решений, описывающих генерацию линейных внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды конечной глубины с модельными распределениями частоты плавучести и фонового сдвигового течения. В предположении устойчивости Майлса-Ховарда для числа Ричардсона изучены соответствующие дисперсионные зависимости. Показано, что в зависимости от параметров линейного сдвигового течения дисперсионные кривые волновых мод могут иметь качественно различные асимптотические представления при малых волновых числах. Дисперсионные кривые конечного числа мод, описывающих волны с ограниченной длиной, при малых значениях волнового числа допускают разложения по четным степеням малого параметра. Дисперсионные кривые остальных мод, отвечающим волнам со сколь угодно большой длиной, разлагаются в ряд по нечетным степеням малых волновых чисел. Изучена фазовая структура волновых полей в зависимости от номера моды и основных характеристик сдвиговых течений. Аналитически получены оценки, позволяющие, в зависимости от параметров модельного течения, найти номер волновой моды, который делит весь существующий набор волновых мод на ограниченные и длинноволновые.

В реальном океане внутренние гравитационные волны (ВГВ) распространяются на фоне фоновых сдвиговых океанических течений, поэтому в связи с прогрессом в изучении крупномасштабных океанических волновых процессов изучение динамики ВГВ в океане с учетом наличия течений является актуальной задачей. Вертикальная и горизонтальная динамика фоновых сдвиговых течений в значительной степени связана с внутренними волнами и такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на динамику ВГВ. Как правило, океанические сдвиговые течения можно рассматривать как стационарные и горизонтально однородные, так как масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов внутренних волн. Поэтому в первом приближении можно считать, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат. Стационарные или осциллирующие источники возмущений являются одним из механизмов генерации достаточно интенсивных внутренних гравитационных волн в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах, при этом источники возбуждения ВГВ могут иметь как природный (схлопывание области турбулентного перемешивания, быстрая подвижка океанического дна, распространение интенсивных атмосферных возмущений, извержение подводных вулканов), так и антропогенный (подводные и надземные взрывы) характеры. В частности, для моделирования генерации ВГВ точечным источником в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, и в качестве возможного механизма возбуждения ВГВ рассматривать, например, генерацию волн периодическим течением на склонах поперечных хребтов в проливах. В общей постановке описание динамики ВГВ в океане с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении, так как проблема сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Используя различные приближения, в том числе метод ВКБ, основанный на реалистичном предположении о плавности изменения параметров океанической среды по сравнению длинами ВГВ, можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений. Одним из основных методов решения задач волновой динамики ВГВ в океане с фоновыми сдвиговыми течениями является метод Фурье, который дает возможность построить интегральные представления решений, требующие численного и асимптотического анализа. Методы прямого численного моделирования не всегда эффективны для исследования генерации ВГВ произвольными нелокальными и нестационарными источниками возмущений, особенно с учетом изменчивости основных гидрологических параметров, и требуют верификации и сравнения с решениями модельных задач. Поэтому при анализе динамики ВГВ в реальном океане необходимо использовать различные асимптотические и аналитические модели. Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ возможно рассматривать достаточно простые модельные представления для стратификации и сдвиговых течений [1-5].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Малые возмущения вертикальной компоненты скорости внутренних гравитационных волн  $W$  в приближении Буссинеска и «твердой крышки» определяются из задачи [1,4,5]

$$\frac{D^2}{Dt^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W - \frac{D}{Dt} \left( \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta W = 0$$

$$W = 0 \text{ при } z = 0, -H$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$  - квадрат частоты Брента-Вяйсяля (частоты плавучести),  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y}$  - субстанциональная производная,  $(U(z), V(z), 0)$  - компоненты скорости фоновое сдвигового течения на горизонте  $z$ ,  $\rho_0(z)$  - невозмущенная плотность стратифицированной среды. Задача рассматривается в конечном по вертикали  $-H < z < 0$  и неограниченном по горизонтали  $-\infty < x, y < +\infty$  слое. На дне  $z = -H$  вертикальная компонента скорости  $W$  равна нулю, на поверхности  $z = 0$  используется приближение «твердой крышки»:  $W = 0$ , отфильтровывающее поверхностные волны, и мало влияющее на основные характеристики внутренних гравитационных волн. Частота плавучести предполагается постоянной  $N(z) = N = \text{const}$ . Фоновое сдвиговое течение – одномерное и линейное:  $V(z) \equiv 0$ ,  $U(z) = U_0 + \frac{U_0 - U_H}{H}z$ ,  $U_0 = U(0)$ ,  $U_H = U(-H)$ . Для числа Ричардсона выполнено условие устойчивости Майлса-Ховарда:  $Ri = N^2 / \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 = \frac{N^2 H^2}{(U_0 - U_H)^2} > \frac{1}{4}$ . Решение задачи для вертикальной компоненты скорости  $W$  ищется в виде интегралов Фурье:  $\varphi(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) dy \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y, z) \exp(i\mu x) dx$ , где функция  $\varphi(\mu, \nu, z)$  определяется из задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{1}{\mu^2 M^2(z)} - 1 \right) = 0 \quad (2)$$

$$\varphi(\mu, \nu, -\pi) = \varphi(\mu, \nu, 0) = 0, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

Два линейно независимых решения вертикальной спектральной задачи  $\varphi_0(\mu, \nu, z)$ ,  $\varphi_H(\mu, \nu, z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mu, \nu, z) &= \Phi_+(\mu, \nu, z) \Phi_-(\mu, \nu, 0) - \Phi_-(\mu, \nu, z) \Phi_+(\mu, \nu, 0) \\ \varphi_H(\mu, \nu, z) &= \Phi_+(\mu, \nu, z) \Phi_-(\mu, \nu, -H) - \Phi_-(\mu, \nu, z) \Phi_+(\mu, \nu, -H) \\ \Phi_{\pm}(\mu, \nu, z) &= \sqrt{2\beta\mu M(z)} I_{\pm i\xi}(\beta\mu M(z)), \quad \beta = \frac{k}{b\mu}, \quad \xi = \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

где  $I_{\pm i\xi}(\tau)$  – модифицированная функция Бесселя мнимого индекса  $\xi$  и действительного аргумента  $\tau$ . Так как условие Майлса-Ховарда для числа Ричардсона означает, что  $b^2 < 4$ , поэтому  $\beta^2 > \frac{1}{4}$  и значения  $\xi$  действительны. Функция  $I_{\pm i\xi}(\tau)$  при действительных значениях  $\xi$  и при  $|\tau| < \xi$  осциллирует. При мнимых значениях  $\xi$  функция  $I_{\pm i\xi}(\tau)$  стремится к бесконечности при больших  $\tau$  и нигде не осциллирует при  $\tau > 0$ . Поэтому, для того, чтобы значения  $\xi$  были действительными для любых  $k, \mu$  достаточно, чтобы  $b^2 < 4$ , что совпадает с условием Майлса-Ховарда для числа Ричардсона.

Аналитически изучена модовая структура решений, описывающие внутренние гравитационные волны в стратифицированной среде с модельными распределениями частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений. Показано, что для различных параметров линейного сдвигового течения дисперсионные кривые волновых мод могут иметь качественно различные асимптотические представления при малых волновых числах. Дисперсионные кривые конечного числа волновых мод могут выходить не из нуля, при малых значениях волнового числа допускают разложения по четным степеням малого параметра. Такие моды описывают поведение волн, длина которых ограничена определенной и конечной величиной. Дисперсионные кривые волновых мод с номерами, больше определенного фиксированного значения, выходят из нуля и при малых значениях волновых чисел разлагаются в ряд по нечетным степеням соответствующего малого

параметра. Такие моды описывают сколь угодно длинные волны. Получены аналитические оценки, позволяющие, в зависимости от параметров течения, найти такой номер волновой моды, который делит весь существующий набор волновых мод на ограниченные и длинноволновые. Полученные приближения дисперсионных соотношений позволяют в дальнейшем с помощью метода эталонных интегралов построить асимптотики для эффективных расчетов дальних полей внутренних гравитационных волн в океане с фоновыми сдвиговыми течениями.

#### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена в рамках государственного задания №FFGN-2024-0005.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. - М.: Наука, 2015. 735 с.
2. Morozov E. G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. - Berlin: Springer, 2018. 317 p.
3. Velarde M. G., Tarakanov R. Yu., Marchenko A. V. (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. - Berlin: Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
4. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Динамика поверхностных и внутренних гравитационных волн в гидрофизических средах. - М.: Физматлит, 2025. 320 с.
5. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Модовая структура полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками возмущений в океане с фоновыми сдвиговыми течениями // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2025. Т.61. №6. С.88-98.

Булатов Виталий Васильевич, [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)



## **МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЕКАНИЯ КАПЛИ НА ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ФАЗОВОГО ПОЛЯ**

*Н. А. Буров*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва  
[naburov@outlook.com](mailto:naburov@outlook.com)*

Работа посвящена моделированию динамики изменение формы капли несжимаемой жидкости, которая погружена в газ и покоится на плоской поверхности. Одним из самых вычислительно эффективных методов, который можно применить для решения поставленной задачи, является метод фазового поля [1]. Суть этого метода заключается во введении гладкой функции порядка  $\varphi$  (типа Гинзбурга–Ландау), которая в одной фазе принимает значение  $-1$ , а в другой —  $+1$ . На границе раздела фаз эта функция быстро меняется от  $-1$  до  $+1$ , причем ширина этой области есть  $O(\delta)$ , где  $\delta$  — некоторый малый параметр. При  $\delta$  стремящейся к 0 решение задачи методом фазового поля будет стремиться к решению предельной задачи, описанной в [2], что показано в [3].

Мы рассматриваем численное моделирование системы уравнений фазового поля, состоящей из уравнений Навье–Стокса и уравнения Кана–Хиллиарда, а точнее её безразмерную версию:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \frac{\rho}{Fr} \mathbf{g} + \mathbf{F}, \\ \langle \nabla, \mathbf{u} \rangle = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \langle \mathbf{u}, \nabla \varphi \rangle = \frac{1}{Pe} \nabla \cdot ((1 - \varphi^2) \nabla (\varphi(\varphi^2 - 1) - \delta^2 \Delta \varphi)), \\ \mathbf{F} = -\frac{3\sqrt{2}}{4We} \kappa \nabla \phi |\nabla \phi|, \end{cases}$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность (зависит от фазы),  $\theta$  – угол контакта,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\kappa$  – кривизна границы раздела,  $\mathbf{F}$  – сила поверхностного натяжения.

$Re = \frac{\rho u_c L}{\mu}$  – число Рейнольдса,  $Fr = \frac{u_c^2}{gL}$  – число Фруда,  $Pe = \frac{\rho u_c L}{k}$  – число Пекле,  $We = \frac{\rho u_c^2 L}{\sigma}$  – число Вебера.

Система дополнена граничными условиями

- Для  $\mathbf{u}$  при  $(x = 0, x = L)$ :  $\mathbf{u} = 0$ , на нижней границе  $(y = 0)$ :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  (условие проскальзывания), на верхней границе  $(y = H)$ :  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0$
- Для  $\varphi$  при  $(x = 0, x = L)$ :  $\varphi = -1$ , на верхней границе  $(y = H)$ :  $\partial \varphi / \partial y = 0$ ,
- Для  $\varphi$  на нижней границе  $(y = 0)$ :  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\cos \theta$ , где  $\theta$  – краевой угол смачивания.
- Для  $p$  на всех границах:  $p = p_{atm} + \rho g y$ .

Начальное условие для фазового поля задается в виде:

$$\varphi|_{t=0} = -\tanh \left[ \frac{\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - r}{0.5\delta} \right],$$

Такое определение силы поверхностного натяжения упрощает вычисление давления, что показано в работе [4].

Для численного решения системы фазового поля используется метод конечных разностей [5] на равномерной прямоугольной сетке. Основная сложность заключается в обеспечении условия несжимаемости  $\langle \nabla, \mathbf{u} \rangle = 0$ , которое решается с помощью метода проекции. Алгоритм, относящийся к методам проекции [6], представляет собой явную схему для уравнения Кан-Хиллиарда и Навье-Стокса, для ускорения сходимости используется многосеточный метод решения линейных систем. При этом алгоритм внесения поправок для соблюдения условий неразрывности выглядит следующим образом:

#### Алгоритм внесения поправок

- $k = 0, \mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^*$
- Повторять:
  - Вычислить  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,k}$
  - Решение  $\nabla^2 p^k = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,k}$  с граничными условиями
  - $\mathbf{u}^{n+1,k+1} = \mathbf{u}^{n+1,k} - \alpha \Delta t' \nabla p^k$
  - Применение граничных условий для  $\mathbf{u}^{n+1,k+1}$
  - $k = k + 1$

- До тех пор, пока  $\max|\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,k}| < \text{tolerance}$  или  $k > k_{\max}$
- $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1,k}$

Численные эксперименты проводились с разными параметрами жидкостей, углов контакта, временными шагами и т.д.

Полученные результаты моделирования для случая погруженного пузырька жидкости с углом контакта 60 градусов представлены на рисунках ниже:

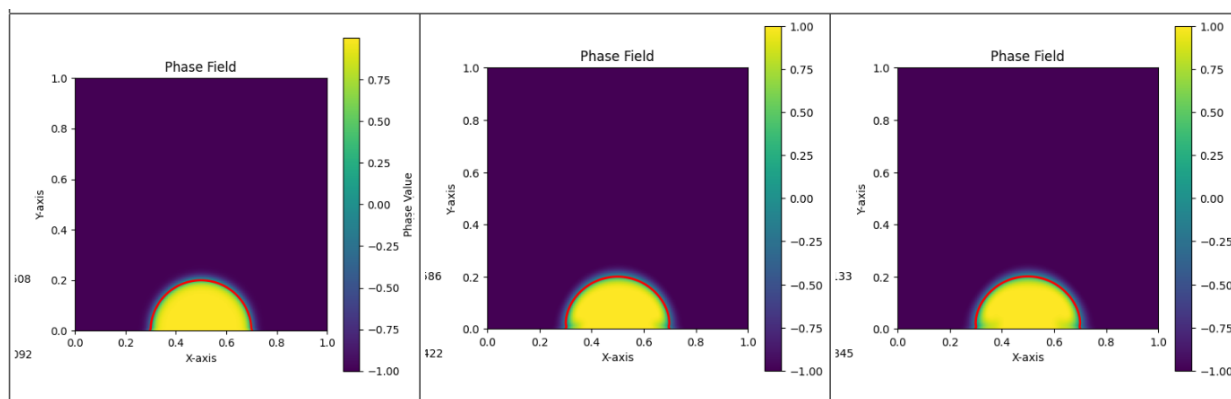


Рис. 1. Эволюция фазового поля в эксперименте по растеканию капли

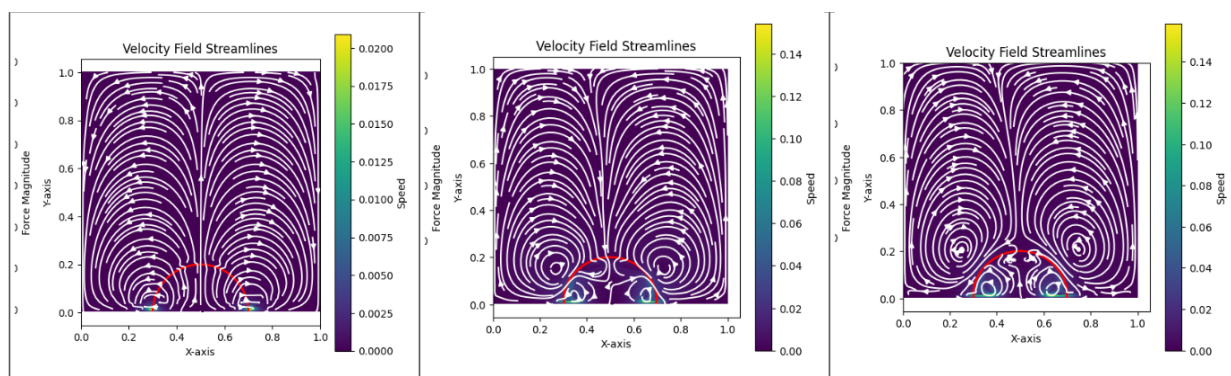


Рис. 2. Эволюция линий тока в эксперименте по растеканию капли

С течением времени капля под действием силы поверхностного натяжения начинает менять свою форму таким образом, чтобы угол контакта свободной границы с пластиной стал равен заданном

Таким образом, в работе был реализован простой и эффективный численный алгоритм для моделирования растекания капли на поверхности с помощью системы фазового поля. Были проведены численные эксперименты по моделированию растекания капли на поверхности с различными свойствами смачиваемости и различной динамикой границы раздела.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kim J. Phase-Field Models for Multi-Component Fluid Flows // Commun. comput. phys. 2012. Т. 12. № 3. С. 613–661.
2. Денисова И. В. Движение капли в несжимаемой жидкости : монография / И. В. Денисова, В. А. Солонников. 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 296 с. — Текст : непосредственный.



3. *Caginalp G., Chen X.* Phase Field Equations in the Singular Limit of Sharp Interface Problems // The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. Springer New York, 1992. P. 1–27.
4. *Lee H. G., Kim J.* Accurate contact angle boundary conditions for the Cahn–Hilliard equations // Computers & Fluids. 2011. Т. 44. № 1. С. 178–186.
5. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы: Учеб, пособие для вузов, — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.— ISBN 5-02-013996-3.
6. *Guermond J. L., Mineev P., Shen J.* An overview of projection methods for incompressible flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006. Т. 195. № 44–47. С. 6011–6045.

Буров Никита Андреевич, naburov@outlook.com



## ВОЛНОВОЙ КРОВОТОК В АОРТЕ С АНЕВРИЗМОЙ

*Н.А. Вerezуб<sup>1</sup>, Д.В. Гандилян<sup>1</sup>, Д.С. Лисовенко<sup>1</sup>, В.В. Пантюшов<sup>2</sup>,  
А.И. Простомолотов<sup>1,\*</sup>*

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Отделение экстренной хирургии №7 ГКБ №1 им. Н.И. Пирогова, Москва  
aprosto@inbox.ru*

### ВВЕДЕНИЕ

Приводятся результаты сопряженного математического моделирования кровотока и деформаций стенок в брюшной части аорты при различных патологических процессах в ней, рассматриваемых при моделировании как механические повреждения, в том числе при наличии аневризмы.

### КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ

При исследовании деформирования брюшной аорты [1] предполагалось, что она представляет собой однослойный гиперупругий изотропный материал, внутри которого течет жидкость, соответствующая физическим параметрам крови. Для моделирования деформирования сосуда используется Нео-Гуковская модель, где предполагается, что сосуд является гиперупругим сжимаемым материалом, для описания которого используются нелинейные уравнения напряжений-деформаций [2].

На Рис. 1 изображена модель брюшной аорты с дефектом – отверстием: (а) – модель брюшной аорты, на которой показаны отверстия втекания и вытекания крови:  $i = 1, 2, \dots, 5$ ; (b) – точки, в которых проводились вычисления. Дополнительно рассмотрена брюшная аорта с утонченной стенкой идентична основной модели, но в окрестности потенциального дефекта стенка утончается по сферической траектории до толщины стенки равной 1 мм.

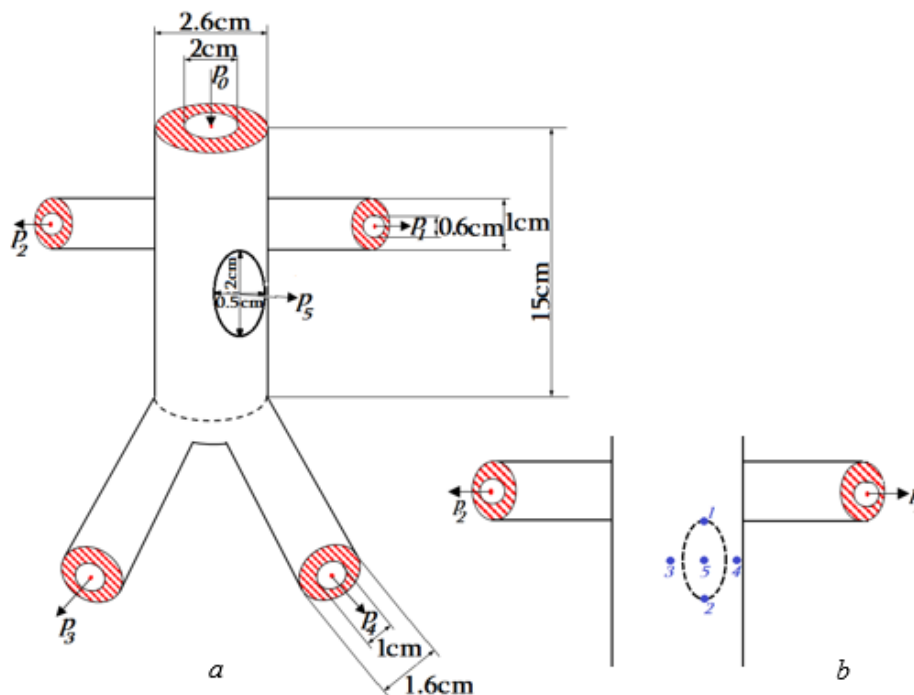


Рис. 1. Основная расчетная схема: (a) – модель брюшной аорты, здесь показаны отверстия втекания и вытекания крови:  $i = 1, 2, \dots, 5$ ; (b) – точки, в которых проводились вычисления.

Граничные условия для расчета гидродинамики кровотока задаются в следующем виде:

- на входном отверстии аорты задается следующее давление кровотока (в Па)
- $$p_0 = 16810.62 \cdot f(t) \quad (1)$$
- на выходных отверстиях  $i = 1, 2, \dots, 5$  задаются следующие значения давления

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 16720.63 \cdot f(t),$$

$$f(t) = \begin{cases} (1 - \alpha) \sin(\pi t), & 0 < t \leq 1/2, \\ 1 - \alpha \cos(2\pi(t - 1/2)), & 1/2 < t < 5, \end{cases} \quad \alpha = 1/3 \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) с помощью функции  $f(t)$  учитывается сердцебиение, причем интервал между 0 и 0.5 с не имеет физического значения – это сглаживающая кривая, которая позволяет вычислить начальное состояние, но вторая часть функции заставляет давление изменяться между минимальным и максимальным значением с амплитудой в течение циклов (длительность одного цикла составляет 1 с). Механические параметры стенки аорты приведены в Таблице.

Таблица. Параметры крови и упругие свойства стенки брюшной аорты.

Параметр	Символ	Размерность	Величина
Динамическая вязкость крови	$\mu$	Н*с/м <sup>2</sup>	0.0052
Плотность крови	$\rho$	кг/м <sup>3</sup>	1060
Плотность стенки аорты	$\rho_a$	кг/м <sup>3</sup>	960
Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.45
Модуль упругости	$E$	Н/м <sup>2</sup>	$1.0 \times 10^7$

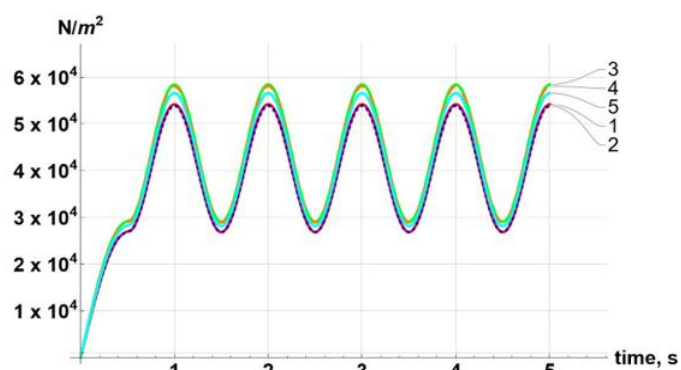


Рис.2. Графики напряжений для основной модели. Зависимости 1, 2, 3, 4 и 5 построены для точек, указанных на Рис.1б.

Проанализируем на Рис.2 графики напряжений для точек, указанных на Рис. 1б. Из анализа графиков на Рис. 2 можно сделать вывод, что максимальные значения напряжений, а также максимальный перепад напряжений достигается по окружной координате, особенно в точке максимального утончения стенки. Разница между максимальным напряжением в случае основной модели и в случае модели с отверстием превышает 10 раз. Причем максимальное напряжение в случае модели с отверстием достигается по осевой координате на краях отверстия. Отсюда можно сделать вывод, что в этих зонах потенциально могут образоваться дефект и впоследствии произойти разрушение стенки сосуда.

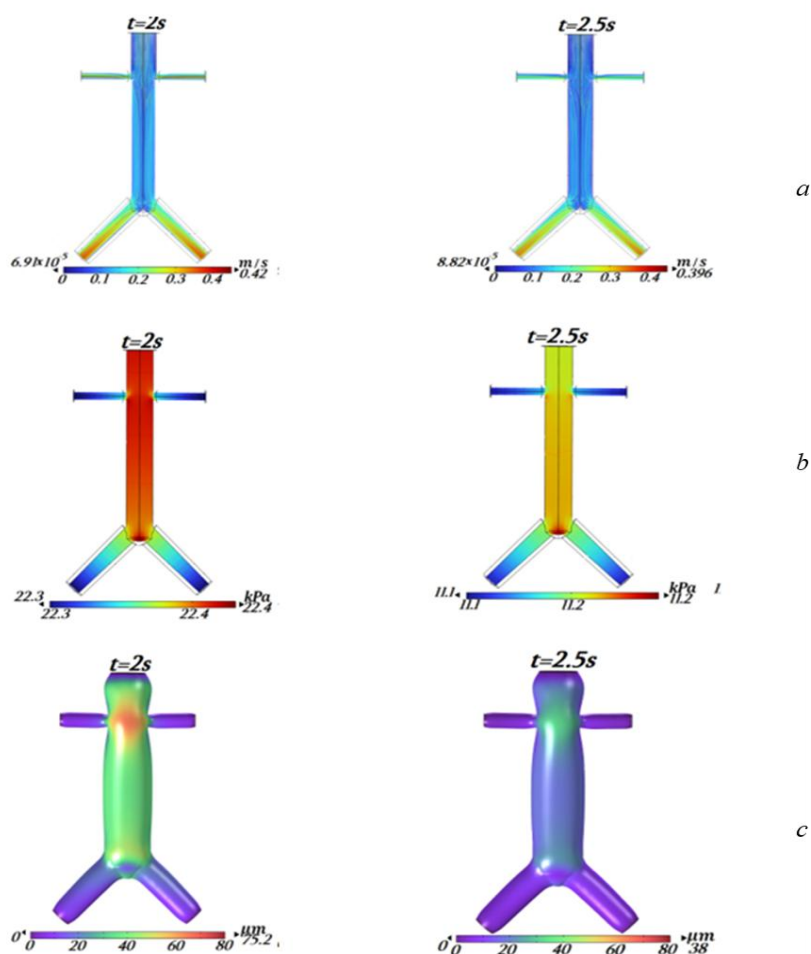


Рис.3. Визуализация для моделей 1, 2, 3 мгновенных состояний кровотока при  $t = 2.0$  и  $2.5$ : (a) – скорость и (b) – давление в кровотоке; (c) – поле смещений стенки аорты.

На Рис.3 приведены результаты расчетов скорости движения жидкости в сосуде, его давления и поля деформаций самого сосуда в течение одного периода сердцебиения для моментов времени  $t = 2$  с и 2.5 с, соответствующих максимальному и минимальному значению напряжений на Рис.2.

#### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124013000674-0).

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Бокерия Л.А. Аневризмы аорты. М.: Медицина. 2001. 204с.
2. Вerezub Н. А., Гандилян Д. В., Лисовенко Д. С. и др. Механика кровотока и деформирования стенок в брюшной аорте // Известия РАН. МТТ. 2025. № 2. С. 98–118.

Вerezub Наталия Анатольевна, verezub@ipmnet.ru  
Гандилян Давид Ваганович, david.ghandilyan@mail.ru  
Лисовенко Дмитрий Сергеевич, lisovenk@ipmnet.ru  
Пантюшов Владимир Васильевич, bobapan@mail.ru  
Простомолотов Анатолий Иванович, aprosto@inbox.ru



## **ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ЖИДКОСТЯМИ В РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЯХ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Вин Ко Ко, А.Н. Темнов*

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва  
win.c.latt@gmail.com*

В данной работе рассматривается экспериментальное исследование колебаний двухслойной жидкости в подвижном баке, совершающим возвратно-поступательное движение. Дано описание экспериментальной установки и определены в эксперименте основные динамические характеристики нелинейных колебаний двух жидкостей, а также приведено сравнение полученных экспериментальных результатов с теоретическими.

#### **ВВЕДЕНИЕ**

В статье рассматривается механическая модель со сферическим маятником, соответствующая нелинейным колебаниям поверхности раздела двух жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический сосуд при поступательных и вращательных движениях механической системы. Для анализа более высоких порядков малости при сравнении поведения механической модели с реальной системой необходимо привлекать амплитудно-частотные характеристики. В работе приведены численные расчеты линейных и нелинейных коэффициентов уравнений поступательных и вращательных движениях твёрдого тела при различных глубинах заполнения каждой жидкостью. Демонстрируется, что если в качестве обобщённых координат выбрать направляющие косинусы, задающие положение сферического маятника, то уравнения движения эквивалентного механического аналога точно соответствуют уравнениям динамики твёрдого тела с двумя жидкостями в

приближении, учитывающим второй порядка малости. В результате построены амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных колебаний поверхности раздела жидкостей при поступательных и угловых колебаниях цилиндрического сосуда и механической модели со сферическим маятником, отвечающей различным уровням жидкостей.

Ранее в работах [1] авторы предложили механическую модель малых колебаний границы раздела двух жидкостей. Предложенная модель состоялась из двух масс, соединённых невесомым стержнем и закреплённых в точке  $O$  посредством цилиндрического шарнира.

В исследованиях [2] для плоского случая применялась модель математического маятника, остающаяся справедливой даже при значительных углах отклонения.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим осесимметричное тело с массой  $m_0$  и моментами инерции относительно главных осей  $J_{0x}, J_{0y}, J_{0z}$ . На продольной оси тела на расстоянии  $(c+l)$  от центра масс подвешен сферический «математический» маятник с точечной массой  $m$  на невесомом стержне длиной  $l$

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{r}, \quad (1)$$

где  $\vec{g}$  - вектор ускорения свободного падения;  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный из некоторой характерной точки  $O$ , связанной с телом. Тело находится в поле массовых сил, определяемых формулами (1), а его движение относительно введенной в работе [1-2] системы координат  $Oxyz$  будет определяться векторами скоростей  $\vec{V}_0$  и  $\vec{\omega}$ .

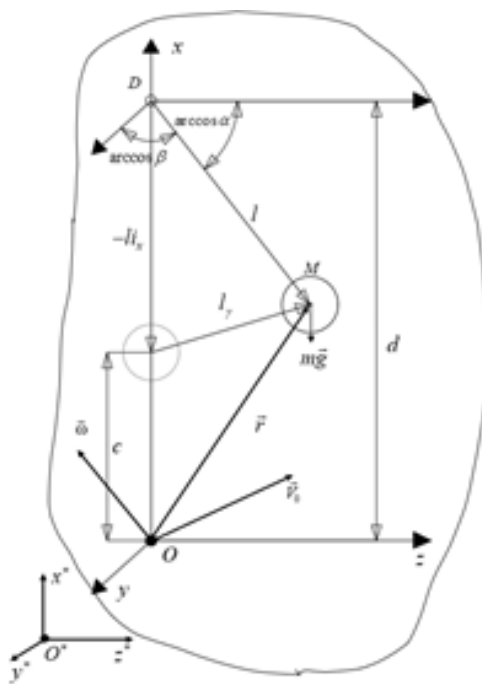


Рис. 1. Основные параметры механической модели в виде сферического маятника

Подставляя в уравнения Лагранжа 2-го рода выражения для обобщенных сил и для кинетической энергии, получим

$$ml[l \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + j \alpha_1 + \frac{dV_{0z}}{dt} - c(\frac{d\omega_z}{dt} - \omega_x \omega_z)] + ml^2[\frac{1}{2} \alpha_1 \frac{d^2}{dt^2} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2\omega_x \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_1(\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z) + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \frac{d\omega_y}{dt} - \alpha_1 \beta_1 \frac{d\omega_z}{dt} - 2(\beta_1 \omega_y + \alpha_1 \omega_z) \frac{d\beta_1}{dt}] - ml[l\omega_x^2 + (l+c)\omega_y^2 + c\omega_z^2 - \frac{1}{2} j(\alpha_1^2 + \beta_1^2)] \alpha_1 = 0; \quad (2)$$

$$ml[l \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} + j \beta_1 + \frac{dV_{0y}}{dt} + c(\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y)] + ml^2[\frac{1}{2} \beta_1 \frac{d^2}{dt^2} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + -2\omega_x \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y \omega_z) + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \frac{d\omega_y}{dt} + \alpha_1 \beta_1 \frac{d\omega_y}{dt} + 2(\beta_1 \omega_y + \alpha_1 \omega_z) \frac{d\alpha_1}{dt}] - ml[l\omega_x^2 + c\omega_y^2 + (l+c)\omega_z^2 - \frac{1}{2} j(\alpha_1^2 + \beta_1^2)] \beta_1 = 0. \quad (3)$$

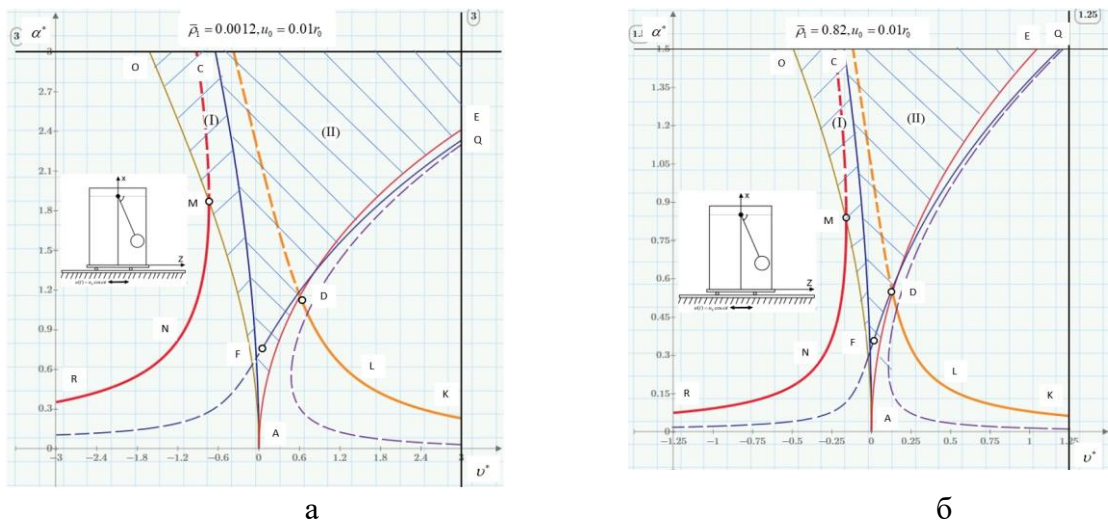


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний механической модели, соответствующей уровням жидкостей:  $h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1$ ,  $u_0 = 0.01r_0$ , (а)-  $\rho_1 / \rho_2 = 0.0012$ , (б) -  $\rho_1 / \rho_2 = 0.82$

На рис. 2. приведены АЧХ эквивалентного тела со сферическим маятником, соответствующего уровням жидкостей  $h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1$ ,  $u_0 = 0.01r_0$ , (а)- случай соотношения плотностей (воздух-вода  $\rho_1 / \rho_2 = 0.0012$ ), (б) - случай соотношения плотностей (керосин-вода  $\rho_1 / \rho_2 = 0.82$ ).

На рис. 3. приведены АЧХ эквивалентного тела со сферическим маятником, соответствующего уровням жидкостей  $h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1$ , (а) угловое амплитудное значение ( $\psi = 0.01$ ), (б) угловое амплитудное значение ( $\psi = 0.05$ ).

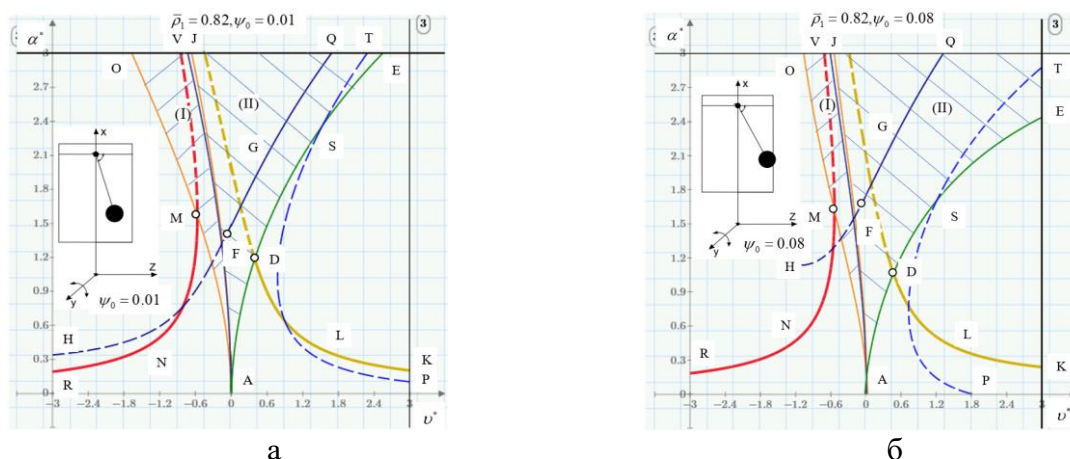


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных колебаний механической модели, отвечающей уровням жидкостей:  $h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1$ ,  $\rho_1 / \rho_2 = 0.82$ , а -  $\psi = 0.01$ , б -  $\psi = 0.05$

На рисунках 2 и 3 сплошные линии  $FGQ$  обозначают появление устойчивых изменений координаты  $\beta(t)$ , которые взаимодействуют с основной формой и вызывают вращение узлового диаметра на поверхности раздела жидкостей. Сплошные линии  $RNM$  и  $KLD$  представляют собой плоские линейные устойчивые колебания, а линии  $AMO$  и  $ADE$  обозначают правые и левые границы областей неустойчивых режимов возникновения параметрических колебаний.

Использование направляющих косинусов в качестве обобщенных координат сферического маятника значительно упрощает структуру выражений и делает анализ системы более удобным и эффективным при сравнении уравнений механического аналога, и уравнений, соответствующих колебаниям цилиндрического сосуда с двухслойной жидкостью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вин Ко Ко, Темнов А. Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги. Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. "Естественные науки". № 3. С. 57-69.
2. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М., «Машиностроение», 1977, 208 с.

Вин Ко Ко, win.c.latt@gmail.com

Темнов Александр Николаевич, antt45@mail.ru



## О КРИТЕРИИ ОТРЫВА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ МАЛЫХ НЕРОВНОСТЕЙ В РАМКАХ ДВУХПАЛУБНОЙ МОДЕЛИ

Р.К. Гайдуков

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва  
roma1990@gmail.com



Широко известны двух- и трехпалубные модели пограничного слоя [1]-[6] для описания задач обтекания вязкой жидкостью малых локализованных неровностей (типа ямок, горбиков, ступенек) на различных поверхностях при больших значениях числа Рейнольдса  $Re$ . Важным их свойством является возможность моделирования отрыва пограничного слоя [5], который не допустим в рамках классической теории Прандтля.

Рассмотрим задачу обтекания плоскопараллельным потоком малой локализованной неровности на пластине в рамках двухпалубной модели [3], [4], см. рис. 1. Пусть неровность локализована в точке  $x = 1$ , достаточно удаленной от краев пластины (все переменные безразмерные), поверхность которой имеет вид  $y_s = \varepsilon^{4/3} h((x-1)/\varepsilon)$ , где  $\varepsilon = Re^{-1/2}$  – малый параметр, а  $h(\xi) \in S$  – заданная гладкая функция.

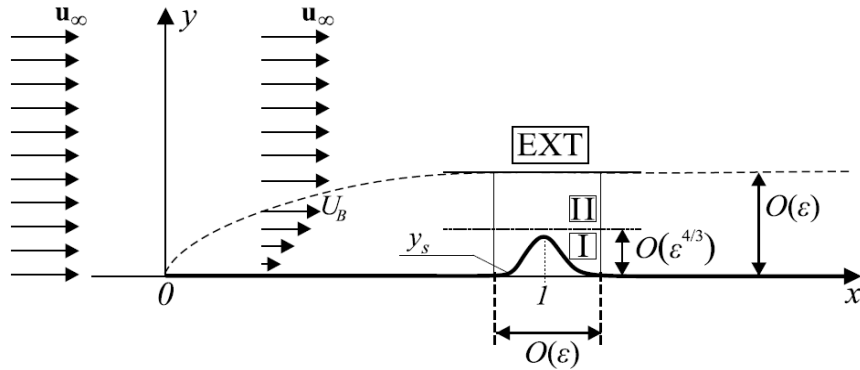


Рис. 1. Двухпалубная структура пограничного слоя: I – нижняя палуба, II – средняя палуба, EXT – область внешнего потенциального течения

В [3] было показано, что формирование зоны отрыва пограничного слоя (с образованием вихря внутри нее) происходит не всегда, а при определенных геометрических параметрах неровности. Однако, точного критерия до сих пор не было получено, были лишь сформулированы гипотезы о критическом значении кривизны поверхности, после которого происходит отрыв [4], и аналогичная гипотеза о амплитуде  $A$  неровности [3] – отрыв происходит при  $|A|$  превышающем некоторое значение, см. рис. 2.

Нас интересует течение в окрестности неровности (на нижней палубе двухпалубной структуры, см. рис. 1), которое описывается системой уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением [3], [4], [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{dh}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + v \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{dp}{d\xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{dh}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\theta=0} = v|_{\theta=0} = 0, \quad u|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \sim c\theta, \quad v|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad u|_{\theta \rightarrow \infty} \sim (c + h(\xi))\theta, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} c(\theta + 0.2\theta h(\xi)), & \theta \leq 5, \\ c(\theta + h(\xi)), & \theta > 5, \end{cases}, \quad \frac{dp}{d\xi} = -cv|_{\theta \rightarrow \infty}, \quad (3)$$

где  $t$  – время,  $\xi = (x-1)/\varepsilon$  и  $\theta = (y - h(\xi))/\varepsilon^{4/3}$  – горизонтальная и вертикальная погранслоиные переменные, такие что обтекаемая поверхность в них становится плоской ( $y = y_s \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (\xi, \theta)} \theta = 0$ ),  $u = u(t, \xi, \theta)$  и  $v = v(t, \xi, \theta)$  – тангенциальная и нормальная компоненты скорости,  $p$  – самоиндуцированное давление,  $c \approx 0.3322$  – локальное значение касательного напряжения на поверхности невозмущенной задачи.

Рассмотрим профиль неровности в виде  $h(\xi) = Ae^{-\xi^2/B}$ , где параметры  $B > 0$  (играет роль «ширины»),  $A \in \mathbb{R}$  ( $A > 0$  – горбик,  $A < 0$  – ямка). Численное моделирование показало, что решение задачи (1) – (3) всегда выходит на стационар: или наблюдается ламинарное обтекание, или ламинарное обтекание со стационарной зоной отрыва погранслоя, см. рис. 2. Проверено, что эти результаты не зависят от выбора начального условия, меняется лишь время установления решения. Это также видно, если визуализировать границы зоны с вихрями с помощью касательного напряжения на границе [4] – функции  $\zeta(t, \xi) = (\partial u / \partial \theta)|_{\theta=0}$ : вне области с вихрем  $\zeta(t, \xi) > 0$ , в области вихря  $\zeta(t, \xi) < 0$ , а точки  $\xi^\pm(t)$ , в которых  $\zeta(t, \xi^\pm(t)) = 0$  и  $\zeta(t, \xi) < 0$  при  $\xi^- < \xi < \xi^+$ , являются границами зоны отрыва, см. серые области на рис. 3. В частности, перед отрывом появляется точка  $\xi^*$  такая, что  $\zeta(t, \xi^*) = 0$ , которая затем распадается на две точки  $\xi^- < \xi^+$ . Отметим, что из результатов моделирования (см. рис. 5) получено, что точка  $\xi^* = \sqrt{B/2}$  – это точка нулевой кривизны функции  $h$ , такая что  $h'$  имеет в этой точке минимум. Если мы нашли стационарную зону отрыва, то существует значение времени  $t^*$  такое, что  $\xi^\pm(t)$  становятся постоянными для любого  $t > t^*$ , т.е. траектории  $\xi^\pm(t)$  становятся прямыми, параллельными оси  $t$ , см. рис. 3(б) и (в). Отметим, что вихри, предшествующие установлению стационарного ламинарного режима на рис. 3(а) обусловлены лишь выбором начального условия (3), которое содержит в себе изначально некоторую неустойчивость.

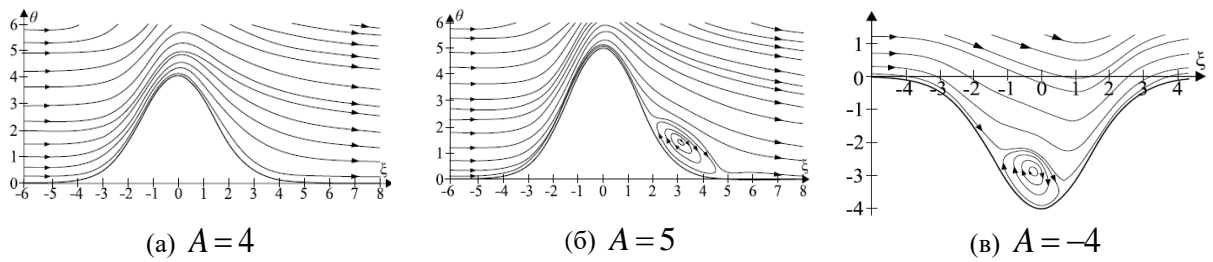


Рис. 2. Линии тока установившегося течения при  $B=4$

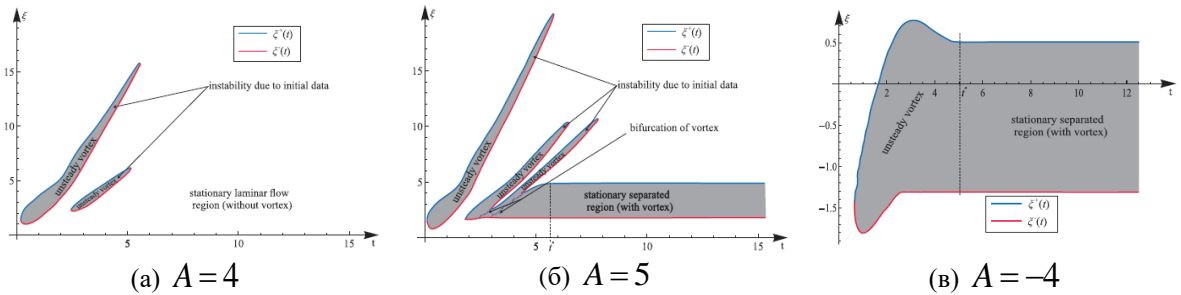


Рис. 3. Траектории границ  $\xi^\pm(t)$  вихревой зоны во времени при  $B=4$

После проведения большой серии численных экспериментов получены значения критической амплитуды  $A^*$  неровности в зависимости от параметра  $B \in [0.1, 10]$  (см. красные звездочки на рис. 4): стационарная зона отрыва формируется при  $|A| \dots A^*$ . Для полученных данных построены аппроксимации со среднеквадратичной ошибкой порядка  $10^{-5}$ : для горбика ( $A > 0$ ) –  $A_+^*(B) \approx 1.3008 + 2.2025 \cdot B^{0.2149}$ , для ямки ( $A < 0$ ) –

$A_*(B) \approx 6.8888 - 9.5999 \cdot B^{0.0424}$ , см. кривые на рис. 5. Важным результатом является то, что вдоль полученных кривых максимальная кривизна  $K = \max_{\xi \in \Omega} k(\xi)$ ,  $k(\xi) = h''(\xi) / (1 + (h'(\xi))^2)^{3/2}$  не постоянна, см. рис. 6, т.е. никакого критического значения кривизны, после которого формируется отрыв, не существует. Также видна сильная разница для случая горбика и ямки, хотя их геометрия совпадает с точностью до знака  $A$ . Таким образом, полученные результаты показывают, что невозможно построить универсальный (для любого вида неровности) критерий возникновения области отрыва пограничного слоя в зависимости от геометрии неровности.

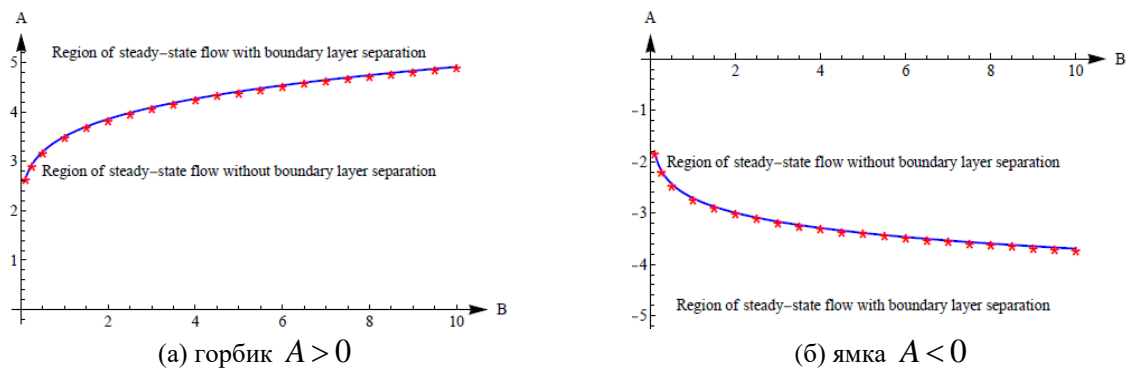


Рис. 4. Кривые, разграничивающие два типа устойчивости решений: красные звездочки – результаты численного моделирования, синяя кривая – полученные аппроксимации

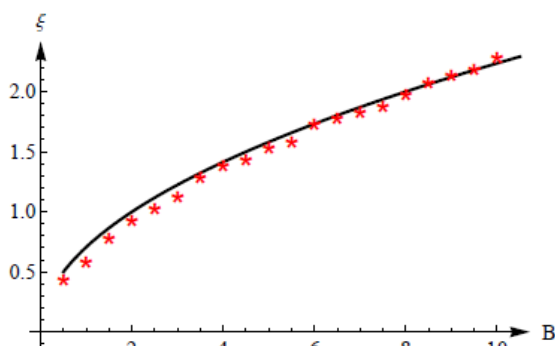


Рис. 5. Точка формирования вихря (красные звездочки – результаты численного моделирования)

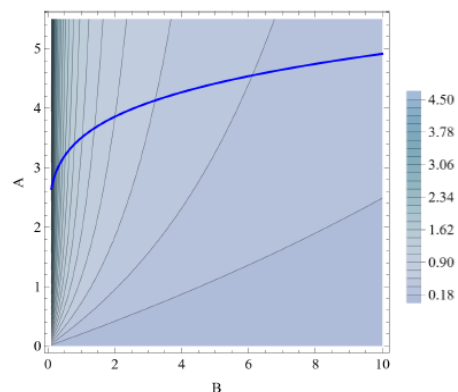


Рис. 6. Изолинии максимальной кривизны и кривая с рис.4(a)

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Выражаю благодарность Л.Е. Лунгину за часть полученных результатов численного моделирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith F.T. Laminar Flow Over a Small Hump on Flat Plate // J. Fluid Mech. 1973. Vol. 57. P. 803–824.
2. Yapalparvi R. Double-Deck Structure Revisited // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2012. Vol. 31. P. 53–70.

3. Gaydukov R.K. Double-Deck Structure in the Problem of a Compressible Flow along a Plate with Small Localized Irregularities on the Surface // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2018. Vol. 71. P. 59–65.
4. Gaydukov R.K. Double-Deck Structure in the Fluid Flow Problem over Plate with Small Irregularities of Time-Dependent Shape // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2021. Vol. 89. P. 401–410.
5. Sychev V.V., Ruban A.I., Korolev G.L., Sychev Vic.V. Asymptotic Theory of Separated Flows. Cambridge University Press. 1998.
6. Gaydukov R.K., Danilov V. G. Asymptotic Solutions of Flow Problems with Boundary Layer of Double-Deck Structures // Math. Notes. 2022. Vol. 112. P. 523-532.

Гайдуков Роман Константинович, roma1990@gmail.com



## ВЛИЯНИЕ ВОЛНОВОГО КРОВОТОКА НА ДЕФОРМАЦИЮ АОРТЫ С АНЕВРИЗМОЙ

*Д.В. Гандилян\*, Д.С. Лисовенко*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*david.ghandilyan@mail.ru*

Кровь представляет собой взвесь клеток в водном растворе, в котором 92% составляет вода [1]. В крови присутствуют клетки нескольких типов, но основные – эритроциты, концентрация которых очень высокая – примерно  $5 \times 10^6$  мм<sup>-3</sup>. Эритроциты – это красные клетки, которые содержат белок – гемоглобин. Вязкость крови меняется так же, как её растворителя – воды. В данной работе рассматривается брюшной участок аорты с аневризмой [2], в верхнем сечении которого происходит волнообразное втекание крови [3].

Исследование механики деформирования стенок брюшной аорты играет важную роль в понимании ее функционального состояния и патологических процессов, таких как аневризма. Брюшная аорта является крупным, магистральным сосудом, обеспечивающим кровоснабжение важнейших органов в животе. Ее стенка характеризуется сложной структурой и механическими свойствами и при этом она подвергается большим нелинейным деформациям под воздействием движущегося в нем кровотока.

В нормальном состоянии деформация стенки аорты определяется движением кровотока (внутренним давлением), при которой поддерживается функциональная целостность сосуда. Однако при развитии аневризмы происходит локальное расширение стенки с нарушением ее механических свойств и изменением характера кровотока. Это приводит к асимметрии деформаций, снижению прочности стенки и возникновению зон с высоким напряжением, что повышает риск разрыва аневризмы.

Изучение механики деформирования брюшной аорты в норме и при аневризмах с дефектами важно для понимания патогенеза заболевания и разработки методов диагностики и выбора оптимального хирургического лечения. Современные исследования включают численное моделирование гемодинамики и деформаций в стенках брюшной аорты, что позволяет оценить состояние сосуда и прогнозировать риски осложнений.

Участок брюшной аорты моделируется как гиперупругий изотропный материал. Основой модели служила Нео-Гуковская модель гиперупругости (описываемая с помощью известного соотношения потенциальной упругой энергии деформации), позволяющая достаточно точно описывать поведение ткани сосуда при больших деформациях

— до 30–40% растяжения и до 90% сдвига, при этом для его описания достаточно знать немного параметров (только коэффициенты Ламе) [4,5]. Кровь моделировалась как вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость, для описания которого используются известные соотношения: уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности (сплошности).

В качестве известных входных данных используются: коэффициенты Ламе и плотность для брюшной аорты (аневризмы); для крови – плотность, динамическая вязкость, а также давления на входе и выходах брюшной аорты, которые задаются с помощью периодической функции  $f(t)$ , которая моделирует «пульсацию» с периодом в 1 секунду:

$$f(t) = \begin{cases} (1 - \alpha) \sin(\pi t), & 0 < t \leq 1/2, \\ 1 - \alpha \sin(2\pi(t - 1/2)), & 1/2 < t < 1, \end{cases} \quad \alpha = 1/3.$$

у которой интервал времени от 0 до 0,5 с не несет физического смысла - он служит для сглаживания кривой, что облегчает определение начального состояния системы.

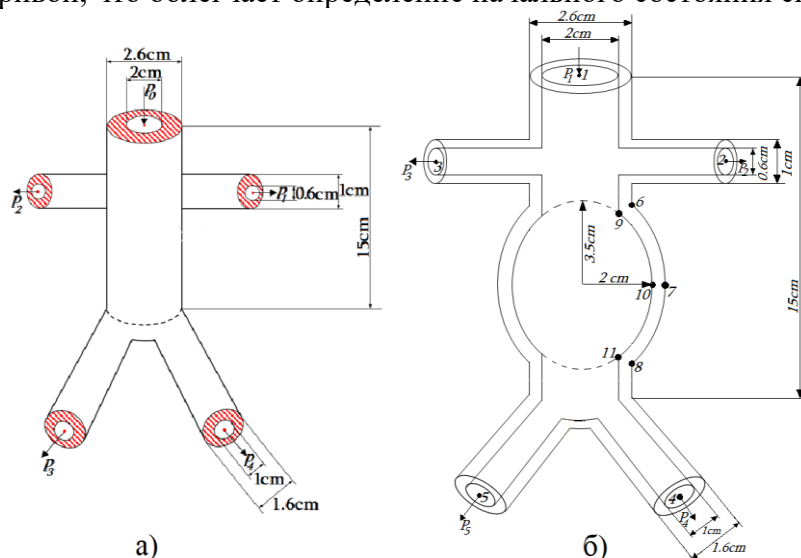


Рис. 1. Трехмерная модель брюшной аорты а) – в нормальном состоянии, б) – с аневризмой типа «бочка».

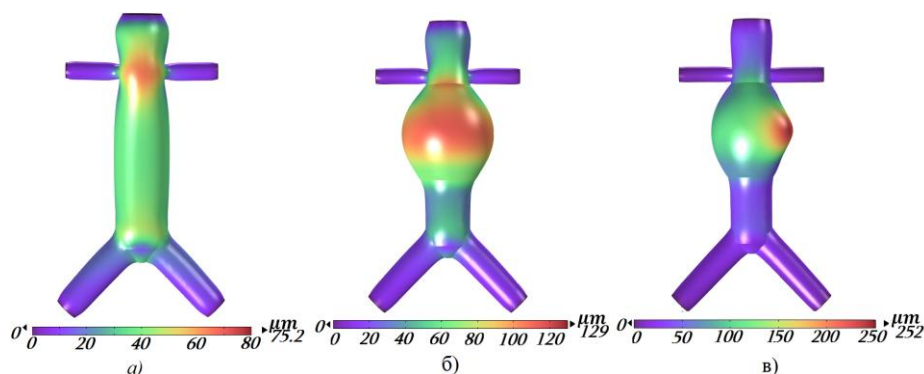


Рис. 2. Визуализация деформации стенки аорты (а) в нормальном состоянии, (б) с аневризмой типа «бочка», (в) с уточненной стенкой аневризмы (до 0.5 мм).

Для решения задачи использовался метод конечных элементов в среде COMSOL Multiphysics [6]. При этом также для решения данной задачи применялся гибридный ALE-подход (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), который позволяет учитывать движение как стенки, так и жидкости, при этом адаптируя сетку к деформируемой геометрии (стенки

аорты), где одновременно решаются уравнения движения жидкости и деформации твердого тела. Это критически важно для обеспечения достаточно точного моделирования пульсирующего кровотока в аорте с аневризмой.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124013000674-0).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. Москва: Мир, 1983. 400 с.
2. *Бокерия Л.А.* Аневризмы аорты. М.: Медицина. 2001. 204 с.
3. *Верезуб Н.А., Гандилян Д.В., Лисовенко Д.С., Пантюшов В.В., Простомолотов А.И.* Механика кровотока и деформирования стенок в брюшной аорте //Изв. РАН МТТ. 2025, № 2. С. 96-118. DOI 10.31857/S1026351925020068.
4. *Attard M.* Finite strain - isotropic hyperelasticity // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. № 17. P. 4353-4378. DOI 10.1016/S0020-7683(03)00217-8
5. *Шмурак М.И., Кучумов А.Г., Воронова Н.О.* Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // Пермский национальный исследовательский политехнический университет. 2017. № 1. С. 230–243.
6. Fluid-Structure Interaction in a Network of Blood Vessels // Comsol Documentation. 18 p. [https://doc.comsol.com/6.1/doc/com.comsol.help.models.sme.blood\\_vessel/blood\\_vessel.html](https://doc.comsol.com/6.1/doc/com.comsol.help.models.sme.blood_vessel/blood_vessel.html)

Гандилян Давид Ваганович, david.ghandilyan@mail.ru,  
Лисовенко Дмитрий Сергеевич, lisoventk@ipmnet.ru



## **ЛАБОРАТОРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СТУПЕНЧАТОЙ СТРУКТУРЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ОДНОРОДНОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ**

*В.В. Герасимов\*, А.Г. Зацепин*  
*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва*  
*gerasimov.vv@ocean.ru*

Была проведена серия экспериментов по перемешиванию водного слоя с изначально постоянным вертикальным градиентом солености (плотности) вертикальными стержнями, совершающими циклические движения в горизонтальном направлении, которые оказывают равномерное турбулентное воздействие по всей толщине водного слоя. В результате перемешивания, вызванного движущимися стержнями, в большинстве экспериментов формировалась ступенчатая структура, выраженная в виде последовательности квазиоднородных слоев, разделенных слоями с высокими градиентами плотности. В некоторых экспериментах ступенчатая структура не формировалась, и расслоение характеризовалось непрерывным вертикальным градиентом плотности, уменьшающимся со временем. В экспериментах с "расслоением" измерялись толщины квазиоднородных слоев. Установлена автомодельная зависимость толщины безразмерного слоя от числа

Ричардсона. Представлена диаграмма, позволяющая судить о закономерностях формирования слоя при различных значениях внешних безразмерных параметров задачи: чисел Рейнольдса и Ричардсона. Эксперименты показали, что не только диффузионная конвекция, но и длительное механическое перемешивание при определенных условиях приводит к ступенчатому расслоению линейно стратифицированной водной среды. При этом, закономерности образования структуры соответствуют механизму Филлипса-Посментьера. [1 - 3].

Процесс перемешивания и формирования ступенчатой структуры был визуализирован и записан с помощью теневого устройства (шлирен-метод). Распределение неоднородностей показателя преломления света (неоднородностей градиента плотности) наблюдалось и фотографировалось в круге света диаметром 20 см в центре бассейна. Области с повышенным градиентом плотности (высокоградиентные слои) представляют собой светлые полосы, более темные промежутки между ними соответствовали квазиоднородным слоям. Таким образом, стало возможным проследить формирование и эволюцию квазиоднородных слоев и высокоградиентных прослоек, которые вместе образовывали ступенчатую структуру.

Оказалось, что безразмерная толщина слоев  $h/A \approx U^2/N^2 d^2 = Ri^{-1}$ , где  $h$  – толщина слоя,  $A$ ,  $U^2$  – амплитуда и квадрат средней скорости колебания стержней по горизонтали, соответственно,  $N^2 = (g/\rho)(dp/dz)$  – квадрат частоты Вайселя–Брента для линейно-стратифицированного водного слоя (начальное состояние,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность воды),  $Ri = (Nd/U)^2$  – начальное число Ричардсона. В размерном виде эта зависимость свидетельствует о том, что толщина квазиоднородного слоя пропорциональна произведению амплитуды колебания стержней на отношение кинетической энергии турбулентного воздействия к потенциальной энергии стратификации. Ранее делались не вполне удачные попытки параметризовать толщину слоев следующим образом:  $h = C*U/N = 4C*[A/(TN)]$ , где  $C$  – константа 2 [4, 5]. Параметризация, предложенная в данной работе и получившая достаточно надежное подтверждение (Рис. 1), выражается в виде следующей зависимости толщины слоев от определяющих размерных параметров задачи:  $h \approx 16A^3/(TNd)^2$ .

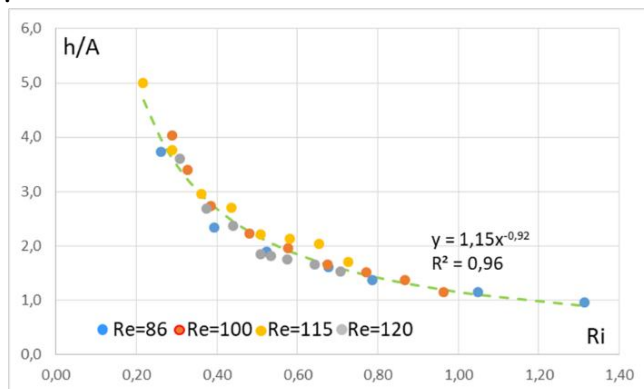


Рис. 1. Зависимость значений толщин слоев, нормированных на амплитуду колебаний решетки от  $Ri$  при различных значениях  $Re$ .

Область возникновения тонкой структуры на диаграмме в координатах  $Re = Ud/\nu$  (где  $\nu$  – кинематическая вязкость воды),  $Ri$  ограничена двумя прямыми и представляет собой сектор (рис. 2). Первая, квазивертикальная прямая, является границей области практического отсутствия турбулентных возмущений при движении стержней при малых значениях  $Re$ . Вторая, квазигоризонтальная прямая, является границей области, в которой порождаемые стержнями возмущения достаточно интенсивны (малые значения  $Ri$ ) и создают вертикальный поток массы, не способствующий реализации механизма

Филлипса – Посментьера. В этой ситуации интенсивность турбулентных пульсаций не позволяет образоваться тонким горизонтальным слоям со скачком плотности, и тонкого расслоения стратифицированной водной среды не происходит.

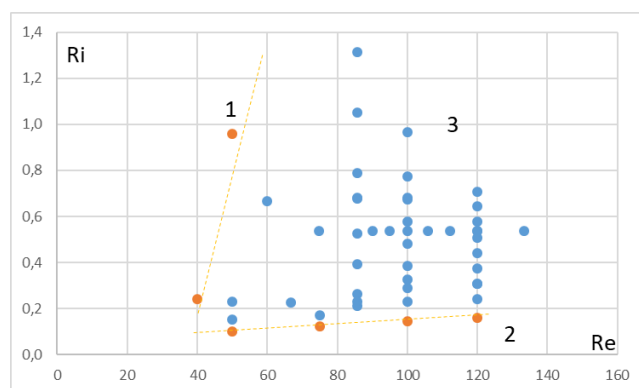


Рис. 2. Опыты с тонким расслоением -  $\bullet$  и без тонкого расслоения -  $\bullet$  стратифицированной жидкости в зависимости от  $Re$  и  $Ri$ . Области 1 и 2 – слои не образуются, область 3 - возникновения ступенчатой структуры.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. Н.П. Кузьминой за подробное обсуждение результатов работы и полезные рекомендации.

Работа выполнена в рамках темы госзадания №FMWE-2024-0016.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gerasimov V. V., Zatsepin A. G., Relationship between Fine Layering of Stratified Water Environment and Vertical Turbulent Mass Transport // *Oceanology*, 2024, Vol. 64, No. 5, pp. 647-657.
2. Phillips O. M. Turbulence in a strongly stratified fluid: Is it unstable? // *Deep Sea Res. Oceanogr. Abstr.* 1972. V. 19. P. 7–81
3. Posmentier E. S. The generation of salinity fine structure by vertical diffusion // *J. Phys. Oceanogr.* 1977. V. 7. P. 298–300.
4. Park, Y.-G., Whitehead, J. A., Gnanadesikan, A. Turbulent mixing in stratified fluids: layer formation and energetics // *J. Fluid Mech.* 1994. 279, 279–311.
5. Zatsepin A. G. On peculiarities and similarities of the coherent structure formation in stratified and rotating fluid // In: *Turbulent mixing in geophysical flows* (P.F. Linden and J.M. Redondo - Eds.). 2001. P. 211-299. CIMNE, Barcelona.

Герасимов Валерий Валериевич gerasimov.vv@ocean.ru

Зацепин Андрей Георгиевич zatsepin@ocean.ru

— ♦ ♦ ♦ —

## ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ЦИЛИНДРА НА КРУТИЛЬНЫЕ АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ

Я.В. Демченко

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

demchenko@imec.msu.ru



В последние годы всё более актуальными становятся работы по созданию новых типов ветрогенераторов, в том числе основанных на явлении резонансных аэроупругих колебаний цилиндра, вызванных дорожкой Кармана, которая образуется позади плохообтекаемых тел при обтекании их поперечным потоком газа или жидкости [1, 2]. В нашей работе [3] экспериментально исследовалась система, состоящая из круглого цилиндра конечного размаха, закрепленного на консольной балке (Рис. 1а). Данная конфигурация рассматривалась, например, в статье [4], где исследовались классические поперечные колебания при различных длинах цилиндра. Однако мы экспериментально показали в такой экспериментальной системе наличие, помимо классических поперечных колебаний, ранее не исследованного крутильного типа колебаний (Рис. 1б), рассмотрев конфигурацию с фиксированной длиной цилиндра. Этот тип колебаний вызван резонансом аэродинамических сил с вращательными колебаниями цилиндра, в котором балка совершает крутильные движения. Для такой экспериментальной системы в силу конечности длины цилиндра и наличия открытых торцов важное значение играет влияние концевых эффектов на колебания, а также на структуру течения в следе за цилиндром. В работе [4] авторы изучали поведение поперечных колебаний и течения в следе при различных концевых условиях, меняя длину цилиндра, в частности, показав, что чем меньше длина цилиндра, тем больше амплитуда колебаний. Целью же настоящей работы является изучение длины цилиндра на открытый нами крутильные аэроупругие колебания цилиндра.

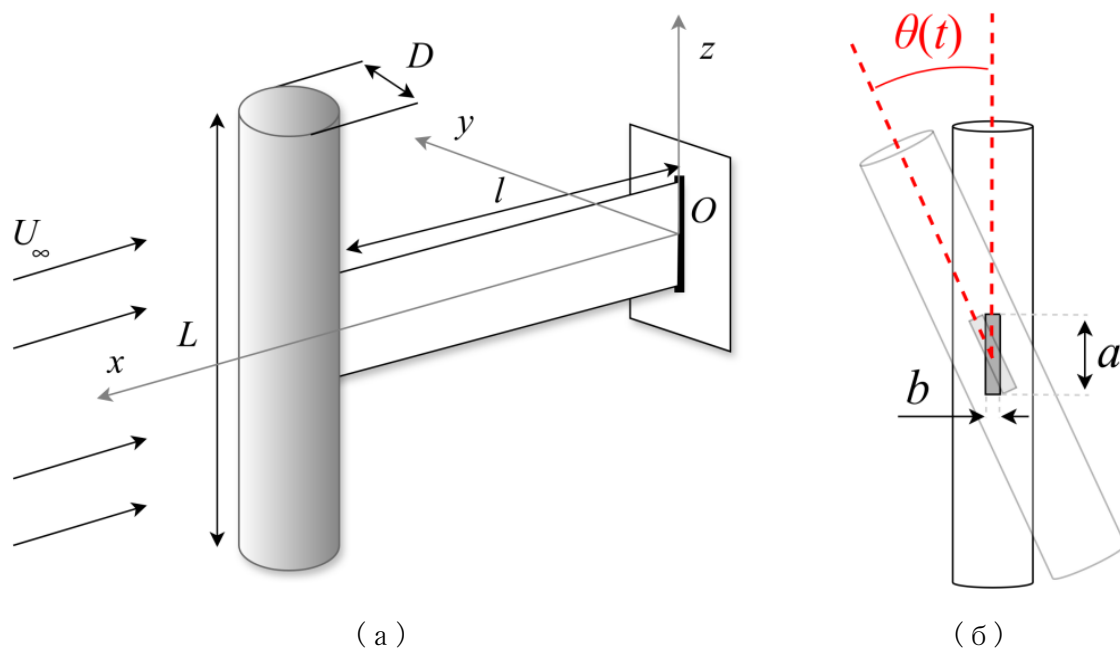


Рис. 1. Круглый цилиндр закрепленный на конце упругой балки. (а) Геометрия экспериментальной модели, (б) крутильные колебания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernitsas, M. M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y., Garcia, E. M. H., 2008. VIVACE (Vortex Induced Vibration Aquatic Clean Energy): A new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 130(4).
2. Williamson, C. H. K., Govardhan, R., 2004. Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36, 413–455.

3. Demchenko, Y., Ivanov, O., and Vedenev, V., 2025. Experimental investigation of rotational vortex-induced vibrations of a circular cylinder attached to an elastic beam. Journal of Fluids and Structures, 133, 104266.
4. Azadeh-Ranjbar, V., Elvin, N., Andreopoulos, Y., 2018. Vortex-induced vibration of finitlength circular cylinders with spanwise free-ends: Broadening the lock-in envelope. Physics of Fluids, 30(10), 105104.

Демченко Ярослав Владиславович, demchenko@imec.msu.ru



## РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ АЗЕОТРОПНЫХ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*А.В. Дмитренко<sup>1,2,\*</sup>, Д.В. Зинченко<sup>1</sup>, Д. А. Белов<sup>1</sup>, Д.И. Зуброва<sup>1</sup>,  
Н.О. Пенюшкин<sup>1</sup>, А.В. Конюхов<sup>1</sup>, А.В. Челмакин<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Российский университет транспорта «МИИТ», Москва

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва  
AVDmitrenko@mephi.ru

Представлены результаты гидродинамических расчетов для азеотропных теплоносителей. Показано согласование расчетов с экспериментом.

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие численных методов RANS, LES, DNS [1,2], не снижают востребованность инженерных методик. По этой причине, результаты, полученные на основе стохастической теории [3-30] позволяют учесть гидравлические характеристики течений азеотропных теплоносителей предлагаемых в аппаратах с органическим цикле Ренкина.

### РАСЧЕТ ПОТЕРЬ НА ТРЕНИЕ

Применению азеотропных теплоносителей в энергетических установках для преобразования низкопотенциальной теплоты уделяется особое внимание, ввиду их технико-экономических характеристик. Основное внимание уделяли термодинамическим параметрам органического цикла Ренкина для каждого теплоносителя. В то же время, важнейшим является вопрос о КПД аппаратов на органическом цикле Ренкина с учетом потерь давления в аппаратах установки. На базе стохастических уравнений [3-30] представлены результаты расчетов коэффициентов гидравлического сопротивления  $\lambda$  для азеотропных теплоносителей при течении в трубах. Формула для  $\lambda$ , с учетом возможного ламинарно-турбулентного перехода имеет вид [30]

$$\lambda = \frac{8}{n} \left( \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \right)^{1/n} \left( \left( \frac{\sqrt{E_{st}/\rho}}{U_0} \right) \right)^{1-1/n} \left( \frac{2}{2,5} \right)^{1-1/n} (Re_d)^{-1/n} \quad (1)$$

где  $Re_d$  число Рейнольдса,  $d$ -диаметр трубы,  $n$ - показатель профиля скорости в трубе,  $\left( \frac{\sqrt{E_{st}/\rho}}{U_0} \right)$ -соответственно интенсивность турбулентности. Формула (1), при развитом турбулентном течении, соответственно для режимов  $Re_d < 10^5$  принимает вид

$$\lambda \approx 0.125 \cdot (\text{Re}_d)^{-1/7} \quad (2)$$

В результате, расчет гидравлических потерь с применением формул (1) и (2) по известной зависимости Вейсбаха дает возможность, учесть потери давления в трубах с азеотропным теплоносителем.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчеты по формулам (1),(2) согласно [3-30] показывают соответствие величин, полученных на основе стохастических уравнений, позволяет вести верифицированный расчет потерь давления в трубах с азеотропным теплоносителем, что позволит существенно упростить оценку действительного КПД в энергооборудовании [31,32].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dmitrenko A.V.* Fundamentals of heat and mass transfer and hydrodynamics of single-phase and two-phase media. Critical integral statistical methods and direct numerical simulation. // Galleya print: Moscow. 2008. 398p.
2. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 6th ed., New York: McGraw-Hill, 1968
3. *Dmitrenko A.V.* Equivalence of measures and stochastic equations for turbulent flows // *Dokl. Phys.* 2013.V.58 . № 6, P. 228–235.
4. *Dmitrenko A.V.* Calculation of pressure pulsations for a turbulent heterogeneous medium // *Dokl. Phys.* 2007. V.52 . № 7. P.384-387.
5. *Dmitrenko A.V.* Some analytical results of the theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal flows // *Adv. Studies Theor. Phys.* 2014.V. 8, №. 25, P. 1101–1111.
6. *Dmitrenko A. V.* Analytical estimation of velocity and temperature fields in a circular tube on the basis of stochastic equations and equivalence of measures //, *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2015.V. 88, . №6, pp. 1569–1576.
7. *Dmitrenko A. V.* Determination of critical Reynolds numbers for nonisothermal flows with using stochastic theories of turbulence and equivalent measures // *Heat Transfer Res.* 2016. V. 47, №. 1. P. 338–399.
8. *Dmitrenko A. V.* An estimation of turbulent vector fields, spectral and correlation functions depending on initial turbulence based on stochastic equations. The Landau fractal equation // *Int. J. Fluid Mech. Res.* 2016. V. 43, №. 3, P.82–91.
9. *Dmitrenko A .V.* The theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal flow on the flat plate // *Int. J.FMR.* 2016. V. 43, №. 2, P. 182–187.
10. *Dmitrenko A. V.* Stochastic equations for continuum and determination of hydraulic drag coefficients for smooth flow at plate and smooth round tube with taking into account intensity and scale of turbulent flow // *Continuum Mech. and Thermodyn.* V. 29, №1, P. 1–9.
11. *Dmitrenko A .V.* Analytical determination of the heat transfer coefficient for gas, liquid and liquid metal flows in the tube based on stochastic equations and equivalence of measures for continuum // *Contin.Mechan. Thermodyn.* 2017.V. 29.№ 6.P.1197-1206
12. *Dmitrenko A .V.* Estimation of the critical Rayleigh number as a function of an initial turbulence in the boundary layer of the vertical heated plate. // *Heat Transf. Res.* 2017.V.48. No. 13. P. 1195–1202.
13. *Dmitrenko A.V.* Determination of the Coefficients of Heat Transfer and Friction in Super critical-Pressure Nuclear Reactors with Account of the Intensity and Scale of Flow Turbulence on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures // *J.of Eng. Phys.and Thermophys.* 2017.V.90 .№6. P.1288-1294.
14. *Dmitrenko A.V.* 2013 *Regular Coupling between Deterministic (Laminar) and Random (Turbulent) Motions-Equivalence of Measures Scientific Discovery Diploma* No. 458

registration No. 583 of December 2

15. *Dmitrenko A.V.* Theory of Equivalent Measures and Sets with Repeating Denumerable Fractal Elements. Stochastic Thermodynamics and Turbulence. Determinacy–Randomness Correlator //Galleya-Print: Moscow.2013.226p. [ in Russian]
16. *Dmitrenko A.V.* Uncertainty relation in turbulent shear flow based on stochastic equations of the continuum and the equivalence of measures// Continuum Mech. and Thermodyn. 2019. DOI:10.1007/s00161-019-00784-0
17. *Dmitrenko A.V.* THE ESTIMATION OF THE CORRELATION DIMENTION OF THE ATTRACTOR IN THE BOUNDARY LAYER OF EARTH'S ATMOSPHERE// ПОТОКИ И СТРУКТУРЫ -МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ВЛАДИВО СТОК, РОССИЯ. 2019 г. (ИПМех РАН) Сб.Трудов с.70-73
18. *Dmitrenko A.V.* THE THEORETICAL SOLUTION FOR THE REYNOLDS ANALOGY BASED ON THE STOCHASTIC THEORY OF TURBULENCE//JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Т. 18. № 2. С. 463-476, [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM018020463](http://dx.doi.org/10.17654/HM018020463)
19. *Dmitrenko A.V.* SOME ASPECTS OF THE FORMATION OF THE SPECTRUM OF ATMOSPHERIC TURBULENCE// JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. Т. 19. № 1. С. 201-208. [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM019010201](http://dx.doi.org/10.17654/HM019010201)
20. *Dmitrenko A.V.* Formation of a Turbulence Spectrum in the Inertial Interval on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures// JOURNAL OF ENGINEERING PHYSICS AND THERMO-PHYSICS, 2020 Vol. 93, No. 1, January, 2020,pp122-127
21. *Dmitrenko A.V.* The correlation dimension of an attarctor determined on the base of the theory of equivalence of measures and stochastic equations for continuum// Continuum Mechanics and Thermodynamics, V32,N.2, pp.63-74 DOI:10.1007/s00161-019-00784-0
22. *А.В. Дмитренко* Современные аспекты стохастической теории гидродинамики// XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблем ам теоретической и прик - ладной механики, Уфа, 20-24 августа 2019. Сб.трудов, Т.2,с.339-341
23. *А.В. Дмитренко, М.А. Колосова.* Определение гидравлических характеристик промышленных агрегатов на основе стохастической теории гидродинамики.// XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблем ам теоретической и прикладной механики, Уфа, 20-24 августа 2019 Сб.трудов,Т.2, с.342-343
24. *Dmitrenko A.V., Kolosova M.A.* THE POSSIBILITY OF USING LOW-POTENTIAL HEAT BASED ON THE ORGANIC RANKINE CYCLE AND DETERMINATION OF HYDRAULIC CHARACTERISTICS OF INDUSTRIAL UNITS BASED ON THE THEORY OF STOCHASTIC EQUATIONS AND EQUIVALENCE OF MEASURES//JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. V.21. № 1.pp. 11-18 [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM02101020](http://dx.doi.org/10.17654/HM02101020)
25. *Dmitrenko, A.V.:* Reynolds Analogy Based on the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *J Eng Phys Thermophy* 94, 186–193 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02296-8>
26. *Dmitrenko, A.V.:* Theoretical solutions for spectral function of the turbulent medium based on the stochastic equations and equivalence of measures. *Continuum Mech. Thermodyn.* 33, 603–610 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00890-4>
27. *Dmitrenko, A.V.:* Determination of Critical Reynolds Number for the Flow Near a Rotating Disk on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *Fluids* 2021, 6(1),5; <https://doi.org/10.3390/fluids6010005>
28. *Dmitrenko,A.V.:* Analytical Estimates of Critical Taylor Number for Motion between Rotating Coaxial Cylinders Based on Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *Fluids* 2021, 6, 306. <https://doi.org/10.3390/fluids6090306>
29. *A.V. Dmitrenko,* Prediction of laminar–turbulent transition on flat plate on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// Cont. Mech. and Thermodyn., 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01078-0>

30. *Dmitrenko, A.V.* Thoretical calculation of laminar–turbulent transition in the round tube on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// Cont. Mech. and Thermod., 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01125-4>
31. *Dmitrenko A. V., Kolosova M.A., Kolpakov M.A., Chernyshov V.N.* Calculation of Efficiency and Thermal-Hydraulic Characteristics of ORC Power Plant Based on Low-Potential Heat of Hot Water Supply Boiler Room // JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 26. P. 143–155. <http://dx.doi.org/10.17654/0973576322017>
32. *Дмитренко А.В., Колосова М.А.* Электроэнергетическая система на базе водогрейной котельной // Энергетик. 2022. С. 46–49.

Дмитренко Артур Владимирович, AVDmitrenko@mephi.ru



## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ТРУБАХ С ГЛУБОКИМ ПРОФИЛИРОВАНИЕМ НА БАЗЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

*А.В. Дмитренко<sup>1,2,\*</sup>, Д. А. Белов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Российский университет транспорта «МИИТ», Москва*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва*

*AVDmitrenko@mephi.ru*

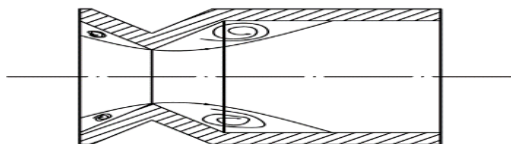
Представлены результаты гидродинамических расчетов для труб с глубоким профилированием с применением эмпирических и теоретических зависимостей на базе стохастической теории.

### ВВЕДЕНИЕ

Применение методов RANS, LES, DNS [1,2] требует задание начальных и граничных условий, которые зачастую трудно определить априори, что ведет к длительным численным экспериментам. Поэтому, результаты, полученные на основе аналитических формул на базе стохастической теории [3-30] позволяют учесть параметры течений в сложно-профилированных трубах.

### РАСЧЕТ ПОТЕРЬ НА ТРЕНИЕ

Для труб с глубоким профилированием протекание жидкости показано на рисунке 1.



*Рис. 1. Элемент трубы с глубоким профилированием*

Зависимость для расчета коэффициента сопротивления имеет вид:

$$\lambda = \frac{(\lambda_{\text{конф}} + \lambda_{\text{дифф}}) + \lambda_{\text{м}}}{2} + \lambda_{\text{гл1}} \quad (1)$$

Очевидно, что, при протекании жидкости в трубке с профилем Рис.1 будет происходить турбулизация потока. Возможная максимальная степень интенсивности турбулентности ( $Tu$ ) может достигать от 30% до 60%, а при наличии отрыва потока отношение

$\frac{\sqrt{\frac{E_{st}}{\rho}}}{U_0}$  может стать и более 80%. В результате на базе стохастических уравнений [3-30] коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda_{\text{гл1}}$  запишется как

$$\lambda_{\text{гл1}} = \frac{29}{n} \left( 3^{\frac{1-n}{n}} \right) * \left( \frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} * \left( \frac{U_0}{\sqrt{\frac{E_{st}}{\rho}}} \right)^{\frac{1-n}{n}} \quad (2)$$

где  $Re_d$  число Рейнольдса,  $d$ -диаметр трубы,  $n$ - показатель профиля скорости в трубе,

$\left( \frac{\sqrt{\frac{E_{st}}{\rho}}}{U_0} \right)$ -соответственно интенсивность турбулентности,  $U_0$  – скорость на оси трубы.

Формула (2) для режимов  $Re_d < 10^5$  принимает вид

$$\lambda \approx 0.125 \cdot (Re_d)^{-1/7} \quad (3)$$

В результате, расчет гидравлических потерь с применением формул (1)-(3) по зависимости Дарси-Вейсбаха дает возможность, учесть потери давления в трубах с глубоким профилированием.

Расчеты по формулам (1)-(3) согласно [3-30] показывают соответствие величин, полученных на основе стохастических уравнений с эмпирическими данными [31].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dmitrenko A.V.* Fundamentals of heat and mass transfer and hydrodynamics of single-phase and two-phase media. Critical integral statistical methods and direct numerical simulation. // Galleya print: Moscow. 2008. 398p.
2. *Schlichting, H., Boundary-Layer Theory*, 6th ed., New York: McGraw-Hill, 1968
3. *Dmitrenko A.V.* Equivalence of measures and stochastic equations for turbulent flows // *Dokl. Phys.* 2013.V.58 . № 6, P. 228–235.
4. *Dmitrenko A.V.* Calculation of pressure pulsations for a turbulent heterogeneous medium // *Dokl. Phys.* 2007. V.52 . № 7. P.384–387.
5. *Dmitrenko A.V.* Some analytical results of the theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal flows // *Adv. Studies Theor. Phys.* 2014.V. 8, №. 25, P. 1101–1111.
6. *Dmitrenko A. V.* Analytical estimation of velocity and temperature fields in a circular tube on the basis of stochastic equations and equivalence of measures //, *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2015.V. 88, . №6, pp. 1569–1576.
7. *Dmitrenko A. V.* Determination of critical Reynolds numbers for nonisothermal flows with using stochastic theories of turbulence and equivalent measures // *Heat Transfer Res.* 2016. V. 47, №. 1. P. 338–399.
8. *Dmitrenko A. V.* An estimation of turbulent vector fields, spectral and correlation functions depending on initial turbulence based on stochastic equations. The Landau fractal equation // *Int. J. Fluid Mech. Res.* 2016. V. 43, №. 3, P.82–91.
9. *Dmitrenko A. V.* The theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal flow on the flatplate // *Int. JFMR.* 2016. V. 43, №. 2, P. 182–187.

10. *Dmitrenko A. V.* Stochastic equations for continuum and determination of hydraulic drag coefficients for smooth fl at plate and smooth round tube with taking into account intensity and scale of turbulent flow//Continuum Mech. and Thermodyn.V. 29, №1, P. 1–9.
11. *Dmitrenko A. V.* Analytical determination of the heat transfer coefficient for gas, liquid and liquid metal flows in the tube based on stochastic equations and equivalence of measures for continuum //Contin.Mechan. Thermodyn. 2017.V. 29.№ 6.P.1197-1206
12. *Dmitrenko A. V.* Estimation of the critical Rayleigh number as a function of an initial turbulence in the boundary layer of the vertical heated plate. //Heat Transf. Res. 2017.V.48. No. 13. P. 1195–1202.
13. *Dmitrenko A.V.* Determination of the Coefficients of Heat Transfer and Friction in Super critical-Pressure Nuclear Reactors with Account of the Intensity and Scale of Flow Turbulence on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures //J.of Eng. Phys.and Thermophys.2017.V.90 .№6. P.1288-1294.
14. *Dmitrenko A.V.* 2013 *Regular Coupling between Deterministic (Laminar) and Random (Turbulent) Motions-Equivalence of Measures Scientific Discovery Diploma* No. 458 registration No. 583 of December 2
15. *Dmitrenko A.V.* Theory of Equivalent Measures and Sets with Repeating Denumerable Fractal Elements. Stochastic Thermodynamics and Turbulence. Determinacy–Randomness Correlator //Galleya-Print: Moscow.2013.226p. [ in Russian]
16. *Dmitrenko A.V.* Uncertainty relation in turbulent shear flow based on stochastic equations of the continuum and the equivalence of measures// Continuum Mech. and Thermodyn. 2019. DOI:10.1007/s00161-019-00784-0
17. *Dmitrenko A.V.* THE ESTIMATION OF THE CORRELATION DIMENSION OF THE ATTRACTOR IN THE BOUNDARY LAYER OF EARTH'S ATMOSPHERE// ПОТОКИ И СТРУКТУРЫ -МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ВЛАДИВО СТОК, РОССИЯ. 2019 г. (ИПМех РАН) Сб.Трудов с.70-73
18. *Dmitrenko A.V.* THE THEORETICAL SOLUTION FOR THE REYNOLDS ANALOGY BASED ON THE STOCHASTIC THEORY OF TURBULENCE//JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. T. 18. № 2. C. 463-476, [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM018020463](http://dx.doi.org/10.17654/HM018020463)
19. *Dmitrenko A.V.* SOME ASPECTS OF THE FORMATION OF THE SPECTRUM OF ATMOSPHERIC TURBULENCE// JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. T. 19. № 1. C. 201-208. [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM019010201](http://dx.doi.org/10.17654/HM019010201)
20. *Dmitrenko A.V.* Formation of a Turbulence Spectrum in the Inertial Interval on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures// JOURNAL OF ENGINEERING PHYSICS AND THERMO-PHYSICS, 2020 Vol. 93, No. 1, January, 2020,pp122-127
21. *Dmitrenko A.V.* The correlation dimension of an attractor determined on the base of the theory of equivalence of measures and stochastic equations for continuum// Continuum Mechanics and Thermodynamics, V32,N.2, pp.63-74 DOI:10.1007/s00161-019-00784-0
22. *A.B. Дмитриненко* Современные аспекты стохастической теории гидродинамики// XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 20-24 августа 2019. Сб.трудов, Т.2,с.339-341
23. *A.B. Дмитриненко, М.А. Колосова.* Определение гидравлических характеристик промышленных агрегатов на основе стохастической теории гидродинамики.// XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 20-24 августа 2019 Сб.трудов,Т.2, с.342-343
24. *Dmitrenko A.V., Kolosova M.A.* THE POSSIBILITY OF USING LOW-POTENTIAL HEAT BASED ON THE ORGANIC RANKINE CYCLE AND DETERMINATION OF HYDRAULIC CHARACTERISTICS OF INDUSTRIAL UNITS BASED ON THE THEORY OF STOCHASTIC EQUATIONS AND EQUIVALENCE OF MEASURES//JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. V.21. № 1.pp. 11-18 [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM02101020](http://dx.doi.org/10.17654/HM02101020)



25. *Dmitrenko, A.V.*: Reynolds Analogy Based on the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *J Eng Phys Thermophy* **94**, 186–193 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02296-8>
26. *Dmitrenko, A.V.*: Theoretical solutions for spectral function of the turbulent medium based on the stochastic equations and equivalence of measures. *Continuum Mech. Thermodyn.* 33, 603–610 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00890-4>
27. *Dmitrenko, A.V.*: Determination of Critical Reynolds Number for the Flow Near a Rotating Disk on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *Fluids* 2021, 6(1),5; <https://doi.org/10.3390/fluids6010005>
28. *Dmitrenko, A.V.*: Analytical Estimates of Critical Taylor Number for Motion between Rotating Coaxial Cylinders Based on Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *Fluids* 2021, 6, 306. <https://doi.org/10.3390/fluids6090306>
29. *A.V. Dmitrenko*, Prediction of laminar–turbulent transition on flat plate on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// *Cont. Mech. and Thermodyn.*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01078-0>
30. *Dmitrenko, A.V.* Thoretical calculation of laminar–turbulent transition in the round tube on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// *Cont. Mech. and Thermodyn.*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01125-4>
31. *А. А. Коноплев, Г. Г. Алексанян, Б. Л. Рытов, А. А. Берлин* / Об эффективности интенсификации теплообмена глубоким профилированием // Теоретические основы химической технологии. – 2012. – Т. 46, № 1. – С. 24. – EDN OOWMKR.
32. *Dmitrenko, A.V.*: Analytical Estimates of Critical Taylor Number for Motion between Rotating Coaxial Cylinders Based on Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *Fluids* 2021, 6, 306. <https://doi.org/10.3390/fluids6090306>
33. *A.V. Dmitrenko*, Prediction of laminar–turbulent transition on flat plate on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// *Cont. Mech. and Thermodyn.*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01078-0>
34. *Dmitrenko, A.V.* Thoretical calculation of laminar–turbulent transition in the round tube on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// *Cont. Mech. and Thermodyn.*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01125-4>
35. *А. А. Коноплев, Г. Г. Алексанян, Б. Л. Рытов, А. А. Берлин* / Об эффективности интенсификации теплообмена глубоким профилированием // Теоретические основы химической технологии. – 2012. – Т. 46, № 1. – С. 24. – EDN OOWMKR.

Дмитренко Артур Владимирович, [AVDmitrenko@mephi.ru](mailto:AVDmitrenko@mephi.ru)  
 Белов Данила Александрович, [danas.belov@yandex.ru](mailto:danas.belov@yandex.ru)

— ♦ ♦ ♦ —

## ОБРАЗОВАНИЕ АНТИЦИКЛОНИЧЕСКИХ ВИХРЕВЫХ ЛИНЗ ОТ ПОСТОЯННОГО ИСТОЧНИКА МАССЫ НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ В ДВУСЛОЙНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОПОГРАФИЧЕСКОГО БЕТА-ЭФФЕКТА

*Д.Н. Елкин<sup>\*</sup>, А.Г. Зацепин*

*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва*

*[dmelkin@mail.ru](mailto:dmelkin@mail.ru)*



Одним из ярких гидрофизических явлений в океане являются внутривихревые вихревые линзы, или внутритермоклинные вихри. Они наблюдаются в области вытока вод промежуточной плотности из окраинных морей в Мировой океан. Известны вихревые линзы средиземноморской воды в Атлантике (Meddies) и красноморской воды в Индийском океане (Reddies). Они являются двояковыпуклыми и имеют антициклоническую завихренность. Механизм их формирования доподлинно неизвестен. Чаще всего они образуются возле каньонов, по которым вода промежуточной плотности, текущая по дну континентального склона проникает в толщу океанских вод на горизонте равной плотности [1, 2].

В работе предпринята попытка лабораторного моделирования возможного механизма формирования вихревых линз, обусловленного топографическим бета-эффектом. Суть этого механизма и результаты его лабораторных исследований были описаны в [3-5]. Отличием данного исследования от предыдущих является проведение опытов в двухслойно стратифицированной водной среде.

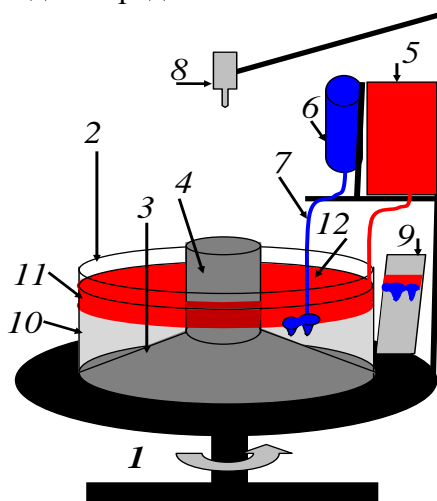


Рис.1. Схема экспериментальной установки. 1 – циклонически вращающаяся платформа; 2 – цилиндрический бассейн из оргстекла; 3 – конус; 4 – полный цилиндр над вершиной конуса; 5 – емкость для создания верхнего слоя воды в бассейне; 6 – объемная бюретка с краном; 7 – впускная трубка - источник; 8 – видеокамера; 9 – зеркало бокового вида; 10 – прозрачный нижний слой соленой воды  $S_0$ ; 11 – красный верхний слой пресной воды; 12 – вытекающая из источника вода соленостью  $S_1=S_0$ .

Эксперимент производился в цилиндрическом бассейне, сделанном из оргстекла, размещенном на вращающейся против часовой стрелки платформе, в который был вставлен вписанный конус вершиной вверх, а основание совпадало с нижним основанием цилиндра. Угол  $\alpha$  между образующей конуса и горизонталью составлял  $25^\circ$ . Опыты проводились в однородной и двухслойной жидкости. Для экспериментов с однородной жидкостью бассейн заполнялся пресной водой, подкрашенной в желтый цвет. Для экспериментов с двухслойной жидкостью бассейн заполнялся желтой водой с изменяющейся от опыта к опыту соленостью, не превышавшей, однако, 4 ‰.

После включения вращения платформы и раскрутки желтого водного слоя до состояния твердотельного вращения, подкрашенная в красный цвет пресная вода медленно заливалась на его поверхность до тех пор, пока не образовывался верхний слой определенной толщины. Так создавалась двухслойная стратификация. Антициклонические

вихри создавались с помощью локального источника постоянного расхода воды. Этот источник представлял собой вертикальную трубку, конец которой располагался либо на поверхности однородного слоя, либо над плотностной границей раздела слоев на расстоянии половины радиуса бассейна. Он снабжался водой из закрепленной на стойке платформы объемной бюретки, заполненной водой, подкрашенной красителем в ярко синий цвет. Соленость, и естественно плотность воды в бюретке, была такая же, как в бассейне. Если в бассейне была пресная вода, то получались баротропные вихри, а если вода в бассейне была соленой, то вихри были бароклинные, но с существенной баротропной составляющей.

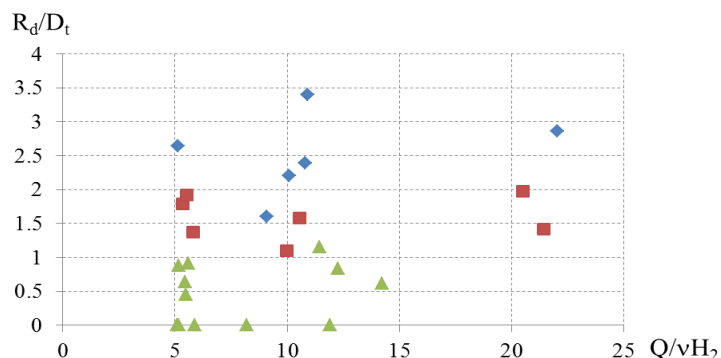


Рис. 2. Диаграмма режимов течения в зависимости от безразмерных параметров  $Q/\nu H_2$  и  $R_d/D_t$ . Синим цветом обозначено распространение течения в виде языка на плотностной границе раздела. Красным цветом обозначено многовихревое течение. Зеленым цветом обозначено образование цепочки вихревых линз

Сверху над бассейном на платформе расположена видеокамера, позволяющая снимать картину течения воды в бассейне во вращающейся системе координат. Для визуализации течения на поверхности воды плавают мелкие бумажные частицы (пелетки) белого цвета. Чтобы иметь одновременно боковой вид бассейна, рядом с ним на платформе находится наклонное зеркало, изображение на котором снимается той же видеокамерой.

Опыт начинался с момента включения источника (незадолго до того включалась запись видеокамеры) а заканчивался через несколько минут после окончания действия источника. Время проведения опыта обычно составляло 200-300 периодов вращения платформы – лабораторных суток (лаб. сут.).

На рис. 2 изображена диаграмма режимов течения в зависимости от двух безразмерных параметров задачи:  $Q/\nu H_2$  и  $R_d/D_t$ , где  $Q$  – расход воды из источника,  $\nu$  – кинематическая вязкость воды,  $H_2$  – толщина нижнего слоя,  $R_d = (g'(H_1 H_2)^{1/2})^{1/2}/f$  – радиус деформации,  $H_1$  – толщина верхнего слоя,  $g' = g\beta S_0$ ,  $\beta = 0.7 \cdot 10^{-3} \%^{-1}$ .  $D_t = (4Q/\pi f t g \alpha)^{1/3}$  – теоретический диаметр вихря [3, 4],  $f = 2\Omega$  параметр Кориолиса.  $\Omega$  – угловая скорость вращения платформы. В бароклинном случае, при больших значениях  $R_d/D_t$  течение распространялось антициклонически в виде языка на границе раздела слоев и вихреобразование отсутствовало. При промежуточных значениях этого параметра, из-за бароклинной неустойчивости происходило «дробление» языка и течение становилось многовихревым. При небольших и нулевых значениях  $R_d/D_t$  образовывались периодические цепочки вихревых линз вследствие топографического бета-эффекта (рис. 3).

Результаты эксперимента использованы для интерпретации данных наблюдений внутритермоклинных вихрей в океане.

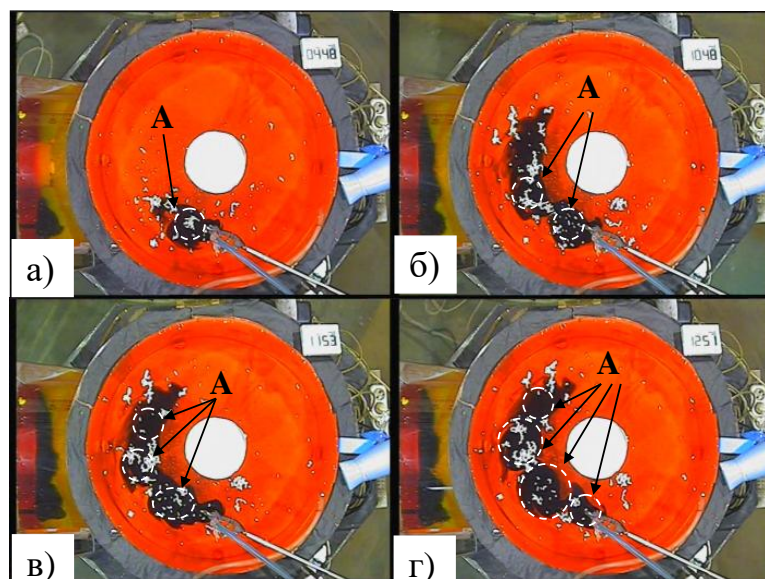


Рис. 3. Образование цепочки вихревых линз при  $R_d/D_1 = 1.4$  и  $Q/\square H_2 = 14$ : а) через 8 лаб. сут.; б) через 32 лаб. сут.; в) через 36 лаб. сут.; г) через 40 лаб. сут.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках темы госзадания FMWE-2021-0002.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белкин И.М., Костяной А.Г. Внутритермоклинные вихри в Мировом океане и их региональные особенности // Когерентные структуры и самоорганизация океанических движений. М.: Наука, 1992. С. 112-127.
2. Филюшкин Б.Н., Кожелупова Н.Г. Обзор исследований средиземноморских внутритермоклинных вихрей в Атлантическом океане // Океанологические исследования. 2020. Т.48. №3. С. 123-147.
3. Зацепин А.Г., Дидковский В.Л. Об одном механизме формирования мезомасштабных вихревых структур в склоновой зоне океана // ДАН, 1996. Т.347. №1. С.109-112.
4. Зацепин А.Г., Дидковский В.Л., Семенов А.В. Автоколебательный механизм формирования периодической вихревой структуры от стационарного локального источника на наклонном дне во вращающейся жидкости // Океанология. 1998. Т.37. №1.
5. Зацепин А.Г., Елкин Д.Н. Влияние подводного хребта на перемещение антициклонических вихрей над наклонным дном под действием топографического бетаэффекта: лабораторный эксперимент // Морской гидрофизический журнал. 2024. Т. 40, № 2. С. 298–311.

Елкин Дмитрий Николаевич, dmelkin@mail.ru  
Зацепин Андрей Георгиевич, zatsepin@ocean.ru



# ВОЛНОВОЙ МЕТАМОРФИЗМ ЛЬДА ПРИ НЕ ВПОЛНЕ УПРУГОМ УДАРЕ

В.П. Епифанов<sup>1,\*</sup>, Е.К. Гусева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный  
evp@ipmnet.ru

Исследования нелинейных волновых явлений во льду имеют практическую значимость в динамических задачах, связанных с обеспечением безопасной эксплуатации взлётно-посадочных ледяных полос и при взаимодействии ледяных полей с сооружениями. Закономерности, выявленные для льда как модельного материала, применимы для широкого круга конструкционных материалов, работающих при повышенных температурах, когда результат внешнего воздействия перестаёт быть прямо пропорционален воздействию.

История вопроса связана с именами Мак Рейнольдса, Дж.Ф. Белла, Генриха Рудольфа Герца, Н.А. Кильчевского. Современное состояние проблемы отражено в трудах А.Е. Букатова [1], В.М. Козина [2] и Г. И. Канеля [3]. Установлено, что нелинейные волновые явления увеличивают пластичность, влияют на процессы упрочнения и разупрочнения, уменьшают трение на поверхности контакта. Лёд является низкомодульным материалом с высокой гомологической температурой. Это позволяет ожидать полноту картины волнового воздействия на метаморфизм льда, а, следовательно, на его реологические и прочностные свойства.

Цель исследований — оценка влияния нелинейных волновых процессов, возбуждаемых во льду ударом, на его динамику и кинетику. Исследование выполняется на примере прямого удара шарового индентора по ледяному диску на жёстком основании с возможностью скольжения [4]. Концепция исследований неупругого удара состоит в том, что шаровой индентор с ледяным диском составляют динамическую конструкцию, амплитудно-частотные характеристики которой отражают происходящие во льду нелинейные волновые процессы, а мгновенные ускорения шарового индентора и точек поверхности ледяного диска характеризуют мгновенные силы, скорости и осадку, по которым рассчитаны деформационные зависимости и определена интерференционная картина волн [5].

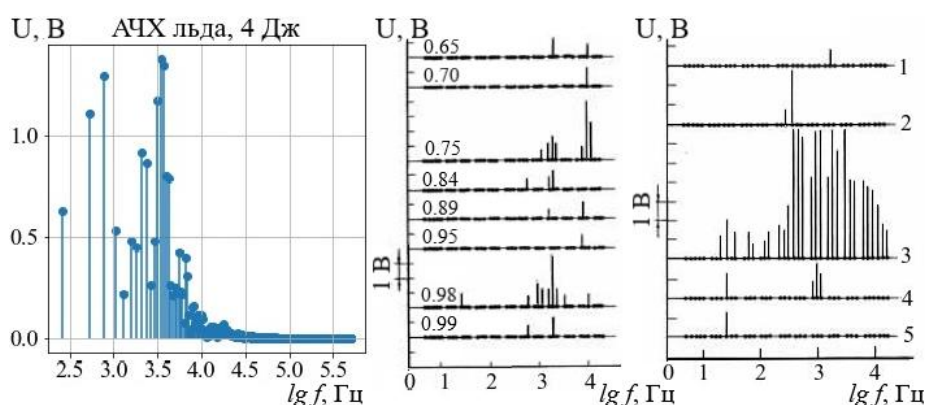


Рис. 1. Спектрограммы ледяного диска при ударе (а) и спектрограммы сигналов акустической эмиссии в определенные моменты времени квазистатических (б, в) испытаниях льда на сжатие и (в) - на стадиях (1-5) роста магистральной трещины. Обозначения:  $U(B)$  — амплитуда,  $f$  — частота,  $0,65 \div 0,99$  — нормированное время.

На рис. 1 показаны амплитудно-частотные характеристики ледяного диска при ударе и спектрограммы сигналов акустической эмиссии в определенные моменты времени при квазистатических испытаниях льда на сжатие, зарегистрированные непосредственно в экспериментах.

Из рис. 1 следует, что максимальная интенсивность нелинейного волнового процесса во льду достигается не на резонансной частоте 0,6 кГц, а в интервале частот 3,6–3,7 кГц, причём *интенсивность излучения доминирующего процесса превышает интенсивность ударной волны почти на порядок величины*. Появление новых частот, которых изначально не было в спектре волны (ангармонизм), свидетельствует о существенном локальном изменении физических свойств льда при ударе, при котором формируется новый мощный источник нелинейных волн. По-видимому, ударная волна частотой 0,6 кГц стала триггером, «запустила» нелинейный волновой процесс формирования нового, *высокочастотного 3,6–3,7 кГц*, источника волн в системе. Особенностью этого процесса является «квантованный» переход энергии низкочастотных 0,6 кГц в энергию высокочастотных колебаний 1,2 кГц и далее 1,2–3,7 кГц. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) системы лёд-шар (рис. 2), построены по методу быстрого преобразования Фурье средствами языка Python, также содержат резонансную частоту шара, 0,6 кГц. Эта частота соответствует первому низкоамплитудному пику на АЧХ льда.

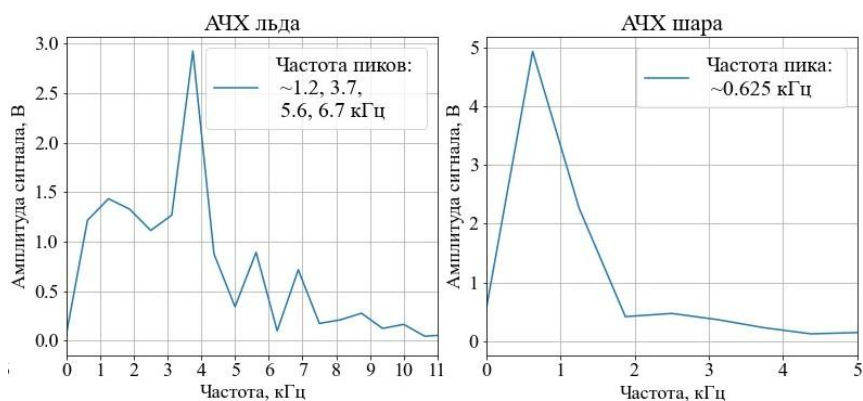


Рис. 2. Рассчитанные АЧХ индентора и ледяного диска для энергий удара 4 Дж.

Эффективные радиусы  $R$  подвижных элементов льда для экстремальных точек спектра (рис. 2а) определяются из решения модели гармонического осциллятора  $R(f, \rho, k)$ , где  $f$  — частота излучения сигналов акустической эмиссии,  $\rho$  — плотность льда,  $k$  — жёсткость связи кристаллической решётки [1]. Подставляя соответствующие значения для  $k_1 = 15,5 \text{ Н/м}$ ,  $\rho = 883 \text{ кг/м}^3$ ,  $f_1 = 0,6 \text{ кГц}$  (первый максимум частотой 0,6 кГц), получаем, что  $R(k, f_{0,6}) = 0,71 \text{ мм}$ . Рассчитанное значение соответствует размеру кристаллов первичной структуры льда. При формировании вторичной текстуры выделяется упругая энергия в виде когерентного излучения, и дальнейший процесс измельчения льда оказывается под влиянием этого излучения. Характерный размер подвижных элементов источника частотой 3,6 кГц равен  $R(k, f_{3,6}) = 0,14 \text{ мм}$ . Такой размер имеют частицы льда в ядре пластичности (милонит), который формируется в процессе удара шарового индентора по ледяному диску.

Ударное разрушение льда отличается от квазистатического тем, что процесс разрушения льда при ударе локализуется на поверхности контакта в виде ядра пластичности, которое является мощным генератором когерентных волн. Волновой метаморфизм льда при ударе не ограничивается формированием вторичной структуры внутри пластического ядра. Волновое воздействие продолжается в виде процесса внедрения пластической массы льда в его поликристаллическую структуру в направлении удара (процесс интрузии) (рис. 3).



Независимое подтверждение было получено при замораживании воды в замкнутой цилиндрической полости 3 (рис. 3) в пластине прозрачного поликристаллического льда 1. Под действием гидростатического давления в квазистатических условиях, в вершине полости 2 формировался инъекционный канал 4. В конце канала на расстоянии 1 см над вершиной полости формировалась почти ортогонально оси полости дугообразная микротрещина 5 длиной 0,8 см. Кроме того, в крупных кристаллах льда формировалась почти параллельно полости дугообразная микротрещина в форме крыла длиной 1,5-1,7 см. Учитывая ориентацию этих трещин можно, по-видимому, предположить, что их поверхности воспроизводят максимальные напряжения по Мизесу.

Формирование трещины ортогонально оси удара под воздействием ударного волнового фронта косвенно свидетельствует о «направленном» характере воздействия нелинейных волн на пластическое деформирование льда. Волновая картина для выбранных условий эксперимента представлена осциллограммами колебаний в оппозитной точке поверхности ледяного диска. Особого внимания заслуживает нетривиальное резкое увеличение амплитуды волновых осциллограмм, которое наблюдается на активной и пассивной стадии удара. Эффект увеличения амплитуды колебаний при ударе впервые отмечен в работе [2] и связывался с гипотезой о «перекачке энергии от низкочастотных к высокочастотным волнам».

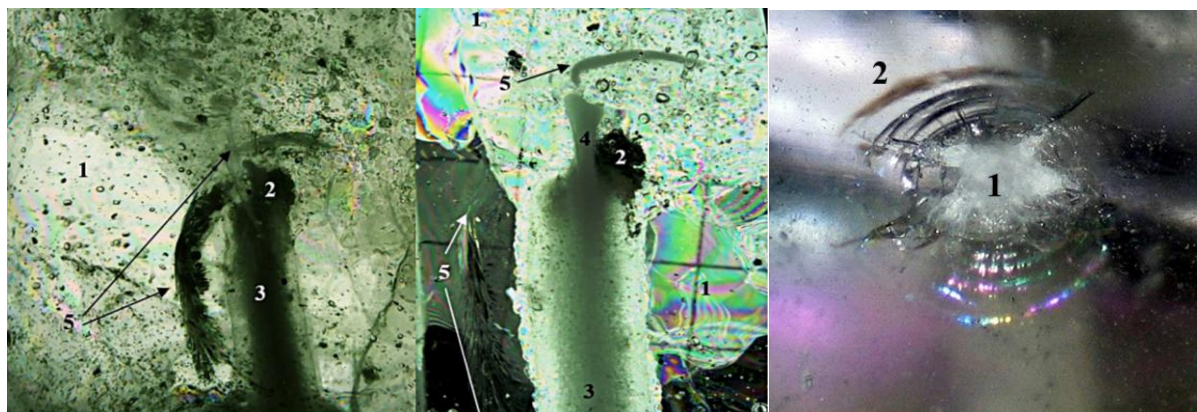


Рис. 3. Квазистатическое разрушение (интрузия) и динамическое разрушение при ударе шарового индентора по ледяной пластине с энергией 0,52 Дж при температуре  $-15^{\circ}\text{C}$

В результате исследования нелинейных волновых явлений, возникающих при неупругом ударе шарового индентора по льду, установлено, что для условий эксперимента (скорость до 5 м/с, энергия до 5 Дж) ударная волна выполняет роль триггера. В процессе удара формируется ядро пластичности, которое выступает в качестве доминирующего источника нелинейных волн, интенсивность которых на порядок больше, чем ослабленной ударной волны. Выявлен ранее не наблюдавшийся эффект интрузии и формирования трещины, ориентированной ортогонально сжимающим напряжениям. Такая ориентация, по-видимому, воспроизводит максимальные напряжения по Мизесу. Экспериментально подтверждено увеличение амплитуды колебаний в процессе нелинейного удара.

## БЛАГОДРОНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 23-21-00384

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букатов А.Е. 2017. Волны в море с плавающим ледяным покровом / А. Е. Букатов. – Севастополь: ФГБУН МГИ, – 360 с. ISBN 978-5-9908460-2-9.
2. Козин ВМ. 2007. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М. : Академия естествознания, 355 с.

3. Канель Г.И., Зарецкий Е.Б., Разорёнов С.В., Ашитков С.И., Фортков В.Е. УФН.2017.187(5)
4. Гусева, Е.К., Епифанов, В.П., & Шигаев, Н.О., 2024. Физическое и численное моделирование неупругих деформаций при ударе по ледяному диску сферическим индентором. *Процессы в геосредах*. 39(1): 2345-2350.
5. Епифанов, В.П., 2020. Особенности контактного разрушения льда. *Лёд и Снег*. 60(2): 274-284.

Епифанов Виктор Павлович, evp@ipmnet.ru  
 Гусева Евгения Кирилловна, guseva.ek@phystech.su



## КОМПЬЮТЕРНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ

М.К. Ермаков

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
 ermakov@ipmnet.ru

Компьютерная лаборатория COMGA была разработана для исследования гидродинамических процессов в областях прямоугольной и цилиндрической формы на основе уравнений Навье-Стокса в лаборатории математического и физического моделирования в гидродинамике под руководством проф. В.И. Полежаева [1]. Система была предназначена для изучения процессов теплообмена в онлайн режиме на персональных компьютерах [2, 3]. В основу системы был положен метод контрольного объема с разнесенным представлением дискретных значений компонентов скорости и скалярных величин. Интегрирование уравнений по времени осуществляется на основе явных и полунеявных уравнений с расщеплением по давлению. Прямоугольная равномерная расчетная сетка позволяла использовать ускоренные методы вычислений, в частности, быстрый метод преобразования Фурье для решения уравнения Пуассона для давления. С прогрессом в области производительности персональных компьютеров система COMGA все больше приобретала черты виртуальной компьютерной лаборатории, позволяющей проводить исследования течений в оперативном режиме.

Дополнительный потенциал развития системы COMGA связан с использованием матричных методов для решения стационарных уравнений с использованием метода Ньютона в матричной форме с поиском с возвратом (backtracking). При использовании чисто стационарных уравнений отсутствуют обременительные ограничения на шаг интегрирования по времени и полностью неявная аппроксимация уравнений (без расщепления) с использованием градиентного подхода позволяет добиться быстрой сходимости. Для использования матричного подхода для метода Ньютона от разработчика требуется только подготовка функции невязки уравнений для матричного аргумента и вычисление элементов матрицы Якоби. Для решения системы линейных уравнений на каждой итерации метода Ньютона используется открытый пакет MUMPS, поддерживающий распараллеливание OpenMP/MPI. К недостаткам матричного подхода относится необходимость использования значительного объема оперативной памяти и существенно нелинейный рост времени вычислений при увеличении числа ячеек вычислительной сетки, делающий бесперспективным его применение для больших задач.

Результаты использования матричного подхода исследованы для изотермических течений в прямоугольной области с одной или двумя движущимися крышками. Расчеты проводились на компьютере с процессором Intel i7-9700 с 8 ядрами и 32 МБ оперативной памяти. В табл. 1 приведены данные по необходимым ресурсам времени и памяти на различных сетках для течения в квадратной каверне с верхней движущейся крышкой при числе Рейнольдса  $Re=400$ . При данном значении числа Рейнольдса возможно вычисление поля течения при одномоментном повышении числа Рейнольдса от нуля до заданного значения. При более высоких значениях числа Рейнольдса требуется либо делать серию вычислений, достигая заданного числа Рейнольдса ступенчатым повышением от серии к серии, либо непрерывным изменением числа Рейнольдса от итерации к итерации. Второй способ оказался более выгодным. Общее количество итераций сократилось и вместо подбора шагов повышения параметра требуется задать только количество итераций, в течение которых осуществляется увеличение параметра.

В табл. 2 приведены данные по количеству времени вычислений течения в каверне при существенно более высоком числе Рейнольдса  $Re=10000$ . Рост параметра осуществлялся в течение 15 итераций по степенному закону с показателем  $9/4$ . Это позволило провести вычисления за всего 17 итераций, независимо от размерности сетки, против 7 итераций для  $Re=400$ . Вычислительные сетки для обоих параметров были выбраны равномерными. Поле функции тока в квадратной каверне с движущейся верхней крышкой при числах Рейнольдса 400 и 10000 представлены на рис. 1. Прерывистые изолинии функции тока обозначают вращение жидкости против часовой стрелки и имеют масштаб, отличный от сплошных изолиний.

Таблица 1. Характеристики вычислений для течения с числом Рейнольдса  $Re=400$

Сетка	Время вычислений	Оперативная память	Количество итераций
129×129	0,5"	80 МБ	7
257×257	2"	302 МБ	7
513×513	11"	1.6 ГБ	7
1025×1025	1' 16"	6.1 ГБ	7
1451×1451	2' 38"	13.6 ГБ	7
2049×2049	9' 42"	23.7 ГБ	7

Таблица 2. Характеристики вычислений для течения с числом Рейнольдса  $Re=10000$

Сетка	Время вычислений	Количество итераций
129×129	1"	17
257×257	4.7"	17
513×513	27"	17
1025×1025	3' 2"	17
1451×1451	6' 20"	17
2049×2049	23' 25"	17



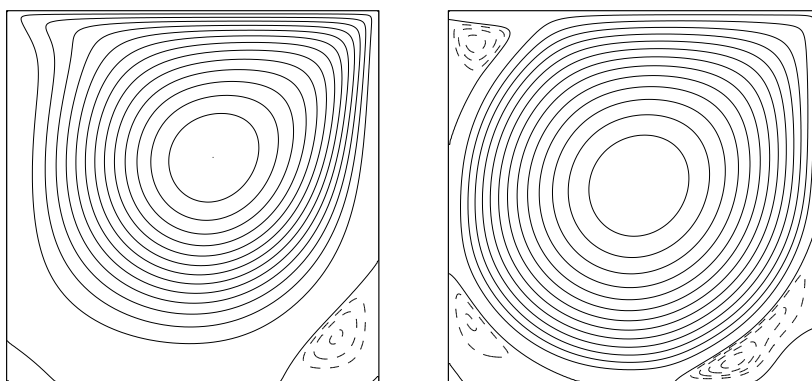


Рис. 1. Функция тока течения в квадратной камере с движущейся верхней крышкой при числах Рейнольдса 400 (слева) и 10000 (справа) на сетке 257×257

Зависимость размера оперативной памяти, необходимой для решения задачи от числа ячеек сетки по трем максимальным сеткам выражается степенным законом с показателем 0.6, а зависимость времени вычислений – с показателем 2.4.

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведены функции тока течений в вертикальной камере с отношением высоты к ширине, равном 2, с верхней и нижней крышками, движущимися с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. В зависимости от числа Рейнольдса реализуется либо симметричное течение с одним центральным вихрем, либо симметричное течение с двумя вихрями, либо несимметричное течение.

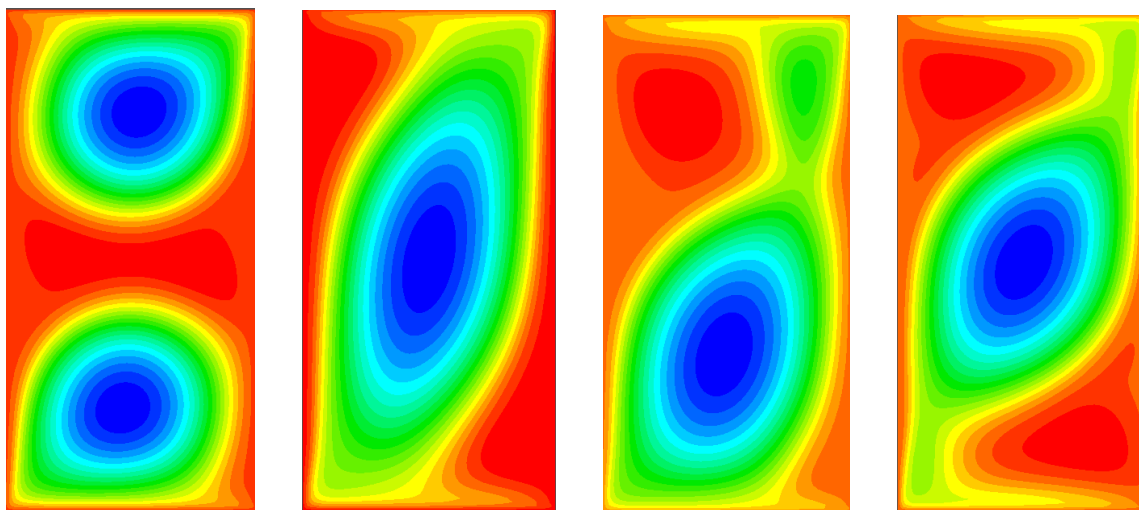


Рис. 2. Функция тока течения в прямоугольной камере с движущимися верхней и нижней крышками в противоположных направлениях при числах Рейнольдса 1000, 1500, 2000 и 3000 (слева направо).

Течения на рис. 2 соответствуют числам Рейнольдса 1000 (симметричное течение с двумя вихрями), 1500 (симметричное течение с одним центральным вихрем), 2000 (несимметричное течение) и 3000 (симметричное течение с одним центральным вихрем). При непрерывном изменении числа Рейнольдса имеет место выраженный гистерезис переключения типа течения в зависимости от направления изменения параметра.

В компьютерную лабораторию исследования процессов конвективного тепло- и массообмена COMGA в прямоугольных и цилиндрических областях добавлен метод решения стационарных уравнений Навье-Стокса на основе матричного подхода, который в сочетании методом Ньютона позволяет ускорить процессы моделирования. Компьютерная лаборатория позволяет повторить ряд международных вычислительных бенчмарков

в области гидродинамики и проводить исследования взаимодействия элементарных конвективных процессов в области тепло- и массообмена.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена в рамках государственного задания № 124012500440-9.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Полежаев В.И., Бунэ А.В., Врезуб Н.А. и др.* Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987.
2. *Ермаков М.К., Никитин С.А., Полежаев В.И.* Система и компьютерная лаборатория процессов конвективного тепло- и массообмена // Изв. РАН, МЖГ. 1997. № 3. С. 22-28.
3. *Ermakov M.K., Nikitin S.A., Polezhaev V.I. et al.* Education and tutorial in modeling of elementary flows, heat and mass transfer during crystal growth in ground-based and microgravity environment // J. Crystal Growth. 2004. V. 266. № 1-3. P. 388-395.

Ермаков Михаил Константинович, [ermakov@ipmnet.ru](mailto:ermakov@ipmnet.ru)



## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СТРУИ И ЕЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПОГРУЖЕННЫМИ ТЕЛАМИ**

*И.Л. Ермолов, Ф.М. Бельченко, М.М. Князьков, Г.Н. Нагайцев\*, Е.В. Новиков,  
П.П. Остриков, Е.А. Семенов, А.Н. Суханов  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
[nagajcev@ipmnet.ru](mailto:nagajcev@ipmnet.ru)*

Работа посвящена экспериментальному исследованию вертикальной газо-жидкостной струи и её взаимодействию с погружёнными телами, выполненному в лаборатории робототехники и мехатроники ИПМех РАН.

В рамках моделирования с помощью контрольно-измерительной аппаратуры исследовались силы и моменты от восходящих водо-воздушных потоков, приложенные на экспериментальное тело при его опускании на источник газожидкостного потока.

Установка для испытаний тела состоит нескольких основных элементов. Схематично они изображены на рисунке 1. Объект располагается внутри жёсткой платформы-штатива, основа которого изготовлена из лёгкого алюминиевого профиля повышенной жёсткости. Объект надёжно фиксируется в пространстве относительно рамы платформы-штатива через силомоментный датчик с учётом необходимой ориентации с помощью позиционеров. Многомерный силомоментный датчик, интегрированный в конструкцию объекта, надёжно герметизируется и предаёт на ЭВМ данные о силах и моментах, возникающих при взаимодействии объекта с возмущениями среды.

Сама платформа-штатив с помощью транспортно-страховочной системы размещается в бассейне с водой. Для генерации возмущений среды установка снабжена соплом, из которого подаётся воздух с заранее подобранными параметрами расхода и давления.

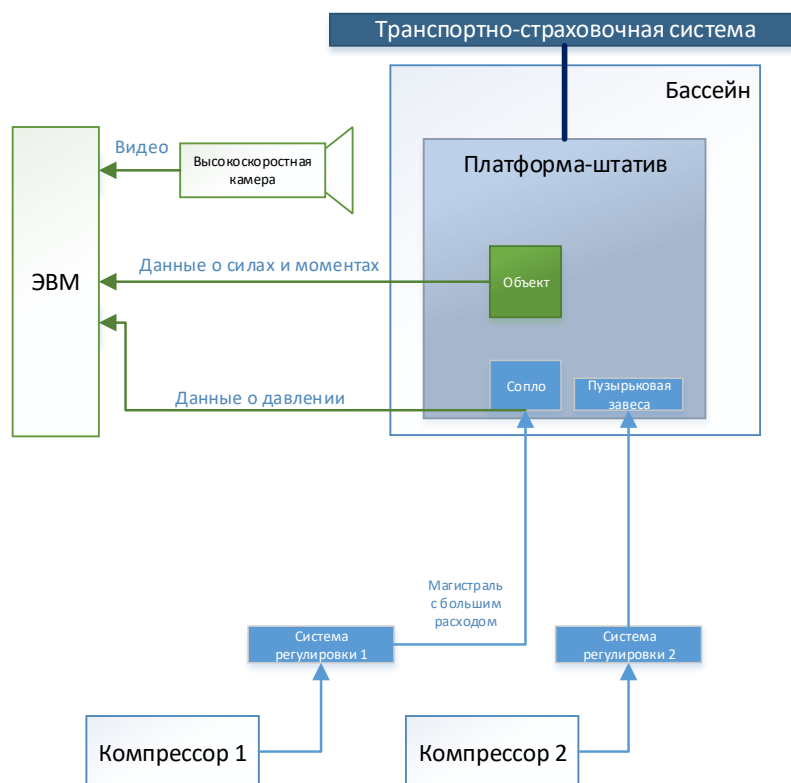


Рис. 1. Общая схема установки

Регулировка этих параметров происходит в рамках программы методики испытаний с помощью системы регулировки 1, интегрированной в воздушную магистраль с большим расходом. Питание данной магистрали осуществляется благодаря промышленному компрессору 1, изображённому на рисунке 1. У основания устья скважины расположен датчик давления, данные от которого передаются в ЭВМ. Этот датчик позволяет в реальном времени контролировать текущее давление непосредственно на выходе воздушной смеси из сопла.

Отдельная воздушная магистраль, питаемая другим компрессором 2 малой мощности, подходит к системе генерации пузырьков, необходимой для создания пузырьковой завесы. Параметры давления и расхода в этой воздушной магистрали контролируются отдельно с помощью системы регулировки 2. Установка также снабжена высокоскоростной камерой, позволяющей захватывать видеоизображение для дальнейшего анализа. Данная камера также передаёт сигнал на обработку и хранение в ЭВМ.

Платформа-штатив, на которой расположены элементы экспериментальной установки (Рис. 2). Испытания на платформе-штативе проводятся с целью экспериментального моделирования поведения объекта, находящегося в вертикальной газожидкостной струе.

Пространственная рама платформы-штатива изготовлена из анодированного алюминиевого профиля, на который крепятся два позиционера, позволяющие расположить в пространстве испытуемые объекты относительно сопла (устья скважины). Объекты могут располагаться на различной удаленности от сопла, а также под различным углом.

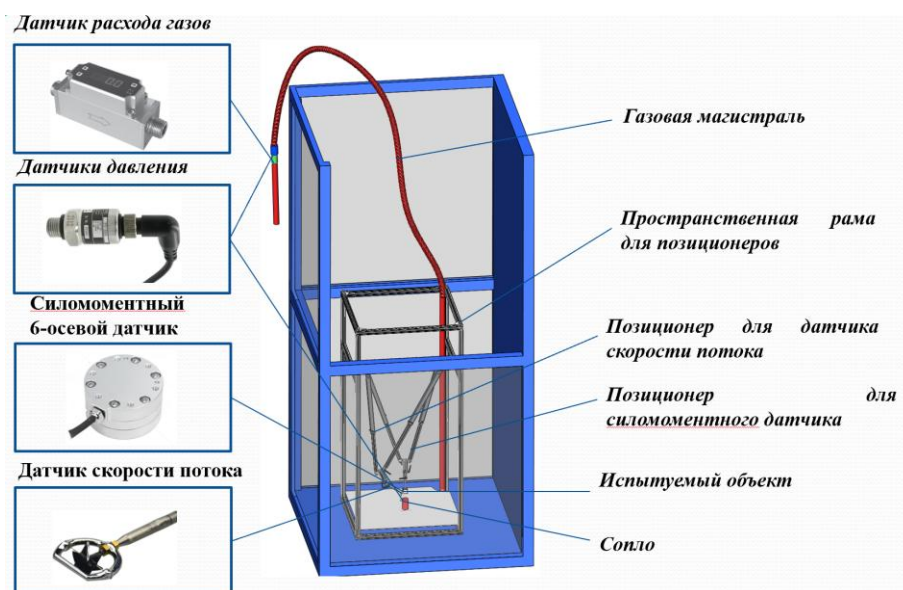


Рис. 2. Общий вид стенда платформы-штатива в сборе.

При первичных испытаниях для определения скорости потока использовался датчик, который с помощью вращающихся лопастей мог производить замеры скорости потока жидкости, однако, он показал свою неэффективность в силу своей конструкции и в дальнейших испытаниях не использовался. Для определения скорости потока в дальнейших испытаниях использовалась микропузырьковая завеса. Фотография платформы-штатива в сборе представлена на рисунке 3.

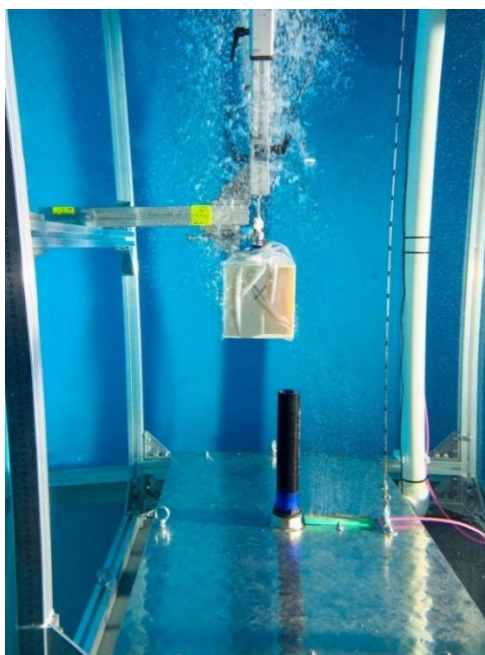


Рис. 3. Платформа-штатив внутри бассейна

Для визуализации данных с шестиосевого датчика так же было разработан алгоритм. В нем происходит считывание данных из файла, записывание данных о времени измерения, значения сил и моментов в соответствующие переменные.

Для каждой переменной происходит расчет среднего значения за все время эксперимента и его среднеквадратического отклонения.

Изменения измеряемых сил и моментов во времени отрисовываются в виде графиков с использованием библиотеки `matplotlib`, так же на графиках отражается информация о среднем значении и среднеквадратическом отклонении (Рис. 4)

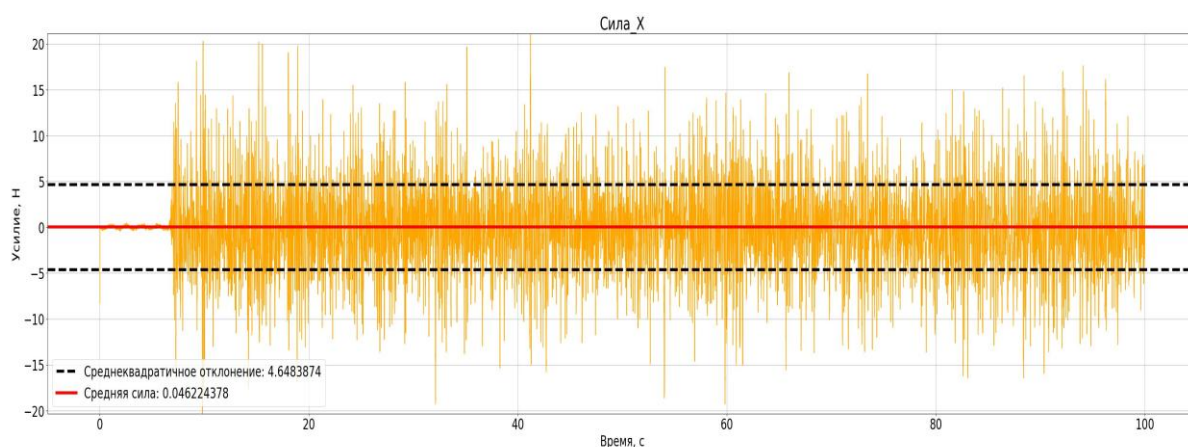


Рис. 4. Пример визуализации для одной из переменных

Ермолов Иван Леонидович, [ermolov@ipmnet.ru](mailto:ermolov@ipmnet.ru)  
 Бельченко Филипп Михайлович, [philepp@mail.ru](mailto:philepp@mail.ru)  
 Князьков Максим Михайлович, [ipm\\_labrobotics@mail.ru](mailto:ipm_labrobotics@mail.ru)  
 Нагайцев Георгий Николаевич, [nagajcev@ipmnet.ru](mailto:nagajcev@ipmnet.ru)  
 Новиков Евгений Вячеславович, [cod173@yandex.ru](mailto:cod173@yandex.ru)  
 Остриков Павел Павлович, [ostricov93@yandex.ru](mailto:ostricov93@yandex.ru)  
 Семенов Евгений Александрович, [sim1165@mail.ru](mailto:sim1165@mail.ru)  
 Суханов Артем Николаевич, [sukhanov-artyom@yandex.ru](mailto:sukhanov-artyom@yandex.ru)



## ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ НА ЛИНЕЙНУЮ И НЕЛИНЕЙНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ

*Д.Ю. Жиленко\*, О.Э.Кривоносова*

*<sup>1</sup>Институт механики Московского Государственного Университета  
 имени М.В. Ломоносова, Москва  
[jilenko@imec.msu.ru](mailto:jilenko@imec.msu.ru)*

В работе рассматривается потеря устойчивости течением вязкой несжимаемой жидкости в широком сферическом слое при нестационарном вращении внутренней границы. К постоянной скорости вращения границы добавлялся шум. Исследовались решения как осесимметричных (двумерных), так и трехмерных уравнений Навье-Стокса. Показано, что под действием шума бифуркация происходит при меньших числах Рейнольдса, вблизи точки бифуркации наблюдается уменьшение генерации среднего течения и увеличение флуктуаций скорости течения. На основе анализа поведения амплитуды периодического течения вблизи точки бифуркации предложен новый способ определения критического значения числа Рейнольдса для течений с шумом.

## ВВЕДЕНИЕ

Использовался алгоритм прямого численного моделирования [1]. Для расчетов были выбраны размерные параметры близкие к параметрам экспериментальной установки:  $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $r_1 = 0.075 \text{ m}$ ,  $r_2 = 0.15 \text{ m}$ ;  $r_1$  и  $r_2$  радиусы внутренней и внешней границ,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости в слое. Известно, что течение при стационарных граничных условиях определяется тремя параметрами подобия:  $\text{Re}_1 = \Omega_{10} r_1^2 / \nu$ ,  $\text{Re}_2 = \Omega_2 r_2^2 / \nu$ ,  $\delta = (r_2 - r_1) / r_1$ , где  $\Omega_{10}$  и  $\Omega_2$  постоянные угловые скорости вращения границ. Далее будут рассматриваться течения, образующиеся при вращении только внутренней сферы ( $\text{Re}_2 = 0$ ). Скорость вращения внутренней границы задавалась в виде:

$$\Omega_1(t_i) = \Omega_{10} + A_n r m(i), \quad \langle A_n r m(i) \rangle = 0, \quad N = \frac{1}{\Omega_{10}} \sqrt{\frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (\Omega_1(t_i) - \Omega_{10})^2} = \frac{A_n}{\Omega_0}$$

Здесь  $N$  интенсивность шума,  $A_n$  амплитуда шума,  $r m(i)$   $i = 1, I$  случайные числа со стандартным нормальным распределением.

## ДВУМЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

До первой бифуркации течения в широком сферическом слое симметричны относительно оси вращения и плоскости экватора. Под воздействием шума течения становятся нестационарными, но симметрии сохраняются. Течение после первой бифуркации представляет собой бегущую азимутальную волну с волновым числом  $m = 4$ . Интегральными величинами, характеризующими течение, являются компоненты кинетической энергии:  $K_\phi$  – азимутальная и  $K_\psi$  – меридиональная:

$$K_\phi = \int_V u_\phi^2(r, \theta, t) dV, \quad K_\psi = \int_V (u_r^2(r, \theta, t) + u_\theta^2(r, \theta, t)) dV$$

Интегрирование проводится по всему объему сферического слоя. При флуктуациях внутренней сферы в виде белого шума спектр  $K_\phi$  имеет постоянный наклон  $1/f^\alpha$ , где  $\alpha \sim 1$ , а спектр  $K_\psi$  быстро затухает при  $f > 0.5 \text{ Hz}$ .

В случае добавления шума анализ линейной устойчивости проводится относительно среднего течения, которое вычислялось за время не менее 420 сек, что соответствует приблизительно 300 оборотам внутренней сферы. Линейный анализ усредненных течений показал, что при фиксированном числе Рейнольдса увеличение интенсивности шума приводит к увеличению инкремента нарастания  $\lambda$  (рис.1a), и незначительному уменьшению критического числа Рейнольдса  $\text{Re}_c$  (рис.1b). При  $N = 0.043$  в зависимостях  $K_{\text{norm}}$  и  $\text{rms}(K_\phi) / K_\phi$  были обнаружены локальные экстремумы вблизи критического числа Рейнольдса. Такие экстремумы предсказываются теорией для динамических систем с шумом. При большей интенсивности шума  $K_{\text{norm}}$  монотонно убывает, а  $\text{rms}(K_\phi) / K_\phi$  монотонно возрастает (рис.2).

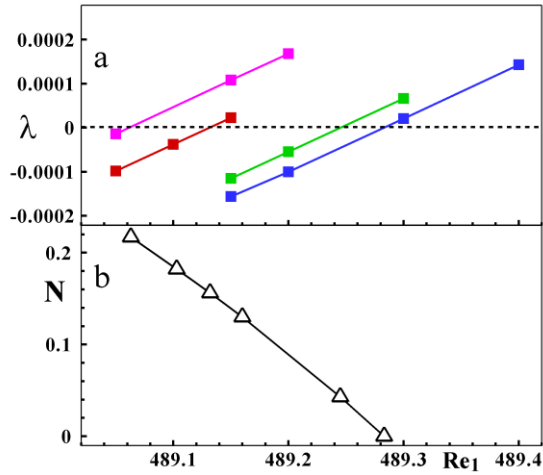


Рис.1. (а) Инкременты нарастания  $\lambda$  в зависимости от числа  $Re_1$  при разных уровнях шума: синий -  $N=0$ , зеленый -  $N=0.043$ , красный -  $N=0.156$ , сиреневый -  $N=0.217$ . (б) Критические значения  $Re_1$  как функция  $N$

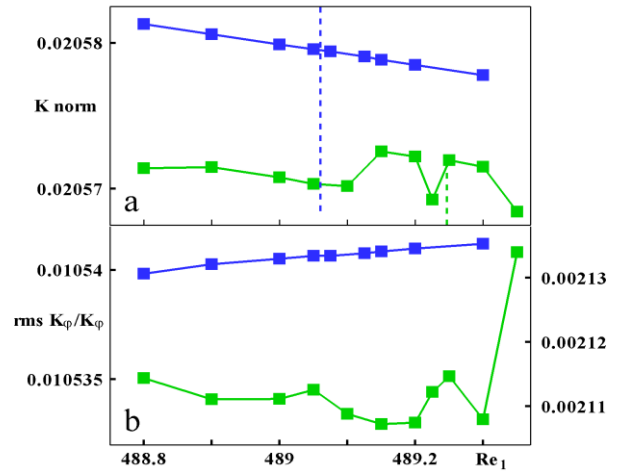


Рис.2. (а) Нормированная кинетическая энергия  $K_{\text{norm}} = K_\phi / (\Omega_0 \tau_1)^2$  и (б)  $\text{rms}(K_\phi) / K_\phi$ . Вертикальные пунктирные линии соответствуют  $\lambda = 0$  из анализа линейной устойчивости.  $N = 0.217$  - синий и левая ось ординат,  $N = 0.043$  - и правая ось ординат на нижнем рисунке.

## ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим решения уравнений Навье-Стокса без ограничений на симметрию течений. Смещение предела устойчивости под действием шума будем определять по поведению параметров течения в зависимости от чисел  $Re_1$ . По моменту достижения постоянного значения  $\text{rms}(u_\phi)$  (рис.3а), и по излому зависимости нормированной средней величины азимутальной компоненты скорости  $U$  (рис.3б):

$$\text{rms } u_\phi(r, \theta) = \sqrt{1/I \sum_{i=1}^I (u_\phi(t_i, r, \theta) - u_{\phi \text{av}}(r, \theta))^2}, \quad u_{\phi \text{av}}(r, \theta) = 1/I \sum_{i=1}^I u_\phi(t_i, r, \theta), \quad U = u_{\phi \text{av}} / \Omega_0 r$$

Также как и при анализе линейной устойчивости, предел устойчивости смещается в область меньших по сравнению со случаем  $N = 0$  чисел  $Re_1$ . В отсутствие шума положение предела устойчивости принято определять по стремлению к нулю параболической аппроксимации  $A_f \sim (Re - Re_c)^{1/2}$ , здесь  $A_f$  - амплитуда колебаний азимутальной моды в течении после бифуркации. Подобная аппроксимация в системе с шумом неприменима, что видно из рис. 3а. Предлагается новый подход к определению  $Re_c$ . При  $Re < Re_c$ , за исключением начального участка, зависимость  $A_f$  от  $t$  экспоненциальная  $A_f \sim \exp(-Bt)$  [2,3]. При приближении  $Re$  к  $Re_c$  величина  $B$  стремится к 0,  $B = 0$  при  $Re = Re_c$ . На рис. 4 представлена зависимость величин  $B$  от числа  $Re$ , позволяющая определить величины  $Re_c$  как в отсутствие шума, так и при его наличии из условия  $B = 0$ . Зависимость  $B$  от числа  $Re$  близка к линейной, а величина  $Re_c$  при  $N \neq 0$  меньше, чем при  $N = 0$ .



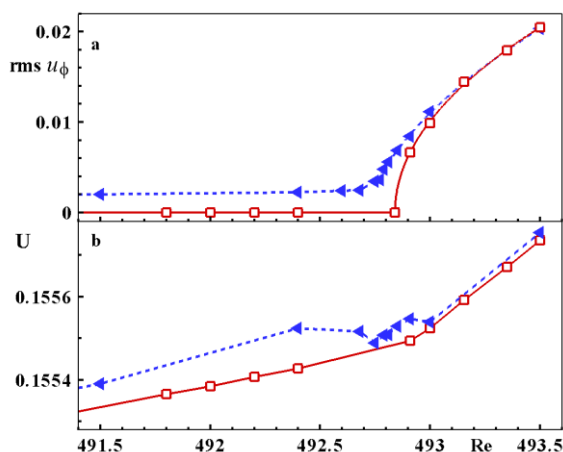


Рис.3. Зависимости  $rms(u_\phi)$  (a) и нормированной средней скорости течения  $U$  (b) от числа  $Re_1$ . Красные символы -  $N=0$ , синие -  $N=0.04$

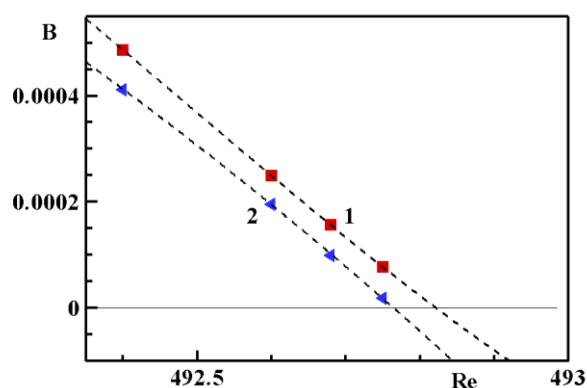


Рис.4. Показатель затухания  $B$  при  $N = 0$  (красные квадраты) и при  $N = 0.04$  (синие треугольники). Пунктирные линии — аппроксимация данных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как в результате линейного анализа усредненного течения, так и при решении трехмерных уравнений Навье-Стокса показано, что под действием шума предел устойчивости ламинарного течения снижается. При небольшом уровне шума в зависимостях кинетической энергии течений и ее флуктуаций появляются соответствующие теории динамических систем локальные экстремумы. При больших уровнях шума указанные зависимости монотонные. Предложен новый подход к определению величины критического числа Рейнольдса. Подход базируется на использовании экспоненциального затухания амплитуды азимутальной моды от времени при числах Рейнольдса, меньших, чем  $Re_c$ . Новый метод позволяет сократить время расчетов и увеличить точность при определении предела устойчивости течений с шумом.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В.Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comp. Phys. 2006. Т. 217. С. 759 – 781 (doi:10.1016/j.jcp.2006.01.036)
2. Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Смещение предела устойчивости течений при наличии случайных флуктуаций скорости вращения // Журнал технической физики. 2022. Т. 92. № 6. С. 789 – 794 DOI: 10.21883/JTF.2022.06.52506.22-22
3. Krivonosova O., Gritsevich M., Zhilenko D. and Read P. Noise induced effects in the axisymmetric spherical Couette flow // Phil. Trans. R. Soc. A 2023. Т. 381: 20220124 <https://doi.org/10.1098/rsta.2022.0124>

Жиленко Дмитрий Юрьевич, [jilenko@imec.msu.ru](mailto:jilenko@imec.msu.ru)  
Кривоносова Ольга Эрленовна, [olga@imec.msu.ru](mailto:olga@imec.msu.ru)





# УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА КИПЕНИЯ ПРИ ИНЖЕКЦИИ ВОДЫ В ГОРНУЮ ПОРОДУ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

*К.Р. Житников\*, Г.Г. Цыпкин*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
zhitnikov@ipmnet.ru*

Рассматривается переход к неустойчивости фронта кипения при инъекции воды в горную породу. Для водяного пара используется модифицированное уравнение, учитывающее отклонения от уравнения состояния совершенного газа. При исследовании устойчивости методом нормальных мод учтены возмущения плотности воды и водяного пара. Получено дисперсионное соотношение, построены дисперсионные кривые и кривые нейтральной устойчивости. Показано, что фронт стабилизируется не только при снижении, но и при повышении температуры.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование устойчивости фильтрационных течений является важной научно-технической задачей с большим количеством приложений, таких как добыча углеводородов [1], безопасное захоронение парниковых газов [2] и извлечение глубинного тепла Земли [3].

При закачке воды в геотермальный резервуар, насыщенный перегретым паром, возникает фронт кипения, разделяющий водонасыщенную область и область пара. В статьях [4-5] водяной пар предполагается совершенным газом, что накладывает существенные ограничения на диапазон рассматриваемых параметров, так как в области высоких температур отклонения от уравнения состояния совершенного газа становятся значительными. При относительно невысоких температурах и давлениях для высокопроницаемых пластов вариация плотности пара не оказывала влияния на критерий устойчивости. Представляет интерес использование модифицированного уравнения состояния водяного пара, дающего возможность исследовать области высоких температур.

В настоящей работе в уравнение состояния введен параметр сжимаемости пара, являющийся функцией температуры. На основе табличных данных [6] получены значения данного параметра в диапазоне температур 500–640 К.

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассматривается одномерная задача инъекции воды в геотермальный резервуар, изначально насыщенный перегретым паром, при постоянном градиенте давления на границе моделирующей скважины. Учтем, что плотность воды меняется вследствие температурного расширения, а при высоких температурах наблюдаются отклонения от уравнения состояния совершенного газа. Таким образом, уравнения состояния воды и пара имеют вид:

$$\rho_w = \rho_{w0} (1 - \beta(T - T_0)), P = \frac{\rho}{M} RZ(T) \quad (1)$$

Функция  $Z(T)$  определяется на основе аппроксимации табличных данных [6].

Исследуем устойчивость фронта кипения методом нормальных мод, для чего представим возмущения в виде:

$$\delta P_{1,2} = P'_{1,2} \exp(i\chi z + \sigma t), \delta T_{1,2} = T'_{1,2} \exp(i\chi z + \sigma t), \eta = \eta_0 \exp(i\chi z + \sigma t) \quad (2)$$

Дополнительно учтем, что возмущения плотности воды и водяного пара могут быть представлены в виде:

$$\delta\rho_v = \frac{\partial\rho_v}{\partial T} \delta T, \delta\rho_w = \frac{\partial\rho_w}{\partial T} \delta T. \quad (3)$$

Подстановка возмущений в законы сохранения и условия непрерывности давления и температуры на фронте кипения приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд возмущений. Требуя существования нетривиального решения данной системы, получаем дисперсионное соотношение, которое исследовалось численно.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Построим дисперсионные кривые для различных значений параметров:

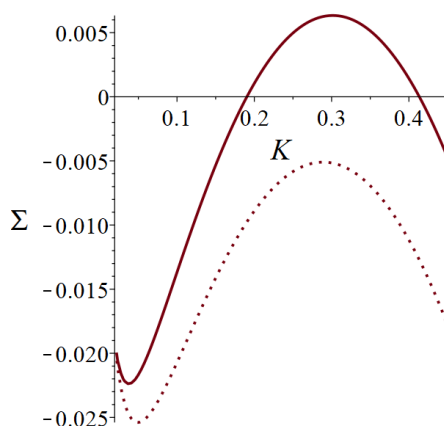


Рис.1. Дисперсионные кривые с учетом возмущения плотности пара и воды (штриховая линия) и без учета (сплошная линия). Параметры:  $T = 550$  К,  $P = 0.2$  МПа,  $\varphi = 0.12$ ,  $k = 2 \cdot 10^{-16}$  м<sup>2</sup>

Рис.1. показывает, что дополнительные слагаемые, возникшие вследствие учета возмущений плотности воды и водяного пара, стабилизируют фронт кипения.

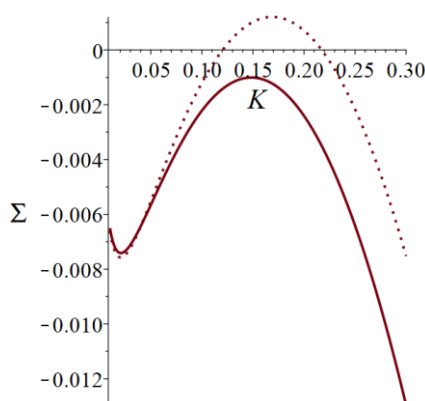


Рис.2. Дисперсионные кривые для уравнения состояния совершенного газа (штриховая линия) и модифицированного уравнения (сплошная линия). Параметры:

$$T = 553 \text{ К}, P_0 = 0.6 \text{ МПа}, \varphi = 0.07, k = 5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$$

Рис.2 иллюстрирует, что фронт кипения является более устойчивым, если рассматривать модифицированное уравнение состояния водяного пара.

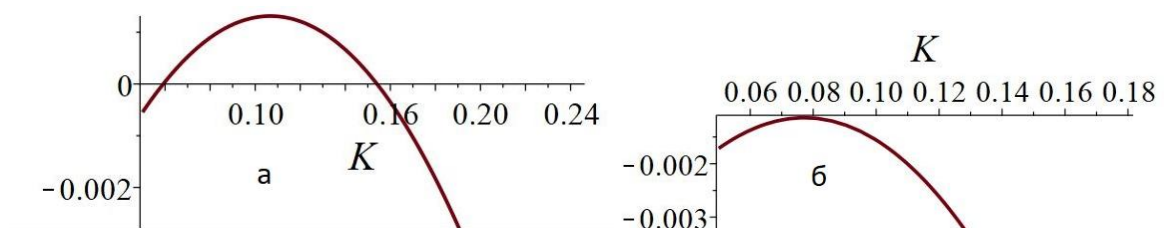


Рис. 3а и 3б. Дисперсионные кривые при значениях параметров  $k = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $\varphi = 0.1$ ,  $P_0 = 0.75 \text{ МПа}$  и значениях температуры  $T = 575 \text{ К}$  (рис.3а) и  $T = 625 \text{ К}$  (рис.3б)

Рис. 3а и 3б иллюстрируют возможность стабилизации фронта кипения не только с ростом, но и с повышением температуры. Это обусловлено видом функции  $Z(T)$ , поскольку из табличных данных следует, что она убывает при увеличении температуры.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методом нормальных мод исследована устойчивость фронта кипения при инъекции воды в горную породу, насыщенную перегретым паром. Рассмотрено модифицированное уравнение состояния, дающее более точное описание свойств водяного пара в области высоких температур. Построены дисперсионные кривые и кривые нейтральной устойчивости. Показано, что учет возмущений плотностей воды и пара, а также использование модифицированного уравнения состояния в области высоких температур ведет к повышению устойчивости фронта. Получено, что фронт кипения может стабилизироваться не только с уменьшением температуры, но и с её увеличением.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №24-11-00222).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Homsy G. M. Viscous fingering in porous media // Annual review of fluid mechanics. 1987. V. 19. №. 1. P. 271-311.
2. Soboleva E. Instability problems and density-driven convection in saturated porous media linking to hydrogeology: A review // Fluids. 2023. V. 8. №. 2. P. 36.
3. Grant M. A. Review no. 1 Geothermal reservoir modeling // Geothermics. 1983. V. 12. №. 4. P. 251-263.
4. Цыпкин Г. Г. Исследование перехода к неустойчивости фронта кипения воды при инъекции в геотермальный резервуар // ТМФ. 2022. Т. 211. №. 2. С. 347-357.
5. Житников К. Р., Цыпкин Г. Г. Зависимость от времени устойчивости фронта фазового перехода вода-пар в высокотемпературных породах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2025. Т. 65. №. 5. С. 752-764.
6. Ривкин С.Л., Александров А.А. Термодинамические свойства воды и водяного пара // М.: Энергоатомиздат. 1984. С.79.

Житников Константин Романович zhitnikov@ipmnet.ru

Цыпкин Георгий Геннадьевич tsypkin@ipmnet.ru

— ♦ ♦ ♦ —

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В МНОГОФРАКЦИОННЫХ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ПАРОГАЗОКАПЕЛЬНЫХ СМЕСЯХ С УЧЕТОМ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ

*Р.Р. Зарипов*

*Институт механики и машиностроения - структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань  
rinat\_zaripov.imm@mail.ru*

В настоящей работе исследуется распространение и затухание акустических волн в многофракционных парогАЗокапельных смесях с полидисперсными включениями с учетом движения смеси. Получена система линеаризованных интегро-дифференциальных уравнений движения многофракционной полидисперсной парогАЗокапельной системы при наличии межфазного теплообмена. Выведено дисперсионное соотношение, описывающее распространение и затухание акустических волн в многофракционных полидисперсных парогАЗокапельных смесях.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим плоское одномерное движение многофракционной полидисперсной парогАЗокапельной смеси в акустическом поле. На основе теорий двухфазных сред, представленных в работах [1, 2] получена замкнутая система линеаризованных интегро-дифференциальных уравнений движения многофракционной парогАЗокапельной смеси с полидисперсными включениями. Рассмотрены и учтены законы нестационарного межфазного трения и теплообмена. Выведено дисперсионное соотношение, которое определяет распространение и затухание акустических волн в равномерно движущейся полидисперсной парогАЗокапельной смеси при наличии неравновесного диффузионного теплообмена. Полученное дисперсионное соотношение является обобщением частных случаев, рассмотренных в работах [3, 4]. На примере загрязненных воздушных туманов проанализировано влияние определяющих параметров смеси на зависимости фазовой скорости и декремента затухания от частоты возмущений.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00111, <https://rscf.ru/project/24-71-00111/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука. 1987. Ч.1. 464 с.
2. Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогАЗокапельных сред. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 1998. 153 с.
3. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Р. Влияние фазовых переходов на распространение акустических волн в многофракционных газозвесьях с полидисперсными включениями // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59. № 1. С. 133-139.
4. Zaripov R.R. Propagation of acoustic waves in a moving multifractional polydisperse gas mixture // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Т. 46. № 5. С. 2303-2311.

Зарипов Ринат Рамилевич, rinat\_zaripov.imm@mail.ru



# ЭВОЛЮЦИЯ ВЕРХНЕГО КВАЗИОДНОРОДНОГО СЛОЯ В ЧЕРНОМ МОРЕ В ТЕПЛЫЙ ПЕРИОД ГОДА ПО ДАННЫМ МНОГОЛЕТНИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА АКВАТОРИИ ПОЛИГОНА «ГЕЛЕНДЖИК»

А.Г. Зацепин\*, О.И. Подымов, К.П. Мысленкова, Ю.В. Мурзакова  
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва  
zatsepin@ocean.ru

Обсуждаются закономерности изменений среднедекадных значений толщины и температуры верхнего квазиоднородного слоя (ВКС) в теплый период года (апрель – ноябрь) установленные на основе данных, полученных при СТД – зондированиях в шельфово-склоновой зоне Черного моря на акватории полигона «Геленджик» в период 2010–2023 гг. К анализу были также привлечены расчеты потоков тепла, плавучести и турбулентной энергии через границу раздела вода-воздух на базе данных атмосферного реанализа NCEP CFSv2.

Для выявления сезонной динамики характеристик ВКС и уменьшения влияния их синоптической изменчивости (несколько суток) было выполнено подекадное (10 дней) разбиение данных для всех лет вышеуказанного периода, т.е. в данных учитывался только день и месяц. Подход к выделению ВКС, как одной из двух структурных составляющих деятельного слоя (рис. 1) и методология работы с данными, описаны в [1, 2, 3].

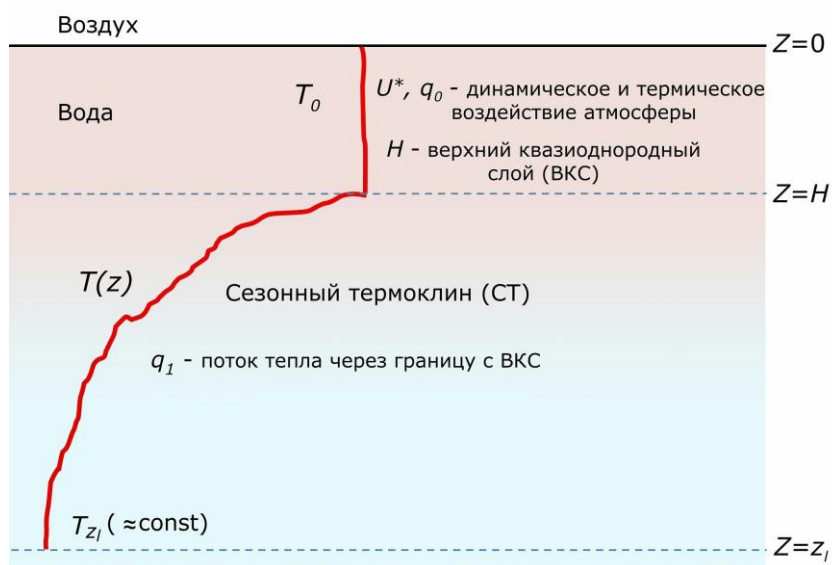


Рис. 1. Схематическое представление профиля температуры в деятельном слое моря (пояснения – в легендах на рисунке)

Показано, что в апреле, в начале теплого периода, ВКС не является эпизодически присутствующей структурной частью ДС, а становится ее постоянным элементом только к началу мая. С мая по август, включительно, поступающая сверху волно-ветровая турбулентная энергия частично (за исключением диссипации) затрачивается на работу против силы плавучести, обусловленной поступлением тепла в ВКС через границу раздела вода-воздух. Толщину ВКС в этот период можно считать квазистационарной и пропор-

циональной модифицированному масштабу Монина-Обухова [4], рассчитанному с использованием потока положительной плавучести, поступающей в море через поверхность вода-воздух, за вычетом потока плавучести, проходящего через ВКС в сезонный термоклин (СТ) и при учете вертикальной скорости (рис. 2).

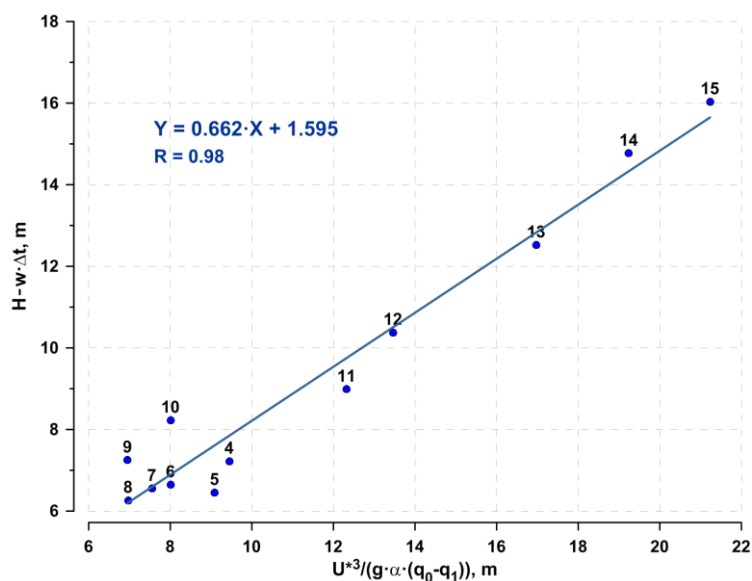


Рис. 2. Зависимость толщины  $H$  ВКС с учетом вертикальной скорости  $w$  для 4–15 декад от модифицированного масштаба Монина-Обухова ( $U^*$  - динамическая скорость в воде,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\alpha$  -  $\kappa$ - $\tau$  температурного расширения воды,  $q_0, q_1$  - удельные потоки тепла через границу вода-воздух, и из ВКС в СТ, соответственно,  $\Delta t = 8.64 \cdot 10^5$  с - декадный временной интервал. Числа над точками - номера соответствующих декад

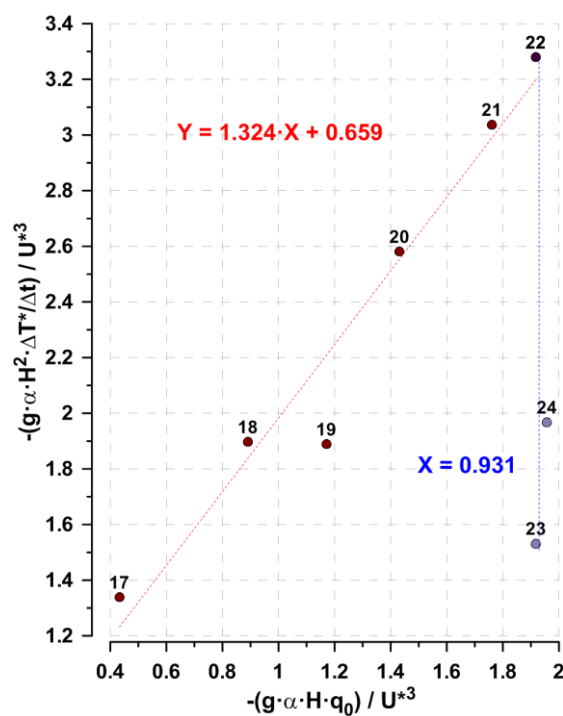


Рис. 3. Графическое представление двух стадий эволюции ВКС в период охлаждения моря  $w$  для 17–23 декад (сентябрь – ноябрь). Здесь  $T^* = T - T_{cl}$ , где  $T$  - температура ВКС,  $T_{cl} \approx 9^\circ\text{C}$  - температура на нижней границе СТ,  $\Delta T^*$  - изменение  $T^*$  за десятидневный временной интервал  $\Delta t$ . Числа над точками - номера соответствующих декад

Во вторую половину теплого периода (сентябрь–ноябрь), когда поток плавучести является отрицательным, толщина ВКС является нестационарной и ее увеличение происходит за счет конвективно-турбулентного вовлечения воды из СТ, толщина которого уменьшается со временем. При этом выявлены две стадии, характеризующие различными физическими закономерностями (рис. 3).

Основные стадии формирования и эволюции ВКС в период года с апреля по декабрь (1-24 декады) состоят в следующем:

1. Апрель, 1-3 декады – ВКС то образуется, то разрушается, его нельзя считать постоянно существующим. Актуальная задача определить условия, когда он образуется и когда разрушается в зависимости от текущего значения масштаба Мони́на-Обухова, нужны данные систематических наблюдений в марте-апреле.

2. Май-август, 4-15 декады,  $q_0 > 0$ : стадия нагрева моря, среднедекадная толщина ВКС пропорциональна модифицированному масштабу Мони́на-Обухова при учете потока плавучести, уходящего из ВКС в термоклин (СТ) и вертикальной скорости.

3. Сентябрь-октябрь, 17-21 декады,  $q_0 < 0$ : начало стадии охлаждения моря, среднедекадная толщина ВКС определяется с учетом закономерностей вовлечения воды из термокли́на. При этом реализуется автомодельный режим (промежуточная асимптотика), описываемый линейной функцией, связывающий безразмерную скорость изменения потенциальной энергии ВКС с параметром Мони́на-Обухова в минус первой степени.

4. Ноябрь, 22–24 декады,  $q_0 < 0$ : описанная выше стадия эволюции ВКС резко заканчивается. Безразмерная скорость изменения потенциальной энергии перестает быть функцией параметра Мони́на-Обухова и быстро уменьшается. В тоже время, параметр Мони́на-Обухова достигает постоянной величины (данный результат нуждается в проверке) и с его помощью можно определять толщину ВКС так, как это делалось на стадии интенсивного прогрева моря.

В дальнейшем планируется установление закономерностей эволюции температуры и толщины ВКС и СТ на годовом интервале времени.

## **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №23-17-00056 (анализ данных, выявление закономерностей) и в рамках тем госзадания FMWE-2024-0016 - Зацепин А. Г., Мысленкова К.П., Мурзакова Ю.В. - (сбор, подготовка и обработка данных реанализа), FMWE-2024-0027 - Подымов О.И. (сбор, подготовка и обработка данных измерений).

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Зацепин А.Г., Подымов О.И., Сильвестрова К.П., Мурзакова Ю.В. Теплозапас деятельного слоя в прибрежной зоне Черного моря на полигоне “Геленджик” и его эволюция в теплый период года // *Океанология*. 2024. Т. 64. № 6. С. 871–883.
2. Зацепин А.Г., Подымов О.И. Параметризация термической структуры деятельного слоя Черного моря на акватории полигона «Геленджик» в теплый период года // *Океанология*. 2025. Т. 65. № 4. С. 35-46.
3. Зацепин А.Г., Подымов О.И., Сильвестрова К.П., Мурзакова Ю.В. Закономерности формирования и эволюции верхнего квазиоднородного слоя в Черном море в теплый период года на акватории полигона «Геленджик» // *Океанология*. 2025. Т. 65. № 6 (в печати).

4. Монин А.С.; Обухов А.М. Основные законы турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Акад. Наук. СССР Геофиз. Инст. 1954. Т. 24. № 151. С. 163-187.

Зацепин Андрей Георгиевич, zatsepin@ocean.ru  
Подымов Олег Игоревич, huravela@yahoo.com  
Мысленкова Ксения Петровна, ksberry@mail.ru  
Мурзакова Юлия Валерьевна, julia.murz@gmail.com



## УПРУГОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВСТРЕЧНЫХ УЕДИНЕННЫХ 3D ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В СИЛЬНОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*Н.М. Зубарев\*, О.В. Зубарева*  
*Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург*  
*nick@iep.uran.ru*

Электрическое поле, направленное по касательной к свободной поверхности непроводящей жидкости, оказывает на нее стабилизирующее воздействие [1,2]. В условиях сильного поля, когда электростатические силы доминируют над капиллярными и гравитационными силами, это приводит к тому, что линейные волны распространяются вдоль направления приложенного поля без дисперсии, т.е. сохраняя свою форму. В работах [3–6] было установлено, что для жидкостей с большими значениями диэлектрической проницаемости ( $\varepsilon \gg 1$ ) нелинейные волны обладают рядом свойств линейных волн. В частности, они распространяются по направлению, либо против направления поля без искажений, т.е. так, как если бы они описывались линейным волновым уравнением.

Пусть в невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой горизонтальную плоскость  $z = 0$  (ось  $z$  декартовой системы координат перпендикулярна поверхности жидкости; оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости поверхности). Вектор электрического поля направлен по оси  $x$ , а функция  $\eta(x, y, t)$  задает отклонение границы от плоскости (рисунок 1). Как было установлено в [4–6], уравнения движения допускают точные волновые решения  $\eta(x, y, t) = \eta^\pm(x \mp V_E t, y)$ , где  $\eta^\pm$  – произвольные функции, а индексы “ $\pm$ ” соответствуют волнам, распространяющимся по направлению, либо против направления электрического поля с постоянной скоростью  $V_E = E\sqrt{\varepsilon/(4\pi\rho)}$  (здесь  $E$  – абсолютное значение напряженности поля,  $\rho$  – плотность жидкости). Однако, в отличие от линейных волн, где общим решением является суперпозиция

$$\eta(x, y, t) = \eta^+(x - V_E t, y) + \eta^-(x + V_E t, y),$$

нелинейные встречные волны будут взаимодействовать. Бездисперсионным может быть только их распространение по отдельности, когда либо  $\eta^+ = 0$ , либо  $\eta^- = 0$ .

Настоящая работа посвящена исследованию взаимодействия встречных пространственно-локализованных волн большой амплитуды в 3D геометрии (см. рисунок 1). При столкновении таких волн их форма будет меняться, однако, как ниже будет продемонстрировано, они не будут обмениваться энергией и импульсом. Такой результат является обобщением результатов работы [7], где был рассмотрен более простой 2D случай, т.е. взаимодействие плоских волн.



Понятно, что в силу пространственной локализации рассматриваемых волн в энергии ( $W$ ) и импульсе ( $\mathbf{P}$ ) системы до и после их столкновения можно вычлениить составляющие, соответствующие волнам, распространяющимся в положительном направлении ( $W^+$  и  $\mathbf{P}^+$ ) и в отрицательном направлении ( $W^-$  и  $\mathbf{P}^-$ ) оси  $x$ . Вследствие сохранения полных энергии и импульса системы, при взаимодействии волн должны выполняться следующие равенства:

$$W_1^+ + W_1^- = W_2^+ + W_2^-, \quad (1)$$

$$\mathbf{P}_1^+ + \mathbf{P}_1^- = \mathbf{P}_2^+ + \mathbf{P}_2^-, \quad (2)$$

где индексы “1” и “2” соответствуют волнам до и после столкновения.

Как было доказано в недавней работе [8] применительно к магнитной жидкости в горизонтальном магнитном поле (эта ситуация с математической точки зрения эквивалентна рассматриваемой здесь), энергии и  $x$ -компоненты импульсов уединенных волн связаны простыми соотношениями:

$$W^\pm = \pm V_E P_x^\pm. \quad (3)$$

Подставляя их в (1), а также учитывая, что из общих соображений  $P_{y1}^\pm = P_{y2}^\pm = P_{z1}^\pm = P_{z2}^\pm = 0$ , получим из (1)–(3) после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} W_1^+ &= W_2^+, & W_1^- &= W_2^-, \\ P_1^+ &= P_2^+, & P_1^- &= P_2^-. \end{aligned}$$

Эти соотношения означают, что энергии и импульсы встречных уединенных волн при столкновении сохраняются или, иными словами, столкновение является упругим. Данный результат является точным. Он обусловлен связями (3) и получен без использования ограничений на амплитуды взаимодействующих волн в результате анализа полных трехмерных уравнений движения.

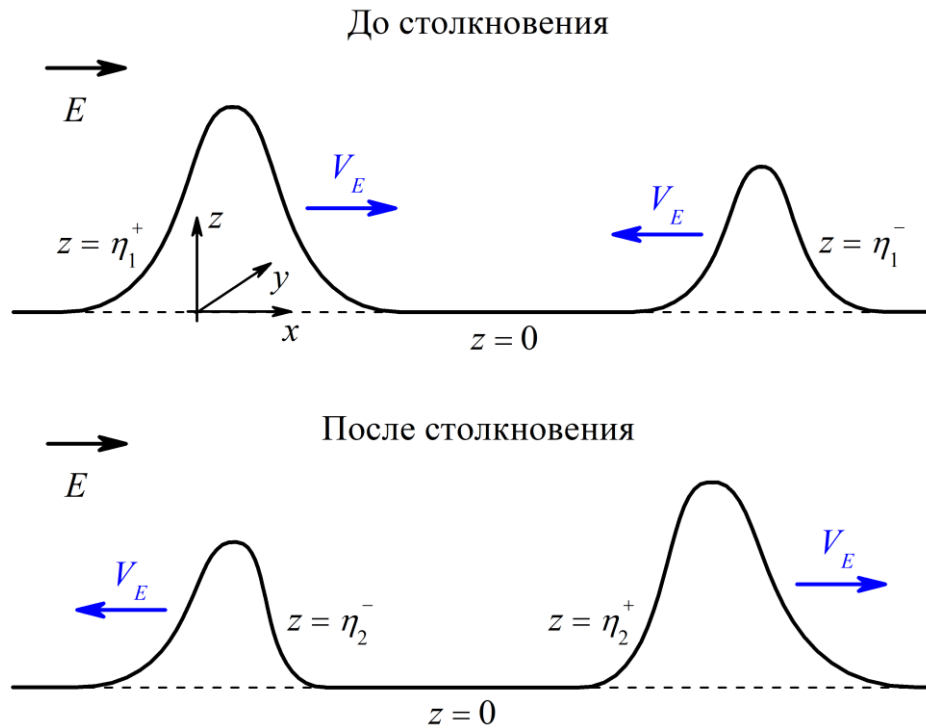


Рис. 1. Схематически показаны встречные волны до и после столкновения.

Следствием сохранения энергий и импульсов нелинейных уединённых волн является то, что их взаимодействие обладает свойствами, характерными для линейных волновых процессов. Если пренебречь внутренней структурой уединённых волн (которая изменяется при столкновениях: волны деформируются и приобретают фазовые сдвиги [7,9]) и рассматривать их как точечные объекты, то можно считать, что волны вовсе не взаимодействуют. Это свойство может быть важно для анализа волновой турбулентности на свободной поверхности непроводящих жидкостей во внешнем тангенциальном электрическом поле [10–12].

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10012, <https://rscf.ru/project/23-71-10012/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Melcher J.R.* Field-Coupled Surface Waves. – MIT Press, Cambridge, MA. 1963.
2. *Melcher J.R., Schwarz W.J.* Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field // *Physics of Fluids*. 1968. V. 11. No. 12. P. 2604–2616.
3. *Zubarev N.M.* Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a strong tangential electric field // *Physics Letters A*. 2004. V. 333. Nos. 3–4. P. 284–288.
4. *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* Nondispersive propagation of waves with finite amplitudes on the surface of a dielectric liquid in a tangential electric field // *Technical Physics Letters*. 2006. V. 32. No. 10. P. 886–888.
5. *Zubarev N.M.* Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field in 3D geometry: Exact solutions // *JETP Letters*. 2009. V. 89. No. 6. P. 271–274.
6. *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* Propagation of large-amplitude waves on dielectric liquid sheets in a tangential electric field: Exact solutions in three-dimensional geometry // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2010. V. 82. No. 4. P. 046301.
7. *Zubarev N.M., Kochurin E.A.* Interaction of strongly nonlinear waves on the free surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field // *JETP Letters*. 2014. V. 99. No. 11. P. 627–631.
8. *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* Elastic interaction of counter-propagating waves of arbitrary amplitude on the surface of a magnetic fluid in a tangential magnetic field in 3D geometry // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2025. V. 481. P. 134885.
9. *Kochurin E.A.* Formation of regions with high energy and pressure gradients at the free surface of liquid dielectric in a tangential electric field // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2018. V. 59. No. 1. P. 79–85.
10. *Kochurin E.A.* Wave turbulence of a liquid surface in an external tangential electric field // *JETP Letters*. 2019. V. 109. No. 5. P. 303–308.
11. *Dmitriev I.A., Kochurin E.A., Zubarev N.M.* Numerical study of free-surface electro-hydrodynamic wave turbulence // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*. 2023. V. 30. No. 4. P. 1408–1413.
12. *Kochurin E.A.* Anisotropy of free-surface wave turbulence induced by a horizontal magnetic (electric) field // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2025. V. 191. P. 115828.

Зубарев Николай Михайлович, [nick@iep.uran.ru](mailto:nick@iep.uran.ru)

Зубарева Ольга Владимировна, [olga@iep.uran.ru](mailto:olga@iep.uran.ru)



# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСОВ ДАВЛЕНИЯ ПРИ МАЛОМАСШТАБНЫХ ПАРОВЫХ ВЗРЫВАХ

Ю.П. Ивочкин, С.М. Юдин\*

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

[stepex@jiht.ru](mailto:stepex@jiht.ru)

Несмотря на более чем полувековую историю исследования парового взрыва [1, 2], вызванного интенсивным взаимодействием горячего расплава (кориума) с охлаждающей водой, механизм этого физического явления изучен недостаточно полно [3]. Одна из ключевых и наименее изученных стадий его развития связана с этапом триггеринга – взрывной фрагментацией отдельной жидкометаллической капли, окруженной пароводяной оболочкой. Экспериментальные исследования поведения паровой пленки, а также динамики разрушения капли на этом этапе сталкиваются с существенными ограничениями, вызванными движением горячего расплава относительно водной среды и неподвижных измерительных датчиков. В подобных условиях не представляется возможным полноценно выяснить механизм непосредственного соприкосновения холодной воды с горячей поверхностью.

По этим причинам в представленной работе для исследования начала взрывного разрушения капли расплава используется подход, основанный на анализе импульсов давления, измеренных в воде посредством пьезоэлектрических датчиков. Метод заключается в выявлении характерных акустических предвестников, предшествующих макроскопически наблюдаемому паровому взрыву. Кроме того, в дополнение к основным экспериментам, измерения импульсов давления при коллапсе паровых оболочек были выполнены на твердых полусферических образцах в условиях заведомого отсутствия фрагментации расплава. Подобное сопоставление позволяет определить особенности, связанные исключительно с процессом дробления расплава и оценить корректность применения твердых сфер (полусфер) в качестве образцов для изучения стадии триггеринга маломасштабного парового взрыва.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ОПЫТОВ

Экспериментальное исследование процесса взрывной фрагментации жидких капель металла проводилось по ранее описанной методике [4]. В данной работе в качестве рабочего металла использовалось Sn (чистота 99,9%) массой 10 гр. Интервал начальных температур  $T_0$  расплава составлял 600 – 800 °C с шагом изменения в 50 °C. В качестве охлаждающей жидкости использовалась вода  $T_w = 18$  °C, которая заполняла сосуд размерами 330×160×250 с прозрачными стенками. На глубине  $H = 75$  мм от свободной поверхности располагался пьезодатчик давления марки Kistler 701A, таким образом, чтобы мембрана – чувствительный элемент преобразователя, была ориентирована параллельно дну емкости. Через усилитель заряда датчик соединялся с измерительным комплексом National Instruments (рис.1). Съемка процесса взрывной фрагментации производилась скоростной видеокамерой. Частотой съемки 960 кадр/сек. Частота оцифровки измеряемых импульсов давления изменялась в пределах  $(20 - 1000) \times 10^3$  изм./с. Капля расплава подготавливалась двумя путями – с помощью левитационной плавки в полости индуктора, либо в печи резистивного типа. Опыты, выполненные описанными выше способами плавления, дали схожие результаты.

Дополнительные опыты были посвящены изучению взрывного разрушения паровой пленки около горячего полусферического образца, погруженного в холодную воду на глубину своего радиуса ( $R = 5$  мм). Температура рабочего тела в его центре контролировалась с помощью термпары (типа K). Измерение импульсов давления в

воде при взрывном разрушении паровой пленки осуществлялось посредством датчика РСВ модели HSM 113A28, расположенном на расстоянии 6 мм от торца. Помимо указанных величин, в опытах с нагретой полусферой с помощью кондуктометрической методики фиксировался контакт охладителя с нагретой поверхностью.

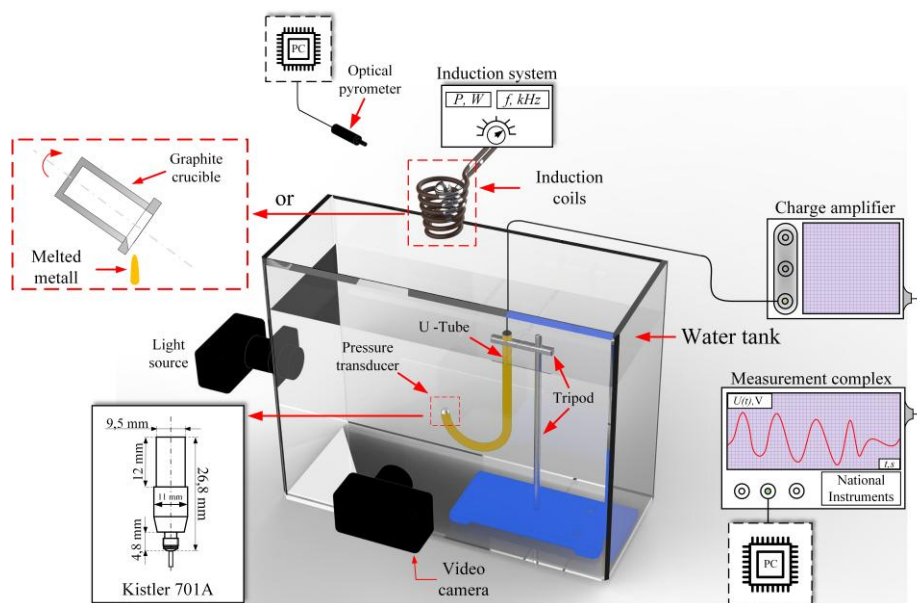


Рис. 1. Упрощенная схема экспериментальной установки для изучения взрывной фрагментации жидких капель

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведённые исследования выявили различия в пульсациях давления при отсутствии фрагментации жидкометаллической капли, при её фрагментации и при взрывном вскипании на твёрдых поверхностях. Основное отличие проявилось в более высоких амплитудах импульсов давления (рис.2) и акустической энергии при тонкой фрагментации расплава. Помимо этого длительность временных интервалов между интенсивными импульсами для твердой поверхности и жидкой капли могут различаться, по меньшей мере, на порядок. Анализ осциллограмм давления при взрывной фрагментации Sn показал, что пикам с большой амплитудой предшествуют менее интенсивные пульсации, длительность которых лежит в пределах  $\sim 0,5 - 5$  мс. В наших экспериментах их количество достигало 4 – 5, а амплитуда возрастала экспоненциально.

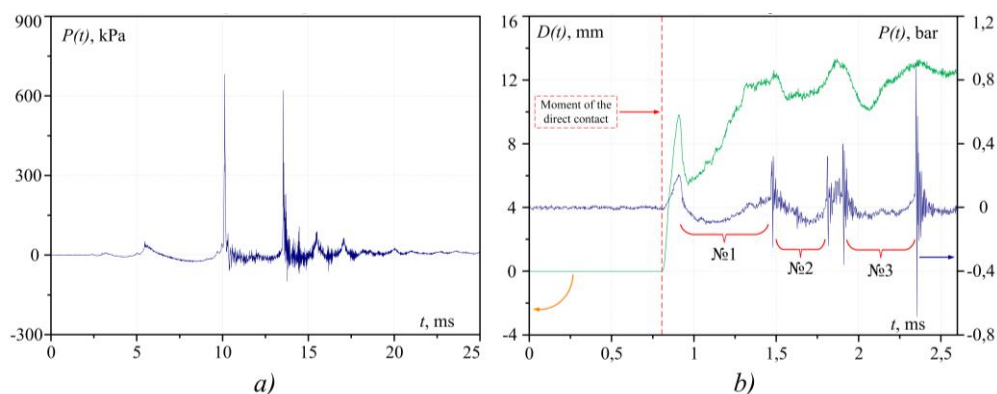


Рис. 2. а) Пульсаций давления при взрывной фрагментации жидкой капли б) синхронизированный график давления и электрического контакта при взрывном разрушении паровой пленки на полусфере

Было выдвинуто предположение, что природа их возникновения связана с актами локального взрывного вскипания легкого теплоносителя на различных участках поверхности капли. Сопоставление кривой прямого контакта холодной воды с нагретой полусферой и соответствующей кривой давления подтверждает выдвинутое предположение. Появление вторичных высокочастотных участков на кривой давления обусловлено повторным взрывным вскипанием, происходящим на более охлаждённых участках поверхности полусферы. Данный эффект наблюдался на одиночной капле олова при ее падении в воду (рис.3). Первичное соприкосновение горячей поверхности капли с охлаждающей жидкостью наблюдалось на ее носовой части. Два других последующих контакта отслеживались на кормовой и боковой частях соответственно.

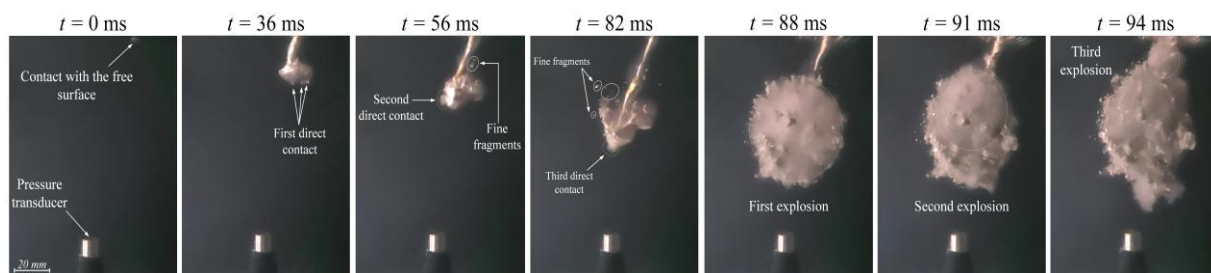


Рис. 3. Процесс развития парового взрыва капли Sn, сопровождающегося тремя локальными контактами воды с горячей поверхностью несколькими интенсивными взрывами

Вейвлет представление полученных осциллограмм  $P(t)$  для капли и полусферы на первый взгляд дают схожие скейлограммы, согласно которым в регистрируемых сигналах можно выявить, по меньшей мере, несколько параллельно протекающих физических процессов. В случае жидкого олова это явление проявляется более выражено. Данный вопрос требует дальнейшей проработки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных экспериментальных исследований свидетельствуют, что осциллограммы давления, полученные при взрывных процессах на жидкометаллических каплях и твердой полусфере, несмотря на кажущееся визуальное сходство, имеют существенные различия, которые характеризуются разной длительностью процессов и их интенсивностью. В волновых пакетах для жидкого Sn, как показал вейвлет-анализ, присутствуют структуры различной формы, которые сохраняются по мере протекания процесса, чего не наблюдается в случае твердой полусферы. Результаты опытов с полусферой позволили подтвердить «эффект захлаживания» горячей поверхности при ее взрывном контакте с охладителем (водой). Экспериментально с помощью полученных осциллограмм давления и видеозаписи доказано, что перед стадией активной взрывной фрагментации капли имеет место серия подобных контактов.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Государственное задание № 075-00269-25-00).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berthoud G. Vapor explosions // Annual Review of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 32. № 1. Pp. 573–611
2. Мелихов В. И., Мелихов О. И., Якуш С. Е. Гидродинамика и теплофизика паровых взрывов — М.: «ИПМех РАН», 2020. 276 с.

3. *Melikhov V.I, Melikhov O.I, Yakush S.E.* Thermal interaction of high-temperature melts with liquids // High Temperature. 2023. Vol.60. №2. Pp.252 – 85
4. *Ivochkin Y. P., Yudin S. M., Borodina T. I.* Specific Features of the Breakup of Hot Liquid Metal Droplets Falling into Cold Water // Technical Physics. 2024. Vol. 69. № 10. Pp. 2517-2526.

Ивочкин Юрий Петрович, ivochkin@yandex.ru  
Юдин Степан Михайлович, stepex@jiht.ru



## МЕХАНИЗМЫ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА КАПЛИ СУСПЕНЗИИ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ СЛИЯНИЯ

*А.Ю. Ильиных, Ю.Д. Чашечкин*  
*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
*ilynykh@ipmnet.ru*

Исследования динамики и структуры импакта одиночных капель как чистых жидкостей, так и растворов, суспензий микро- и наночастиц стимулируются научной содержательностью темы и широкой областью применения капельных технологий. Традиционно изучаются картины слияния свободно падающих капель смешивающихся жидкостей: однородных растворов, окрашенных минеральными или органическими красителями и растворов солей металлов [1]. Картины распределения вещества капли существенно отличаются в различных режимах течения, основу классификации которых составляют отношения кинетической и потенциальной энергий капли в момент первичного контакта с принимающей жидкостью [2]. Развитие технологий создания современных материалов расширило список рабочих сред, в который вошли микро- и наносуспензии с характерным размером частиц  $10^{-7} - 10^{-4}$  см [3]. Интерес к исследованиям наносуспензий поддерживается разработкой технологий в различных отраслях промышленности – химической и нефтехимической, энергетике и в здравоохранении. Активно изучаются возможности применения суспензий в компактных устройствах обеспечения быстрого охлаждения или нагрева [4].

На свободной поверхности и в толще жидкости идентифицированы отдельные ячейки, волокна, слои, с выраженными оболочками [5]. При их уничтожении часть конвертируемой доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) переходит в кинетическую энергию движения тонких струек.

Добавление в жидкость микрочастиц, усложняет термодинамику, расширяет число влияющих параметров, как и перечень возможных применений научных результатов в новых технологиях, стимулирует постановку новых экспериментальных исследований. Картины вихревого течения наносуспензии глицерина и его растворов в интрузивном режиме [6], а также растворов солей [2], оказываются подобными. Научный и практический интерес представляет изучение структуры и динамики слияния капель наносуспензии в практически важном расширенном диапазоне параметров, включающем другие режимы течений – переходный и импактный режим [2]. В данных опытах изучается эволюция картины распределения вещества капли – водной суспензии микрочастиц активированного угля и наночастиц оксида железа – в покоящейся принимающей жидкости (чистой воде) в интрузивном и импактном режиме течения. Опыты проведены на Стенде

для изучения тонкой структуры быстропротекающих процессов (ТБП), входящем в состав Уникальной исследовательской установки УИУ «ГФК ИПМех РАН».

В число основных размерных параметров изучаемых течений входят потенциалы Гиббса капли  $G_d$ , воздушной среды  $G_a$  и принимающей жидкости  $G_t$ , физические параметры сред (плотность, вязкость коэффициенты поверхностного натяжения); коэффициент диффузии окрашивающей каплю примеси в принимающей жидкости  $\kappa_d$ ; диаметр  $D$ , высота свободного падения  $H$  (скорость капли  $U$  в момент контакта).

Полная энергия капли  $E_d = E_p + E_k + E_\sigma$  складывается из потенциальной энергии  $E_p$ , кинетической энергии  $E_k$ , а также ДППЭ, заключенной в приповерхностном шаровом слое толщиной  $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$  см. Время передачи кинетической энергии  $E_k$  и импульса  $P_d = Mv$  капли  $\Delta t = D/U$  составляет несколько миллисекунд и на несколько порядков превышает время конверсии ДППЭ  $\Delta \tau = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$  с при уничтожении приповерхностного слоя сливающихся жидкостей. Быстрые процессы преобразования ДППЭ в другие формы играют определяющую роль в установлении режима слияния течения [4]. Отношения физических величин образуют наборы собственных временных и пространственных масштабов, определяющих требования к методике измерений, разрешения инструментов. Различия физических свойств контактирующих сред характеризуются относительной разностью плотностей  $R_\rho = (\rho_t - \rho_d) / (\rho_t + \rho_d)$ , коэффициентов поверхностного натяжения  $R_\sigma$  и динамических вязкостей  $R_\mu$ .

Анализ картин возмущений свободной поверхности и распределения микрочастиц активированного угля и наночастиц оксида железа, наблюдаемых при слиянии свободно падающей капли суспензий с водой, показывает, что сложное течение наряду с традиционно наблюдаемыми элементами картины течения содержит тонкие компоненты. В интрузивном режиме плавно втекающая капля в целом сохраняет свою сплошность, однако тонкие ускоренные и замедленные струйки проявляются в неоднородностях и контуре интрузии в толще жидкости, и на границе пятна контакта сливающихся жидкостей на свободной поверхности (рис. 1,а). Компактная интрузия с частицами суспензии, погружающаяся по инерции и под действием плавучести, постепенно преобразуется в кольцо (рис. 1,б). Со временем в кольце образуются более активно погружающиеся утолщения, которые преобразуются в вихревые кольца с собственной структурой распределения частиц (рис. 1,в). В импактном режиме сливающаяся капля деформирует свободную поверхность и одновременно распадается на тонкие струйки (рис. 1,г). Следы струек образуют линейчатые структуры на поверхности венца и ретикулярные формации на дне каверны, состоящие из трех-, четырех- и пятиугольных ячеек (рис. 1,д). Другие струйки пронзают дно и стенки каверны, вторгаются в толщу принимающей жидкости и образуют примыкающий к каверне промежуточный слой, обогащенный частицами угля. Жидкость капли, перетекающая по границам ячеек на стенках и дне каверны, скапливается в узлах сетки, под которыми продавливают контактную поверхность и, втекая в принимающую жидкость, формирует короткие вихорьки. За уходящим дном схлопывающейся каверны вихорьки преобразуются в петли, сохраняющиеся в принимающей жидкости (рис. 1,е).

Формирующийся в центре каверны всплеск захватывает жидкость из слоя, обогащенного частицами угля. Общая картина течения просветляется, в ней остаются выраженными несколько ярусов петель с окрашенными кольцами на окончаниях.



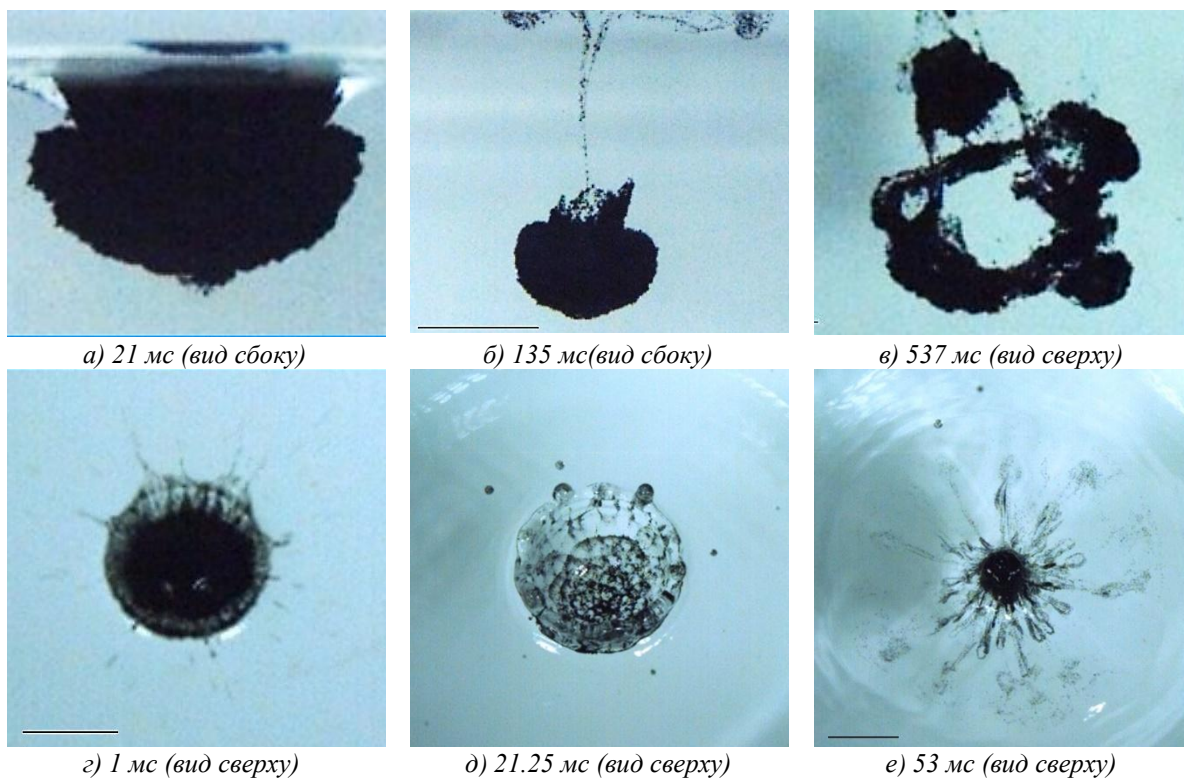


Рис. 1. Эволюция картины течения слиянии капли суспензии микрочастиц угля в интрузивном (а-в) и импактном режиме (г-е):  $D = 4.2$  мм,  $U = 0.15$  м/с,  $Re = 167$ ,  $Fr = 0.55$ ,  $We = 1.36$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh = 0.007$ ,  $R_E = 0.11$ ,  $R_p = -0.005$ ,  $R_\sigma = 0.02$ .

Волокнистую структуру течения формируют тонкие ускоренные и замедленные струйки. В интрузивном режиме струйки деформируют линию границы пятна контакта сливающихся жидкостей и оболочку объема втекающей жидкости. В импактном режиме одни струйки радиально растекаются по стенкам каверны и венца, образуют шипы, с концов которых вылетают мелкие капельки. Другие струйки, протыкающие дно каверны, образуют промежуточный слой, и отдельные петли. Дополнительное ускорение тонких струек в течении обеспечивают процессы конверсии потенциальной поверхностной энергии при уничтожении контактных поверхностей и оболочек. В процессе слияния капля наножидкости также распадается на тонкие струйки, следы которых образуют линейчатые и сетчатые структуры на поверхности венца и каверны, вторгаются сквозь стенки каверны в толщу жидкости, где формируют промежуточный слой. Общая геометрия течения согласуется с картиной растекания ненагруженных капель. Прослежена эволюция структуры со временем на начальном этапе слияния капли.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чашечкин Ю.Д. Закономерности распределения вещества свободно падающей окрашенной капли в прозрачной принимающей жидкости (обзор) // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2025. №1. С. 34–76. DOI: 10.1134/S0015462824604315.



2. Chashechkin Yu.D, Ilinykh A.Yu. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // *Axioms*. 2023 V. 12(4). P. 374.
3. Yang L, Tian J, Ding Y et al. The physics of phase transition phenomena enhanced by nanoparticles // *Appl. Phys. Rev.* 2025;12:011307. <https://doi.org/10.1063/5.0200714>
4. Shah P, Driscoll M. Drop impact dynamics of complex fluids: a review // *Soft Matter*. 2024;20:4839–4858. DOI: 10.1039/D4SM00145A
5. Malenkov GG. Structure and dynamics of surfaces of thin films and water microdroplets. *Colloid Journal*. 2010;72(5):649–659. DOI: 10.1134/S1061933X1005011X
6. Zhang Y., Mu Z., Wei Y., et al. Evolution of the heavy impacting droplet: Via a vortex ring to a bifurcation flower // *Phys. of Fluids*. 2021. Vol. 33. P. 113603. <https://doi.org/10.1063/5.0064072>

Ильиных Андрей Юрьевич, [ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)



## ПОГРУЖАЮЩИЕСЯ И ВСПЛЫВАЮЩИЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В КАРТИНЕ СЛИЯНИЯ СВОБОДНО ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ

*А.Ю. Ильиных*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*[ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)*

Слияние свободно падающей капли с принимающей жидкостью является многопараметрической задачей с широким набором компонентов течений, чувствительным к изменению условий. При сохранении базового набора структурных компонентов и механизмов переноса энергии и вещества картина течения различна. Одним из базовых компонентов, сопровождающих слияние капли, является кольцевой вихрь. Первые работы включали описания устойчиво воспроизводимых структурных компонентов – каверны, венца, брызг, отдельных вихрей и каскадов вихревых колец. Механизм формирования вихревого кольца и его динамика зависят среди прочего от режима слияния (задается отношением кинетической и поверхностной потенциальной энергии в момент контакта капли с принимающей жидкостью [1]) и отношением плотностей взаимодействующих сред [2].

Для изучения вихревых колец как правило жидкость капли подкрашивается, ее плотность превосходит плотность принимающей жидкости. Для интрузивного режима, когда кинетическая энергия меньше поверхностной потенциальной  $E_k < E_\sigma$  (высота падения сравнима с диаметром капли), характерно плавное втекание жидкости капли в толщу принимающей жидкости с образованием интрузии, а также запаздывание формирования каверны, трансформация интрузии в погружающийся кольцевой вихрь [1, 3]. Картина вихревых течений при слиянии капли жидкости меньшей плотности, чем принимающей среды, когда эффекты плавучести будут действовать в противоположном направлении, ранее не изучалась.

В данной работе методом высокоскоростной видеорегистрации проведена визуализация течения при слиянии капли 95% подкрашенного раствора этанола с водой в интрузивном режиме (при плотностном отношении  $R_p = 0.01 > 0$ ). Для сравнения также прослежено слияние капли разбавленного раствора перманганата калия большей плотности, чем плотность воды,  $R_p = -0.001 < 0$ . Картины столкновения летящих капель этанола и воды визуализированы в [4]. Опыты проведены на модифицированном Стенде для изучения тонкой структуры быстротекущих процессов (ТБП), входящем в состав Уникальной исследовательской установки УИУ «ГФК ИПМех РАН».

Выбор размерных параметров задачи проведен на основе анализа свойств системы фундаментальных уравнений механики жидкостей – дифференциальных законов переноса плотности, импульса и энергии. Для характеристики состояния вещества применяется дифференциал потенциала Гиббса  $dG = -s_e dT + V dP + S_b d\sigma + \mu_i dS_i$  [5]. В число основных размерных параметров изучаемых течений входят потенциалы Гиббса капли  $G_d$ , воздушной среды  $G_a$  и принимающей жидкости  $G_t$ , физические параметры сред (плотность, вязкость коэффициенты поверхностного натяжения); коэффициент диффузии окрашивающей каплю примеси в принимающей жидкости  $\kappa_d$ ; диаметр  $D$ , высота свободного падения  $H$  (скорость капли  $U$  в момент первичного контакта).

Полная энергия падающей сферической капли  $E_d = E_p + E_k + E_\sigma$  складывается из потенциальной энергии  $E_p$ , кинетической энергии  $E_k$ , а также доступной потенциальной поверхностной энергии ДППЭ, заключенной в приповерхностном шаровом слое толщиной  $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$  см. Время передачи кинетической энергии  $E_k$  и импульса  $\mathbf{P}_d = M\mathbf{v}$  капли  $\Delta t = D/U$  составляет несколько миллисекунд и на несколько порядков превышает время конверсии ДППЭ  $\Delta\tau = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$  с при уничтожении приповерхностного слоя сливающихся жидкостей. Быстрые процессы преобразования ДППЭ в другие формы играют определяющую роль в установлении режима слияния течения [4]. Отношения физических величин образуют наборы собственных временных и пространственных масштабов, определяющих требования к методике измерений, разрешения инструментов. Различия физических свойств контактирующих сред характеризуются относительной разностью плотностей –  $R_p = (\rho_t - \rho_d) / (\rho_t + \rho_d)$ , коэффициентов поверхностного натяжения  $R_\sigma$  и динамических вязкостей  $R_\mu$ .

При слиянии капли раствора  $\text{KMnO}_4$  с водой на начальном этапе капля растекается по поверхности жидкости и плавно втекает в ее толщу, образуя чечевицеобразную интрузию. Механизм слияния капли с жидкостью в интрузивном режиме приведен в [1]. Когда масса капли практически полностью втекает в толщу жидкости, распределение пигмента визуализирует тороидальный вихрь, сформировавшийся в верхней части области интрузии. Ядро интрузии окрашено более плотно, чем ее внешняя часть. Вихревая структура течения становится более выраженной при  $t = 12$  мс (рис. 1), ядра вихря разделены светлыми полосами конической кольцевой струи. Форма каверны меняется по мере ее углубления и при  $t = 20$  мс заметно увеличивается диаметр ее уплощенной нижней границы. Достигнув максимальных размеров, каверна начинает быстро схлопываться, втекающая жидкость отделяет интрузию от ее дна и от свободной поверхности. Далее окрашенный объем вихревого кольца линейно погружается в принимающую жидкость, постепенно теряя сплошность.

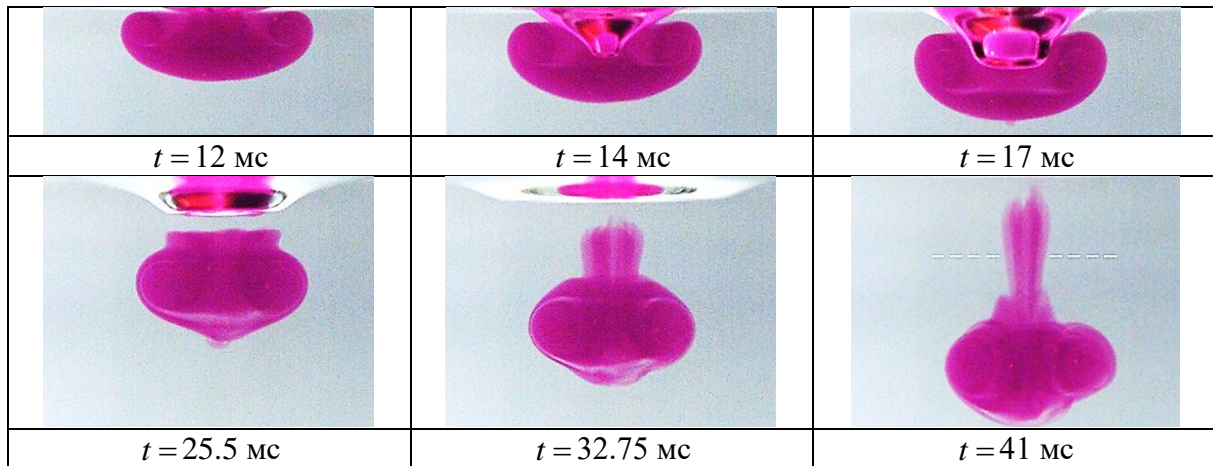


Рис. 1. Картина течения в вертикальной плоскости при слиянии капли раствора  $\text{KMnO}_4$  с дегазированной водопроводной водой (разбавление 1:500,  $D=4 \text{ мм}$ ,  $U=0.3 \text{ м/с}$ ,  $E_\sigma=3.7 \text{ мкДж}$ ,  $E_k=1.5 \text{ мкДж}$ ,  $R_E=0.41$ ,  $R_W=15 \cdot 10^{-6}$ ,  $R_p=-0.001$ ,  $R_\sigma=0$ )

В картине слияния капли смешивающейся более легкой жидкости (95% водного раствора этанола) с водой  $R_p=0.01 > 0$  наблюдается кольцевой вихрь нового типа. В фазе максимального заглубления конической каверны с заострения ее дна в толщу жидкости выталкивается компактный объем жидкости, содержащий раствор этанола. Погружающийся объем трансформируется в тороидальный вихрь практически неизменного диаметра, который, достигнув горизонта нейтральной плавучести, останавливается и образует компактную вторичную интрузию цилиндрической формы.

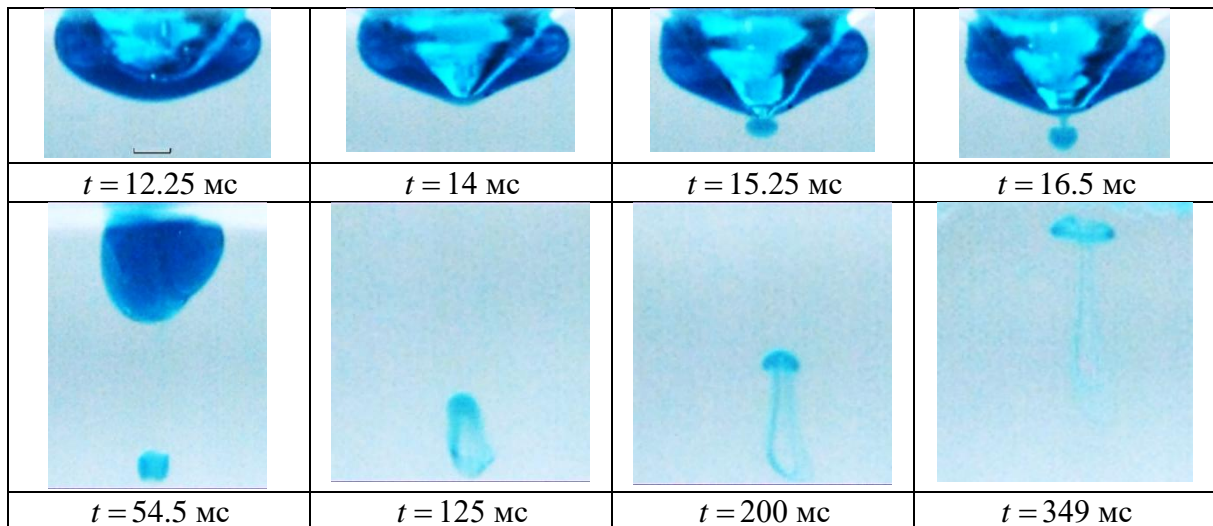


Рис. 2. Эволюция картины течения на начальном этапе слияния окрашенной капли 95% этанола ( $D=3.5 \text{ мм}$ ,  $U=0.3 \text{ м/с}$ ,  $E_\sigma=0.87 \text{ мкДж}$ ,  $E_k=0.82 \text{ мкДж}$ ) с водой в интрузивном режиме и эволюция всплывающего вихря.

Интрузия, содержащая обе жидкости, начинает всплывать и постепенно трансформируется в новый кольцевой вихрь. Всплывающий вихрь оставляет в принимающей жидкости цилиндрический след, оболочка которого окрашивается пигментом капли. Диаметр вихря постепенно увеличивается.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На начальном этапе формирования интрузии и каверны картины течения структурно близки. В стадии максимального углубления с заострения дна каверны в толщу жидкости выбрасывается погружающийся сферический вихорек, содержащий этанол, плотность которого меньше, чем у воды. Достигнув точки поворота, вихорек останавливается и формирует всплывающий объем жидкости, который постепенно трансформируется в кольцевой вихрь. Прослежена эволюция геометрии основных структурных элементов. Формирование всплывающего вихря при слиянии свободно падающей капли этанола с водой в интрузивном режиме наблюдалось впервые.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chashechkin Yu.D., Ilinykh A. Y.* Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // *Axioms*. 2023. V. 12(4). pp. 374. doi:10.3390/axioms12040374
2. *Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю., Джудар Б.* Формирование всплывающего вихря при слиянии капли этанола с водой в интрузивном режиме // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2024. Т.25, вып. 2.
3. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Распределение вещества капли в принимающей жидкости в интрузивном режиме слияния // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т. 23(6). с.1–18. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1023>
4. *Rodriguez F., Mesler R.* The penetration of drop-formed vortex rings into pools of liquid // *J. Colloid Interface Sci.* 1988. V. 121(1). pp. 121–129. doi:10.1016/0021-9797(88)90414-6
5. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10(4). pp. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>

Ильиных Андрей Юрьевич, [ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)



## ВОЛНОВЫЕ И НЕВОЛНОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ СЛИЯНИЯ КАПЛИ

*А.Ю. Ильиных\*, Ш.Х. Хайирбеков*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*[ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)*

Изучение коротких волн имеет важное междисциплинарное значение, находя применение в областях от микрофлюидики и лабораторной диагностики до нефтедобычи и новых энергетических технологий, что обусловлено их специфическими физическими характеристиками.

Актуальность исследований капиллярных волн в капельных течениях связана с задачами уточнения механизмов их генерации, изучения свойств волновых пакетов у каверны и венца в капельных течениях и определения их влияния на гашение [1] и генерацию морского волнения [2]. Капиллярные волны, генерируемые при схлопывании газовых пузырьков, также представляют собой важную для изучения область [3]. Изучение

затухания коротких гравитационно-капиллярных волн на поверхности воды, покрытой упругими пленками, представляет значительный интерес для экологии морей и океанов [4].

Подавляющее большинство течений, рассматриваемых в механике жидкостей, характеризуется наличием стратификации и вязкости.

Основными параметрами диссипативной среды являются: плотность  $\rho$ ; полный  $\sigma$  и нормированный на плотность коэффициент поверхностного натяжения  $\gamma = \sigma/\rho$ ; коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$ , температуропроводности  $\kappa_T$  и диффузии  $\kappa_S$ . Важными характеристиками, определяющей сжимаемость и стратификацию среды, являются соответственно скорость распространения звука  $c_S$  и частота плавучести  $N$  (частота Брента-Вайселя). Динамика однородной маловязкой жидкости с полем скорости  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  описывается системой уравнений Навье-Стокса [5].

Течениям реальных жидкостей свойственно наличие широкого диапазона масштабов. Большие, или макромасштабы ограничены размером бассейна  $L$  и масштабом стратификации  $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$ , где  $z$  – вертикальная координата.

Волны представляют собой крупномасштабные составляющие периодического процесса, в котором параметры локальной временной изменчивости (частота  $\omega$ ) и мгновенной пространственной структуры физических полей (волновой вектор  $\mathbf{k}$ ) связаны дисперсионными соотношениями [6], причем длина волны  $\lambda = 2\pi/k < L$ . Указанные соотношения могут вытекать как из классических уравнений гидродинамики [5], так и из фундаментальной системы уравнений [7].

Малые, или микромасштабы выражаются толщиной лигаментов  $\delta$ , являющимися высокоградиентными компонентами течений. Лигаментные решения возникают при применении метода сингулярных возмущений к уравнениям механики жидкостей с учетом вязкости и стратификации. В течениях лигаментная (сингулярная) и волновая (регулярная) составляющие неразрывно связаны, что является как следствием примененной математической методики, так физики наблюдаемых течений, в которых лигаменты сопровождают бегущие волны. Причем эта связь существеннее проявляется на малых масштабах, т.е. для коротких волн.

В данной работе исследуются нестационарные волноподобные возмущения, возникающие после слияния капли с принимающей жидкостью вследствие движения границы каверны с переменной скоростью.

Опыты выполнены на стенде ЭСП, входящем в состав Уникальной исследовательской установки «ГФК ИПМех РАН». Основные элементы стенда – бассейн размером  $1.5 \times 0.4 \times 0.6 \text{ м}^3$ , светодиодный осветитель со световым потоком 1000 лм, видеокамера Optronis CR3000×2 (скорость видеосъемки до 20000 к/с, калибровка изображения - 0.05 мм/пикс), гидрофон ГИ54. В данных опытах деформация изображения гидрофона служит индикатором изменения формы свободной поверхности.

Эволюция картины капиллярных волн и коротких нестационарных волноподобных возмущений на свободной поверхности на начальном этапе слияния капли диаметром  $D = 0.6 \text{ см}$ , свободно падающей в воду с высоты  $H = 90 \text{ см}$  проиллюстрирована на рис. 1 с помощью серии кадров из скоростной видеосъемки. Индикатором дисперсии служат блики - участки зеркального отражения от светодиодных осветителей.

Первоначально компактная группа бликов (рис. 1, *a*) в процессе распространения подвергается существенному растяжению (рис. 1, *c-e*), обусловленному дисперсионным расплыванием волнового пакета. К моменту времени  $t = 25.25 \text{ мс}$  группа стационарных капиллярных волн достигает границы гидрофона и искажает форму бликов (рис. 1, *d*).

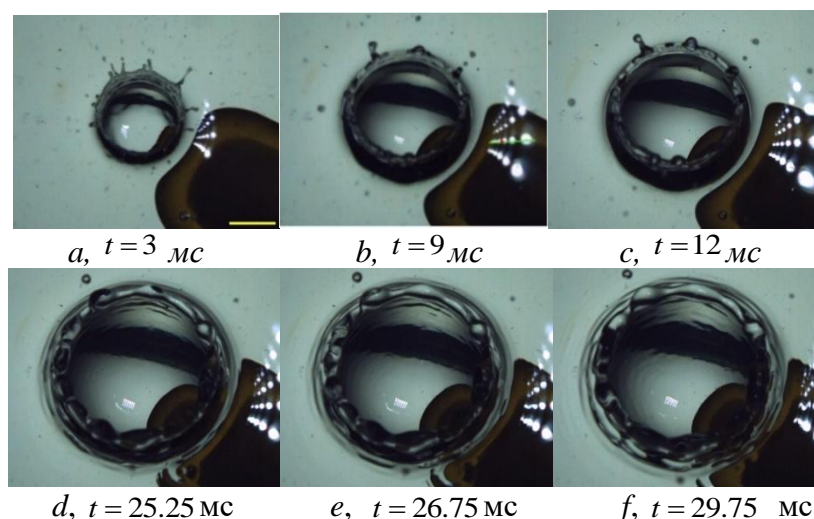


Рис. 1. Деформация группы бликов вследствие излучения нестационарных волноподобных возмущений. Длина маркера – 8 мм.

Частота и длина волны основной моды нестационарных возмущений определяется посредством измерения вариации освещенности в красной точке и вдоль зеленой линии соответственно (рис 1, b). На основе данных вариаций частоты и длины волны построено дисперсионное соотношение (рис. 2), существенно отличающееся от известного дисперсионного соотношения для капиллярных волн на поверхности воды [5].

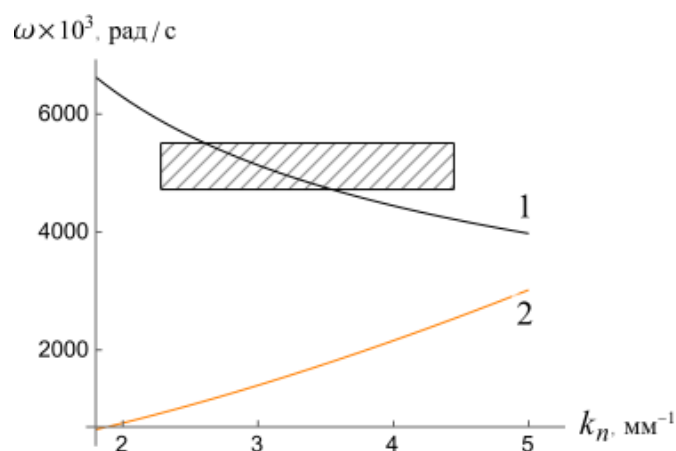


Рис. 2. Дисперсионные кривые: 1 - для группы бегущих нестационарных возмущений; 2 – для капиллярных волн. Заштрихованная область – параметры в опыте

Для подтверждения адекватности примененной методики для двух жидкостей – воды и расплава галinstана – построены дисперсионные кривые наблюдаемых капиллярных волн (рис. 3). Видно, что спектральный метод демонстрирует достаточно хорошее совпадение с экспериментом.

В представленной работе на начальной стадии слияния капли в области за венцом идентифицирован пакет бегущих нестационарных кольцевых возмущений и описана его эволюция, завершающаяся поглощением группой капиллярных волн бóльшей длины. Установлено качественное различие дисперсионных соотношений волноподобных мод и капиллярных волн.

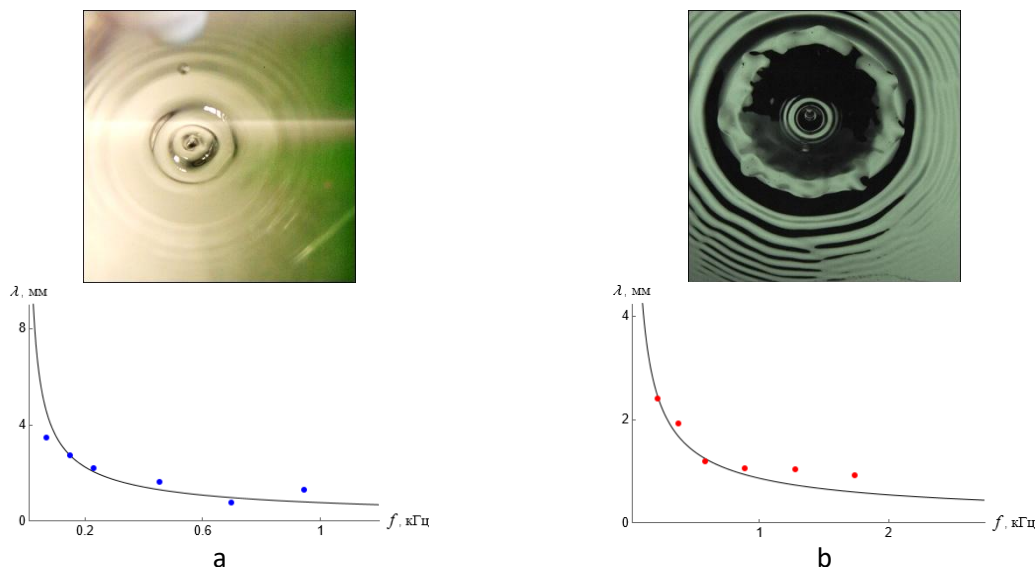


Рис. 3 – Группа кольцевых капиллярных волн вокруг каверны на позднем этапе импакта капли и их дисперсионные кривые для различных сред: а - для воды ( $H = 1$  см,  $\sigma = 73$  г/см<sup>2</sup>,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>); б – для расплава галлистана ( $H = 60$  см,  $\sigma = 670$  г/см<sup>2</sup>,  $\rho = 6492$  кг/м<sup>3</sup>)

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Опыты проведены на стенде ТБП УИУ «ГФК ИПМех РАН» при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peirson W. L., Beyá J. F., Banner M. L., Peral J. S., Azarmsa S. A. Rain-induced attenuation of deep-water waves // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 724. No. 1. P. 5–35. DOI:10.1017/jfm.2013.87
2. Naeser H. The capillary waves contribution to wind-wave generation // Fluids. 2022. Vol. 7. No. 73. <https://doi.org/10.3390/fluids7020073>
3. Ильиных А. Ю. Волны и пузыри импакта капли // Известия РАН. Серия физическая. 2023. Т. 87, № 1. С. 99–104. DOI: 10.31857/S0367676522700181
4. S. A. Ermakov, G. E. Khazanov; Resonance damping of gravity–capillary waves on water covered with a visco-elastic film of finite thickness: A reappraisal. Physics of Fluids 1 2022; 34 (9): 092107. <https://doi.org/10.1063/5.0103110>
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
6. Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А. Расчет двумерных периодических возмущений свободной поверхности жидкости в различных моделях среды // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2023. Т. 513. №1. С. 95-102. doi: 10.31857/S2686740023060032
7. Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. Vol. 10, no. 4, 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>

Ильиных Андрей Юрьевич, [ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)  
Хайирбеков Шамиль Хаирбекович, [msturistt09@gmail.com](mailto:msturistt09@gmail.com)

— ◆ ◆ ◆ —



# ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

С.Д. Калинин, М.Н. Закиров, Н.О. Козлов, Е.А. Малиновская\*  
ФГБУН Институт физики атмосферы им. А.М.Обухова РАН, Москва  
elen\_am@inbox.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы, связанные с переносом тепла и массы при конвективных движениях в атмосфере, оказывают существенное влияние на формирование погоды и климата [1].

Конвекция над нагретой поверхностью возникает в результате подъема более теплых объемов воздуха, определяемого турбулентным тепловым потоком  $H$ :

$$H = \overline{\rho_a} C_p \overline{\omega' T'},$$

где  $\rho_a$  – плотность воздуха,  $C_p$  – удельная теплоемкость воздуха,  $\omega' T'$  – ковариация пульсаций вертикальной скорости и пульсаций температуры [2]. Основной перенос тепла и мелкой пыли осуществляют конвективные вихри. Они проявляются, в частности, для пульсаций температуры и скорости в виде характерных пилообразных всплесков – рэмпов во временных рядах записей данных. Рэмп могут быть различных масштабов и отражают характеристики теплового потока. Для их идентификации и поиска возникла задача разработки автоматизированных методов, способных эффективно выделять структуры рэмпов во временных рядах. Далее будут описаны два используемых метода.

*1. Метод автоматического нахождения и аппроксимации линейных участков во временных рядах температурных данных*

Так как рэмп по форме близки к несимметричным треугольникам, решалась задача аппроксимации участков временного ряда линейными функциями, возникающая во многих прикладных областях.

Предложен метод автоматического нахождения оптимальных линейных участков резкого роста/убывания в длинных временных рядах (рис.1).

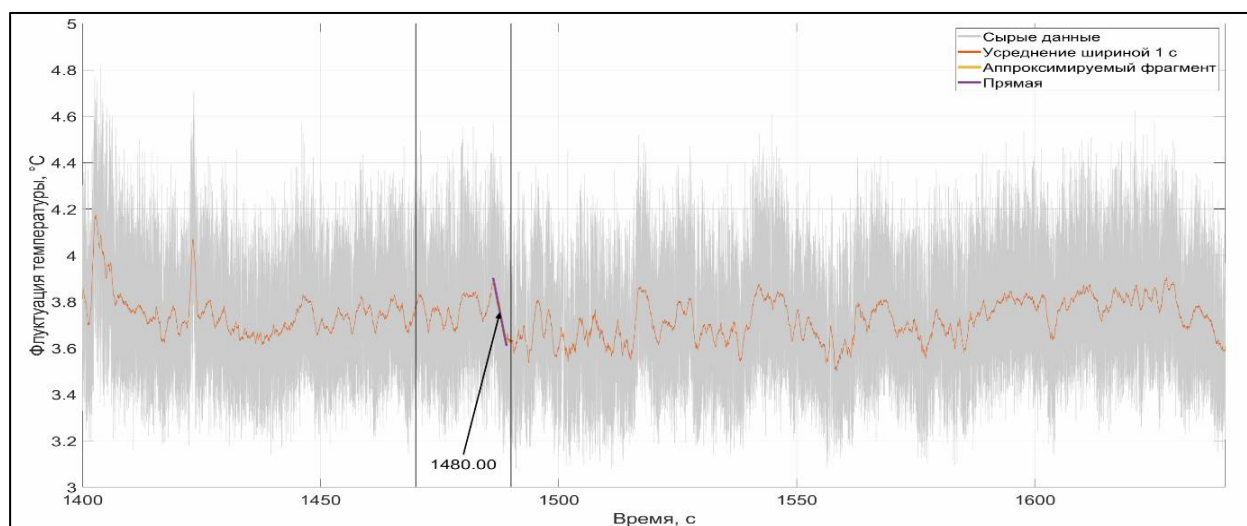


Рис 1. Нахождение участков с наклонами, ассоциирующимися с рэмп структурами, оптимизационным методом



Для вычисления линии временного для рассматриваемого события тренда определялись временные границы участка, где линейная модель является адекватной и физически осмысленной. Метод сочетает оптимизацию границ участков с помощью генетического алгоритма (ГА), минимизирующего специально разработанную функцию потерь, и быстрое вычисление линейной регрессии по аналитическим формулам. Подход демонстрирует эффективность при анализе зашумленных данных.

Предлагаемый метод состоит из двух ключевых этапов: для вычисления коэффициентов линейной модели применяется прямое аналитическое решение метода наименьших квадратов (МНК), которое показало наилучшее быстродействие; поиск оптимального интервала аппроксимации формализуется и решается с помощью генетического алгоритма.

Вводится функция потерь, включающая член с коэффициентом детерминации, модулем углового коэффициента и длиной интервала. Такая функция позволяет отбирать решения, обладающие хорошим качеством аппроксимации, большой длительностью и большим модулем углового коэффициента прямой. Минимизация данной функции позволяет найти компромисс между качеством аппроксимации, выраженностью и длительностью тренда.

Поскольку пространство возможных решений слишком велико, чтобы перебрать все варианты, для минимизации функции потерь используется ГА, который находит субоптимальные решения за приемлемое время, моделируя процессы мутации, скрещивания и естественного отбора на основе значения loss-функции.

Разработанный метод позволяет автоматически и эффективно выделять линейные участки, относящиеся к рэмп-структурам в больших временных рядах. Ключевыми преимуществами являются: интерпретируемость, гибкость (настраиваемая функция потерь позволяет учитывать различные требования к искомым участкам) и масштабируемость (использование генетического алгоритма делает метод применимым к данным практически любого объема).

Подход демонстрирует эффективность при анализе зашумленных данных и позволяет проводить статистический анализ характеристик линейных трендов (частота встречаемости, интенсивность, длительность) в экспериментальных данных.

## *2. Метод идентификации с использованием нейронной сети*

Для анализа временных рядов температурных данных была разработана методика визуального выделения характерных областей рэмпов.

Исходный временной ряд разбивается на более мелкие сегменты. Для каждого сегмента вычисляется среднее для снижения высокочастотных шумов и выделения тренда. Данные нормализуются методом максимума-минимума для приведения к единому диапазону. Для визуального анализа бинарные матрицы преобразуются в двухцветные изображения, по которым можно определить характер изменения сигнала.

Проводится обучение нейронной сети для распознавания одного из трех типов образов: «красный» – рост показателя с последующим падением (рэмп-вверх), «зеленый» – падение показателей с последующим скачком вверх (рэмп-вниз), «синий» – отсутствие выраженных изменений (НЕРэмп).

Процесс обучения можно поделить на 4 этапа:

1. Формирования тренировочной выборки – формируется объемный комплекс данных с подтвержденными экспертом примерами различных рэмпов (~400 образов «красных» и «зеленых» (рэмп-вверх и рэмп-вниз) образов и ~100 образов «синих» - НЕРэмпов).
2. Создание многослойного прецептрона – сеть состоит из трех слоев с различными пороговыми функциями, обучение сети.

3. Анализ ошибок – методом обратного распространения ошибки минимизируются потери между предсказаниями и финальным результатом;
4. Автоматическая классификация – после обучения система может сама анализировать новые данные и определять рэмп.

Нейронная сеть реализует гибридный подход, который включает в себя визуальную аналитику экспертом и автоматизированную классификацию машинным обучением. При обучении нейронной сети ошибка составила ~3.2%. Нейронная сеть при размере окна 40 мс в среднем обнаруживает 77 рэмпов-вверх на 50 12-секундных участках, взятых по данным пульсационных измерений 2024 года 26.07 в около 11:00. Частота появления каждой структуры ~6.42 Гц и средний период между началом одного участка и следующего составляет 156 миллисекунд. На долю рэмп всплесков приходится ~1/3 часть всего времени.

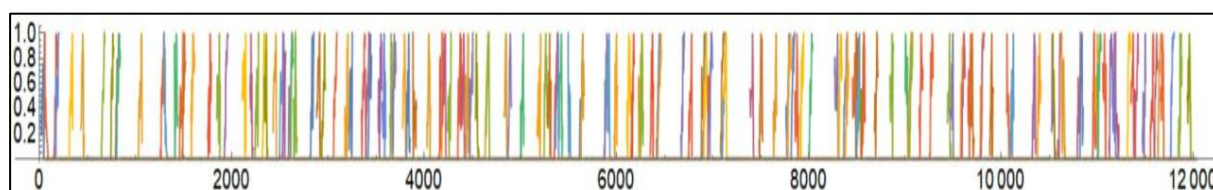


Рис 2. Результат нахождения структур типа рэмп-вверх во временном ряде нейросетевым методом

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные методы показали высокую эффективность в задаче идентификации термоконвективных структур. Оптимизационный метод на основе генетического алгоритма обеспечивает масштабируемое выделение линейных участков, которые в сочетании могут эффективно определять наличие рэмпов четкой треугольной формы. Нейросетевой метод позволяет с достаточно высокой точностью (ошибка 3.2%) и скоростью классифицировать паттерны рэмпов-вверх и рэмпов-вниз (рис1).

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда – проект №25–17–00346 «Вихревые структуры и турбулентность в атмосферном пограничном слое: теоретические подходы, натурные эксперименты и численное моделирование».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moustakis, Y., Onof, C.J. & Paschalis, A. Atmospheric convection, dynamics and topography shape the scaling pattern of hourly rainfall extremes with temperature globally // Commun Earth Environ 2020. Vol. 1. № 11. <https://doi.org/10.1038/s43247-020-0003-0>
2. Malinovskaya E. A., Chkhetiani O.G., Azizyan G.V., Khapaev A.A. Convective structures of the near-surface air layer // Atmospheric and oceanic Optics. 2024. Т. 37. № S1. С. S175-S182.
3. Малиновская Е. А., Чхетиани О. Г., Голицын Г. С., Лебедев В. А. О вертикальном распределении пылевого аэрозоля в условиях слабых и умеренных ветров // ДАН. Науки о Земле. 2023. Т. 509. №2. С. 250-258.
4. Малиновская Е.А., Чхетиани О.Г. и Азизян Г.В. О структуре пульсаций температуры вблизи поверхности в конвективных условиях // Докл. Наука о Земле. 2024. Т. 516. №1. С. 446-454.
5. Малиновская Е.А., Калинин С.Д. Идентификация термоконвективных структур в потоке данных с использованием нейронных сетей // Сборник трудов Международ-

ной научно-практической конференции Инновационные методы математики и физики в экологических и гидрометеорологических исследованиях. Санкт-Петербург. 2024. С. 231-237

6. Малиновская Е.А., Калинин С.Д., Зайцева И.В. Поиск термоконвективных структур в потоке данных // Гидрометеорология и экология. Санкт-Петербург. 2024. №76. С. 407-421.

Козлов Никита Олегович, [nikitagarbuzko@gmail.com](mailto:nikitagarbuzko@gmail.com)  
Закиров Марат Нафисович, [zakirov.mn16@physics.msu.ru](mailto:zakirov.mn16@physics.msu.ru)  
Калинин Савелий Дмитриевич, [fixinit8@yandex.ru](mailto:fixinit8@yandex.ru)  
Малиновская Елена Александровна, [elen\\_am@inbox.ru](mailto:elen_am@inbox.ru)

— ♦ ♦ ♦ —

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НИЗШЕЙ МОДЫ ВОЛН ФАРАДЕЯ СЛОЕМ ПЛАВАЮЩИХ ЧАСТИЦ

В.А. Калининченко

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
[kalin@ipmnet.ru](mailto:kalin@ipmnet.ru)

Обсуждаются результаты экспериментов по исследованию влияния слоя сферических частиц положительной плавучести на процессы разрушения и регуляризации стоячей гравитационной волны на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде. Проводится сравнение со случаем стоячих гравитационных волн на свободной поверхности однородных жидкостей, вязкость которых существенно отличается – вода и растительное масло.

В экспериментах использовались сферические частицы (полистирол, плотность  $1.04 - 1.06 \text{ г/см}^3$ , диаметр  $0.6 \text{ см}$ ), плавающие на поверхности водного раствора поваренной соли (плотность  $1.11 \text{ г/см}^3$ ). Толщина слоя частиц изменялась от  $1$  до  $3.5 \text{ см}$  при неизменной общей глубине  $h = 10 \text{ см}$  рассматриваемой двухслойной жидкости (рис. 1).

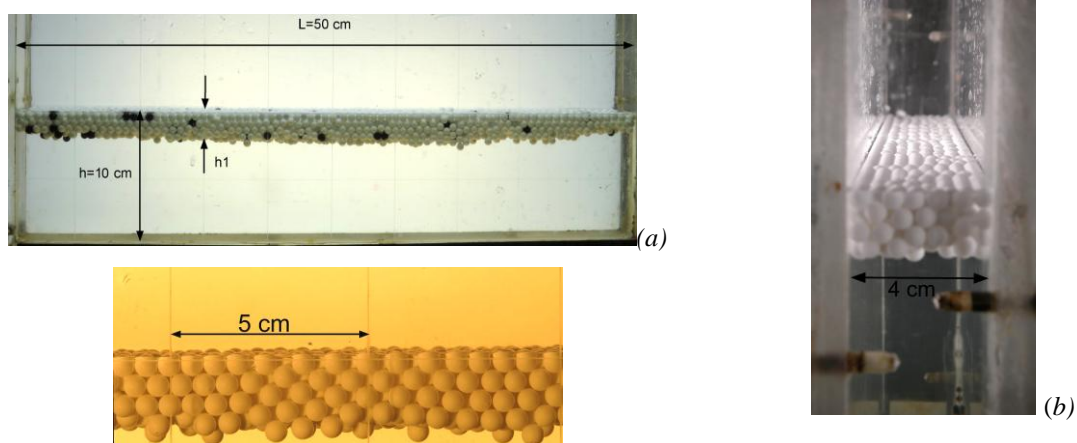


Рис. 1. (а) «Двухслойная жидкость» в прямоугольном сосуде ( $h_1 = 3.5 \text{ см}$ ). (б) Начальное размещение частиц в слое  $h_1 = 2.5 \text{ см}$  (вид спереди и сбоку) – гексагональная упаковка монодисперсных сферических частиц

Возбуждение поверхностных гравитационных волн осуществлялось посредством параметрического резонанса при вертикальных колебаниях сосуда ( $L=50$  см,  $W=4$  см) с жидкостью. Двумерные волновые движения жидкости исследовались в режиме основного резонанса Фарадея – частота колебаний сосуда  $\Omega$  в два раза превышает частоту  $\omega$  возбуждаемых волн.

В экспериментах наблюдались регулярные и разрушающие волны. Если для регулярных волн профиль периодичен во времени и симметричен относительно вертикальной плоскости, проведенной через пучность волны, то в случае разрушающихся волн со свободной поверхности жидкости срываются отдельные капли (рис. 2, *a*). Для воды и водного раствора соли как однородных жидкостей предельная крутизна достигала величины  $\Gamma = H/\lambda \sim 0.1$  ( $H$  – высота волны,  $\lambda = 2L$  – длина волны для первой волновой моды).

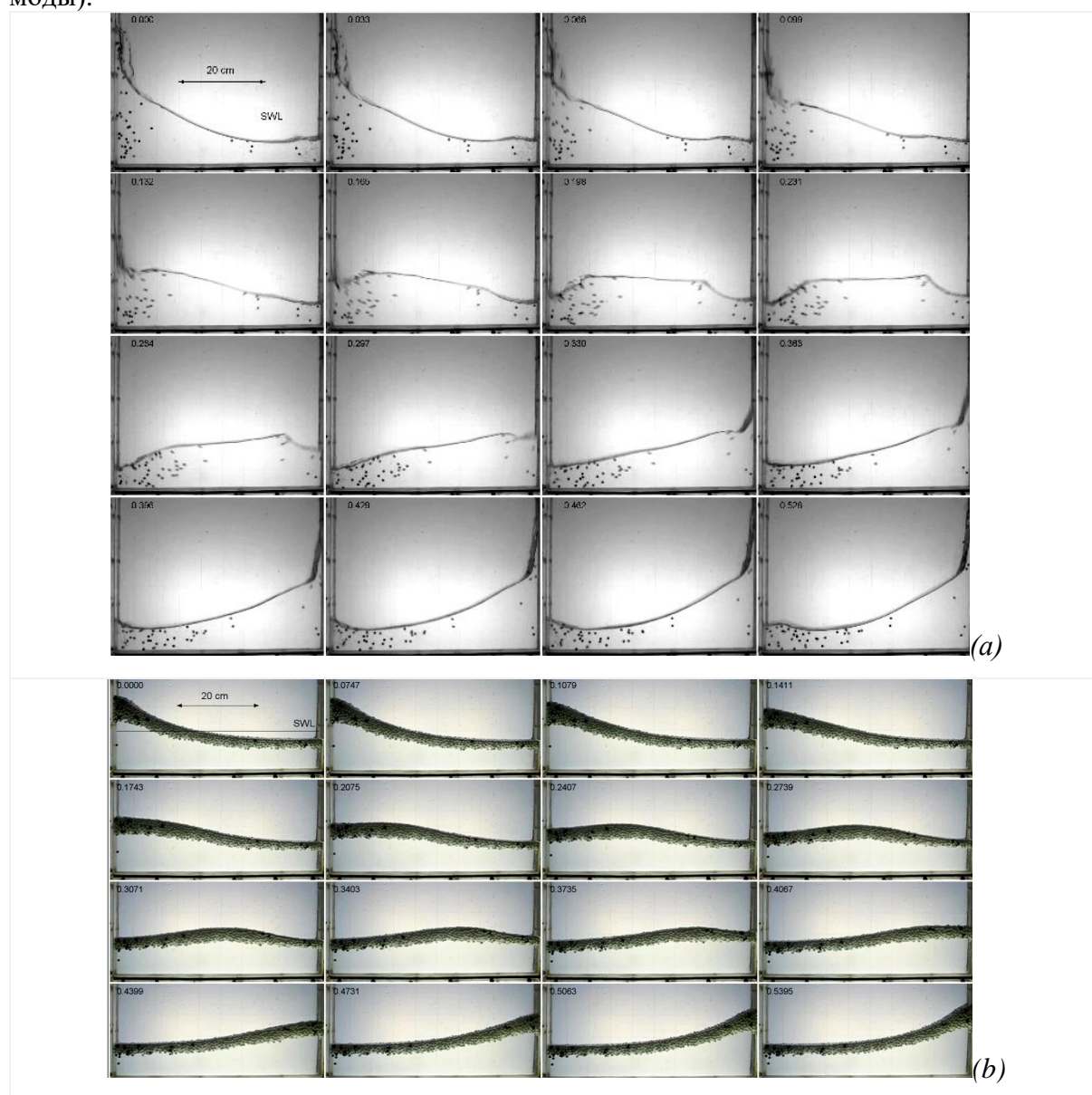


Рис. 2. (а) Разрушающаяся волна на свободной поверхности солевого раствора ( $\Omega = 11.55$  с<sup>-1</sup>) и (b) регулярная волна на свободной поверхности «двухслойной жидкости», образованной слоем плавающих частиц и водным раствором соли ( $\Omega = 11.57$  с<sup>-1</sup>,  $H = 9.9$  см,  $h_1 = 1.9$  см); результаты видеосъемки 120 к/с.

В настоящих экспериментах слой частиц положительной плавучести помещался на свободную поверхность воды и оценивался эффект регуляризации разрушающейся стоячей гравитационной волны – рис. 2, *b*.

В экспериментах в качестве интегральной волновой характеристики использовались резонансные зависимости высоты регулярной волны  $H(\Omega)$  – рис. 3 *a*. Показано, что увеличение толщины слоя позволяет достичь предельной крутизны  $\Gamma = H/\lambda \sim 0.17$  – рис. 3 *b*.

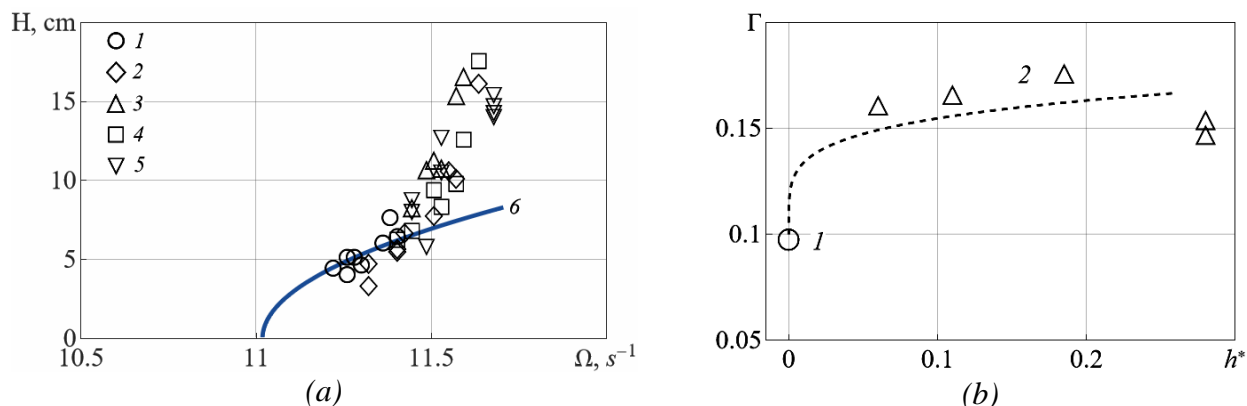


Рис. 3. (а) Резонансные зависимости  $H(\Omega)$  регулярных гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности водного раствора соли (1) и исследуемой «двухслойной жидкости» (2-5 –  $h_1 = 0.6, 1.1, 1.9$  и  $2.8$  см); 6 – расчетная зависимость  $H(\Omega)$ . (b) Зависимость предельной крутизны регулярных волн от толщины слоя частиц: 1 – вода/раствор соли; 2 – слой плавающих частиц).

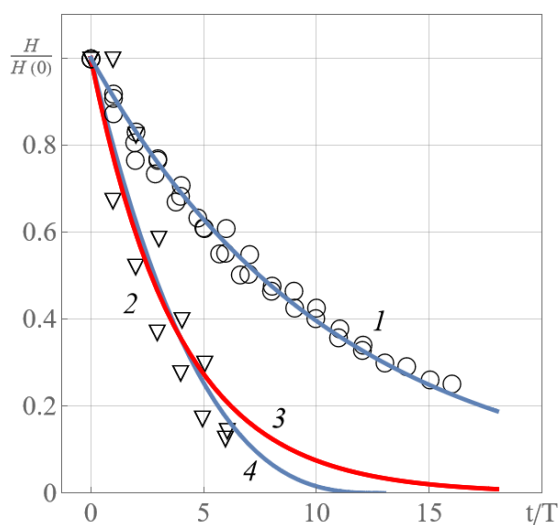


Рис. 4. Амплитудная кривая затухающих волн на свободной поверхности однородной (1) и «двухслойной» (2) жидкостей: 1 – вода/раствор соли, декремент  $\delta = 0.092$ ; 2 – слой частиц  $h_1 = 2.8$  см; 3 – экспоненциальное затухание с декрементом  $\delta = 0.259$ ; 4 – неэкспоненциальное затухание вида  $(1 - z/13)^{2.8}$ ,  $z = t/T$ .

Наличие верхнего слоя в виде суспензии частиц положительной плавучести существенно увеличивает диссипативные характеристики рассматриваемой колебательной системы (рис. 4), причем наблюдается неэкспоненциальный характер затухания волновых движений жидкости. Взаимодействующие между собой и с сосудом частицы определяют аномальное затухание и изменяют динамику волнового движения жидкости –

наблюдается регуляризация волн с подавлением процесса их разрушения в виде струйного выброса и последующего его распада.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-19-00451 и по теме государственного задания № госрегистрации 1240112500442-3. Эксперименты проводились на стенде ДСО (уникальная научная установка ИПМех РАН).

Калининченко Владимир Анатольевич, kalin@ipmnet.ru



## О РАСПРОСТРАНЕНИИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТЕЛО СТЕРЖНЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДЕФЕКТОВ

*Ко Ко Пьо<sup>1,\*</sup>, В.Г. Байдулов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва*

<sup>2</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*phyokoko4387@gmail.com*

В статье подробно изучается влияние амплитуды дефекта и волнового числа профиля на собственные значения и формы поперечных колебаний стержня с переменным сечением. Авторы применяют как аналитические, так и численные подходы, чтобы показать, как геометрические изменения влияют на вибрационные характеристики, что имеет большое значение для точности инженерных расчетов. Исследование вносит важный вклад в понимание динамического поведения неоднородных конструкций, помогая создавать более точные и надежные модели для практического использования в инженерных системах.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основное внимание в работе уделено анализу влияния периодического изменения радиуса трубы на спектральные свойства задачи, особенно в предельных случаях, когда в трубе присутствует периодическая система сингулярных дефектов. В настоящем работе требуется определить, как изменяются собственные числа и формы поперечных колебаний стержня переменного сечения в зависимости от амплитуды дефекта и волнового числа профиля. Рассматривая только свободные колебания балки, когда возмущающая сила отсутствует, получим следующее дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, v(z, t) = T(t)U(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( r \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \mu r U = 0; \quad r = (1 - a \sin pbz)^2$$

В качестве краевых условий берутся условия отсутствия нагрузок на концах стержня (свободные концы).

$$U''(0) = 0, U'''(0) = 0, U''(1) = 0, U'''(1) = 0$$



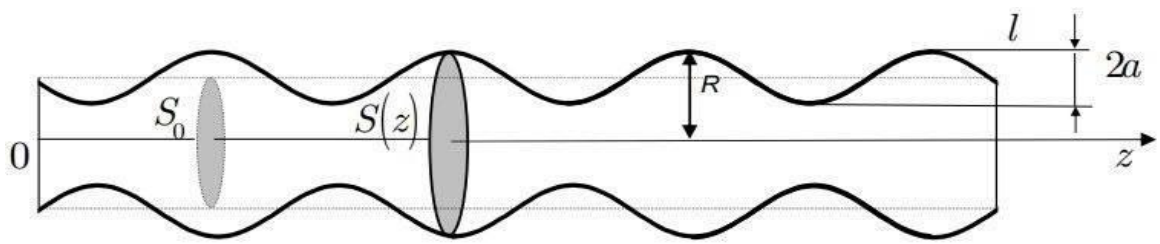


Рис. 1. Геометрия задачи

В качестве невозмущенного значения собственного числа задачи, выбирается собственное число задачи с нулевым дефектом ( $a = 0$ ).

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \mu U = 0, \cos l = \frac{1}{\operatorname{ch} l}, \lambda_n^0 \approx \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

### ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАДИУСА

Для стержня экспоненциального профиля  $r = r_0 \exp(-dz)$  – уравнения колебаний оказываются уравнениями с постоянными коэффициентами

$$U'''' + 2dU''' + d^2U'' - 1^4U = 0$$

приводит к вековому уравнению относительно спектрального параметра  $a$

$$\frac{\cos l_- \operatorname{ch} l_+ - 1}{\sin l_- \operatorname{sh} l_+} = \frac{a}{1_- 1_+}, l_{\pm} = \sqrt{l^2 \pm a}; a = (d/2)^2$$

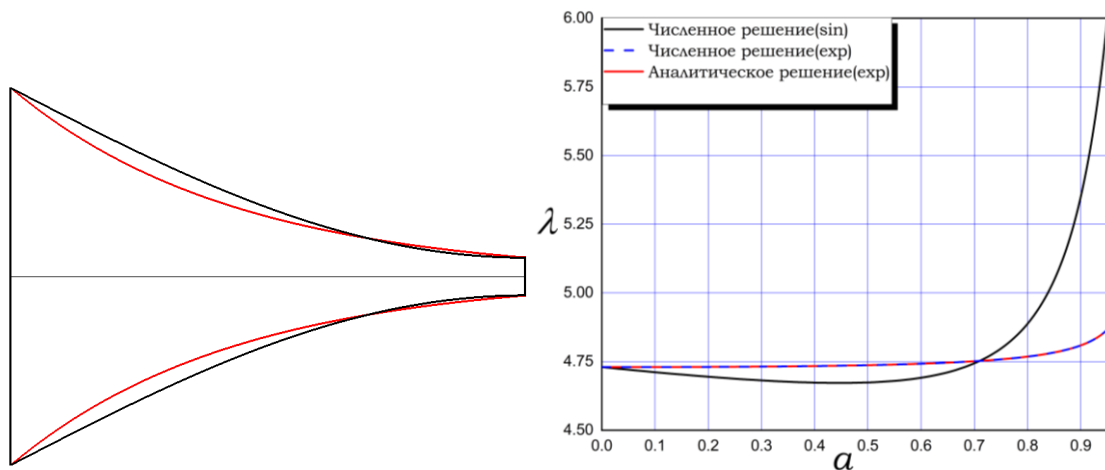


Рис. 2. Зависимость собственных значений первого мода колебаний от амплитуды дефекта ( $a = 0.95$ ) для двух моделей: численного решения и аналитического решения при постоянном волновом числе  $b = 1/2$

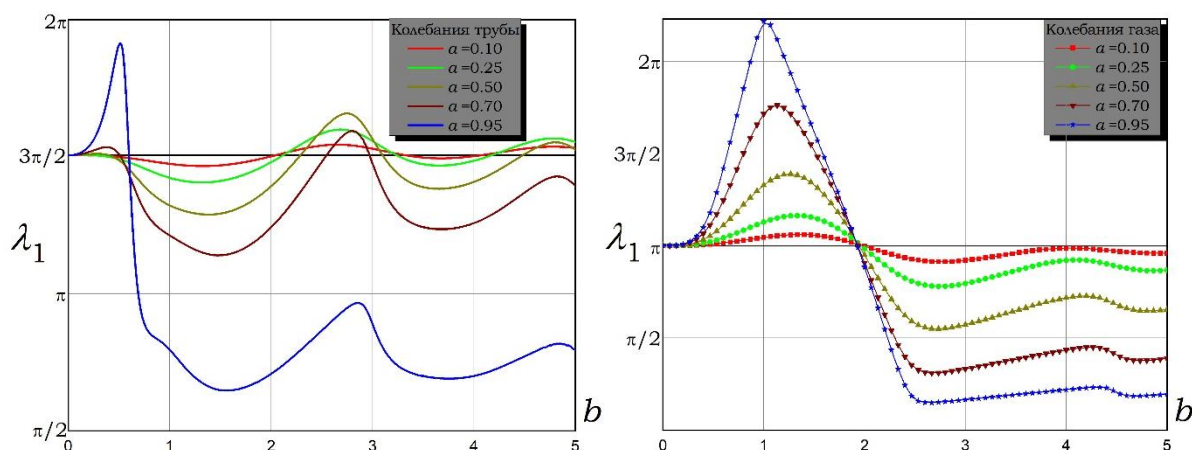


Рис. 3. Зависимость собственные значений первых мод колебаний от «волнового числа» стержня для постоянной амплитуды дефекта

## ВЫВОДЫ

Численное решение предоставляет приближённый результат, основанный на вычислительных методах. Оно часто используется, когда аналитические решения трудно или невозможно получить. Аналитическое решение, полученное с учётом площади, вероятно, включает интегрирование функции или использование геометрических свойств. На рисунках представлено численное решение, которое хорошо согласуется с аналитическими решениями, что подтверждает точность численного метода. Однако небольшие расхождения могут существовать из-за приближений в численном подходе.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках госзадания номер госрегистрации 124012500443-0

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
2. Ко Ко П., Собственные колебания газа в резонаторе гелимгольца с периодически изменяющимся поперечным сечением / Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, № 6. – С. 1006-1013. – DOI 10.31857/S0032823523060073.
3. Nesterov, S. V., Baydulov V. G., Transverse Oscillations of a Cantilever Rod of Rectangular Cross Section and Variable Thickness, Journal of Physics: Conference Series, Moscow, 13–15 декабря 2018 года. – Moscow, 2019. – P. 012023. – DOI 10.1088/1742-6596/1301/1/012023. – EDN PMMGUM.
4. Павлов В.П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов. Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2017. Т. 21, № 2 (76). С. 3-16.

Ко Ко Пью, phyokoko4387@gmail.com  
Байдулов Василий Геннадьевич, bayd@ipmnet.ru





# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛНОВОЙ НАГРУЗКИ НА ВЫДВИЖНЫЕ УСТРОЙСТВА ПОДВОДНОГО ОБЪЕКТА

К.А. Коваль, А.Л. Сухоруков\*  
АО «ЦКБ МТ «Рубин», Санкт-Петербург  
su\_andr@yahoo.com

## ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается воздействие регулярного морского волнения на выдвижные устройства (ВУ) подводного объекта. Актуальность задачи обусловлена необходимостью учета влияния морского волнения на параметры вибрации ВУ, которая является негативным фактором и способствует потере скрытности, ухудшению работы систем подводного объекта и возникновению механических повреждений ВУ.

## МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИИ ВЫДВИЖНЫХ УСТРОЙСТВ НЕПРОНИКАЮЩЕГО ТИПА

В настоящее время различные ВУ являются неотъемлемой частью подводных объектов. Они обеспечивают работу систем наблюдения, навигации, связи. В качестве примера выдвижных устройств можно привести подъемно-мачтовые устройства (ПМУ), показанные на рисунке 1.

Для расчета вибрации ПМУ непроникающего типа был разработан и реализован в программном комплексе [1, 2] (рисунок 2) численный метод [3], позволяющий определять собственные частоты, распределения перемещений и напряжений при воздействии нестационарной гидродинамической нагрузки на ПМУ, контактирующее с промежуточной опорой в районе крыши ограждения ВУ.



Рис. 1. Подводный объект с ПМУ

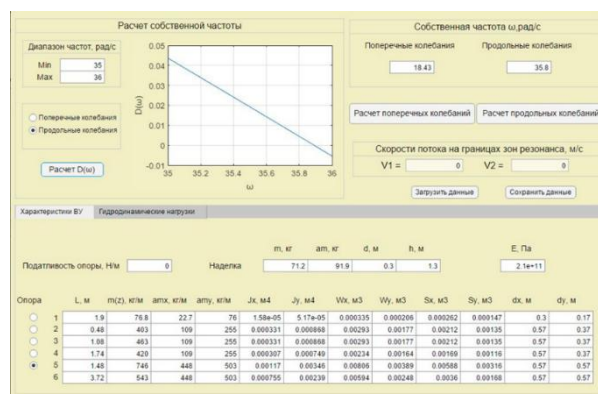


Рис. 2. Интерфейс программного комплекса [1, 2]

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛНОВОЙ НАГРУЗКИ НА ВЫДВИЖНЫЕ УСТРОЙСТВА

Эксплуатация подводных объектов с выдвинутыми ПМУ, как правило, происходит вблизи свободной поверхности, где волновые нагрузки являются существенными. Поэтому необходимо учитывать фактор морского волнения на общие силовые воздействия и, как следствие, параметры вибрации ПМУ.

Рассмотрим случай взаимодействия регулярного волнения и неподвижной цилиндрической преграды с диаметром  $D$ , при этом преграда не оказывает существенного влияния на характеристики волнового потока. Схема данного взаимодействия представлена на рисунке 3. Если глубина акватории  $H$  и длина волны  $\lambda$  удовлетворяют соотношению

$H/\lambda \geq 0,2$ , а значение высоты волны  $h$  не превышает 3 м, то расстояние от дна до поверхности у преграды в каждый момент времени  $t$  определяется как  $H_1 = H + 0,5 \cdot h \cdot \cos(\omega t)$ .

Волновая нагрузка на элемент единичной длины преграды вычисляется как сумма инерционной ( $q_i$ ) и скоростной ( $q_v$ ) составляющих [4]:

$$q(z, t) = q_i(z, t) + q_v(z, t) = 0,25 \cdot C_i \rho_w \pi D^2 \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + 0,5 \cdot C_v \rho_w D \cdot v(z, t) |v(z, t)|, \quad (1)$$

где  $C_i$  и  $C_v$  – коэффициенты инерционного и скоростного сопротивления соответственно;  $\rho_w$  – плотность воды. При  $H/\lambda \geq 0,2$  величины  $v$  и  $\partial v / \partial t$  можно выразить как:

$$v(t) = \frac{\pi h \cosh(kz) \cos \omega t}{T_w \sinh(kH)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-\pi h \omega \cosh(kz) \sin \omega t}{T_w \sinh(kH)}, \quad (2)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $T_w$  – период волны;  $\omega = 2\pi/T_w$  – круговая частота волнового движения. Подставляя (2) в (1), получаем

$$q(z, t) = \frac{-C_i \rho_w \pi^3 D^2 h \cosh(kz) \sin \omega t}{2T_w^2 \sinh(kH)} + \frac{C_v \rho_w \pi^2 D h^2 \cosh^2(kz) \cos \omega t |\cos \omega t|}{2T_w^2 \sinh^2(kH)}. \quad (3)$$

При этом равнодействующая сила  $Q$  определяется как:

$$Q(t) = \int_0^{H_1} q(z) dz. \quad (4)$$

В случае, если преграда движется со скоростью  $v_0$  и курсовым углом  $\varepsilon$  к регулярному волнению, то в выражении (3) будет использоваться эквивалентная частота  $\omega_e$

$$\omega_e = \omega + \omega^2 \frac{v_0}{g} \cos \varepsilon, \quad (5)$$

где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

Проекция равнодействующей силы можно представить как

$$Q_x(t) = \int_0^{H_1} q(z, t) \cos \varepsilon dz, \quad Q_y(t) = \int_0^{H_1} q(z, t) \sin \varepsilon dz. \quad (6)$$

В полученных периодических функциях  $Q_x(t)$  и  $Q_y(t)$  можно условно выделить стационарную (среднюю за несколько периодов) и нестационарную (амплитудную) составляющую:

$$Q_{\text{vibr}} = \frac{Q_{\text{max}} - Q_{\text{min}}}{2}, \quad Q_{\text{st}} = Q_{\text{max}} - Q_{\text{vibr}}. \quad (7)$$

Тогда проекции волновых сил на подвижную преграду в упрощенном виде можно представить в гармоническом виде:

$$Q_x(t) = Q_{\text{st}_x} + Q_{\text{vibr}_x} \cos \omega_e t, \quad Q_y(t) = Q_{\text{st}_y} + Q_{\text{vibr}_y} \cos \omega_e t. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь волновое воздействие на звенья ПМУ подводного объекта (рисунк 4). Крыша ограждения расположена на глубине  $H_0$  имеет координату  $z_0 = H - H_0$ . Поскольку звено 5 закрыто ограждением, а звено 1 расположено выше  $H_{1_{\text{max}}}$ , требуется определить воздействие волнения на звенья 2, 3 и 4 с координатами начала звеньев  $z_2, z_3, z_4 = z_0$ , длиной  $L_2, L_3, L_4$  и характерными диаметрами  $D_2, D_3$  и  $D_4$  соответственно.

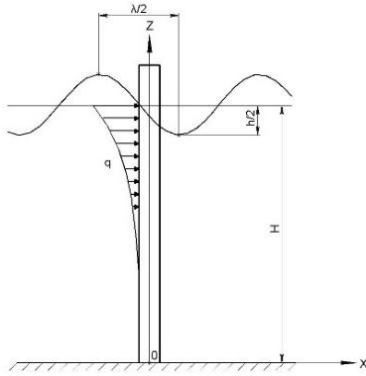


Рис. 3. Схема определения волновой нагрузки на цилиндрическую преграду

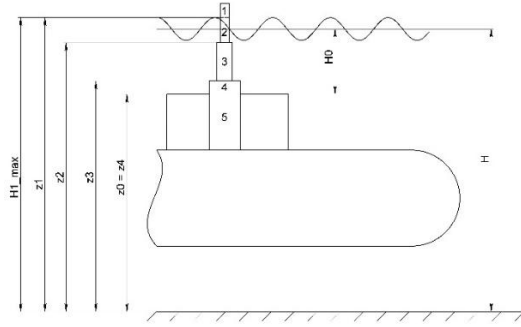


Рис. 4. Расчетная схема определения волновой нагрузки на ПМУ

Проекции волновых сил, действующих на звено  $n$ , можно вычислить следующим образом:

$$Q_{xn}(t) = \int_{z_n}^{\min(z_n + L_n, H_1(t))} (\hat{A}D_n^2 + \hat{B}D_n) \cos \varepsilon dz,$$

$$Q_{yn}(t) = \int_{z_n}^{\min(z_n + L_n, H_1(t))} (\hat{A}D_n^2 + \hat{B}D_n) \sin \varepsilon dz$$
(9)

где

$$\hat{A} = \frac{-C_i \rho_w \pi^3 h \cosh(kz) \sin \omega_e t}{2T_w^2 \sinh(kH)}, \quad \hat{B} = \frac{C_v \rho_w \pi^2 h^2 \cosh^2(kz) \cos \omega_e t |\cos \omega_e t|}{2T_w^2 \sinh^2(kH)}.$$

Результаты расчетов для случая  $v_0 = 2,5$  м/с,  $\varepsilon = 0$ ,  $H = 100$  м (регулярного волнение 5 баллов [4]) представлены на рисунке 5.

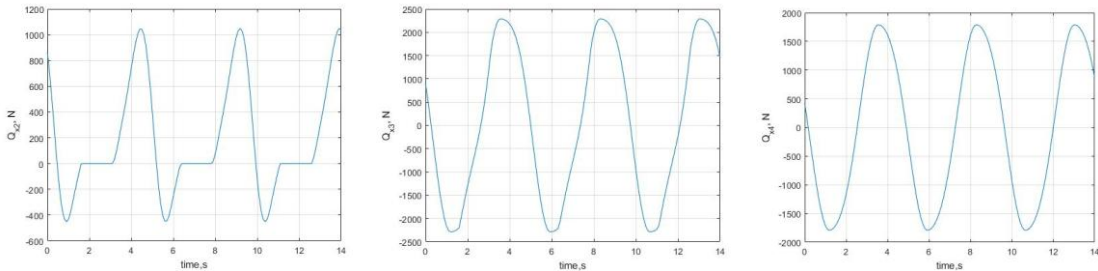


Рис. 5. Равнодействующая волновой силы  $Q_x$  (слева направо – звено 2, 3, 4)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы был предложен численный метод расчета волновых сил, действующих на выдвижные устройства подводного объекта. Данный метод был реализован в виде программы для ЭВМ [5], использование которой позволит повысить точность расчетов параметров вибрации выдвижных устройств при движении подводного объекта в условиях морского волнения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для выполнения расчетов гидроупругих характеристик подъемно-мачтовых устройств / А.Л. Сухоруков, А.Ю. Каверинский, К.А. Коваль – № 2018613264; заявл. 22.01.2018; зарег. 06.03.2018. – 1 С.

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для выполнения расчетов гидроупругих характеристик подъемно-мачтовых устройств с учетом податливости промежуточной опоры / А.Л. Сухоруков, К.А. Коваль – № 2020663201; заявл. 12.10.2020; зарег. 23.10.2020. – 1 С.
3. Сухоруков, А.Л. Срывной флаттер как одна из причин возникновения вибраций подъемно-мачтовых устройств // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2014. Т. 7, № 3. С. 42 – 66.
4. Пронкин А.П., Хворостовский И.С., Хворостовский С.С. Морские буровые моноопорные основания. Теоретические основы проектирования и эксплуатации / Под ред. С.С. Хворостовского. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2002. – 303 с.
5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для выполнения расчетов гидроупругих и вибропрочностных характеристик подъемно-мачтовых устройств с учетом волнения моря / А.Л. Сухоруков, К.А. Коваль – № 2022616663; заявл. 04.04.2022; зарег. 15.04.2022. – 1 С.

Коваль Кирилл Алексеевич, koval.kir2014@yandex.ru

Сухоруков Андрей Львович, su\_andr@yahoo.com

— ♦ ♦ ♦ —

## ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА И ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ФОРХГЕЙМЕРА

П.И. Кожурина

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

polinakozhurina2020@gmail.com

### ВВЕДЕНИЕ

В присутствии газовой шапки движение поверхностей раздела при фильтрации в пласте может быть неустойчивым и приводить к образованию пальцев, что снижает нефтеотдачу [1–4, 7–8]. Для современных режимов фильтрации необходимо учитывать инерционные эффекты — в рамках закона Форхгеймера [9–14]. Рассматривается трёх-слойная конфигурация газ–вода–нефть (рис. 1).

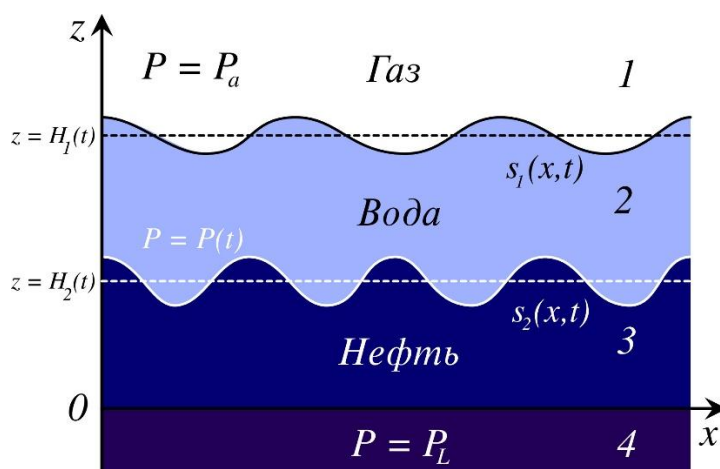


Рис. 1. Схема рассматриваемого пласта пористой среды.

Фильтрация в областях, насыщенных водой ( $j = 1$ ) и нефтью ( $j = 2$ ), описывается законом Форхгеймера с учетом силы тяжести:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \mathbf{0} = -\nabla (P_j + \rho_j g z) - a_j \mathbf{v}_j - b_j |\mathbf{v}_j| \mathbf{v}_j,$$

где  $a = \mu/k$ ,  $b = \beta\rho/\sqrt{k}$ . Граничные условия на верхней свободной поверхности и нижней границе пласта:

$$P_1(x, S_1(x, t), t) = P_a, P_2(x, 0, t) = P_L,$$

а на внутренней границе вода–нефть:

$$P_1(x, S_2, t) = P_2(x, S_2, t), (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N})(x, S_2, t) = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{N})(x, S_2, t),$$

где  $\mathbf{N}$  — нормаль к поверхности.

Базовый поток — вертикальный, с плоскими границами раздела. Скорость фильтрации, выраженная явно, имеет вид

$$V(t) = \frac{a_1}{2b_1} - \frac{\sqrt{4b_1 g \rho_1 + 4b_1 [P_a - P(t)]/(H_1 - H_2) + a_1^2}}{2b_1},$$

где толщина водного слоя  $L = H_1 - H_2$  постоянна, отсюда было получено уравнение для положения фронта в момент времени  $t$  и найдено характерное время «поршневого» вытеснения при плоских границах:

$$t_{\max} = - \int_0^1 \frac{1}{V(H_1, H_2)} \big|_{H_1=L-x, H_2=x} dx.$$

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ

Положения контактных границ и поля рассматриваемых параметров ищутся в виде плоского решения с учетом введенных малых возмущений. Было получено дисперсионное соотношение. Анализ этого выражения показал, что если возмущена только граница газ–вода ( $A_{0,w} = 0$ ), то получаем следующие выражения для амплитуд возмущений на обеих границах в момент времени  $t$

$$A_g = \frac{A_{0,g} (A_1^r e^{\lambda_2 t} - A_2^r e^{\lambda_1 t})}{A_1^r - A_2^r}, \quad A_w = \frac{A_{0,g} A_1^r A_2^r (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})}{A_1^r - A_2^r},$$

а амплитуда на границе вода–нефть в момент  $t^* = c_t t_{\max}$ , до полного вытеснения нефти из пласта, равна

$$A^* = \frac{A_{0,g} A_1^r A_2^r (e^{\lambda_2 t^*} - e^{\lambda_1 t^*})}{A_1^r - A_2^r}, \quad 0 < c_t < 1.$$

Отсюда был получен критерий, описывающий смену режимов взаимодействия возмущений на границах, вода–газ и вода–нефть. Возмущение скорости от верхней границы затухает как  $\sim e^{-Kz}$ , что даёт оценку амплитуды и приводит к критерию развязки границ, существования пороговой толщины  $L^*$ :  $\frac{A^*}{A_{0,g}}$  не растет при  $K \rightarrow \infty$ , если

$$L^2 [\sqrt{6(a_r + 2b_r)(a_r + b_r)} + (a_r + 2b_r)(a_r + b_r)] - \frac{1}{2} c_t \int_0^1 \frac{1}{V(H_1, H_2)} \big|_{H_1=L-x, H_2=x} dx > 0.$$

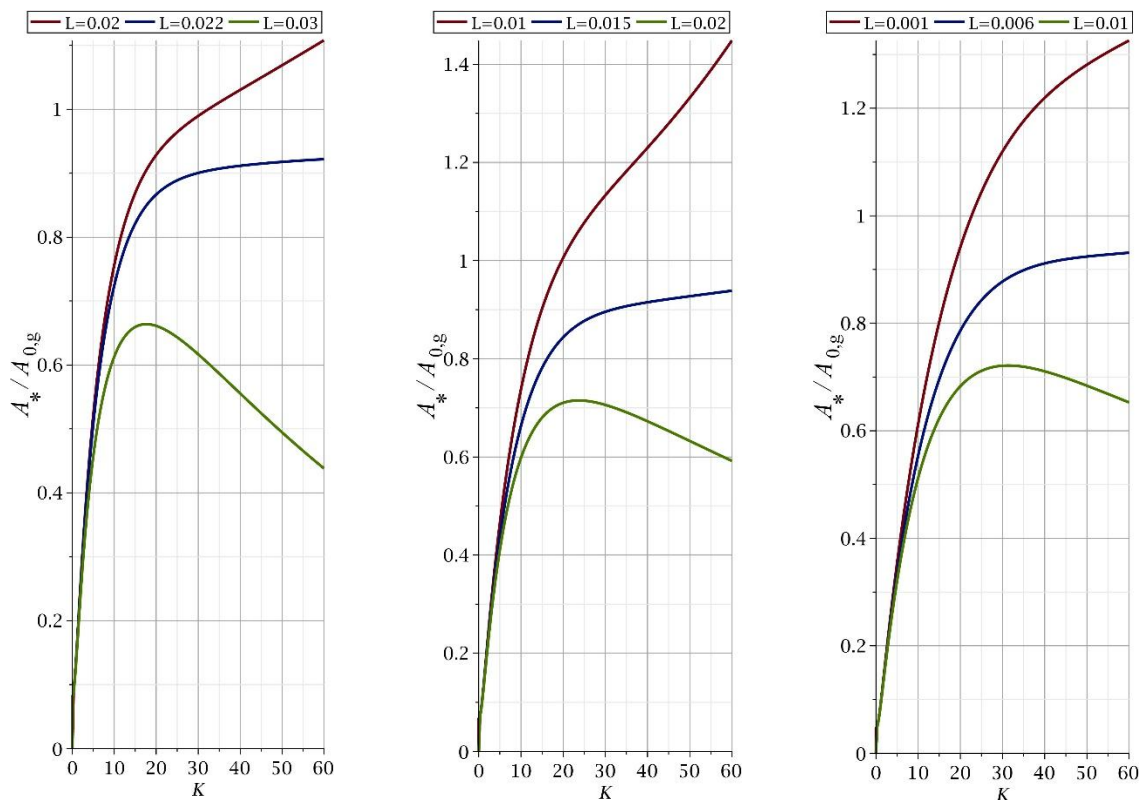


Рис. 2. Отношение амплитуды возмущений на границе вода–нефть к начальной амплитуде возмущений на границе вода–газ в зависимости от волнового числа  $K$  при различной толщине слоя водоносной области  $L$  в момент времени, предшествующий полному вытеснению нефти при различных параметрах основного течения.

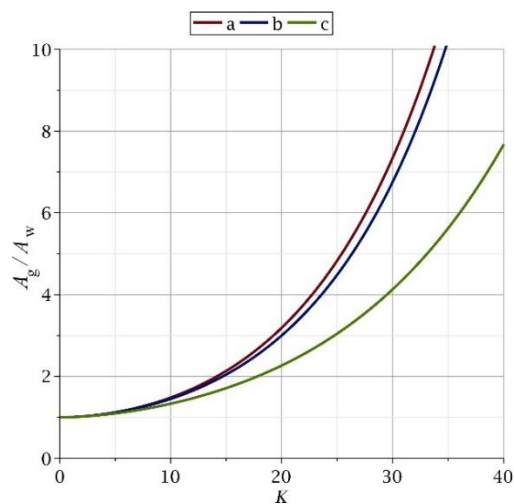


Рис. 3. Зависимость отношения амплитуды возмущений на границе вода газ к амплитуде возмущений на границе вода–нефть.

## ВЫВОДЫ

Проведённый линейный анализ в рамках закона Форхгеймера показывает, что взаимодействие возмущений на границах газ–вода и вода–нефть определяется толщиной водонасыщенного слоя  $L$ , волновым числом  $K$  и параметрами основного течения  $a, b$ . Для практически значимых режимов существует пороговая толщина  $L^*$ , при которой на характерных временах  $t \lesssim t_{\max}$ , до полного вытеснения нефти из пласта, рост возмущений на верхней границе не оказывает влияния на нижнюю контактную границу (рис. 2).

Это подчёркивает стабилизирующую роль промежуточного водного слоя в нефтяной области. Сопоставление точных спектров инкрементов с их асимптотикой показывает, что  $\lambda_1(K) > \lambda_2(K)$  для широкого диапазона параметров (рис. 3), различие особенно заметно в коротковолновой области, где влияние возмущений от границы газ-вода экспоненциально затухает с глубиной.

#### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №24-11-00222).

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Darcy H. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. — Paris: Victor Dalmont, 1856.
2. Форхгеймер Ф. Гидравлика. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.
3. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele–Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. R. Soc. London Ser. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.
4. Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. — Dordrecht: Springer, 1990.
5. Цыпкин Г. Г. Неустойчивость лёгкой жидкости над тяжёлой при движении поверхности раздела в пористой среде // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 2. С. 70–76.
6. Shargatov V., Tsypkin G., Kozhurina P. Linear stability of filtration flow of a gas and two immiscible liquids with interfaces // Mathematics. 2023. V. 11. № 21. 4476. 20.
7. В. А. Шаргатов, П. И. Кожурина, С. В. Горкунов. Неустойчивость контактной границы газ-жидкость в пористой среде при фильтрации в рамках закона Форхгеймера, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 65:5 (2025), 827–838;

Кожурина Полина Ивановна, polinakozhurina2020@gmail.com



### **СТРУКТУРЫ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ВЫНОСЕ ПЫЛЕВОГО АЭРОЗОЛЯ**

*Н.О. Козлов, С.Д. Калинин, Е.А. Малиновская\**

*ФГБУН Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва  
elen\_am@inbox.ru*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Аридные и опустыненные территории являются одним из основных источников пылевого аэрозоля. В летнее время в условиях значительного прогрева поверхности и конвективных движений воздуха существенное влияние на вынос пылевого аэрозоля оказывают термические неоднородности и восходящие потоки [1, 2].

С одной стороны, пылевой аэрозоль, генерируемый поверхностью, обладает определенной теплоемкостью и может влиять на локальные температурные характеристики приземного воздуха. С другой стороны, формируемые у поверхности термические неоднородности, создают восходящие потоки (термики), которые под действием силы плавучести способны поднимать и транспортировать аэрозольные частицы [3]. Эта двунаправленная потенциальная связь создает методологическую проблему в идентификации причинно-следственных отношений.

## ИСТОЧНИКИ ДАННЫХ

Комплексные полевые измерения были выполнены сотрудниками Института физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН на территории дюнного участка в районе посёлка Нарын-Худук, расположенного в Республике Калмыкия. Данная местность характеризуется ярко выраженным аридным климатом и интенсивно развитыми эоловыми процессами, что делает её исключительно репрезентативным полигоном для исследования пылевых явлений. Круглосуточные наблюдения проводились в периоды летних сезонов 2022–2024 годов в условиях интенсивных конвективных движений, возникающих в солнечные дни. Для анализа данных выбран промежуток с 8:00 до 20:00 часов (частота записи 1 раз в минуту), который впоследствии делился на три суточных промежутка: утро, день и вечер.

## ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПАР ВЕЛИЧИН

Исследовались различные пары величин на предмет корреляционных связей (температура  $T$ , скорость ветра  $U$ , концентрация пылевого аэрозоля  $C$ , напряженность электрического поля  $E$ ), среди которых наибольший интерес представляет система "температура-концентрация" ( $T$ - $C$ ), характеризующаяся сложным, неоднозначным механизмом взаимного влияния [4]. Для усредненных за 5 минут данных удается выделить временные участки в течение выделенных интервалов различных дней наблюдений (условно обозначенные «утро», «день», «вечер») проявляется степенная зависимость вида:  $C = a \cdot T^m$ , где  $a$  и  $m$  – постоянные (рис. 1). Показатель наклона  $m$  получен методом наименьших квадратов для выражения вида:  $\ln C = m \cdot \ln T + b$ , и представлен сплошной линией. Изменение степенного показателя  $m$  в разное время дня (например, 27.07.2024 утром  $m = -6,7$ , днем,  $m = -7,12$ , вечером  $m = 0,93$ ) свидетельствует о наличии или отсутствии условий конвективного выноса различной интенсивности. Было проанализировано таким образом 16 дней. Выявлено, что наблюдаемые отличия в поведении для разного времени дня относительно устойчивы.

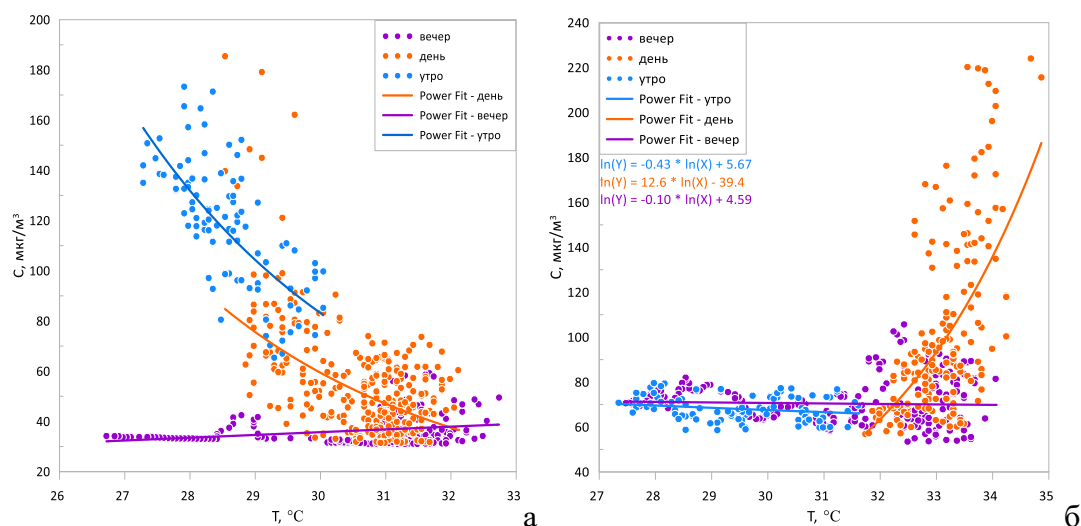


Рис. 1. Зависимость концентрации аэрозоля  $C$  от температуры  $T$  для утреннего, дневного и вечернего интервалов: (а) 27.07.2024 и (б) 30.07.2024. Сплошные линии — степенная аппроксимация.

## О РЕЗУЛЬТАТАХ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Для корреляционных функций пар величин "температура-концентрация" ( $T$ - $C$ ) наблюдаются закономерности с наклонными полосами усиления корреляции (рис.2). По оси  $X$  графика отложено время наблюдения (мин.), а по оси  $Y$  – временной сдвиг между



рядами данных (мин.). Наклонный характер этих полос свидетельствует о том, что временная задержка, при которой связь между  $T$  и  $C$  максимальна, не является постоянной, а закономерно меняется в течение суток.

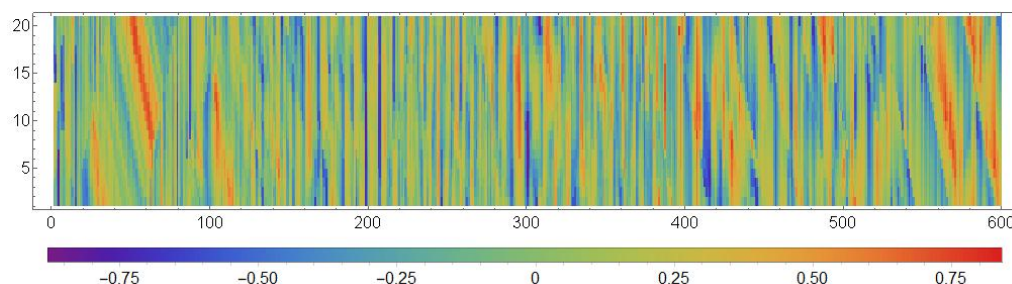


Рис. 2. Двумерная корреляционная функция пульсаций температуры и концентрации аэрозоля  $T$ - $C$ .

Это указывает на наличие переменных временных задержек между пульсациями температуры и концентрации. Так, для пары  $T$ - $C$  данный паттерн может быть следствием различия пространственно-временных масштабов термических и аэрозольных структур. Можно предположить, что каждое такое событие характеризуется мгновенными флуктуациями и общей продолжительностью существования структуры [5]. Если температурные возмущения связаны с относительно крупными объемами нагретого воздуха (термиками), а возмущения концентрации – с более компактными и быстро рассеивающимися пылевыми облаками, то следует ожидать систематического различия в продолжительности соответствующих сигналов: продолжительность существования температурных аномалий будет превышать продолжительность концентрационных аномалий.

## ПРОВЕРКА ИДЕИ РАЗНОМАСШАБНОСТИ ТЕПЛОВЫХ И ПЫЛЕВЫХ СТРУКТУР

Для проверки данного предположения был использован алгоритм масштабного преобразования. Он заключался в целенаправленном нелинейном сжатии или растяжении временного ряда температуры относительно ряда концентрации. Исходные ряды разбивались на интервалы по 50 отсчетов, для каждого из которых строилась интерполяция с использованием нейронной сети, обучаемой методом ADAM (Adaptive Moment Estimation). Данный алгоритм адаптивно вычисляет индивидуальные скорости обучения для каждого параметра модели на основе оценок первых и вторых моментов градиентов, что обеспечивает устойчивую и быструю сходимость. Температурный ряд подвергался преобразованию  $T'(t) = T(k \cdot t)$ , где коэффициент  $k$  варьировался в диапазоне 0,3–3. Для каждого  $k$  вычислялась корреляция между преобразованным температурным рядом и исходным концентрационным рядом.

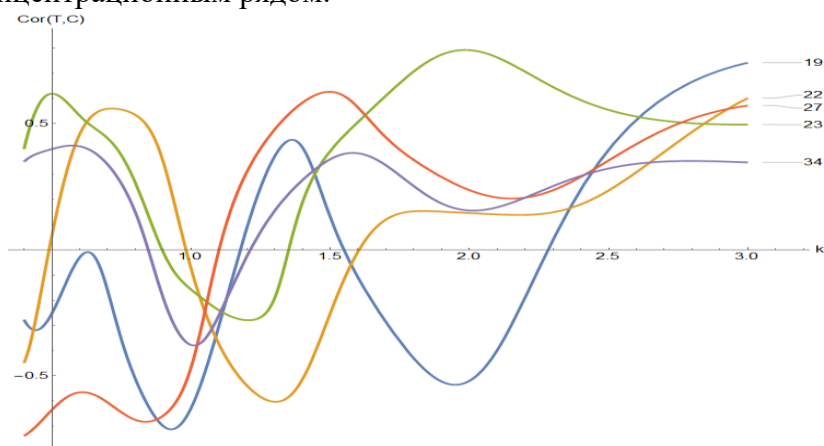


Рис. 3. Зависимость коэффициента корреляции  $Cor(T, C)$  от коэффициента масштабирования  $k$  для различных временных интервалов.

Значение коэффициента  $k > 1$  свидетельствует о том, что исходный температурный сигнал является более протяженным во времени по сравнению с концентрационным. Применение метода к данным за 27.07.2024 показало, что максимальная корреляция достигается при  $k$  в диапазоне 1,5–3, что количественно подтверждает более протяженный характер температурных пульсаций (рис. 3).

Полученные результаты свидетельствуют явном наличии системной связи температурных изменений и процессов генерации пылевого аэрозоля у поверхности. Выявлено преимущественное влияние температуры на концентрацию, а не наоборот. Это подтверждает физический механизм, согласно которому именно термики, как более инерционные и протяженные структуры, являются драйвером подъема и переноса более короткоживущих пылевых облаков.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда – проект №25–17–00346 «Вихревые структуры и турбулентность в атмосферном пограничном слое: теоретические подходы, натурные эксперименты и численное моделирование».

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Shao Y. et al.* Aeolian Research. 2015. V. 19. P. 37–54.
2. *Chkhetiani O.G. et al.* Dust resuspension under weak wind conditions: direct observations and model. *Atm. Chemistry and Physics*. 2012, Vol. 12, pp. 5147–5162.
3. *Kok J.F., Lacks D.J.* *Physical Review E*. 2009. V. 79. №5. P. 051304.
4. Малиновская Е. А. и др. Исследование баллоэлектрического эффекта в условиях пылевого выноса на аридных территориях // ИММФЭГИ: сб. тр. Междунар. науч.-практ. конф. СПб., 2025. С. 156–167
5. Е. А. Шишов и др. Многоточечные измерения температуры и ветра в приземном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 3. С. 286–297.

Козлов Никита Олегович, [nikitagarbuzko@gmail.com](mailto:nikitagarbuzko@gmail.com)  
Калинин Савелий Дмитриевич, [fixinit8@yandex.ru](mailto:fixinit8@yandex.ru)  
Малиновская Елена Александровна, [elen\\_am@inbox.ru](mailto:elen_am@inbox.ru)



## **АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПАРОГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ, КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ В ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ**

*Н.Ю. Колбнева*

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль  
[kolbneva-nata@yandex.ru](mailto:kolbneva-nata@yandex.ru)*

Микропузырьки в жидкости играют важную роль в процессах акустической и гидродинамической кавитации, флотации, фильтрации, сонолюминисценции, барботажа, теплообмена. В частности, в ряде теоретических и экспериментальных работ [1–3] показано, что колеблющиеся в воде воздушные пузырьки являются источниками акустического излучения. Однако вопрос о закономерностях генерации акустических волн, связанных с поверхностными осесимметричными осцилляциями пузырьков, заполненных парогазовой смесью, в сжимаемой жидкости остается невыясненным.

Рассмотрим сферический пузырь радиуса  $R$ , плотностью  $\rho_1$ , находящийся в безграничной идеальной сжимаемой диэлектрической жидкости, характеризующейся плотностью  $\rho_2$ . Пусть  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения границы раздела жидкость-газ. Будем считать, что пузырь содержит совершенный газ и насыщенный пар окружающей жидкости.

Как известно, капиллярные колебания стенки пузыря разделяются на радиальные центрально-симметричные пульсации, приводящие к изменению его объема, и поверхностные осесимметричные осцилляции из-за теплового движения молекул жидкости в окрестности пузыря [4]. Однако для качественного рассмотрения задачи будем считать внутреннюю среду пузыря несжимаемой.

Уравнение, описывающее возмущенную поверхность пузыря в любой момент времени  $t$ , представляется в виде:  $r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t)$ , где  $\xi(\theta, t)$  – малое волновое искажение сферической формы осцилляциями поверхностных мод. Поле скоростей движения внутренней и внешней сред пузыря  $\vec{V}_j$  положим потенциальным с потенциалами  $\psi_j$ :  $\vec{V}_j(r, \theta, t) = \nabla \psi_j(r, \theta, t)$ ; ( $j = 1, 2$ ), где индекс 1 относится к внутренней среде, индекс 2 – к внешней среде. Отметим, что волновое движение стенки пузыря создает возмущение давления внешней материальной среды, что приводит к акустическому излучению. Положим, что в жидкости звук распространяется со скоростью  $v$ .

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных осцилляций пузыря, излучающего акустические волны, представляется в виде:

$$\Delta \psi_1(r, \theta, t) = 0; \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi_2(r, \theta, t) = 0; \quad (1)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik\psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right); \quad (2)$$

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r}; \quad (3)$$

$$P_V + P_1 - P_2 - P_\sigma = 0; \quad P_j = P_{0j} - \rho_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t}; \quad (j = 1, 2); \quad P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}; \quad (4)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (5)$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

где  $i$  – мнимая единица;  $o$  – символ порядка малости;  $P_V$  – постоянное давление насыщенного пара;  $P_1$  – давление газа;  $P_2$  – давление жидкости;  $P_{01}$  – постоянное давление газа внутри пузыря;  $P_{02}$  – постоянное давление окружающей жидкости;  $P_\sigma$  – давление сил поверхностного натяжения;  $\vec{n}(r, \theta, t)$  – орт нормали к возмущенной поверхности пузыря.

Решение задачи проведем в рамках теории возмущений в линейном приближении по малому параметру  $\varepsilon \equiv |\xi|/R \ll 1$ . Искомые функции  $\vec{V}_j(r, \theta, t)$ ,  $\psi_j(r, \theta, t)$ ,  $\xi(\theta, t)$  являются величинами первого порядка малости по  $\varepsilon$ , давление  $P_V$  – нулевого порядка малости по  $\varepsilon$ . Давления  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_\sigma$  в (4) представим в виде суперпозиции компонент  $\sim \varepsilon^0$

, определяющих равновесное состояние системы, и поправок  $\sim \varepsilon^1$ , связанных с деформацией равновесной поверхности пузыря.

Принимая волновое возмущение  $\xi(\theta, t)$  с учетом дополнительных условий (5) в виде:

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu); \quad M_n(t) \equiv M_n \exp(-i\omega_n t); \quad \mu \equiv \cos \theta; \quad (6)$$

из кинематического граничного условия (3) при использовании решений уравнений (1), удовлетворяющих граничным условиям (2), найдем потенциалы скоростей:

$$\psi_1 = -R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i\omega_n}{n} M_n(t) \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\mu); \quad \psi_2 = - \sum_{n=2}^{\infty} i\omega_n M_n(t) \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r \left( h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} P_n(\mu); \quad (7)$$

где  $k = \frac{\text{Re } \omega_n}{v}$  – волновое число;  $P_n(\mu)$  – полином Лежандра  $n$ -ого порядка;  $n$  – номер колебательной моды;  $h_n^{(2)}(kr)$  – сферическая функция Бесселя третьего рода.

Используя уравнения (6), (7), из баланса давлений (4) первого порядка малости по  $\varepsilon$ , получим дисперсионное уравнение:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} n(n-1)(n+2) \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n H_0 \right)^{-1}; \quad H_0 \equiv \frac{h_n^{(2)}(kR)}{R \cdot \partial_r \left( h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}. \quad (8)$$

Подставляя в (8) асимптотическое разложение функции  $H_0(kR)$  при  $kR \ll 1$  в виде:

$$H_0 \approx -\frac{1}{n+1} + i \left( \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 (kR)^{2n+1};$$

выпишем комплексные решения дисперсионного уравнения:

$$\begin{aligned} (\text{Re } \omega_n)^2 &= \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} n(n-1)(n+2) \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n}{n+1} \right)^{-1}; \\ \text{Im } \omega_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} v^{2n+1} \rho_1^{n+1}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( 1 + \frac{n}{n+1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-(n+2)} n^{n+2} ((n-1)(n+2))^{n+1}; \end{aligned} \quad (9)$$

где вещественная часть  $\text{Re } \omega_n$  определяет собственную частоту поверхностных осцилляций пузыря, а мнимая часть  $\text{Im } \omega_n$  характеризует декремент затухания, связанный с энергопотерями на излучение акустических волн.

Интенсивность акустического излучения  $I$ , удовлетворяющего условию  $\lambda \gg R$  ( $\lambda$  – длина звуковой волны) вычисляется по общей формуле [5]:

$$I = \rho_2 v \oint_S \bar{V}_2^2 dS; \quad S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (10)$$

где нормальная компонента скорости течения жидкости  $\bar{V}_2(r, \theta, t)$  имеет вид:

$$\vec{V}_2(r, \theta, t) = \operatorname{Re}(\nabla \psi_2(r, \theta, t), \vec{n}) \approx \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r}\right) \vec{e}_r. \quad (11)$$

Подстановка в (11) потенциала (7) в волновой зоне акустического поля и асимптотического представления сферической функции Бесселя  $h_n^{(2)}(kr)$  при  $kr \gg 1$  в виде:

$$h_n^{(2)}(kr) \approx i^{n+1} \frac{1}{kr} \exp(-ikr);$$

позволяет прийти к соотношению для скорости движения частиц внешней среды:

$$\vec{V}_2(r, \theta, t) = - \sum_{n=2}^{\infty} i^{n+2} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} R^{n+2} k^{n+1} \frac{1}{r} \operatorname{Re} \omega_n M_n \exp(-i(\operatorname{Re} \omega_n t + kr)) P_n(\mu) \vec{e}_r; \quad (12)$$

определяющему суперпозицию расходящихся сферических волн.

Используя (9), (10), (12), получим окончательное выражение мощности акустического излучения одиночного осциллирующего пузыря в сжимаемой жидкости:

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\pi(n(n-1)(n+2))^{n+2}}{(2n+1)} \left( \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n}{n+1} \right)^{-(n+2)} \frac{M_n^2 \rho_2 \sigma^{n+2} R^{n+2}}{v^{2n+1} \rho_1^{n+2}}. \quad (13)$$

Возможным источником акустического излучения являются устойчивые кавитационные пузырьки, возникающие при распаде каверны. Так, в процессе гидродинамической дегазации при заполнении кавитационной камеры водой наблюдается образование воздушных пузырьков размером  $R = 1-3$  мм. Примем, что пузырьки совершают поверхностные осцилляции второй колебательной моды ( $n = 2$ ) с амплитудами  $M_2 = 0.1R$ . Положим  $\sigma = 73$  дин/см,  $\rho_1 = 1.3 \cdot 10^{-3}$  г/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1$  г/м<sup>3</sup>,  $v = 1.5 \cdot 10^5$  см/с. Тогда по формуле (13) при  $R = 1-3$  мм получим интенсивность излучения от  $I \sim 5 \cdot 10^{-19}$  эрг/с до  $I \sim 5 \cdot 10^{-18}$  эрг/с в диапазоне звуковых частот от  $\omega_2 \approx 0.12 \cdot 10^3$  рад/с до  $\omega_2 \approx 0.62 \cdot 10^3$  рад/с. Обнаружено, что интенсивность звукового излучения осциллирующих кавитационных пузырьков в воде на порядок величины ниже по сравнению с осциллирующими крупными дождевыми каплями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alam M.Q., Upadhyay A., Assam A., Raj R. On the origin and nature of acoustic emissions from bubbles departing an underwater nozzle // *Physics of Fluids*. 2025. V. 37 (4). 041703.
2. Ye X., Pang Fz., Zhang Am. Acoustic radiation induced by bubble motion in compressible fluid // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. V. 35. P. 177-190.
3. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2021. №1 (94). С. 73-91.
4. Жаров А.Н., Григорьев А.И., Жарова И.Г. Нелинейные капиллярные колебания заряженного пузырька в идеальной диэлектрической жидкости // *ЖТФ*. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 41-50.
5. Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высшая школа. 1978. 448 с.

Колбнева Наталья Юрьевна, kolbneva-nata@yandex.ru



# ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ НА КАПИЛЛЯРНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

*Н.Ю. Колбнева*

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль*

*kolbneva-nata@yandex.ru*

Интерес к исследованию капиллярных осцилляций заряженной капли связан с многочисленными приложениями: от разработки жидкометаллических источников ионов и каплеструйной печати до проблем грозового электричества и химической технологии. В частности, осциллирующая капля проводящей жидкости, несущая ускоренно движущиеся собственный или индуцированные внешним электрическим полем заряды, представляет интерес в связи с оценкой интенсивности электромагнитного излучения от осциллирующих облачных капель [1, 2]. Однако для жидких капель субмикронных и микронных размеров характерное гидродинамическое время уже сравнимо с характерным релаксационным временем. В этой связи релаксационные явления оказывают заметное влияние на затухание капиллярных осцилляций и изменение характеристик электромагнитного излучения [3].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим заряженную с зарядом  $Q$  сферическую каплю радиуса  $R$  вязкой несжимаемой проводящей жидкости, характеризуемой плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , удельной проводимостью  $\gamma_1 \equiv \gamma$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ . В качестве внешней среды примем вакуум:  $\gamma_2 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 1$ . Равновесная сферическая форма капли претерпевает капиллярное возмущение  $\xi(\theta, t)$  теплового происхождения.

Математическая постановка задачи о капиллярных осцилляциях заряженной капли вязкой жидкости с конечной проводимостью и возникающего при этом электромагнитного излучения помимо стандартного набора уравнений электрогидродинамики с граничными и естественными дополнительными условиями (сохранения объема осциллирующей капли, неподвижности ее центра масс и постоянства собственного заряда) содержит граничные условия для учета эффекта релаксации заряда: скачка нормальной компоненты вектора электрической индукции, непрерывности касательных компонент напряженности электрического поля внутри и вне капли, баланса поверхностной плотности заряда. При этом скорость изменения плотности электрического заряда на свободной поверхности осциллирующей капли осуществляется за счет нормальной компоненты тока проводимости, изменения площади осциллирующей поверхности, перемещения носителей зарядов касательными компонентами электрического поля и поля скоростей течения жидкости.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача решалась аналитически асимптотически путем разложения искомых функций (возмущения сферической формы, поля скоростей течения жидкости в капле, напряженности электрического поля внутри и вне капли) по малому параметру безразмерной

амплитуды осцилляций  $\varepsilon \equiv \xi / R \ll 1$  в линейном приближении. Для решения отдельных гидродинамической и электрической векторных краевых задач применен метод операторной скаляризации [4].

В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$  выведено кубическое дисперсионное уравнение относительно комплексной частоты  $\omega_n$  в пределе малой вязкости. Из решения дисперсионного уравнения показано, что эффект релаксации заряда приводит к появлению дополнительных аperiодических течений жидкости, порождаемых перемещением носителей электрического заряда в процессе капиллярных осцилляций капли.

Пологая влияние вязкости на частоту осцилляций капли пренебрежимо малой, на основе закона сохранения энергии [1] показано, что наибольшей интенсивностью излучения обладает осциллирующая капля идеально проводящей жидкости, которая на порядок выше по сравнению с жидкой каплей конечной проводимости. Наименьшая интенсивность излучения прослеживается для капли чисто диэлектрической жидкости, которая на два порядка величины ниже по сравнению с каплей конечной проводимости.

Далее положено, что энергопотери на электромагнитное излучение при ускоренном движении заряда осциллирующей капли пренебрежимо малы по сравнению с диссипацией кинетической энергии полоидальной компоненты поля скоростей движения вязкой жидкости. Подставляя в получившееся кубическое дисперсионное уравнение комплексную кинематическую вязкость [5]:

$$\nu(\omega_n) = \frac{\nu_0}{1 - i\omega_n \tau_1};$$

и комплексный динамический коэффициент поверхностного натяжения [5]:

$$\sigma(\omega_n) = \sigma_\infty - \frac{\sigma_*}{1 - i\omega_n \tau_2} = \sigma_0 - \frac{i\omega_n \sigma_* \tau_2}{1 - i\omega_n \tau_2}; \quad \sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0;$$

несложно прийти к алгебраическому уравнению пятой степени. Однако согласно теореме Абеля такое уравнение не имеет аналитических решений. В виду этого с целью понижения порядка дисперсионного уравнения положим, что электрический заряд в процессе капиллярных осцилляций капли перераспределяется мгновенно. Таким образом, учет лишь эффектов релаксации поверхностного натяжения и релаксации вязкости позволяет получить дисперсионное уравнение четвертого порядка:

$$\omega_n^4 + ik_1 \omega_n^3 + k_2 \omega_n^2 + k_3 \omega_n + ik_4 = 0; \quad (n \geq 2); \quad (1)$$

$$k_1 \equiv \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}; \quad k_2 \equiv -\frac{1}{\tau_1 \tau_2} - 2 \frac{\nu_0}{R^2 \tau_1} (n-1)(2n+1) - \omega_{n0}^2 \left( 1 + \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \right);$$

$$k_3 \equiv -\left( \frac{\sigma_*}{\sigma_0} + 1 \right) \frac{\omega_{n0}^2}{\tau_1} - \left( 2 \frac{\nu_0}{R^2 \tau_1} (n-1)(2n+1) + \omega_{n0}^2 \right) \frac{1}{\tau_2}; \quad k_4 \equiv \frac{\omega_{n0}^2}{\tau_1 \tau_2};$$

$$\omega_{n0}^2 \equiv \frac{\sigma_0}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left( 1 - \frac{W}{(n+2)} \right);$$

где  $i$  – мнимая единица;  $\nu_0$  – равновесный коэффициент кинематической вязкости;  $\tau_1$  – характерное время релаксации вязкости;  $\tau_2$  – характерное время релаксации по-



верхностного натяжения;  $\sigma_*$  – поправка к равновесной величине  $\sigma_0$ ;  $\sigma_\infty$  – максимальное значение коэффициента поверхностного натяжения для области высоких частот;

$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}$  – параметр Релея, характеризующий критерий электростатической устойчивости  $n$ -ой моды осциллирующей проводящей капли по отношению к собственному заряду:  $W < (n + 2)$ .

Из решения уравнения (1) показано, что наличие эффекта динамического поверхностного натяжения приводит к появлению релаксационного апериодического течения жидкости и затухающих капиллярных осцилляций релаксационной природы, обусловленных перестройкой двойного электрического слоя. В затухании осцилляций облачных капель определяющую роль играет эффект релаксации поверхностного натяжения.

Установлено, что наличие эффекта релаксации вязкости приводит к появлению релаксационного апериодического упругого течения вязкой жидкости и затухающих вязко-упругих осцилляций капель. Слабое затухание осцилляций мелких дождевых капель имеет вязко-упругий характер. Выявлено, что в случае мелких облачных капель течение вязкой жидкости носит преимущественно упругий характер.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что определяющую роль в затухании капиллярных осцилляций облачных капель в модели вязкой жидкости оказывает эффект релаксации поверхностного натяжения, реализующийся также в модели идеальной жидкости. В случае мелких облачных капель их поведение схоже с твердым телом: течение вязкой жидкости имеет апериодический упругий характер при отсутствии влияния вязкости. Осцилляции дождевых капель схожи с осцилляциями капель идеальной жидкости. С уменьшением размера дождевых капель появляется слабое затухание капиллярных осцилляций, имеющее вязко-упругий характер.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344-1347.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю. Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозовом облаке. Москва-Берлин: Директ-Медиа, 2021. 200 с.
3. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Релаксационные явления и электромагнитное излучение осциллирующих облачных капель // Коллоидный журнал. 2025. Т. 87. Вып. 4. С. 300-320.
4. Лазарянец А.Э., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач. М.: Русайнс, 2020. 140 с.
5. Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П., Рубежный Ю.Г. Спектр поверхностных колебаний жидкости с учетом релаксационных эффектов // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 10. С. 2211-2213.

Колбнева Наталья Юрьевна, kolbneva-nata@yandex.ru



# КОЛЕБАНИЯ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПАР – СВЕРХТЕКУЧИЙ ГЕЛИЙ В ПРЯМОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

*И.А. Корняков\*, Ю.Ю. Пузина*

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

*KorniakovIA@mpei.ru*

## ВВЕДЕНИЕ

В закрытом канале для классической жидкости при подведении тепла со стороны нагревающего элемента и превышении определенного значения теплового потока неизбежен процесс пузырькового или пленочного кипения, в результате межфазная поверхность жидкость – пар отдаляется от нагревателя. Однако при кипении He – II традиционный пузырьковый режим кипения отсутствует. В экспериментах [1] показано, что в U – образном канале может наблюдаться процесс колебаний межфазной поверхности сверхтекучий гелий – пар, то есть паровая пленка с течением времени нелинейно изменяет свою толщину. Добавление монодисперсной пористой засыпки снижает амплитуду колебаний и частоту [2]. Для упрощения задачи в настоящей работе рассматриваются процессы тепломассопереноса сверхтекучего гелия при кипении в перевернутом вертикальном канале, в котором нагреватель герметично располагается в верхней части.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Схема экспериментальной установки подробно описана в [3].

Проведение экспериментов проходит следующим образом [4]: в начальный момент времени внутренняя полость стеклянного криостата герметична и заполнена атмосферным воздухом, переливное устройство установлено в криостат и в транспортный гелиевый сосуд при атмосферном или немного его превышающем давлении. Ловушки, которые находятся перед насосами и препятствуют попаданию вакуумного масла во внутреннюю полость криостата, заполняются азотом. Далее проводится откачка вакуумными насосами гелиевого криостата. Следующий шаг — это уменьшение теплопритоков к гелиевому криостату путем создания азотной рубашки во внешнем криостате. После этого на переливном устройстве открывается клапан и гелий, вследствие разницы давлений, захлаживает внутренний трубопровод переливного устройства, стеклянный криостат и начинает накапливаться на дне. По достижении определенного уровня гелия клапан на переливном устройстве перекрывается. Так как вакуумные насосы продолжают откачку объема, то происходит испарение с зеркала гелия, и температура накопленной жидкости снижается ниже лямбда-точки. В экспериментальной серии в зависимости от рассматриваемых процессов тепломассообмена при кипении сверхтекучего гелия и достижения повторяемости результатов гелиевый сосуд может откачиваться насосами.

Экспериментальная ячейка представляет собой вертикальный прозрачный стеклянный канал (внутренний диаметр  $d = 14$  мм) герметичный сверху (Рис. 1 а). Нагревательный элемент выполнен в виде нихромовой спирали (сопротивление при гелиевой температуре  $R = 21,4$  Ом) и размещен под медной пластиной на керамической подложке. Для контроля температуры нагревательного элемента в процессе эксперимента встраивается термопара. Несмотря на то, что термопара недостаточно точно измеряет температуру на гелиевом уровне, контроль показаний во время эксперимента позволяет избежать перегрева проволоки (выше 200К). Измерительные и питающие провода выведены сквозь фторопластовую пробку через специальные отверстия (Рис. 1 б). Исследования проводились при тепловых нагрузках  $(3,9 \div 19,0)$  кВт/м<sup>2</sup>.

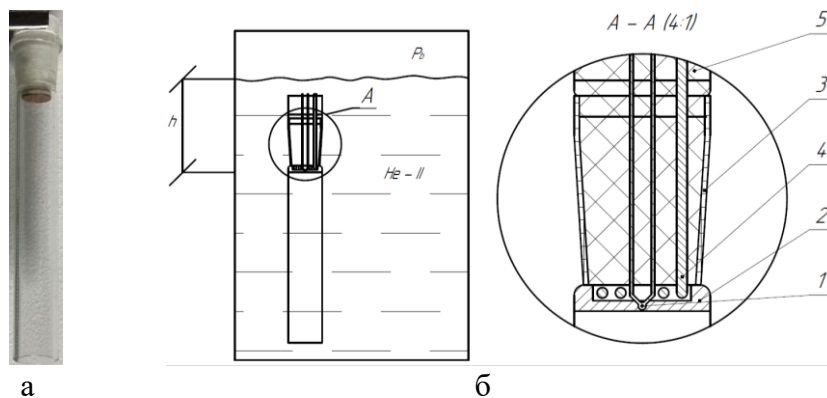


Рис. 1. а – вертикальный канал. б - схема экспериментальной ячейки. 1 – термopapa типа МК и ее провода, 2 – медная пластина, 3 – двухсоставной герметичный клеевой слой, 4 – нагревательный элемент и его провода, 5 – фторопластовая пробка

## РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ

Обработка результатов производилась при помощи раскадровки видео всей экспериментальной серии. При подаче постоянной тепловой нагрузки процесс мог развиваться по двум сценариям: а – отсутствуют визуальные изменения внутри экспериментальной ячейки; б – образуется пар, объем которого сначала существенно увеличивается, а затем межфазная поверхность возвращается к нагревателю, таким образом начинаются макроскопические колебания. Схлопывание пара сопровождается характерным звуковым эффектом от соприкосновения жидкости с нагревателем. При переменной нагрузке решалось две задачи: 1 – определение пикового теплового потока: сначала нет кипения, а при повышении подаваемой мощности образуется пар; 2 – при большом тепловыделении с нагревателя сразу начинаются колебания, а при снижении напряжения пар пропадает, и процесс прекращается. Синхронизация видео, данных баратрона (давление пара внутри криостата) и АЦП (напряжение на нагревателе) позволяет идентифицировать моменты (кадры) начала колебательного движения межфазной поверхности и его полного прекращения. Демонстрация колебания межфазной поверхности представлена на Рис. 2.

Итог обработки представляет собой зависимость положения межфазной поверхности относительно плоскости нагревательного элемента по вертикали от времени. Стоит отметить, что колебания прекратили свое существование при давлении  $\sim 4900$  Па, то есть до наступления в криостате давления  $\lambda$  - перехода. Это связано с тем, что при кипении He – II давление в стеклянной трубке выше, чем над зеркалом жидкости в свободном объеме.

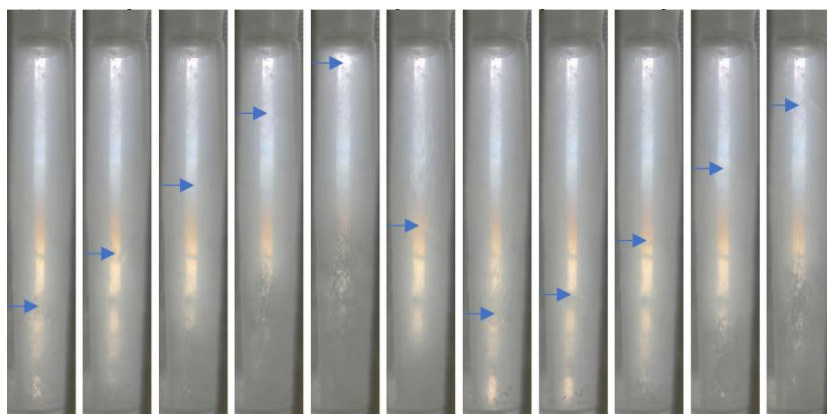


Рис. 2. Раскадровка экспериментальной серии. Интервал между кадрами 0,033 сек. Стрелочки показывают положение межфазной поверхности.

Для анализа зависимостей амплитуды и частоты колебаний от давления необходимо разделить данные на интервалы (Рис. 3). В таком представлении видно, что колебания носят систематический характер.

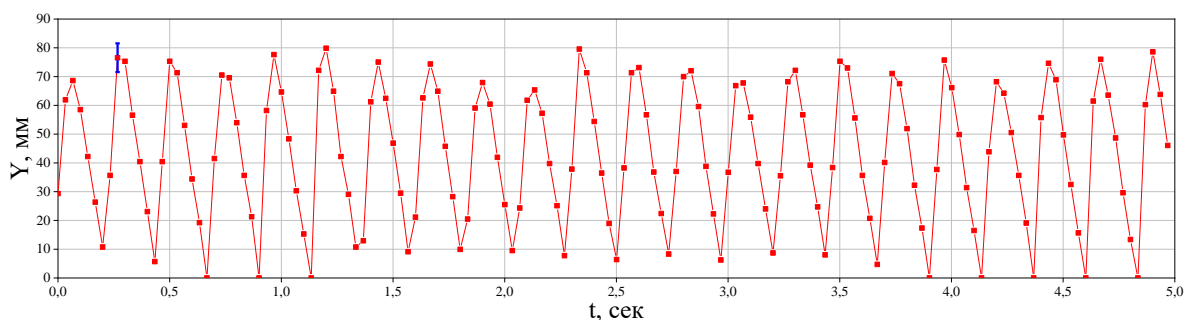


Рис. 3. Фрагмент зависимости положения межфазной поверхности  $y$  от времени  $t$ .

На Рис. 4 приведена амплитудно–частотная характеристика серии колебаний в зависимости от давления над зеркалом жидкости. Интервал осреднения 5 сек. Показано, что с увеличением давления амплитуда уменьшается монотонно, а вид зависимости частоты имеет два участка с разным углом наклона.

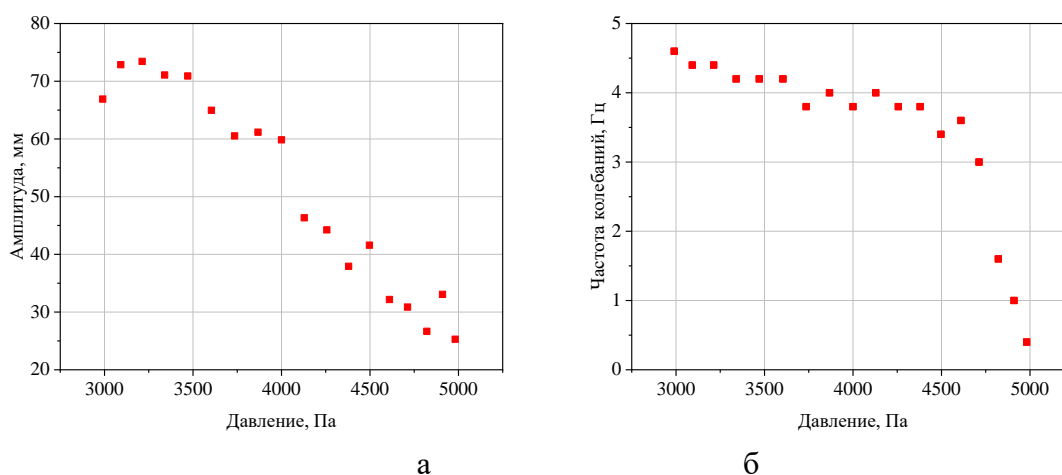


Рис. 4. а – зависимость амплитуды и б – зависимость частоты от давления.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен эксперимент по кипению He – II в перевернутом вертикальном канале. Построена карта всех серий с обозначением параметров эксперимента, для которых присутствуют или отсутствуют колебания. Один эксперимент подвергнут раскадровке и обработке каждого изображения с целью определения положения межфазной поверхности относительно нагревателя в зависимости от времени. С помощью этих данных построена амплитудно–частотная характеристика.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Настоящая работа посвящена памяти нашего учителя – профессора Крюкова Алексея Павловича.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пузина Ю.Ю., Крюков А.П. Движение межфазной поверхности гелий II – пар в U-образном канале. // Теплофизика и аэромеханика, 2023. Т. 30, №4, С. 751-762.

2. Пузина Ю.Ю., Крюков А.П. Сравнение колебаний границы раздела фаз гелий-II – пар в U-образном канале с монодисперсной засыпкой и без неё. // Инженерно-физический журнал, 2024. Т. 97, №7, С. 1727–1733.
3. Korolev P.V., Kryukov A.P., Puzina Y.Y. Experimental study of the boiling of superfluid helium (He-II) in a porous body. // Journal of applied mechanics and technical physics, 2017, №4. P. 679-686.
4. Puzina Yu.Yu., Kryukov A.P. Recovery heat flux at superfluid helium boiling in a U-shape channel with a porous backfill. // Cryogenics, 2024, V. 141, 103864.

Корняков Илья Арсланович, KorniaikovIA@mpei.ru

Пузина Юлия Юрьевна, Puzina2006@inbox.ru



## ПРИМЕНЕНИЕ СЕТИ МИКРОБАРОГРАФОВ ДЛЯ АНАЛИЗА КОГЕРЕНТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОМ АПС

*А.С. Креузов<sup>1,2\*</sup>, С.Н. Куличков<sup>1,2</sup>, О.Е. Попов<sup>1</sup>, Д.В. Зайцева<sup>1</sup>,  
В.С. Люлюкин<sup>1,3</sup>, Д.Д. Кузнецов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Институт Физики Атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва*

<sup>3</sup>*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва*  
*kreuzov.as21@physics.msu.ru*

Атмосферный пограничный слой (АПС) представляет собой слой воздуха, непосредственно прилегающий к земной поверхности, чья толщина варьируется от нескольких метров до нескольких сотен метров в зависимости от метеорологических условий. АПС играет ключевую роль в обмене импульсом и теплом между подстилающей поверхностью и свободной атмосферой. В условиях устойчивой температурной стратификации, регулярно наблюдающейся, например, в ночное время, формирование и эволюция субмезомасштабных вихревых структур (с масштабами не превышающими нескольких километров), а также их связь с генерацией турбулентности остаются недостаточно изученными [1].

В рамках исследований были проведены измерения флуктуаций давления на сети, состоящей из трех микробарографов МБ-2014 производства НПО “Тайфун”. Измерения проводились в течение двух недель в августе 2025 года в Ростовской области на Цимлянском научном полигоне Института Физики Атмосферы, на однородной степной поверхности. Приборы были расположены в вершинах прямоугольного треугольника со сторонами 250 и 300 м и обеспечивали непрерывную запись временных рядов давления с частотой 100 Гц. В каждом из измерительных пунктов также проводились синхронные измерения акустическими локаторами (содачами) и ультразвуковыми термометрами-анимометрами.

Анализ имеющихся измерений показал, что в устойчивом АПС когерентные периодические структуры наблюдались одновременно на высотно-временных развертках содарного эхо-сигнала (эхограммах) и во временных рядах флуктуаций давления. Для отдельных событий, атрибутированных как вихревые структуры типа валов Кельвина-Гельмгольца (ВКГ), был проведен спектральный и кросс-корреляционный анализ. На рисунке 1 приведен пример анализа данных синхронных измерений микробарографов 13

августа 2025 года. На верхней панели приведены временные ряды флуктуаций давления в двух точках измерений, на нижней представлен результат кросс-корреляционного анализа этих сигналов. Максимумы корреляции указывают на согласованное распространение возмущений между станциями и позволяют выделить характерные пространственно-временные масштабы структур.

Параметры распространения представленного цуга ВКГ (период  $T=225$  с, частота  $\sim 0.0044$  Гц) были определены при помощи триангуляционного анализа [2] в диапазоне частот  $\sim 0.0039$ - $0.0051$  Гц. Полученные скорость и направление распространения ( $U=6$  м/с, азимут прихода  $270^\circ$ - $280^\circ$ ) совпадают со средними значениями ветра внутри высотного слоя ВКГ. Соответственно, пространственный период вихревых структур был оценен как:  $L = U \times T = 1350$  м.

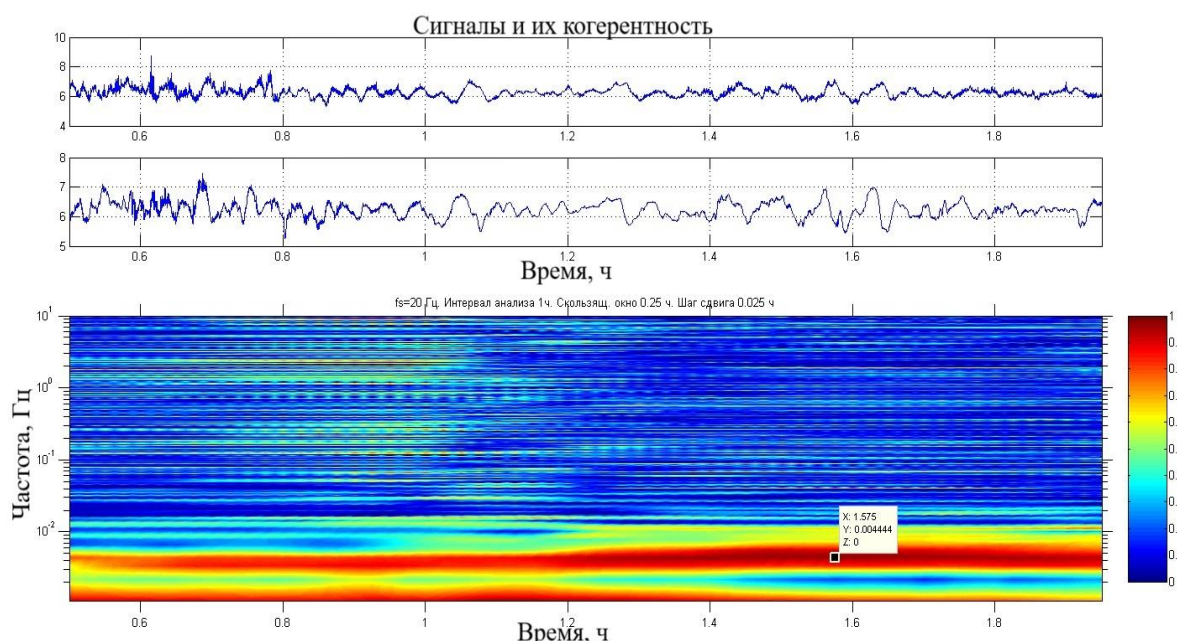


Рис. 1. Кросс-корреляционный анализ данных микробарографических измерений 13 августа 2025 года. На верхней панели представлены временные ряды флуктуаций давления в двух точках, на нижней панели - их когерентность, справа представлена цветовая шкала. Красный цвет соответствует максимуму корреляции, по оси абсцисс отложено локальное время по оси ординат - частота. Максимум наблюдается на частотах в диапазоне  $0.0039$ – $0.0051$  Гц.

Полученные результаты соответствуют представлениям о наличии в АПС когерентных структур в виде вертикальных вихрей, переносимых средним потоком. Такие структуры регулярно наблюдаются на содарных эхограммах, однако не всегда проявляются в поле давления. Использование одновременных многоточечных измерений содами и микробарографами позволило подтвердить факт выполнения гипотезы о движении таких структур со средним ветром, а также определить их пространственные и временные масштабы.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-17-00060.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mahrt L. Stably stratified atmospheric boundary layers // Annual review of fluid mechanics. 2014. Т. 46. №. 1. С. 23-45.

2. Куличков С.Н., Чунгузов И.П., Попов О.Е., и др. Внутренние гравитационные и инфразвуковые волны во время урагана в Москве 29 мая 2017 г // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 2. С. 32-40

Креузов Артем Сергеевич, kreuzov.as21@physics.msu.ru

Куличков Сергей Николаевич, snk@ifaran.ru

Попов Олег Евгеньевич, olegp@mail.ru

Зайцева Дарья Владимировна, zaycevad@gmail.com

Люлюкин Василий Сергеевич, lyulyukin@gmail.com

Кузнецов Дмитрий Дмитриевич, mikrer@yandex.ru



## ПОДАВЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ВНЕШНИМ ШУМОМ

*О.Э. Кривоносова<sup>1\*</sup>, Г.И. Андреев<sup>1,2</sup>, Д.Ю. Жиленко<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Институт механики Московского Государственного Университета  
имени М.В. Ломоносова, Москва*

*<sup>2</sup>Физический факультет Московского Государственного Университета  
имени М.В. Ломоносова, Москва  
olga@imec.msu.ru*

Представлены результаты экспериментальных исследований по влиянию шума в виде случайных флуктуаций скорости вращения внутренней границы на неустойчивость течений в сферическом слое. Рассматривались течения в виде азимутальных волн с волновыми числами 3 или 4, формирующиеся после потери устойчивости стационарным течением. Обнаружено, что добавление шума может приводить либо к восстановлению первоначальной азимутальной волны, либо к смене волнового числа, либо к подавлению неустойчивости, то есть к восстановлению стационарного режима течения.

### МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперименты проводились на установке «Шар» НИИ механики МГУ. Радиусы внутренней и внешней сфер соответственно  $r_1 = 0.075$  м,  $r_2 = 0.150$  м. Зазор заполнен силиконовым маслом с кинематической вязкостью  $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с при температуре масла 22<sup>0</sup> С. В масло добавлена алюминиевая пудра с целью визуализации течения. Более подробно установка описана, например, в [1,2]. Цифровая система управления позволяет, как поддерживать заданную величину угловой скорости вращения, так и добавлять шум в виде возмущений нормированной величины, выдаваемых генератором случайных чисел. Было выбрано возмущение [3], представляющее белый шум в диапазоне частот от 0.01 до 1 Нз и экспоненциально затухающее на более высоких частотах. По ходу эксперимента измерялась и записывалась азимутальная компонента скорости течения  $u_\varphi$  [м/с] в точке удаленной от плоскости экватора на расстояние 0.078 м и от оси вращения на 0.105 м.

Эксперименты проводились при покоящейся внешней сфере. Сначала угловая скорость внутренней границы  $\Omega_0$  увеличивалась до одного из двух критических значений числа Рейнольдса  $Re_1/Re_c = 1.0031, 1.0046$  ( $Re_1 = (\Omega_0 r_1^2)/\nu$ , предел устойчивости ламинарного течения  $Re_c = 460 \pm 2$  [13]). Частоты формирующихся азимутальных мод  $f_3 = 0.3-0.32$  Нз ( $m = 3$ ) и  $f_4 = 0.4-0.42$  Нз ( $m = 4$ ) [2]. Развитие неустойчивости начинается с роста



амплитуд обеих мод, постепенно амплитуда одной из мод, далее начальная, выходит на постоянное значение, тогда как амплитуда второй (вторичной) проходит через максимум и постепенно затухает. Момент потери устойчивости определялся по визуализации течения. После этого в сигнал скорости подавался шум (ступенчатым образом, от 0 до выбранного значения  $N$ ). Здесь  $N$  амплитуда шума:

$$N = 1/\Omega_0 \sqrt{\sum_{i=1}^K (\Omega(t_i) - \Omega_0)^2 / (K - 1)}$$

$\Omega(t_i)$  – мгновенное значение скорости вращения,  $K$  – длина временной выборки. На выбор моды влияет предысторией развития течения и величина  $N$  [1]. Значение  $N$  не менялось в течение каждого эксперимента и находилось в диапазоне  $0.044 < N < 0.095$ . Время действия шума  $\tau$  варьировалось от 400 до 1500с. Шум выключался, когда визуализация и зависимость  $u_\varphi$  от времени свидетельствовали о подавлении неустойчивости. Исследовались зависимости амплитуд азимутальных мод  $A_3$  и  $A_4$  от времени. Амплитуды вычислялись с помощью преобразования Гильберта (НТ) [2]:  $A_f = |u_f(t) + i\text{НТ}(u_f(t))|$ , где  $u_f(t)$  – результат фильтрации сигнала скорости  $u_\varphi(t)$  в полосе частот  $f_3 \pm \Delta f$  для  $m=3$  и  $f_4 \pm \Delta f$  для  $m=4$ ,  $\Delta f=0.005-0.01\text{Hz}$ .

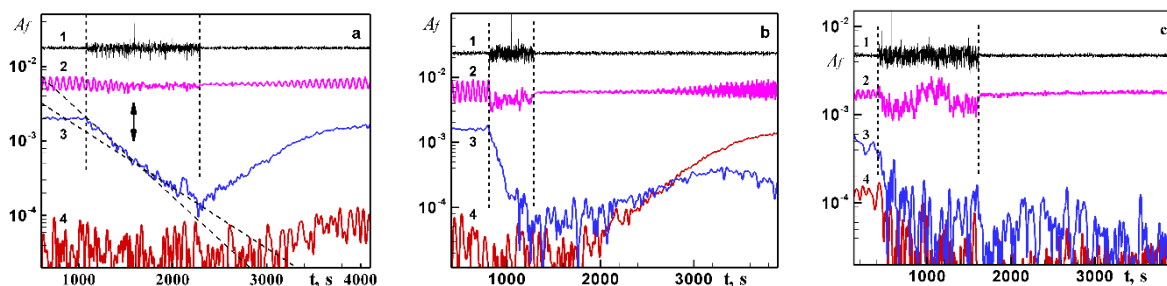


Рис. 1.  $Re_1/Re_c=1.0046$ . (a) –  $N=0.045$ , (b) –  $N=0.0648$ , (c) –  $N=0.0702$ . 1 – скорость внутренней сферы  $\Omega_1(t)/2\pi$ , [Hz], 2 – измеряемая скорость течения  $u_\varphi(t)$  [m/s], 3, 4 – амплитуды  $A_3$  и  $A_4$  [m/s], начальная мода  $m=3$  (синие линии) и вторичная мода  $m=4$  (красные линии). Вертикальными штриховыми линиями ограничены участки внесения шума. (a): наклонными штриховыми линиями показаны экспоненциальные аппроксимации амплитуды  $A_3$ , вертикальная стрелка указывает на момент изменения величины декремента.

На рис.1 показаны три варианта отклика неустойчивого течения с начальной модой  $m=3$  на внесение шума. Рис.1a – восстановление начального азимутального числа, рис.1b – смена азимутального числа (заметим, что мода  $m=4$  является доминирующей при стационарном вращении границ [1,2]), рис.1c – восстановление ламинарного режима течения. Сценарии меняются с увеличением амплитуды шума  $N$  от рис.1a к рис.1c. Под действием шума амплитуда начальной моды  $A_3$  экспоненциально затухает, причем декремент затухания  $\lambda$  не остается постоянным. Из рис.1a,b видно, что устанавливается та азимутальная мода, чья амплитуда с течением времени возрастает. На рис.1c амплитуды обеих конкурирующих мод после воздействия шума становятся одного порядка, и восстанавливается ламинарный режим течения, сохраняющийся в течении длительного времени.

На рис.2 показаны два варианта отклика неустойчивого течения с начальной модой  $m=4$  на внесение шума. Здесь меняется время действия шума  $\tau$  при одном и том же значении  $N$ . На рис.2a, амплитуда начальной моды во время действия шума уменьшается, но остается больше амплитуды вторичной моды, и как следствие после отключения шума восстанавливается.  $\Lambda$  также не остается постоянным и снижается в момент максимального увеличения вторичной моды. Увеличение  $\tau$  (рис.2b) действует аналогично уве-

личению интенсивности шума (рис. 1с), амплитуды мод сближаются, и после отключения шума неустойчивость не восстанавливается длительное время. На рис.3 представлена зависимость максимальных значений декремента затухания  $\lambda$  от  $N$ . При одной и той же надкритичности быстрее затухает начальная мода  $m=3$  по сравнению с  $m=4$  (кривые 1 и 2). Чем больше надкритичность, тем быстрее затухает начальная мода ( $m=4$ , кривые 2 и 3).

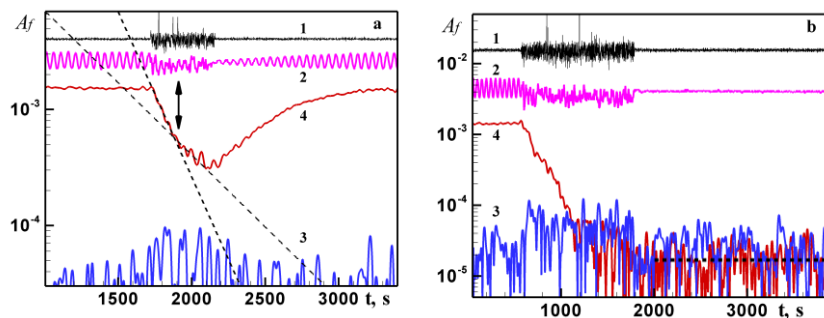


Рис. 2.  $Re_1/Re_c = 1.0046$ ,  $N = 0.0648$ . а –  $\tau = 432$ с, б –  $\tau = 1210$ с. 1 – скорость внутренней сферы  $\Omega_1(t)/2\pi$ , [Hz], 2 – измеряемая скорость течения  $u_\varphi(t)$  [m/s], 3, 4 – амплитуды  $A_3$  и  $A_4(t)$ , [m/s], начальной моды  $m=4$  (красные линии) и вторичной моды  $m=3$  (синие линии). Зависимости 1 и 2 для наглядности показаны с увеличенным временным интервалом между соседними точками. (а): наклонными штриховыми линиями показаны экспоненциальные аппроксимации амплитуды  $A_4$ , вертикальная стрелка указывает момент изменения величины декремента. Горизонтальная штриховая линия (б) – среднее значение начальной моды после отключения шума.

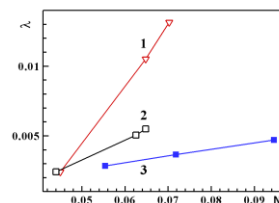


Рис. 3. Зависимость декремента затухания  $\lambda$  [m/s<sup>2</sup>] от амплитуды шума  $N$ :

1 – начальная мода  $m = 3$ ,  $Re/Re_c = 1.0046$ ;  
2 – начальная мода  $m = 4$ ,  $Re/Re_c = 1.0046$ ;  
3 – начальная мода  $m = 4$ ,  $Re/Re_c = 1.0031$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что наблюдаемые сценарии подавления неустойчивости или выбор одной из двух азимутальных мод определяются предысторией развития течения, а после потери течением устойчивости – взаимодействием азимутальных мод. Такое взаимодействие зависит от интенсивности вносимого шума и его продолжительности. Выявлена разница в воздействии шума и периодической модуляции скорости вращения внутренней границы слоя. В том числе при периодической модуляции восстановление ламинарного режима наблюдалось только при начальной моде  $m=4$ ; затухание начальной моды сопровождалось более сильным возрастанием вторичной; заметно повышалась скорость течения. Полученные результаты позволяют сделать вывод об усилении взаимодействия между модами под действием шума.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В.Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhilenko D., Krivonosova O., Gritsevich M., Read P. Wave number selection in the presence of noise: experimental results // Chaos 2018. 28. 053110 (doi:10.1063/1.5011349)
2. Жиленко Д.Ю., Криваносова О.Э. Подавление неустойчивости течений случайными флуктуациями скорости вращения // Письма в журнал технической физики. 2024. Т. 50. № 16. С. 47 – 50. DOI: 10.61011/3JTF.2024.16.58539.19918

3. Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Влияние шумов с различными спектрами на течения вязкой несжимаемой жидкости // Письма в журнал технической физики. 2023. Т.49. №8. С.21-24. DOI: 10.21883/PJTF.2023.08.55132.19506

Жиленко Дмитрий Юрьевич, jilenko@imec.msu.ru  
Кривоносова Ольга Эрленовна, olga@imec.msu.ru  
Андреев Глеб Игоревич, andreev.gi18@physics.msu.ru



## ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФфуЗОРЕ С БОЛЬШИМ УГЛОМ РАСТВОРА

С.А. Кумакиев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

kumak@ipmnet.ru

В работе построены и исследованы течения вязкой жидкости в плоском диффузоре для больших углов раствора. Течения проиллюстрированы на примере диффузора с углом раствора  $3\pi/2$ .

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим классическую задачу Джеффри-Гамеля в случае диффузорного течения [1-4]. Жидкость имеет плотность  $r$  и динамическую вязкость  $m$ ; ее плоское движение происходит в области  $W = \{(r, q) : r > 0, |q| < b\}$ , где  $r, q$  — полярные координаты,  $b$  — угол полураствора ( $0 < b \leq \pi$ ). На стенках диффузора  $r > 0, q = \pm b$  выполняются условия прилипания, а при  $r = 0$  течение имеет особенность типа источник постоянной мощности  $Q < 0$ . Система допускает два безразмерных параметра: угол раствора  $2b$  и число Рейнольдса  $Re = rQ/m$  ( $Re < 0$ ), что недостаточно для полного безразмеривания уравнений движения. Имеется автомодельное решение, для которого поле скоростей радиально

$$v_r = -\frac{Q}{r}V(q), \quad v_q \in 0 \quad (1)$$

и автоматически удовлетворяет условию несжимаемости для произвольной гладкой функции  $V(q)$ . Компоненты тензора скоростей деформаций  $v$  и напряжений  $s$  равны

$$\begin{aligned} v_{rr} = -v_{qq} &= \frac{Q}{r^2}V(q), \quad v_{rq} = -\frac{Q}{2r^2}V'(q); \\ s_{rr;qq} &= -p \pm \frac{2rQ^2}{r^2 Re}V(q), \quad s_{rq} = -\frac{rQ^2}{r^2 Re}V'(q) \end{aligned} \quad (2)$$

Величины (1), (2) определяются посредством неизвестных функций профиля скорости  $V$  и давления  $p$ , для которых имеют место соотношения (следствие уравнений Навье-Стокса)

$$V'' + 4V - ReV^2 = C = \text{const}; p = \frac{rQ^2}{2r^2 Re}(C - 4V). \quad (3)$$

На безразмерную функцию  $V(q)$  налагаются дополнительные требования, вытекающие из локального условия прилипания жидкости на границе и интегрального условия постоянства расхода (истока)

$$V(\pm b) = 0, \quad \int_{-b}^b V(q) dq = 1. \quad (4)$$

С помощью соотношений (3), (4) для нахождения величин (1), (2), (4) и др. требуется определить неизвестные  $V(q)$  и  $C = V''(\pm b)$  для произвольных значений  $\text{Re} < 0$  и  $p/2 < b \leq p$ , что представляет весьма трудную аналитическую и вычислительную проблему.

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Эффективное высокоточное решение нелинейной краевой задачи (3), (4) проводится с помощью численно-аналитического метода, основанного на модифицированном алгоритме Ньютона и процедуре продолжения по параметрам. Для удобства расчетов исходная краевая задача записывается в терминах нормированных профиля скорости  $y$ , аргумента  $x$ , неизвестных параметров  $g$ ,  $l$  и существенных известных параметров  $a$ ,  $b$

$$y(x) = 2bV(q), \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\beta} + 1\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

$$a = 4b, \quad b = 2b \text{Re}, \quad l = 8b^3 C, \quad \gamma = y'(0)$$

Интегральное условие (4) учитывается посредством неизвестной функции  $z(x)$ , характеризующей исток. В результате этих преобразований получается задача Коши для  $y$ ,  $z$  с неизвестными  $g$ ,  $l$ , нахождение которых осуществляется учетом конечных условий

$$y'' + a^2 y - by^2 = \lambda, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \gamma, \\ z' = y - 1, \quad z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 0 \quad (6)$$

Требуется найти параметры  $g$ ,  $l$  как функций известных величин  $a$ ,  $b$ . Проще сперва определять  $g$ ,  $l$  продолжением по параметру  $b \in [0, \infty)$  при фиксированном значении параметра  $a$ ,  $2p < a \leq 4p$ , т.е. угла  $b$ ,  $p/2 < b \leq p$ , поскольку решение задачи (6) строится в явной аналитической форме для  $b = 0$  ( $\text{Re} = 0$ ). Затем искомая функция  $y$  после подстановки найденных величин  $g(b)$ ,  $l(b)$  ( $a$  — фиксированно) получается численным интегрированием задачи Коши (6).

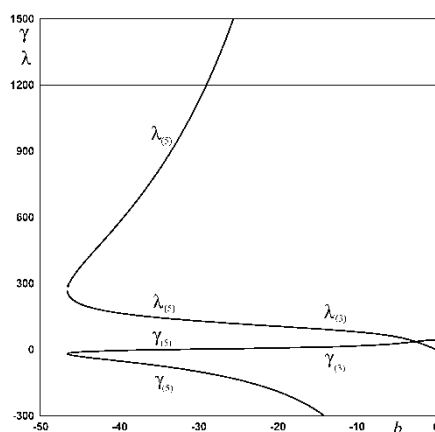


Рис. 1. Кривые  $g(b)$  и  $l(b)$ .

Таким образом, можно построить течения вязкой жидкости в плоском диффузоре для больших углов раствора. Проиллюстрируем такие течения на примере диффузора с углом раствора  $3\pi/2$ . Результат вычислений параметров  $g$  и  $l$  для  $a = 4b = 3\pi$  (где  $b$ , как угол полураствора, равен  $3\pi/4$ ) приведен на рис. 1.

Получающиеся профили скорости течений приведены на рис. 2.

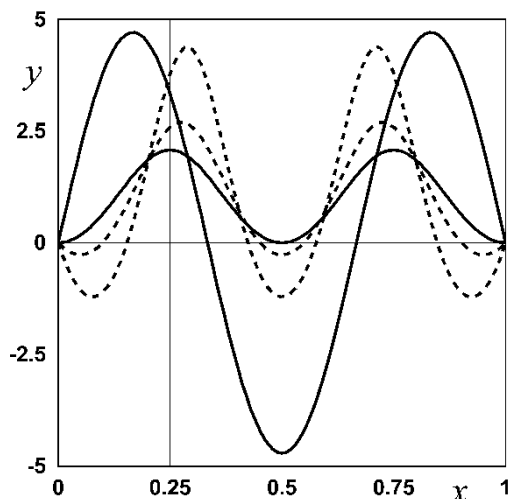


Рис. 2. Профили скоростей  $V(x)$  для разных значений  $b$ .

Видно, что при  $b = 2b_{Re} = 0$  существует только трехмодовое течение с обратным потоком жидкости по центру (см. рис. 2). При увеличении числа Рейнольдса этот вток уменьшается и, когда кривая  $g(b)$  пересекает ось абсцисс, становится двухмодовым (см. рис. 2). Далее двухмодовое течение становится пятимодовым: по центру и по краям диффузора появляются участки обратного тока жидкости. Надо отметить, что при одном и том же значении  $Re$  одновременно существуют два варианта пятимодового течения. Они различаются значением первой производной у профиля скорости у стенок диффузора. На рис. 2 показаны оба варианта для  $b = 45$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 4. С. 480 – 484.
2. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. С. 25 – 36.
3. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Многомодовая бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 5. С. 620 – 624.
4. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре. ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 431 – 441.

Кумакшев Сергей Анатольевич, kumak@ipmnet.ru



# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ МНОГОЛУЧЕВЫХ СХЕМ ПОДДЕРЖАНИЯ ОПТИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

*С.Ю.Лаврентьев\*, Н.Г.Соловьев, М.Ю.Якимов*  
*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
*1993serj@gmail.com*

## ВВЕДЕНИЕ

Плазма оптического разряда (ОР), создаваемая сфокусированным лучом лазера в различных газах, является одним из самых высокоярких источников излучения (температура плазмы в ОР 15000-20000 К, что существенно выше, чем в других типах разрядов) в широком спектральном диапазоне 170-880 нм. Источники излучения на основе ОР все шире применяются для решения различных задач [1–2]. Одним из главных применений лазерно-плазменных источников излучения является производство микроэлектроники, а именно процессы контроля качества и дефектоскопии [3, 4]. Важной характеристикой для таких применений является яркость плазмы, влияющая на чувствительность аппаратуры и скорость производства микросхем.

Авторами работы [2] было показано, что увеличение мощности лазерного излучения не всегда приводит к повышению яркости плазмы. Таким образом, актуальной задачей является разработка путей повышения эффективности лазерно-плазменных источников излучения.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СХЕМА

В работе была разработана оптическая схема (Рис.1) и экспериментальная установка на ее основе, позволяющие реализовать одно-, двух-, или трехлучевую схему поддержания ОР.

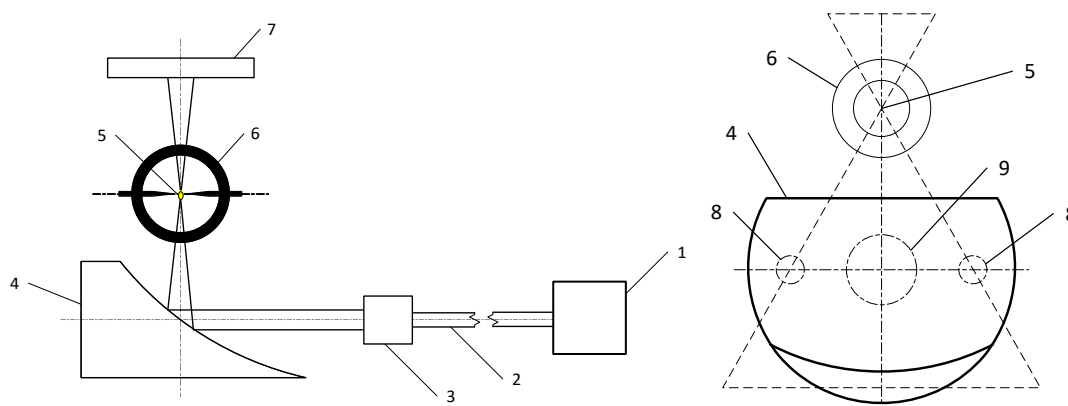


Рис. 1. Схема поддержания оптического разряда. 1 – лазер (лазеры), 2 – оптоволокно, 3 – коллиматор (коллиматоры), 4 – зеркало (внеосевой параболит), 5 – оптический разряд, 6 – кварцевая лампа, 7 – измеритель мощности, 8,9 – лучи лазеров.

В качестве источников излучения использовались 3 источника: лазер RAYCUS RFL-C1500 (с мощностью излучения от 15 до 1500 Вт, 1080 нм), лазер PLD-70 (60 Вт, 975 нм) и ДЛМ-30 (30 Вт, 970 нм). Схема управления излучением позволяла независимо управлять включением и мощностью каждого из лазеров. Излучение лазеров проходило через отдельные коллиматоры и фокусировалось параболитическим зеркалом (внеосевой

параболоид с фокусным расстоянием 20,3 мм, диаметр зеркала 38 мм) в кварцевой лампе с ксеноном (OSRAM XBO 100). Коллиматоры выставляются параллельно друг другу и оси зеркала (схема падения лучей на зеркало показана на Рис. 1).

Лампа располагается таким образом, чтобы сфокусированное излучение находилось между электродами. Самый простой способ поджига оптического разряда в данном случае – прикладывание импульса пробойного напряжения к электродам. Тем не менее возможен и поджиг импульсом мощного лазера. Вывод излучения плазмы для определения яркости осуществлялся с помощью линзы.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В работе была проведена серия экспериментов при суммарной лазерной мощности до 100 Вт в ходе которых измерялась яркость плазмы, а также проводилась фотосъемка плазмы (через экран). Лазерную плазму получали тремя способами: схема с фокусировкой единственного луча лазера через центральную область зеркала (классическая схема, которая рассматривалась в качестве базовой для сравнения), двухлучевая схема, в которой плазма поддерживается в зоне пересечения двух лучей, при этом фокусы лучей сводятся практически вместе, трехлучевая схема поддержания оптического разряда, которая является комбинацией первых двух схем.

Фотосъемка плазмы проводилась с разной выдержкой для каждого из экспериментов, а кадры в рамках одного эксперимента далее накладывались друг на друга (таким образом искусственно повышался динамический диапазон матрицы). После обработки суммированных изображений были получены распределение яркости в плазме (Рис. 2) и формы самой плазмы.

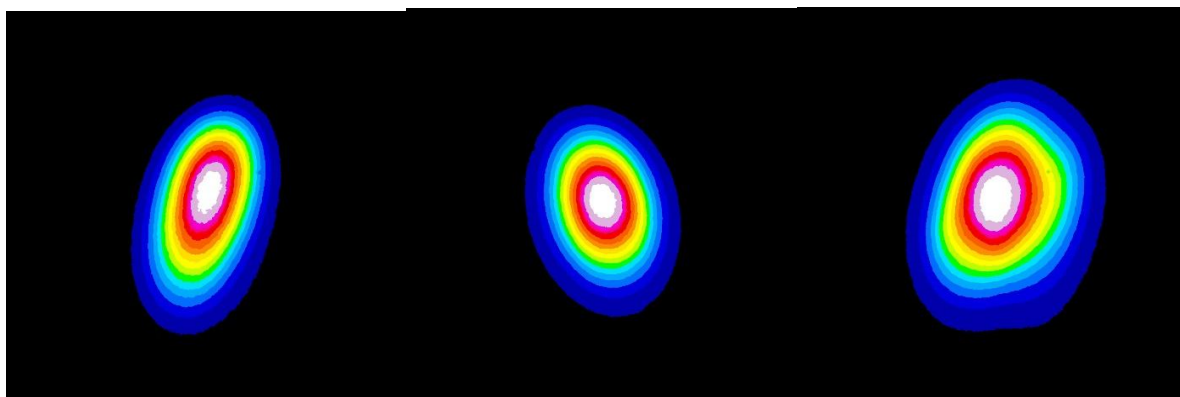


Рис. 2. Распределение яркости по сечению плазмы в разных схемах поддержания разряда (одно-, двух- и трехлучевой)

Яркость плазмы определялась путем измерения потока излучения в самом ярком месте увеличенного изображения плазмы разряда. Освещенность датчика, помещаемого в самой яркой части изображения плазмы, измерялась прокалиброванным спектрометром Ocean Optics HR4000-CG-UV-NIR в спектральном диапазоне 220-1020 нм. Для сравнения яркости в разных экспериментах был выбран спектральный диапазон 400-450 нм. Результаты всех экспериментов представлены на Рис. 3.



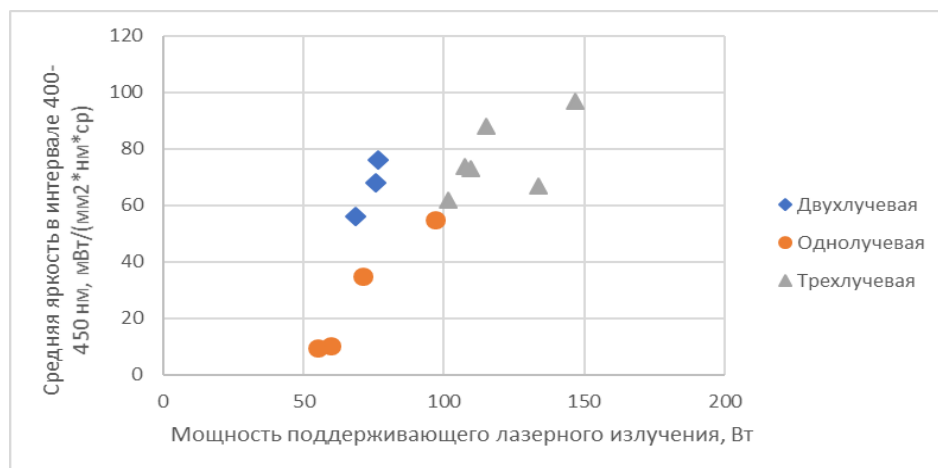


Рис. 3. Средняя яркость плазмы лазерного излучения при различных мощностях и схемах поддержания оптического разряда

## ВЫВОДЫ

Сравнение усредненной яркости плазмы позволяет определить наиболее эффективную схему поддержания ОР. Можно отметить, что двухлучевая схема позволяет получить более высокую яркость по сравнению с однолучевой (классической) при той же мощности лазерного излучения. При использовании трехлучевой схемы необходима большая лазерная мощность для достижения той же яркости, что при двухлучевой схеме. Результат можно объяснить увеличением плазмы в размерах (и уменьшением яркости) в случае с трехлучевой схемой поддержания (Рис.2), что соотносится с выводами авторов работы [2]. Результаты исследований применимы при разработке лазерно-плазменных источников излучения.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках государственного задания 124012500440-9. Часть оборудования для проведения исследований была приобретена за счет средств Фонда поддержки молодых ученых имени Геннадия Комиссарова (в рамках конкурса Молодые ученые 2.0).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Генералов Н.А., Зимаков В.П., Козлов Г.И., Масюков В.А., Райзер Ю.П. Экспериментальное исследование непрерывно горящего оптического разряда // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. В. 4(10). С. 1434–1446.
2. Зимаков В.П., Кузнецов В.А., Лаврентьев С.Ю., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Шилов А.О., Якимов М.Ю. Новые возможности применения оптических разрядов в аэрофизическом эксперименте // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17. В. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-2/articles/653/>
3. Huiling Zhu, Toru Fujinami, Xiaohua Ye, Don McDaniel, Deborah Gustafson. Laser-Driven Plasma Source Technology and Applications // Photon Sources for Lithography and Metrology (2023). <https://doi.org/10.1117/3.2638242.ch12>
4. KLA-Tencor. Defect Inspection and Review // <https://www.kla.com/products/chip-manufacturing/defect-inspection-review> (дата обращения к сайту 04.11.2025)

Лаврентьев Сергей Юрьевич, 1993serj@gmail.com  
 Якимов Михаил Юрьевич, yakimov@lantanlaser.ru  
 Соловьев Николай Германович, lantan.ltd@mail.ru



# О КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ В УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОГО СЖАТИЯ

Ж.В. Маленко<sup>1\*</sup>, А.А. Ярошенко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Морской институт имени вице-адмирала В.А. Корнилова - филиал «ГМУ имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», Севастополь

<sup>2</sup>Севастопольский государственный университет, Севастополь  
zhvla17@mail.ru

В северных регионах в зимний период многие реки, озера и моря покрываются льдом. Для продления навигации или раннего вскрытия рек и водоемов возникает необходимость разрушения ледяного покрова. Для этих целей, кроме различного рода ледокольных средств, используются суда на воздушной подушке (СВП), которые, двигаясь с определенной скоростью по поверхности ледяного покрова, вызывают в нем изгибно-гравитационные волны достаточной амплитуды для разрушения льда. Резонансный метод является одним из способов разрушения ледяного покрова СВП. В монографии [1] рассматриваются возможности резонансного метода разрушения ледяного покрова. В монографии [2] рассматриваются способы повышения эффективности резонансного метода разрушения ледяного покрова, реализуемого СВП и подводными судами, приведены описания устройств используемых для разрушения льда. В [3] представлен обзор теоретических и экспериментальных исследований за последние десятилетия, полученных российскими и зарубежными учеными. В частности, дан обзор работ, посвященных возбуждению изгибно-гравитационных волн при движении внешней нагрузки по безграничному ледяному покрову.

При движении по ледяному покрову транспортного средства или СВП важно знать значения критических скоростей, при которых меняется характер колебаний ледяного покрова, так как при движении с этими скоростями наиболее вероятно разрушение ледяного покрова.

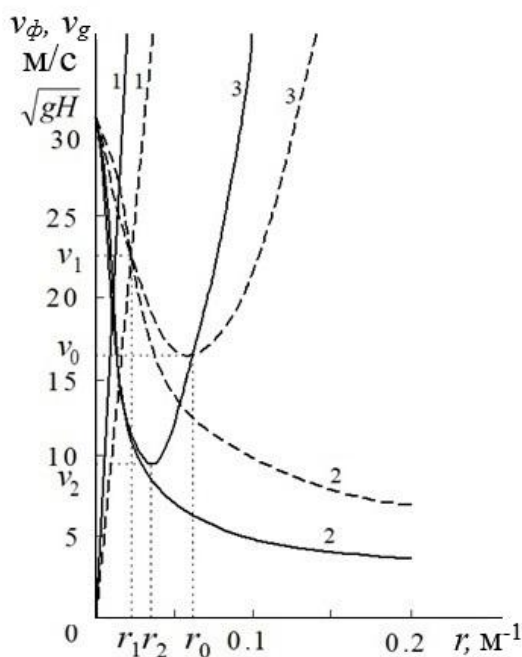


Рис. 1. Дисперсионные кривые фазовых и групповых скоростей волн для  $Q = 0$ ,  $h = 0,2$  м,  $H = 100$  м

На рис. 1 приведены графики фазовой (штриховые линии) и групповой (сплошные линии) скоростей волн. Линии 1 для упругих волн в пластине, линии 2 для гравитационных волн на чистой воде и линии 3 для изгибно-гравитационных волн в плавающей упругой пластине при отсутствии сил сжатия и растяжения ( $Q = 0$ ).

При движении нагрузки по ледяному покрову с постоянной скоростью имеются три критические скорости  $v_0$ ,  $v_1$ , и  $(gH)^{1/2}$  движения источника возмущений, при которых меняется характер волнового возмущения. Здесь (рис. 1):  $v_0$  – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны;  $v_1$  – скорость, при которой совпадают фазовая скорость упругой, гравитационной и изгибно-гравитационной волн;  $(gH)^{1/2}$  – максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

Если скорость движения источника  $v = v_0$ , то амплитуда волн, распространяющихся за источником, максимальна вдоль трассы его движения, а при  $v = v_1$  максимальна как справа, так и слева от трассы движения источника. При  $v = (gH)^{1/2}$  амплитуда волн уменьшается, причем за источником образуется зона, где волны не распространяются.

При увеличении сил сжатия уменьшается значение критической скорости  $v_0$  и при стремлении сил сжатия к значению  $2(D\rho g)^{1/2}$  значение этой скорости стремится к нулю. Значение критической скорости  $v_1$  уменьшается при увеличении сил сжатия, но при больших значениях сжимающих усилий  $Q_0 < Q < 2(D\rho g)^{1/2}$  увеличивается [4]. Здесь  $Q_0$  – значение сжимающего усилия, при котором минимальное значение групповой скорости изгибно-гравитационной волны равно нулю.

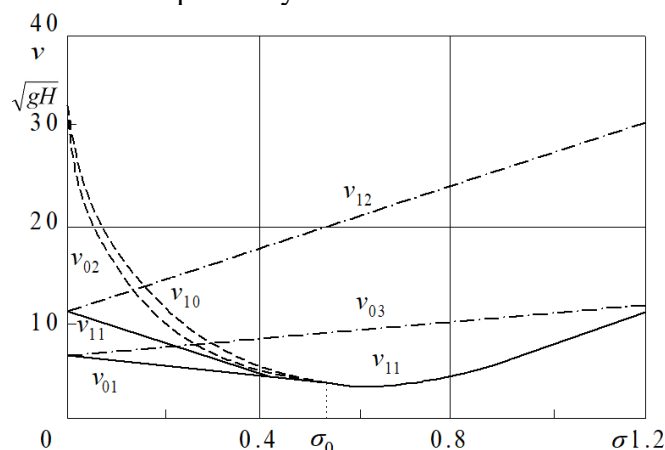


Рис. 2. Зависимость критических скоростей  $v_{ij}$  (м/с) от частоты колебаний источника  $\sigma$  ( $c^{-1}$ ) для  $Q = 0.5(D\rho g)^{1/2}$ , ( $0 < Q < Q_0$ )

При  $0 < Q < Q_0$  фазовые портреты образующихся волн такие же, как и при отсутствии сил сжатия ( $Q = 0$ ). При  $Q_0 < Q < 2(D\rho g)^{1/2}$  происходит наложение волн в волновом следе за источником [5].

При движении источника совершающего периодические колебания имеется шесть значений критических скоростей ( $v_{01}$ ,  $v_{02}$ ,  $v_{03}$ ,  $v_{10}$ ,  $v_{11}$ ,  $v_{12}$ ). На рис. 2 представлена зависимость критических скоростей от частоты колебаний источника. При этом в зависимости от частоты колебаний источника образуется от одной до семи систем изгибно-гравитационных волн [6].

На рис. 3 представлена зависимость критических скоростей от частоты колебаний источника для больших значений сжимающих усилий ( $Q_0 < Q < 2(D\rho g)^{1/2}$ ,  $Q = 1.9(D\rho g)^{1/2}$ ). Для данных значений сжимающих усилий имеется семь значений критических скоростей ( $v_{01}$ ,  $v_{02}$ ,  $v_{03}$ ,  $v_{10}$ ,  $v_{11}$ ,  $v_{12}$ ,  $v_{13}$ ). При частоте колебаний источника  $\sigma$  равной нулю  $v_{01} = v_{03} = v_0$ ,  $v_{11} = v_{12} = v_1$ ,  $v_{02} = v_{10} = (gH)^{1/2}$ .

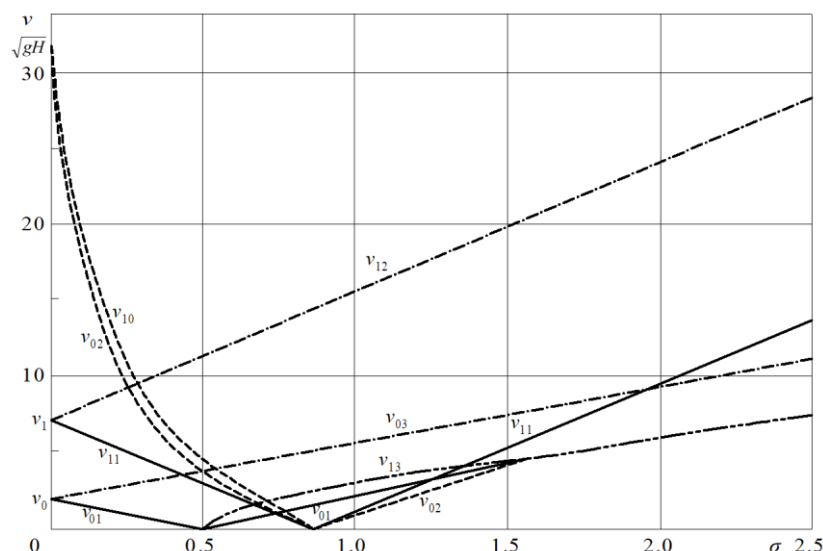


Рис. 3. Зависимость критических скоростей  $v_{ij}$  (м/с) от частоты колебаний источника  $\sigma$  ( $\text{с}^{-1}$ ) для  $Q = 1.9(D\rho g)^{1/2}$ ,  $(Q_0 < Q < 2(D\rho g)^{1/2})$

Как и в случае движения источника постоянной интенсивности для больших значений сжимающих усилий, так и при движении источника, совершающего периодические колебания, происходит наложение волн в волновом следе за источником возмущений.

Знание значений критических скоростей движения нагрузки по ледяному покрову необходимо, чтобы избежать разрушения льда при эксплуатации его в качестве ледовых дорог и переправ при доставке грузов. С другой стороны, для продления навигации на водных путях, необходимо знание критических скоростей при использовании судов на воздушной подушке для более эффективного разрушения ледяного покрова.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Академия Естествознания, 2007. 355 с.
2. Козин В.М., Земляк В.Л., Куркин А.А., Беяков В.В. Избранные задачи ледотехники. Средства и методы решения. Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2023. 772 с.
3. Стурова И.В, Ткачева Л.А. Поведение плавающего ледяного покрова под действием внешних нагрузок (обзор) // ПМТФ. 2025. № 3. С. 3-55.
4. Ярошенко А.А., Маленко Ж.В. Трехмерные изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове, вызванные движущимися источниками возмущений // Труды Крыловского государственного научного центра. 2024. Спец. вып. 1. С. 202–208.
5. Ярошенко А.А., Маленко Ж.В., Маркина Е.В., Костюкова Л.О., Бабилов И.И. Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. №3. С. 55–62.
6. Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. Изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове от движущихся периодически изменяющихся возмущений // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2024. № 3. С. 45–56.

Маленко Жанна Владимировна, zhvla17@mail.ru

Ярошенко Александр Александрович, yaroshenko.575@yandex.ru



# РЕЖИМЫ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В Т-ОБРАЗНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВСТРЕЧНО-ВРАЩАЮЩИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

А. Д. Мамыкин

Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь  
mad@icmm.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Контрвихревые течения – это специфический тип гидродинамических потоков, характеризующийся взаимодействием коаксиальных вихрей противоположной закрутки. Малораспространённые в природных явлениях, такие течения нашли своё применение в технической гидромеханике как средство рассеяния кинетической энергии высокоскоростного потока [1, 2]. В рамках данной работы мы рассматриваем генерацию посредством электромагнитных сил контрвихревого течения в жидком металле, заполняющем круглый Т-образный канал. Такая геометрия рабочей области обусловлена как фундаментальным, так и прикладными задачами магнитной гидродинамики (МГД). С практической точки зрения, она соответствует ковшу промежуточного литья, необходимому при процессе полунепрерывного литья стали. Перемешивание расплава в этом случае способствует повышению качества отливок и удалению нежелательных включений (шлаков, солей) из металла [3]. Другой важной прикладной задачей является перемешивание электродов жидкометаллических батарей для их регенерации [4, 5]. С фундаментальной точки зрения, рассматриваемая конфигурация позволяет изучать процессы возникновения природных макромасштабных атмосферных явлений в лабораторных условиях, используя МГД-модели торнадо [6–7].

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДЫ

Экспериментальная установка (рис. 1) включает в себя Т-образный канал 1 кругового сечения и пару коаксиально расположенных индукторов 2 и 3 вращающегося магнитного поля.

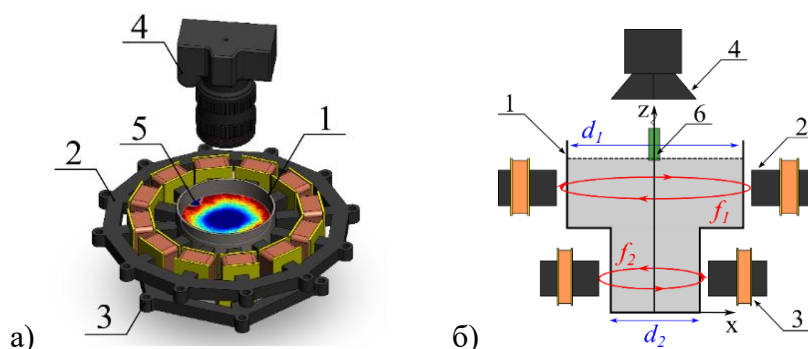


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1. канал, 2. верхний индуктор, 3. нижний индуктор, 4. камера, 5. поле скорости на поверхности металла, 6. датчик УДА:

а) 3D модель экспериментальной установки; б) схема в сечении

Канал состоит из двух коаксиальных сообщающихся отрезков трубопровода диаметрами 200 и 100 мм и нижней герметичной крышки, верхний торец канал открыт. Высоты секций ячейки одинаковы и равны 150 мм, но ячейка заполнена до уровня  $z = 250$  мм жидким галлиевым сплавом  $\text{Ga}_{86.3}\text{Zn}_{10.8}\text{Sn}_{2.9}$  (вес. %). Свободная поверхность

металла покрыта слоем раствора соляной кислоты и изопропилового спирта. Над каналом расположена камера 4, фиксирующая движение трекеров (пузырьков водорода) в тонком приповерхностном слое раствора с частотой 60 кадров/с. Для изучения структуры потоков в центре канала вертикально размещается датчик ультразвукового доплеровского анемометра 6 DOP 5000. Оптический метод измерений основан на корреляционном анализе пары последовательно полученных изображений. Полученная видеозапись движения пузырьковых трекеров на поверхности металла разбивается на отдельные кадры, и между парой последовательно идущих кадров проводился корреляционный анализ аналогичный методу PIV (рис. 2).

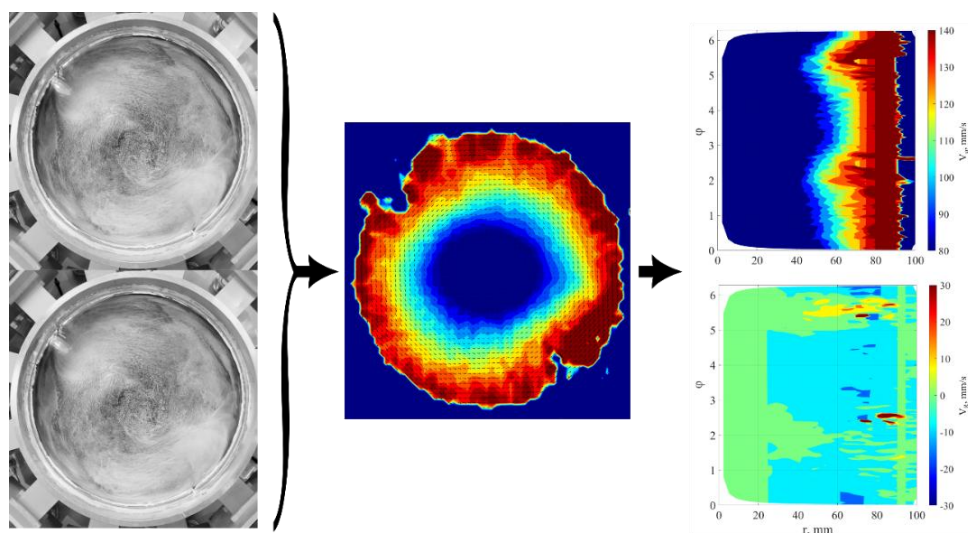


Рис. 2. Алгоритм обработки изображений: пара кадров, полученное поле скорости в декартовых координатах, поля компонент скорости в цилиндрических координатах.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Структура течений, возникающих в канале, зависит от соотношения приложенных к верхней и нижней частям канала сил  $f_1$  и  $f_2$ , соответственно. В качестве безразмерного критерия, характеризующего интенсивность силового воздействия, вводился электромагнитный аналог числа Тейлора  $Ta = \sigma B^2 \omega L^4 / 2\rho\nu^2$ , где  $\sigma$  – электропроводность среды,  $B$  – амплитуда индукции магнитного поля,  $\omega$  – частота магнитного поля,  $L$  – характерный размер,  $\rho$  – плотность металла и  $\nu$  – его кинематическая вязкость. Был изучен ряд характерных гидродинамических структур, возникающих в канале при различных соотношениях  $Ta_1$  и  $Ta_2$ , где нижний индекс соответствует кольцу индуктора, создающего соответствующую величину силового воздействия. Диапазон изменения чисел Тейлора составлял:  $0 \leq Ta_1 \leq 7 \cdot 10^{10}$ ,  $0 \leq Ta_2 \leq 7 \cdot 10^9$ .

В случае если силовое воздействие на жидкий металл происходит со стороны лишь верхнего индуктора ( $Ta_1 \neq 0, Ta_2 = 0$ ), в канале формируется крупномасштабное однородное вращение (рис. 3а). Оно происходит квази-твердотельным образом, радиальный профиль азимутальной компоненты скорости линейен вдоль всего радиуса канала. Максимальное значение азимутальной скорости достигает 200 мм/с. С увеличением силового воздействия, скорость течения возрастает, и свободная поверхность жидкости приобретает форму широкой воронки.

В случае приложения электромагнитного воздействия только к нижней части канала ( $Ta_1 = 0, Ta_2 \neq 0$ ), основное течение возникает в удаленной от свободной поверхности области. За счёт сил вязкого трения вращательный момент передаётся в верхнюю половину канала и вызывает вращательное движение в приповерхностных слоях. Из-за



увеличения диаметра верхней части канала, течение оказывается сосредоточено в центральной области цилиндра (рис. 3б). С увеличением величины силового воздействия, скорость течения возрастает, и свободная поверхность жидкости приобретает форму узкой глубокой воронки.

При соотношении чисел Тейлора  $Ta_1/Ta_2 \approx 30 - 50$  в канале реализуется режим вращения с ярко выраженным волновым движением в приповерхностном слое. В этом режиме взаимодействие противоположно направленных азимутальных потоков приводит к генерации в приповерхностном слое двойной гидродинамической структуры (локальные максимумы скорости), движущиеся по окружности со скоростью, превышающей скорость основного квазитвердотельного движения (рис. 3в).

При дальнейшем повышении параметра  $Ta_2$  реализуется нерегулярное течение сложной топологии. В промежуточных областях ( $10 < Ta_1/Ta_2 < 20$ ) соотношения силовых параметров баланс сил не позволяет развиваться устойчивому волновому движению, и в то же время ни одна из компонент сил  $f_1$  и  $f_2$  не оказывается достаточно сильна, чтобы создать однородное вращение. Таким образом, возникает режим, при котором поверхность металла не вовлечена в крупномасштабное движение, но на поверхности хаотическим образом возникают мелкомасштабные гидродинамические структуры ("бурление"). Возникают и затухают слабые волны, образуются вихри с временем жизни порядка нескольких секунд (рис. 3г). Важно, что поверхность металла остаётся невозмущенной даже при больших величинах  $Ta_1$  и  $Ta_2$ .

Дальнейшее повышение  $Ta_2$  приводит к затуханию "бурления" жидкости и образованию торнадоподобного вихря вблизи центральной оси канала. Режим наблюдается при  $5 < Ta_1/Ta_2 < 10$ . Насколько известно авторам, подобный режим ранее не был получен в экспериментальных работах с жидкими металлами. Ключевые особенности такого течения – это стабильность вихря и прецессия оси вращения (рис. 3д).

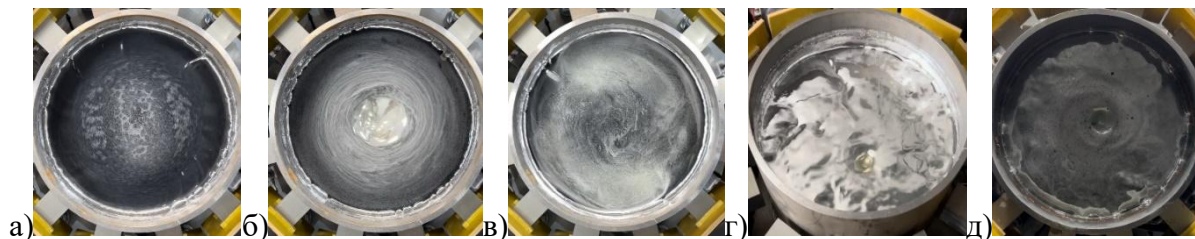


Рис. 3 Фотографии режимов: а) широкая воронка, б) узкая воронка, в) двойная структура, г) "бурление", д) торнадоподобный вихрь.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение №075-15-2024-535 от 23.04.2024).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lewke T., Le Dizes S., Williamson C.H.K.* Dynamics and instabilities of vortex pairs // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 48 (1). P. 507–541.
2. *Churin P., Kapustin S., Orekhov G., Poddaeva O.* Experimental studies of counter vortex flows modeling // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 756. P. 331–335.
3. *Sahai Y.* Tundish technology for casting clean steel: A review // *Metallurgical and Materials Transactions B*. 2016. Vol. 47 (4). P. 2095–2106.
4. *Kelley D.H., Sadoway D.R.* Mixing in a liquid metal electrode // *Physics of Fluids*. 2014. Vol. 26 (5).



5. Kelley D.H., Weier T. Fluid mechanics of liquid metal batteries // *Applied Mechanics Reviews*. 2018. Vol. 70 (2).
6. Vogt T., Grants V., Eckert S., Gergeth G. Spin-up of a magnetically driven tornado-like vortex // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 736. P. 614–662.
7. Grants I., Zhang C., Eckert S., Gerbeth G. Experimental observation of swirl accumulation in a magnetically driven flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2008. Vol. 616. P. 135–152.

Мамыкин Андрей Дмитриевич, mad@icmm.ru



## УПРАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЕМ ЖИДКОСТЕЙ ПЕРФУЗИОННОГО НАСОСА

А.Н.Маркин<sup>1\*</sup>, Л.Б. Рулева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБУЗ им.И.В. Давыдовского, Москва

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
markinalexandr@bk.ru

### ВВЕДЕНИЕ

Искусственное кровообращение связано со скоростью перфузии, осуществляемой перфузионным насосом. Серийно выпускаемые перфузионные насосы для перекачивания различных биологических жидкостей широко используют способ, в котором ролики пережимают эластичную трубку, внутри которой протекает, например, кровь. Это позволяет не контактировать жидкости с механическими или биологическими элементами насоса. Хирургическая практика связана с различными требованиями к протеканиям жидкостей. В норме, скорость течения крови, в зависимости от вязкости [1], составляет в артериях 30 — 50 см/с, в венах 15 — 20 см/с, в капиллярах — 0,5 мм/с. Для практического применения востребовано управление течением жидкости, перекачиваемой перфузионным насосом, при задании ему различных скоростных режимов, при коммутациях режимов (равномерный или импульсный), с требованием минимального времени переходных процессов [1—4]. В работе [1] исследуются два альтернативных режима объемного расхода перекачиваемой крови. В работе [4] показана оптимизация управления перфузионным насосом, которая строится на формировании желаемых амплитудно—частотных характеристик.

В данной работе желаемые характеристики динамики перфузионного насоса построены по теории модального управления и наблюдающих устройств [5].

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Управление течением жидкости предполагает режимы: апериодический для контроля заданной скорости или колебательный при коммутациях в перфузионном насосе. Выражение колебательного процесса, например, как и в работе [4], запишем в виде:

$$m_0 \ddot{X}_0 + n_0 \dot{X}_0 + c_0 X_0 = F_0, \quad (1)$$

где  $X_0$  — координата перемещения;  $m_0$  — масса ролика перфузионного насоса;  $n_0$  — коэффициент демпфирования;  $c_0$  — коэффициент жесткости;  $F_0$  — центробежная сила, развиваемая насосом. Точка над параметрами обозначает символ дифференцирования.

Приведенный вид выражения (1), после деления на массу, ролика имеет вид:

$$\ddot{X} + n\dot{X} + cX = F \quad (2)$$

Применим метод наблюдающих устройств [5] в векторно-матричной форме [5,6]. Обозначим переменные:  $X1$  – перемещение,  $X2$  – скорость течения крови реального перфузионного насоса; а через  $X3$  – перемещение,  $X4$  – скорость и  $X5$  – толкающую силу, как оценку параметров наблюдающим устройством. Слежение выполним по переменной скорости с коэффициентами  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  наблюдающего устройства, а управление по переменным перемещения  $X3$  и скорости  $X4$  с соответствующими коэффициентами  $p_1$  и  $p_2$ .

Система уравнений собственного движения ролика под действием силы, без управления и наблюдающего устройства в форме Коши, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}1 &= X2 \\ \dot{X}2 &= F - nX2 - cX1 \end{aligned} \quad (3)$$

Новая система включает уравнения собственного движения с управляющим воздействием по переменным  $X3$  и  $X4$  и уравнения наблюдающего устройства с наблюдением по переменной скорости:

$$\begin{aligned} \dot{X}1 &= X2 \\ \dot{X}2 &= F - nX2 - cX1 - p_1X3 - p_2X4 \\ \dot{X}3 &= X4 + k_1(X4 - X2) \\ \dot{X}4 &= X5 - nX4 - cX3 - p_1X3 - p_2X4 + k_2(X4 - X2) \\ \dot{X}5 &= k_3(X4 - X2) \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты наблюдающего устройства  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  вычисляются из полинома матрицы наблюдения путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях и сравнении с известными системами, обладающими хорошими динамическими свойствами [4]. Коэффициенты управления  $p_1$  и  $p_2$  выбираются из соображений придания динамической системе желаемых свойств, например, по биномиальным формам [5]. Постоянная времени для выражения (4) выбирается более низкой, а собственная частота выбирается более высокой, чем в (3), например, как в [6]. Если моделируется не колебательный, а апериодический процесс, то определение коэффициента  $p_1$  не требуется.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем примеры условного моделирования выражений (3) и (4). Пусть скорость течения крови в артерии, измеренная датчиком скорости (доплеровская флоуметрия) равна 50 см/с, максимальная скорость перфузионного насоса составляет 600 об/мин. Пусть  $F = 11.83 \text{ сН}$ ;  $n = 25.12 \text{ сНс/см}$ ;  $c = 4000.0 \text{ сН/см}$ .

При расчете коэффициентов наблюдающего устройства и управления, как и в работе [6], постоянная времени задавалась в диапазоне 0,05с–0,01 с, а собственная частота до 100 рад/с.

Переменная перемещения  $X1$  по выражению (3) показана на рис.1а, и эта же переменная, при наблюдении и управлении, по выражению (4), обозначенная с индексом «н», т.е.  $X1н$ , приведена на рис.1б. На рис. 2а показана переменная скорости  $X2$  без наблюдения и управления, а на рис.2б приведена переменная скорости  $X2н$  при действии наблюдающего устройства и управления.

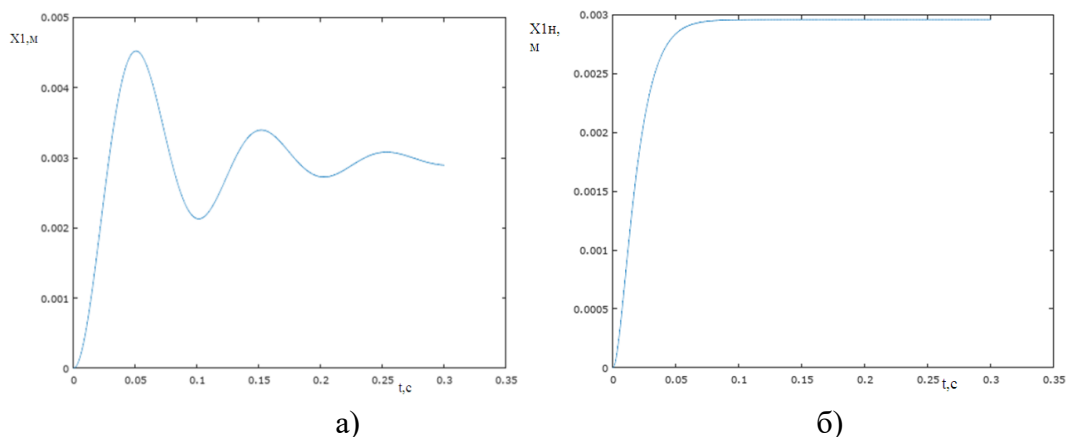


Рис.1. Координата по перемещению до и после оптимизации.

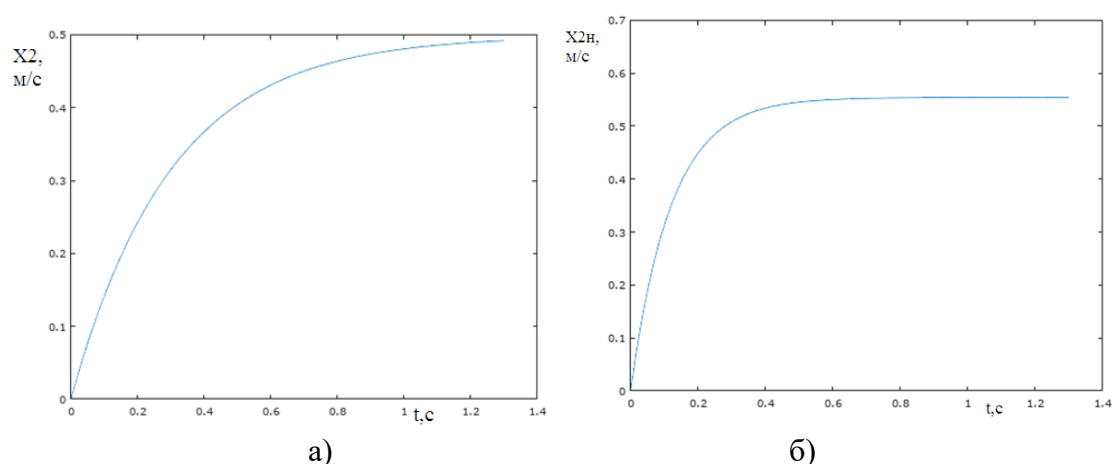


Рис.2. Координата по скорости течения до и после оптимизации

Амплитуда переменной перемещения при коммутации снизилась в 1,5 раза, а время переходного процесса уменьшилось в 3 раза. Время переходного процесса по переменной скорости снизилось в 3 раза, с 1,4с до 0,5с.

## ВЫВОДЫ

Математическое моделирование при слежении за скоростью течения жидкости выявило, что управление перфузионным насосом способом модального управления [5] позволяет существенно стабилизировать поток, исключить резкую динамику, снизить время переходных процессов при коммутациях режимов работы.

Математическая модель наблюдающего устройства с управлением, по выражению (4) может быть внедрена в алгоритм управления компьютером для перфузионного насоса. Также она может быть выполнена на базе электронных компонентов, включающих усилители, сумматоры и интеграторы, как отдельный электронный блок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лёнькин А.И и др. Выбор оптимальной объемной скорости перфузии при хирургической коррекции приобретенных комбинированных пороков сердца//Анестезиология и реаниматология. М.: Медиа Сфера. 2013. № 3. С. 4–8 .
2. Ясюкевич Д. О. Гидродинамические процессы в медицинских устройствах для насыщения крови кислородом//Математическое моделирование. Math–Net. Ru. 2008.

3. Доль А.В., Гуляев Ю.П., Иванов Д.В. Математические модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками// Успехи современного естествознания. 2014. № 9-1. С. 79–84.
4. Эйсмонт Д.В. Система управления искусственным кровообращением с адаптацией по форме перфузионного импульса //Научно–технические ведомости СПбПУ. 2011. №2. С. 63–67.
5. Кузовков Н.Т Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение. 1976. 184 с.
6. Рулева Л. Б. Применение метода наблюдающих устройств для гироскопических измерителей//Физико–химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т. 9. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010–9/articles/153/>

Маркин Александр Николаевич, markinalexandr@bk.ru  
 Рулева Лариса Борисовна, ruleva@ipmnet.ru

— ♦ ♦ ♦ —

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЯ В ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

П.В. Матюшин

Институт Автоматизации Проектирования РАН, Москва  
 pmatyushin@mail.ru

Математическое определение вихревой области в *пространственных* течениях жидкости и газа является очень важной задачей гидрогазодинамики, которая еще окончательно не решена. Проблема состоит в том, чтобы идентифицировать в этих течениях не только все большие (сильные) вихри, но и все маленькие (слабые) вихри. Сегодняшнее решение этой проблемы позволило корректно визуализировать рассчитанные трехмерные поля векторов скоростей, чтобы понять механизмы формирования вихрей и их дальнейшую динамику. В частности, позволило визуализировать вихревую структуру течения поздней стадии ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на поверхностях сферы (рис. 1а) [1] и пластины (рис. 2) [2].

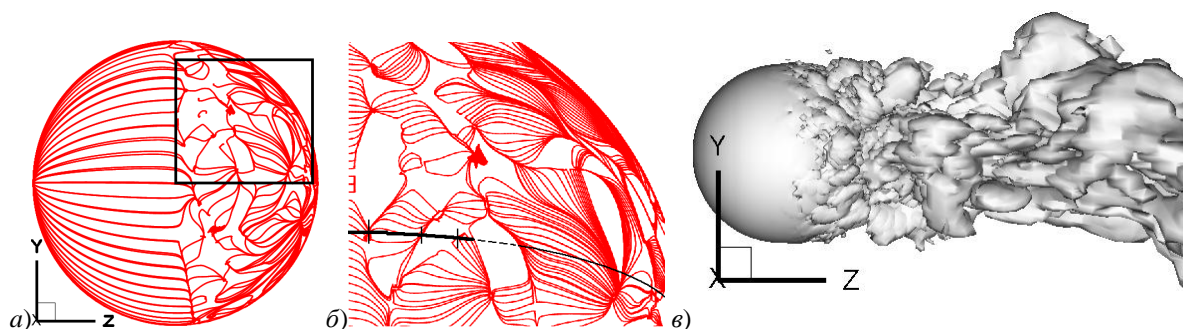


Рис. 1. Течение однородной вязкой жидкости около сферы с диаметром  $d$  при  $Re = 4.1 \cdot 10^5$  (после ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое):  
 а-б) линии трения на сфере в СК2 $\phi$ ; в) вихревая структура – изоповерхность  $\beta = 0.02$  [1].

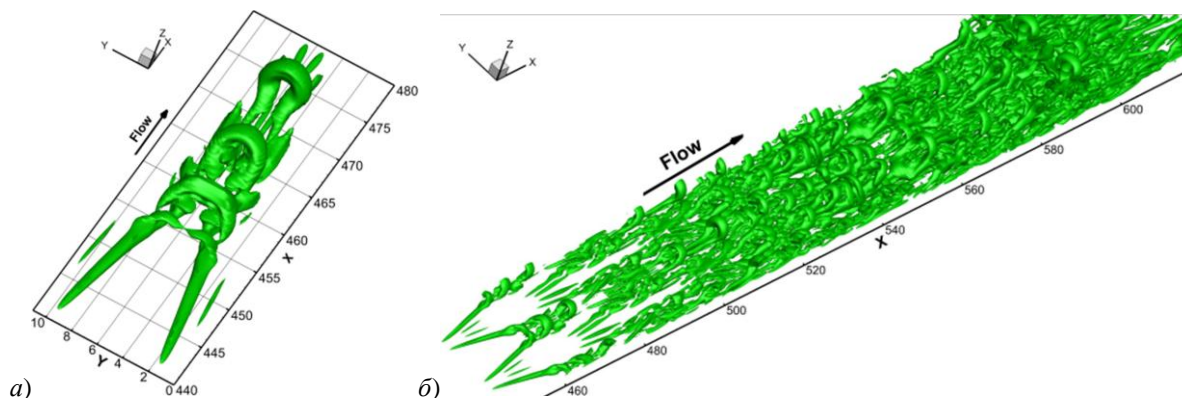


Рис. 2. Вихревые петли в виде шпилек для волос на пластине после ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое (изоповерхность  $|\mathbf{Liu}| = 0.075$ ): а-б – рис. 11b и 14 из [2].

Рассмотрим, как изменялось математическое определение вихревой области в *пространственных* течениях жидкости и газа с 19 по 21 век на примере задачи о равномерном движении тела с характерным вертикальным размером  $d$  в горизонтальном направлении справа налево со скоростью  $U$  в покоящейся несжимаемой вязкой жидкости. Вспомним сначала о векторе  $\boldsymbol{\omega}$  завихренности (1858 г.), потом перейдем к процедуре нахождения собственных значений тензора  $\mathbf{G}$  градиента скорости, которая привела к  $\beta$ -и  $Q$ -определениям вихря (рис. 1в). Потом будет дано  $\mathbf{Liu}$ -определение вихря [2-3] (2018-19 гг.) (рис. 2). Идея авторов статей [2-3] состоит в удалении сдвигового течения из вращательного течения сплошной среды (рис. 3). И завершим  $\lambda_2$ -определением вихря (1995 г.), выведенным из продифференцированного уравнения Навье-Стокса для однородной по плотности несжимаемой вязкой жидкости.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЯ ПРИ ПОМОЩИ ЗАВИХРЕННОСТИ $\boldsymbol{\omega}$

Герман Людвиг Фердинанд фон Гельмгольц (1821–1894), размышляя о смерчах и других подобных явлениях природы, в 1858 году ввёл определения вектора  $\boldsymbol{\omega}$  завихренности и циркуляции (интенсивности)  $\Gamma$  вихревой трубки (без множителя  $1/2$ )

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{2} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{c} \quad \xrightarrow{S \rightarrow 0} \quad \omega_z \cdot \pi \cdot r^2 = v \cdot 2\pi \cdot r/2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_z = \frac{v}{r}$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности  $S$ , являющейся сечением вихревой трубки с элементом поверхности  $dS$ ,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости сплошной среды на замкнутом контуре  $C$ , который является границей области  $S$ ;  $u, v, w$  – компоненты  $\mathbf{v}$  в цилиндрической системе координат  $(Z, r, \varphi)$ . Направления векторов  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  согласуются правилом правой руки (буравчика). При  $S \rightarrow 0$ :  $\omega$  – это угловая скорость вращения среды вокруг оси  $z$ .

Герман Людвиг Фердинанд фон Гельмгольц в 1858 году сформулировал следующие три теоремы, которые применимы к невязким течениям.

**Теорема 1.** Интенсивность вихревой трубки не меняется со временем.

**Теорема 2.** Вихревые трубки двигаются вместе со сплошной средой, простираются до бесконечности или начинаться/заканчиваться на твердых границах.

**Теорема 3.** Элементы сплошной среды изначально свободные от завихренности, остаются таковыми.

Вязкость среды приводит к медленному уменьшению  $\Gamma$  со временем.

Уильям Кингдон Клиффорд в 1878 году ввел в математику современный термин ротор ( $\text{rot}$ ):  $\boldsymbol{\omega} = 0.5 \cdot \text{rot } \mathbf{v}$ .

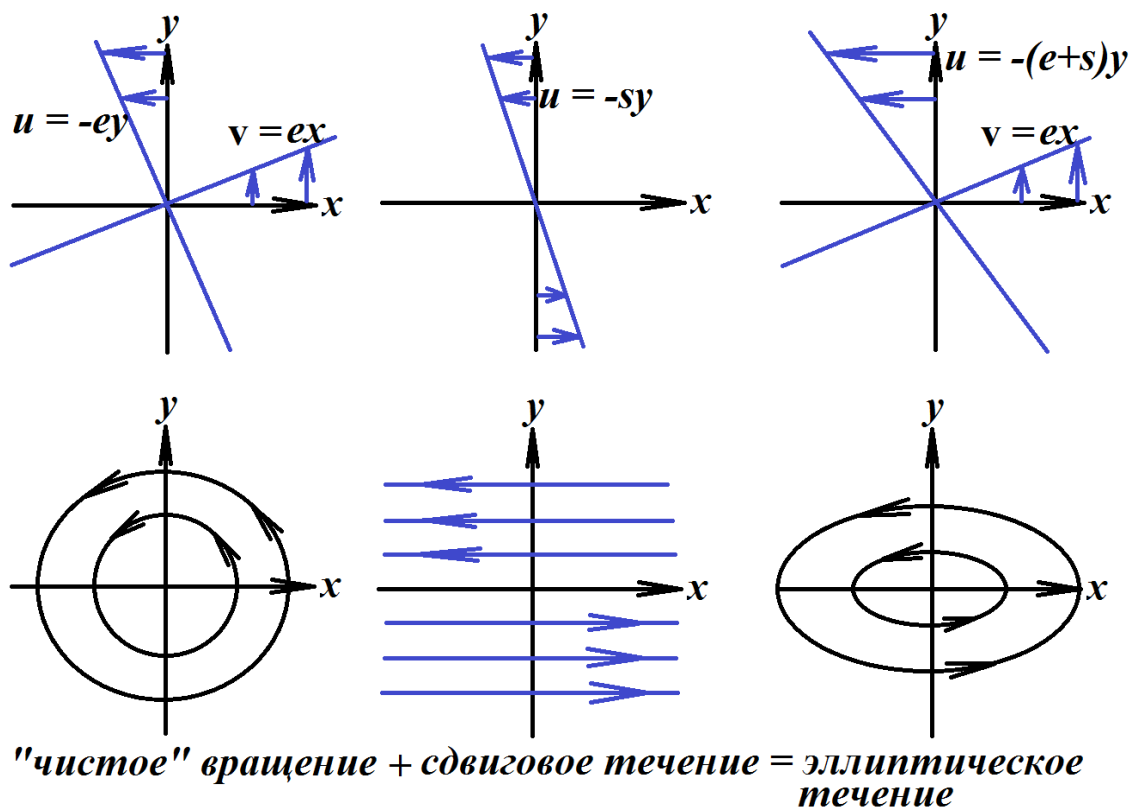


Рис. 3. Схематическое представление составляющих эллиптического течения сплошной среды, перерисованное с рис. 7 из [3].

Введем декартову систему координат  $(x, y, z)$  (**СК1**), начало которой связано с геометрическим центром тела при его старте, где ось  $x$  – совпадает с линией движения тела, ось  $y$  – вертикальна, ось  $z$  – перпендикулярна плоскости  $(x, y)$ . Если точки сплошной среды равномерно двигаются в плоскости  $(x, y)$  по окружностям вокруг начала **СК1** против часовой стрелки с  $u = -e \cdot y$  и  $v = e \cdot x$ ,  $e > 0$  (рис. 3, слева) («чистое» вращение), то

$$\omega = \omega_z = \frac{1}{2}(\text{rot } \vec{v})_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(e + e) = e.$$

Определение вихревой области  $|\omega| > 0$ : «Все точки течения жидкости и газа, в которых  $|\omega| > 0$ , составляют вихревую область течения  $|\omega| > 0$ ».

На рис. 4а, з приведен пример этой вихревой области для однородной по плотности несжимаемой вязкой жидкости около прямоугольника с диаметром  $d$  и длиной  $L = 20 \cdot d$  для числа Рейнольдса  $Re = U \cdot d / \nu = 50$ , где  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

На практике можно уточнить это определение вихревой области при помощи замены условия  $|\omega| > 0$  на  $|\omega| \geq \omega_{\max} \cdot 10^{-5}$  (на рис. 4а  $\omega_{\max} = 12.5$  и изолиния  $|\omega| = 1.25 \cdot 10^{-4}$  будет границей вихревой области). Для того, чтобы увидеть сердцевину вихревой области в трехмерном случае строится изоповерхность  $|\omega| = k \cdot \omega_{\max}$ , где значение числа  $0.1 < k < 0.9$  зависит от конкретной задачи.



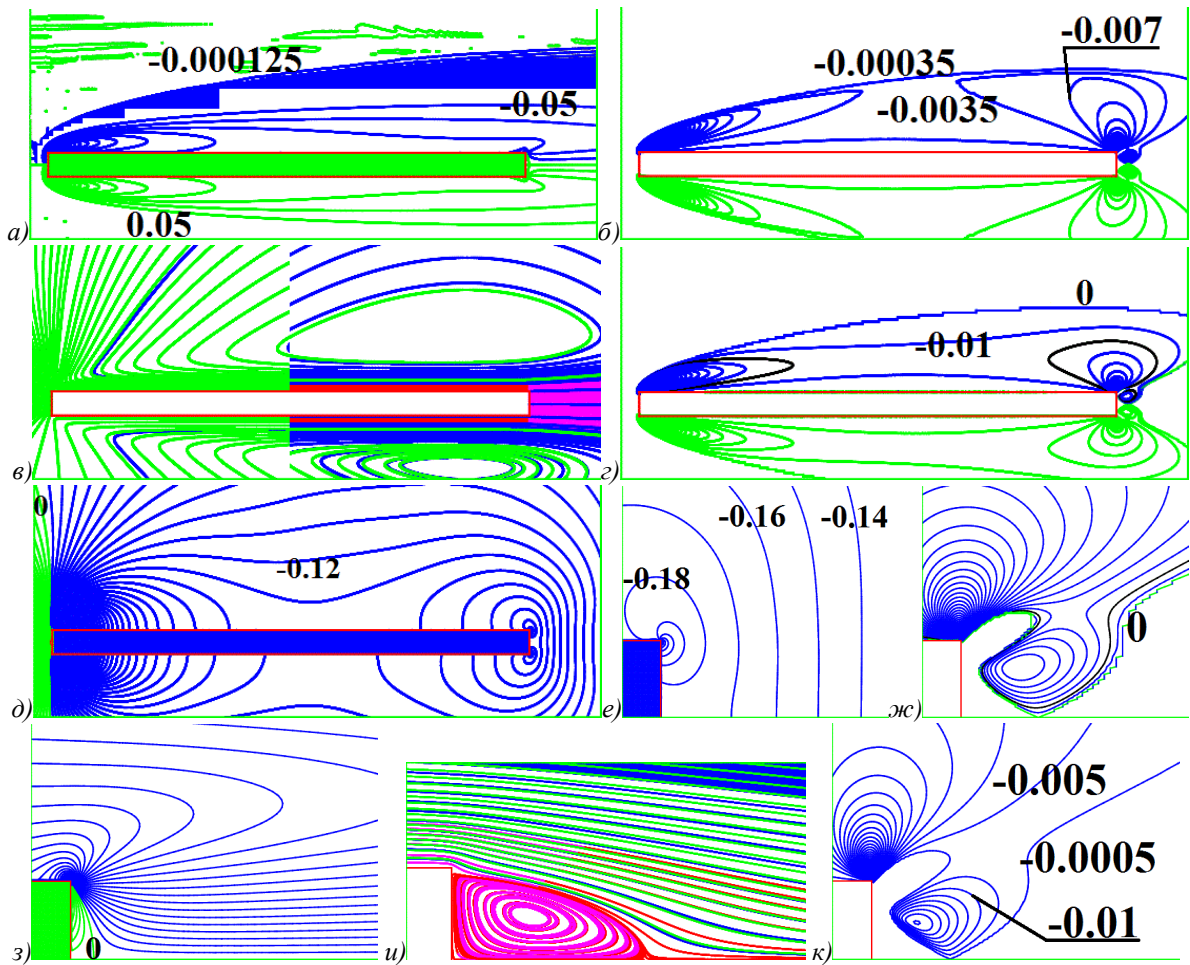


Рис. 4. Течение однородной вязкой жидкости около прямоугольника с диаметром  $d$  и длиной  $L = 20 \cdot d$  при  $T = 0.12$ ,  $Re = 50$ ,  $Fr = 100$ ,  $T_b = 5.236$  с,  $d = 0.65$  мм: а–б, г–з, к – изолинии  $\omega$  с шагами  $0.05$  и  $1.25 \cdot 10^{-4}$  (вверху) (а) и  $0.01$  (з),  $Li_u$  с шагами  $3.5 \cdot 10^{-3}$  (б) и  $5 \cdot 10^{-3}$  (к),  $\beta$  с шагами  $0.01$  (г) и  $0.005$  (ж), давления  $p$  с шагом  $0.01$  (д–е); в, и – мгновенные линии тока в системах координат, связанных с жидкостью **СК1** (в) и с телом **СК2** (и). Отрицательные изолинии показаны синим цветом.  $\omega_{\max} = 12.5$ ,  $Li_{u\max} = 9.22$ ,  $\beta_{\max} = 6.77$ ,  $p_{\max} = 1.05$ ,  $p_{\min} = -1.71$ .

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Для математического моделирования течений однородной по плотности несжимаемой вязкой жидкости на рис. 1 и 4 была решена более общая задача для течений стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости (подсоленной воды). Решается безразмерная система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска [4], записанная в декартовой системе координат  $(X, Y, Z)$  (**СК2**), начало которой связано с центром прямоугольника. Эта задача характеризуется четырьмя параметрами:  $T_b$  – период плавучести жидкости,  $Re$ ,  $Fr = U \cdot T_b / (2\pi \cdot d)$  – внутреннее число Фруда,  $Sc = \nu / \kappa = 709.2$  – число Шмидта, где  $\kappa$  – коэффициент диффузии соли [5]. При  $Fr \geq 20$  эта более общая задача сводится моделированию течения однородной по плотности несжимаемой вязкой жидкости (рис. 4,  $Re = 50$ ,  $Fr = 100$ ). Пусть  $X$  и  $Y$  безразмерены на  $0.5 \cdot d$ , время  $T$  – на  $T_b$ , скорость  $v$  на  $U$ , тогда  $\omega$  будет безразмерена на  $2U/d$ . Для решения задачи на рис. 4 расчеты проводились на вычислительных ресурсах Центра коллективного пользования (ЦКП) ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на расчетной сетке  $[3000 \times 700]$ , которая занимает область  $[-148 < X < 509, -148 < Y < 148]$ .



## 2D ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИХРЯ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИЙ БЕТА И ЛИУ

Пусть  $\beta$  – это мнимая часть комплексно-сопряженных собственных значений тензора градиента скорости  $\mathbf{G}$ .

2D определение вихревой области  $\beta > 0$ : «Все точки течения жидкости и газа, в которых  $\beta > 0$ , составляют вихревую область течения  $\beta > 0$ » [6].

$\beta_+ = \beta \cdot \text{sign}(\omega)$ ,  $\text{sign}(\omega) = 1$  при  $\omega \geq 0$ ,  $\text{sign}(\omega) = -1$  при  $\omega < 0$  [5] (рис. 4г, жс).

Нулевая изолиния на рис. 4г, жс соответствует значениям  $10^{-8} < \beta \equiv |\beta_+| < 10^{-7}$ . Если  $0 \leq \beta \leq 10^{-8}$ , то функции  $\beta$  присваивается значение  $-0.01$ .

Рассмотрим двумерное движение точек сплошной среды по квазиэллиптическим орбитам вокруг начала **СК1** против часовой стрелки:  $u = -(e + s) \cdot y$  и  $v = e \cdot x$ , где  $e > 0$ ,  $s > 0$  (рис. 3, справа), тогда угловая скорость вращения среды  $\Omega = \dot{\theta}$  меняется со временем от  $\Omega_{\min} = e$  до  $\Omega_{\max} = e + s$ .  $\Omega_{\min}$  лежит на оси  $x$ , а  $\Omega_{\max}$  – на оси  $y$ .

$$\omega = 0.5(\partial v / \partial x - (\partial u / \partial y)) = 0.5(e + (e + s)) = e + 0.5s = 0.5(\Omega_{\max} + \Omega_{\min}),$$

то есть  $\omega$  – это средняя арифметическая угловая скорость,  $\Omega_{\min} = \omega - 0.5s$ ,

$$\Omega_{\max} = \omega + 0.5s, A = 0.5 \cdot (\Omega_{\max} - \Omega_{\min}) = 0.5s \text{ – амплитуда колебаний } \Omega.$$

Вращательное течение на рис. 3 (справа) можно представить в виде суммы «чистого» вращения с  $u = -e \cdot y$  и  $v = e \cdot x$  (рис. 3, слева) и сдвигового течения вдоль оси  $x$  с  $u = -s \cdot y$  и  $v = 0$  (рис. 3, посередине) [3]. *Идея авторов статей [2-3] состоит в удалении сдвигового течения из вращательного течения сплошной среды.* То есть, вращение среды в правой части рис. 3 заменяется «чистым» вращением среды в левой части рис. 3. Удвоенная частота этого «чистого» вращения присваивается функции  $Liu$ :

$$Liu = 2 \cdot \Omega_{\min} = 2 \cdot \left( \omega \mp \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \right), \quad \text{"-" при } \omega > 0, \quad \text{"+" при } \omega < 0 \text{ [3]}. \quad (1)$$

В [3] найдено, что  $\beta = \sqrt{\Omega_{\min} \cdot \Omega_{\max}}$ , то есть  $\beta$  – это средняя геометрическая (или пропорциональная) угловая скорость вращением среды,

$$\begin{aligned} \omega^2 - \beta^2 &= 0.25 \cdot (\Omega_{\min}^2 + 2\Omega_{\min} \cdot \Omega_{\max} + \Omega_{\max}^2) - \Omega_{\min} \cdot \Omega_{\max} = \\ &= 0.25 \cdot (\Omega_{\min}^2 - 2\Omega_{\min} \cdot \Omega_{\max} + \Omega_{\max}^2) = 0.25 \cdot (\Omega_{\max} - \Omega_{\min})^2 = A^2 \geq 0. \end{aligned}$$

То есть,  $|\omega| \geq \beta$ , поэтому  $Liu$  – действительное число.

В начале **СК1** в правой части рис. 3 –  $Liu = 2 \cdot \Omega_{\min} = 2e$ .

2D определение вихревой области  $Liu$ : «Все точки течения жидкости и газа, в которых  $\beta > 0$ , составляют вихревую область течения  $Liu$ . Для визуализации вихревых структур в этой области строятся изолинии функции  $Liu$  (рис. 4б, к)».

То есть, границы вихревых областей  $\beta$  ( $\beta = 0$ ) и  $Liu$  ( $Liu = 0$ ) совпадают.

Над центром тела на рис. 4а-д, очевидно, есть сдвиговое течение, на рис. 4г –  $|\beta_+|/\beta_{\max} < 3 \cdot 10^{-3}$ , на рис. 4б –  $|Liu|/Liu_{\max} < 3.8 \cdot 10^{-4}$ . То есть, сдвиговое течение над центром тела было удалено на рис. 4б. Так как,  $\beta > 0$ , то изолиния  $Liu = 0$  отсутствует в картине вихревой области  $Liu$  на рис. 5в, что уменьшает площадь этой области. Для того, чтобы картины изолиний  $Liu$  показывали примерную границу вихревой области  $\beta > 0$ , были введены две дополнительные изолинии  $Liu_{\pm} = \pm 0.1 \cdot \delta Liu$ , где  $\delta Liu$  – шаг изолиний. Например, изолинии  $Liu_{\pm} = \pm 3.5 \cdot 10^{-4} = \pm 3.8 \cdot 10^{-5} \cdot Liu_{\max}$  на рис. 4б с точностью до 1 пикселя совпадают с границами области  $Liu$  (изолиниями  $Liu_{\text{гр}} = \pm 10^{-5} \cdot Liu_{\max}$ ).

Мы знаем, что на эллиптической траектории частиц сплошной среды в правой части рис. 3 по два раза попадают точки с  $\Omega_{\min}$  и с  $\Omega_{\max}$ . Опираясь на эти знания, напомним уравнение (2) для угловой скорости

$$\Omega = \dot{\theta} = 0.5s \cdot \sin(2\theta - 0.5\pi) + \omega, \quad \text{где } \theta \text{ отсчитывается от оси } x. \quad (2)$$

И, правда, если подставить в это уравнение  $\theta = 0, \pi/4$  и  $\pi/2$ , то мы получим значения  $\Omega = (\omega - 0.5s) = \Omega_{\min}$ ,  $\omega$  и  $(\omega + 0.5s) = \Omega_{\max}$ , которые согласуются с угловыми скоростями в правой части рис. 3.

На рис. 4а-д при  $y > 1$  в картинах изолиний  $\omega$ ,  $Liu$ ,  $\beta$ +, давления  $p$  и мгновенных линий тока в **СК1**, связанной с жидкостью, можно выделить вихревую оболочку прямоугольника. Это упомянутый выше большой вихрь в рассматриваемой задаче. Но упомянутый выше малый вихрь (рециркуляционная зона R за тыльной стороной прямоугольника) идентифицируется только в картинах изолиний  $Liu$  и  $\beta$  (рис. 4б, г) и мгновенных линий тока в **СК2**, связанной с телом (рис. 4и). То есть, изолинии  $\omega$  и  $p$  не способны визуализировать зону R. В то время как, изолинии функций  $Liu$  и  $\beta$  показывают как большой вихрь над телом, так и маленький вихрь R в следе за телом. Центры  $O_{Liu}$ ,  $O_{ток}$ ,  $O_\beta$ , вихря R на рис. 4к, и, ж расположены в точках  $(X, Y) = (20.56, 0.47)$ ,  $(20.85, 0.47)$ ,  $(20.78, 0.65)$ , соответственно. То есть, точки  $O_{ток}$  и  $O_{Liu}$  находятся на одном уровне  $y = 0.47$ . Расстояния между  $O_{Liu}$  и  $O_{ток}$ ,  $O_{ток}$  и  $O_\beta$ ,  $O_\beta$  и  $O_{Liu}$ , равно 0.29, 0.19, 0.28, соответственно. То есть,  $O_\beta$  – ближе к  $O_{ток}$ , чем  $O_{Liu}$  к  $O_{ток}$ . На рис. 4г граница  $\beta$ -области показана изолинией  $\beta = 0$ . Таким образом, при  $X > 23$   $\omega$ -визуализация (рис. 4а) сильно переоценивает размеры вихревой области, по сравнению с  $Liu$ - и  $\beta$ -визуализациями (рис. 4б, г).

В задаче о равномерном движении квадратного цилиндра вдоль оси  $x$  справа налево в покоящейся стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости (*подсолненной воде*) из-за гравитационной неустойчивости происходит периодический процесс формирования гравитационных внутренних полуволокн над точкой старта тыльной стороны цилиндра [5]. Сгенерированные полуволокны равномерно двигаются за цилиндром, как вагоны за паровозом. Каждая внутренняя полуволна представляет собой совокупность нескольких вихревых ячеек. В этой задаче при умеренных числах  $Re$   $\beta$ - и  $Liu$ -визуализации очень мало отличаются друг от друга (рис. 5б-в для  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ), следовательно, сдвиговая компонента течения здесь очень мала.

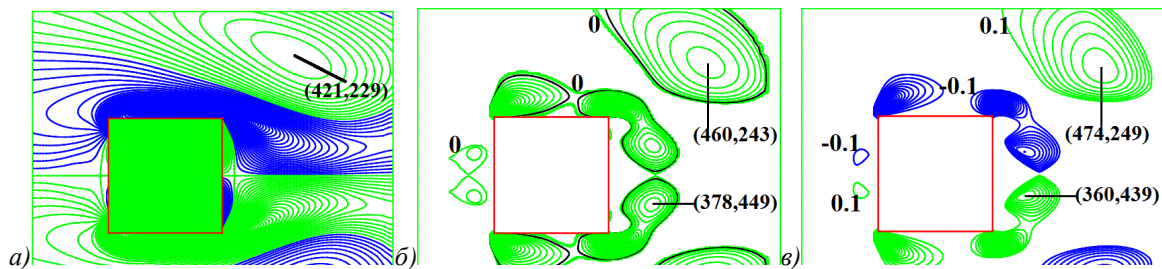


Рис. 5. Установившееся течение около квадратного цилиндра ( $d = 170$  пикс.) при  $T = 179.85 \cdot T_b$ ,  $Re = 50$ ,  $Fr = 0.3$ ,  $T_b = 2\pi$  с: изолинии  $\omega$  (а),  $\beta > 0$  (б) и  $Liu$  (в) с шагом 0.1.  $\omega_{max} = 1.075$ ;  $\beta_{max} = 0.84$ ;  $Liu_{max} = 0.83$ . Указаны координаты центров вихрей в пикселях. Синим цветом помечены отрицательные изолинии  $\omega$  и  $Liu$ .

В то время как, картина изолиний  $\omega$  на рис. 5а сильнее отличается от  $\beta$ - и  $Liu$ -визуализаций. На рис. 5 локальные максимумы функций  $\omega$  и  $\beta$ ,  $\beta$  и  $Liu$  в первой полуволокне впадин отстоят друг от друга на  $0.24 \cdot d$  и  $0.09 \cdot d$ , соответственно.

### 3D ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИХРЯ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИЙ БЕТА и ЛИУ

Почему появились  $\beta$ -,  $Liu$ -,  $Q$ - и  $\lambda_2$ -определение вихря? Дело в том, что если в 2D случае при помощи мгновенных линий тока можно было увидеть малые вихри течения (рис. 4и), то в трехмерном (3D) случае при помощи линий тока очень трудоёмко идентифицировать малые вихри, находящиеся вне тела, так как нужно многократно аккуратно определять начальные точки для линий тока. Развитие вычислительной техники в 80-х годах 20 века привело к появлению рассчитанных трехмерных полей скоростей, требующих более качественной визуализации, чем при помощи мгновенных линий тока и изоповерхностей модуля завихренности и давления. Тогда ученым в голову пришла мысль

использовать результаты теории трехмерных обыкновенных дифференциальных уравнений по определению характера течения в окрестности произвольной точки  $M$  [7–8]. Дело в том что, если перейти в систему отсчета **СКЗ**( $\mathbf{v}_M$ ) ( $x_1, x_2, x_3$ ) с началом в точке  $M$ , двигающуюся со скоростью  $\mathbf{v}_M$  точки  $M$  в **СК2**, то для исследования характера течения в окрестности точки  $M$  надо решить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x} + O(|\dot{\mathbf{x}}|^2), \text{ где } G_{ij} = \partial v_i / \partial x_j.$$

Далее для нахождения собственных чисел матрицы  $\mathbf{G}$  выписывается характеристическое уравнение (3)

$$\det(\mathbf{G} - \sigma \cdot \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} G_{11} - \sigma & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} - \sigma & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma^3 - P\sigma^2 + Q\sigma - R = 0, \quad (3)$$

где  $P = \text{tr } \mathbf{G} = G_{11} + G_{22} + G_{33}$ ,  $Q$  и  $R \equiv \det \mathbf{G}$  – инварианты матрицы  $\mathbf{G}$ . Далее надо решать кубическое уравнение (3). Известно что, если дискриминант уравнения (3)

$\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 > 0$ , то существует два комплексно-сопряженных собственных значения

$\sigma = \alpha + i\beta$  и  $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$  тензора  $\mathbf{G}$  в точке  $M$ . Тогда  $\mathbf{x} = C\mathbf{h}e^{\sigma t} + \bar{C}\bar{\mathbf{h}}e^{\bar{\sigma}t} + C_3\mathbf{h}_3e^{\sigma_3 t} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$  будет решением этого ОДУ [7]. Здесь  $C$  и  $C_3$  – комплексная и действительная константы, соответственно,  $\sigma_3$  – третье (действительное) собственное значение тензора  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{h}_3$  – третий (действительный) собственный вектор,  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 - i\mathbf{h}_2$  и  $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{h}_1 + i\mathbf{h}_2$  – два комплексно-сопряженных собственных вектора тензора  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  – два линейно независимых действительных вектора, которые являются базисом в плоскости  $P$ . Пусть комплексное число  $\zeta = \xi_1 + i\cdot\xi_2 = C \cdot \exp(\sigma t)$ , тогда мы имеем:  $\mathbf{x}_1 = \xi_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{h}_2$ . Отобразим аффинно плоскость  $P$  на вспомогательную плоскость  $P^*$  комплексного переменного  $\zeta$  так, чтобы вектор  $\mathbf{h}_1$  перешел в единицу, а вектор  $\mathbf{h}_2$  – в  $i$ ; тогда вектору  $\mathbf{x}_1 = \xi_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{h}_2$  будет соответствовать комплексное число  $\zeta = \xi_1 + i\cdot\xi_2$ . В силу этого отображения траектория в плоскости  $P$  перейдет в траекторию в плоскости  $P^*$ , описываемую уравнением  $\zeta = C \cdot \exp(\sigma t)$ . В полярных координатах  $(r, \theta)$   $\zeta = r \cdot \exp(i\theta)$ , т.е.  $\xi_1 = r \cos \theta$  и  $\xi_2 = r \sin \theta$ . Пусть  $C = C_{\text{real}} \cdot \exp(iD)$ , тогда  $r = C_{\text{real}} \cdot \exp(\alpha t)$ ,  $\theta = \beta \cdot t + D$  [7]. Таким образом, если  $\beta \neq 0$ , то можно говорить о вихревом характере движения сплошной среды в малой окрестности точки  $M$  в **СКЗ**( $\mathbf{v}_M$ ): молекулы сплошной среды двигаются по эллипсам (при  $\alpha = 0$ ) или эллиптическим спиралям (при  $\alpha \neq 0$ ) и  $\beta$  – это усредненная по времени угловая скорость вращения сплошной среды около точки  $M$  в **СКЗ**( $\mathbf{v}_M$ ).

3D определение вихревой области  $\beta > 0$ : «Все точки течения жидкости и газа, в которых  $\beta > 0$ , составляют вихревую область течения  $\beta > 0$ ».

Если в точке  $M$   $0 \leq \beta \leq 10^{-8}$ , то функция  $\beta$  в точке  $M$  переопределяется:  $\beta = -0.01$ . Потом строится изоповерхность  $\beta = \beta_0 > 10^{-5} \cdot \beta_{\text{max}}$ , демонстрирующая вихревую структуру течения сплошной среды. Примеры  $\beta$ -визуализации пространственных течений однородной по плотности несжимаемой вязкой жидкости около сферы показаны на рис. 1а и 6а-б.

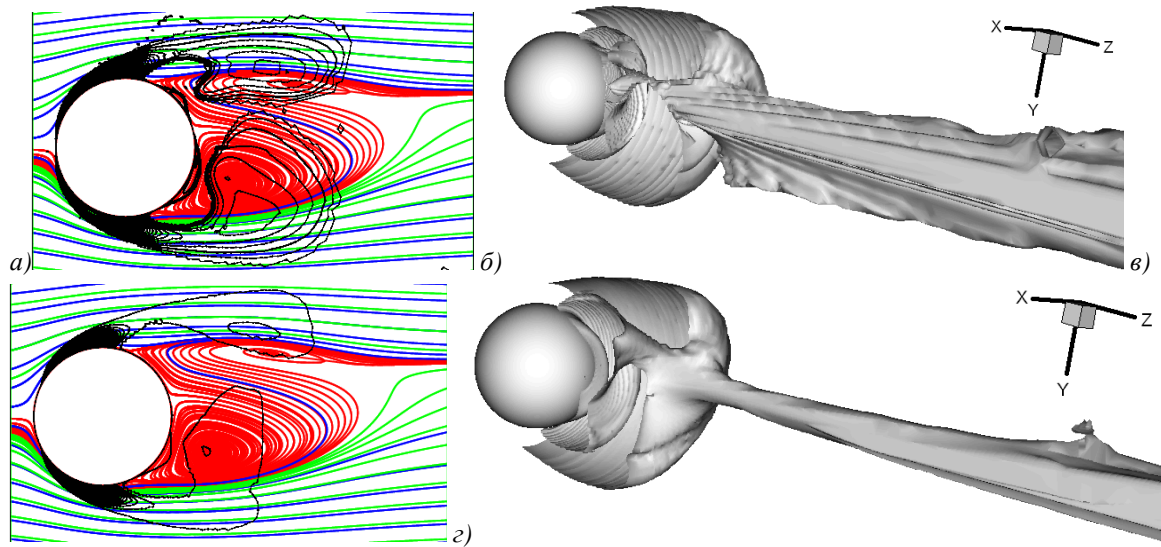


Рис. 6. Установившееся со временем течение однородной вязкой жидкости около сферы с диаметром  $d$  при  $Re = 250$  (двухнитевой след): а, в – изолинии  $\beta > 0$  с шагом 0.06 (а) и  $\lambda_2 < 0$  с шагом 0.09 (в) на фоне линий тока в СК2 $\Phi$  в вертикальной плоскости Y–Z симметрии следа; б, г – половины изоповерхностей  $\beta = 0.005$  (б) и  $\lambda_2 = -2 \cdot 10^{-5}$  (г) при  $X < 0$ .

**3D определение вихревой области Liu:** «Все точки течения жидкости и газа, в которых  $\beta > 0$ , составляют вихревую область **Liu**. Вектор **Liu**  $(0, 0, Liu_3)$  сонаправлен с третьим собственным вектором  $\mathbf{h}_3$  тензора **G**, соответствующим  $\sigma_3$ .  $Liu_3$  равен удвоенной минимальной угловой скорости  $\Omega_{\min}$  вращения сплошной среды по квазиэллиптическим орбитам вокруг  $\mathbf{h}_3$  [2-3]. Структура вихревой области течения определяется при помощи построения изоповерхностей  $|\mathbf{Liu}|$ , изолиний  $Liu_3$  в плоскости  $P$  с базисом  $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$  и линий вектора **Liu** (рис. 2, 7б, 8б)».

В трехмерном случае уравнение (1) усложняется:  $\omega = \omega_3 = (\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{h}}_3) / |\vec{\mathbf{h}}_3|$ .

Пусть  $\mathbf{q} = \mathbf{h}_3 / |\mathbf{h}_3|$ . Тогда

$$Liu = 2 \cdot \Omega_{\min} = 2 \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{q}} \mp \sqrt{(\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{q}})^2 - \beta^2}), \quad \text{"-" при } \vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{q}} > 0, \quad \text{"+" при } \vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{q}} < 0 \quad [3].$$

То есть, границы вихревых областей  $\beta$  ( $\beta = 0$ ) и **Liu** ( $|\mathbf{Liu}| = 0$ ) совпадают.

Опишем алгоритм нахождения  $\mathbf{q}$  и  $\omega$ . Переименуем  $x_1$  в  $x$ ,  $x_2$  в  $y$ ,  $x_3$  в  $z$ .

Пусть  $\mathbf{G} = \mathbf{v}_{i,j} = \begin{bmatrix} v_1 & v_7 & v_8 \\ v_4 & v_2 & v_9 \\ v_5 & v_6 & v_3 \end{bmatrix}$ , тогда рассчитаем следующие определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} v_2 - \sigma_3 & v_9 \\ v_6 & v_3 - \sigma_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} v_1 - \sigma_3 & v_8 \\ v_5 & v_3 - \sigma_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} v_1 - \sigma_3 & v_7 \\ v_4 & v_2 - \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть  $\Delta_{\max} = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ . Тогда

если  $\Delta_{\max} = \Delta_x$ , то  $h_{3x} = 1$ ,  $h_{3y} = (v_5 \cdot v_9 - v_4(v_3 - \sigma_3)) / \Delta_x$ ,  $h_{3z} = (v_4 \cdot v_6 - v_5(v_2 - \sigma_3)) / \Delta_x$ ;

если  $\Delta_{\max} = \Delta_y$ , то  $h_{3y} = 1$ ,  $h_{3x} = (v_6 \cdot v_8 - v_7(v_3 - \sigma_3)) / \Delta_y$ ,  $h_{3z} = (v_5 \cdot v_7 - v_6(v_1 - \sigma_3)) / \Delta_y$ ;

если  $\Delta_{\max} = \Delta_z$ , то  $h_{3z} = 1$ ,  $h_{3x} = (v_7 \cdot v_9 - v_8(v_2 - \sigma_3)) / \Delta_z$ ,  $h_{3y} = (v_4 \cdot v_8 - v_9(v_1 - \sigma_3)) / \Delta_z$ .

$$h_3^2 = h_{3x}^2 + h_{3y}^2 + h_{3z}^2, \quad q_x = h_{3x} / h_3, \quad q_y = h_{3y} / h_3, \quad q_z = h_{3z} / h_3, \quad \omega = (v_6 - v_9, v_8 - v_5, v_4 - v_7).$$

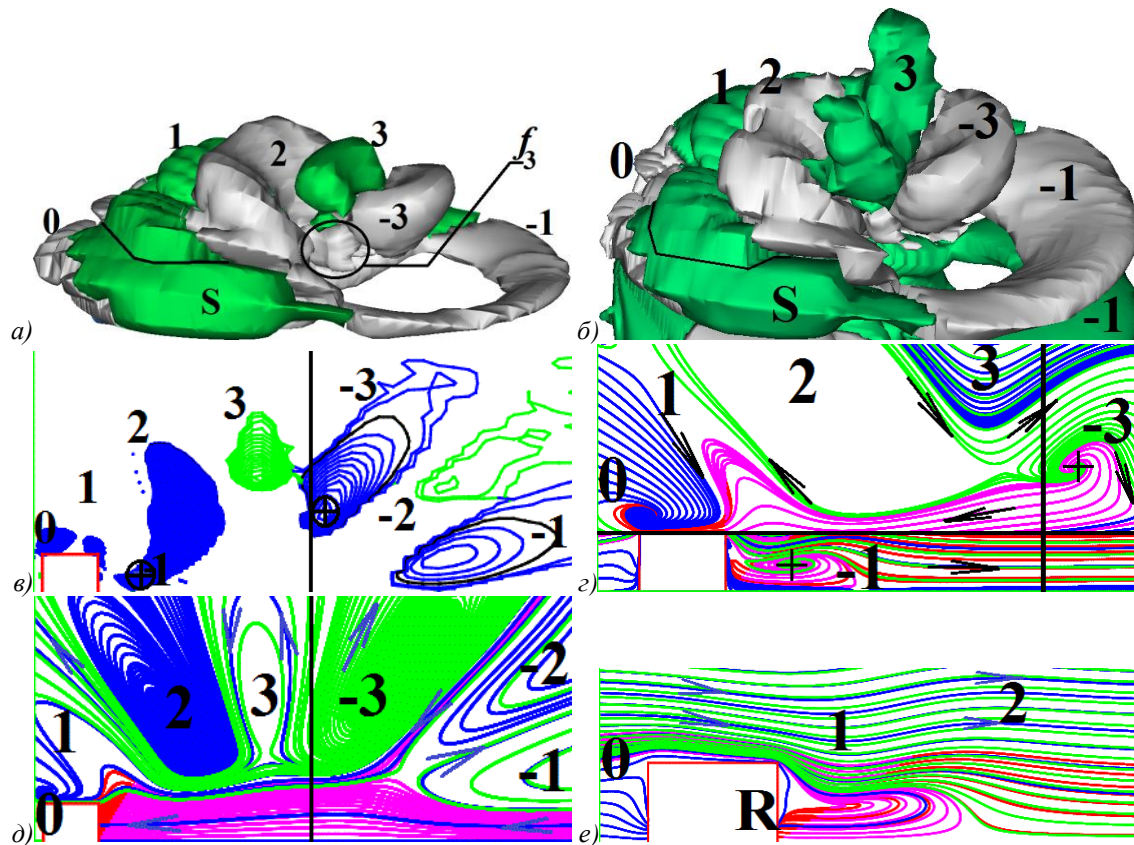


Рис. 7. Течение около диска с диаметром  $d$  и длиной  $L = 0.76 \cdot d$  при  $T = 1.5$ ,  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с: а-б – вихревая структура течения – изоповерхности  $\beta+ = \pm 0.01$  (а) и  $Liu = \pm 0.003$  (б); в-е – картины течения в вертикальной плоскости  $X-Z$  и  $X > 0$ : изолинии  $\beta+$  с шагом 0.002 (в), мгновенные линии тока в СКЗ(0, -0.01, 0) при  $0 < X \leq 1$  и в СКЗ(0.973, 0.005, 0) при  $X > 1$  (г), в СК1 $_{\phi}$  (д) и в СК2 $_{\phi}$  (е). Положительные изоповерхности  $\beta+$  и  $Liu$  – зеленые.

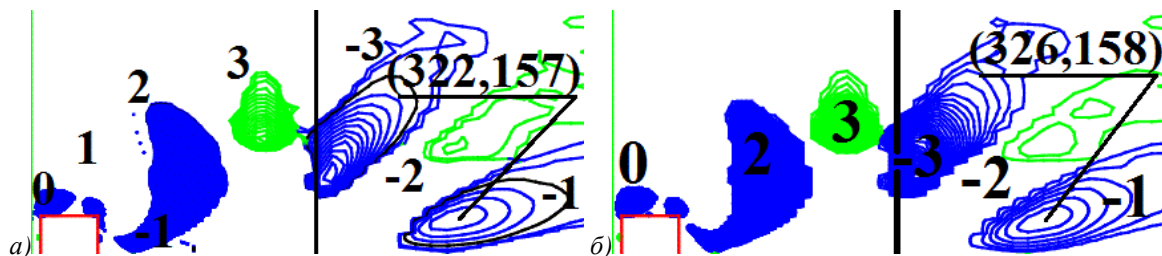


Рис. 8. Течение около диска с диаметром  $d$  и длиной  $L = 0.76 \cdot d$  при  $1.5 \cdot T_b$ ,  $Re = 50$ ,  $Fr = 0.3$ ,  $T_b = 2\pi$  с: а-б – изолинии  $\beta+$  с шагом 0.002 (а) и  $Liu$  с шагом 0.001 (б) в вертикальной плоскости симметрии течения  $X-Z$ . Положительные изолинии  $\beta+$  и  $Liu$  – зеленые.  $d = 62$  пикс.

### СРАВНЕНИЕ $\beta$ - и $Liu$ -ВИЗУАЛИЗАЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В случае равномерного движения диска с диаметром  $d$  и длиной  $L = 0.76 \cdot d$  в стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости (подсоленной воде) используется цилиндрическая система координат  $(Z, r, \phi)$ :  $X = r \cdot \cos \phi$ ,  $Y = r \cdot \sin \phi$  (СК2 $_{\phi}$ ), где ось  $Z$  – горизонтальная, ось  $X$  – вертикальная. При  $X > 0$  из-за гравитационной неустойчивости в подсоленной воде наблюдается периодическое падение деформированных вихревых колец 1, 2, 3, ... на точку  $Q$  старта тыльной стороны диска [5]. На рис. 7в-д точка  $Q$  лежит на пересечении черной вертикальной линии с осью  $Z$  (нижней границей рис. 7в-д). Левые половины 1, 2, 3, ... колец 1, 2, 3, ... трансформируются в пространственные гравитационные внутренние полуволны,

занимающие всё пространство между диском и точкой  $Q$  [5].  $-3$  и  $-1$  – это правые половины колец 3 и 1. На рис. 7а-б и 9а  $\mathbf{S}$  и  $f_S$  – это головная часть боковой полувоны и боковые вихревые нити. На рис. 7а-б видны вихревые нити  $f_3$ , которые связывают осевую часть гребней 2 с правой полувоной  $-3$ . Для визуального отличия чётных полувоны гребней от нечетных полувоны впадин в [5] была введена  $\beta+$ -визуализация:  $\beta+ = \beta \cdot \text{sign}(\omega_\phi)$ ,  $\text{sign}(\omega_\phi) = 1$  при  $\omega_\phi \geq 0$ ,  $\text{sign}(\omega_\phi) = -1$  при  $\omega_\phi < 0$  (рис. 7а, 9а).

Трёхмерные вихревые структуры на рис. 7а ( $\beta$ -подход) и 7б (**Liu**-подход) практически не отличаются друг от друга, за исключением верхней части полувоны 3. Разница между центрами минус первых полувоны в вертикальной плоскости симметрии течения на рис. 8а ( $\beta$ -подход) и 8б (**Liu**-подход) составляет всего  $0.07 \cdot d$ . То есть, сдвиговая составляющая течения в этой задаче очень мала.

Если на рис. 7а и 9а убрать зеленые вихревые структуры полувоны впадин, соответствующие положительным изоповерхностям  $\beta+$ , то станут хорошо видны вихревые нити  $f_1$ , которые связывают рециркуляционную зону  $R$  с осевой частью гребня 2 (рис. 9б). Это способствует лучшему пониманию вихревой структуры течения. Поэтому в [5] была введена одноцветная ( $\beta-$ )-визуализация течения. Функция ( $\beta-$ ) определена при  $\beta > 0$  и  $\omega_\phi < 0$ : ( $\beta-$ ) =  $\beta$  (рис. 9б).

Рис. 7в-г наглядно демонстрируют физический смысл  $\beta > 0$  для двух точек  $M_1$  и  $M_2$ , отмеченных черными крестами. Картины мгновенных линий тока в системах координат  $\text{СКЗ}(0.973, 0.005, 0)$  и  $\text{СКЗ}(0, -0.01, 0)$ , связанных со скоростями точек  $M_1$  и  $M_2$ , соответственно, показывают вращение жидкости вокруг этих точек в верхней и нижней частях рис. 7г, разделённого черной прямой  $X = 1$ . Вихревые структуры течений в  $\text{СКЗ}(0.973, 0.005, 0)$  (рис. 7г, верх) и в  $\text{СК1}_\phi \equiv \text{СКЗ}(1, 0, 0)$  (рис. 7д) подобны. Поэтому имеет смысл приводить рис. 7д рядом с верхней частью рис. 7в для подтверждения корректности  $\beta$ -вихревой структуры в вертикальной плоскости симметрии течения. То же самое можно сказать о подобии вихревых структур в  $\text{СКЗ}(0, -0.01, 0)$  (рис. 7г, низ) и в  $\text{СК2}_\phi \equiv \text{СКЗ}(0, 0, 0)$  (рис. 7е) и о целесообразности приводить рис. 7е рядом с нижней частью рис. 7в.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЯ ПРИ ПОМОЩИ ВТОРОГО ИНВАРИАНТА $Q$

В [9] было предложено использовать изоповерхности  $Q > 0$  для идентификации вихревых структур течений жидкости и газа, где  $Q$  – второй инвариант  $\mathbf{G}$  (см. уравнение (3)).  $Q$ -визуализация очень популярна в Японии.

Определение вихревой области  $Q > 0$ : «Все точки течения жидкости и газа, в которых  $Q > 0$ , составляют вихревую область течения  $Q > 0$ ».

Функция ( $Q-$ ) определена при  $Q > 0$  и  $\omega_\phi < 0$ : ( $Q-$ ) =  $Q$  (рис. 9в).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЯ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ ЛЯМБДА ДВА

В [6] было предложено использовать изоповерхности  $\lambda_2 < 0$  для идентификации вихревых структур течений однородной несжимаемой вязкой жидкости, где  $\lambda_2$  – второе собственное значение симметричного тензора  $\mathbf{F}^2 + \mathbf{B}^2$ ,

$$\mathbf{F} + \mathbf{B} = \mathbf{G}, \quad F_{ij} = 0.5 \cdot (v_{ij} + v_{ji}), \quad B_{ij} = 0.5 \cdot (v_{ij} - v_{ji}).$$

Определение вихревой области  $\lambda_2 < 0$ : «Все точки течения несжимаемой вязкой жидкости, в которых  $\lambda_2 < 0$ , составляют вихревую область течения  $\lambda_2 < 0$ » (рис. 6в-г).

Функция ( $\lambda_2-$ ) определена при  $\lambda_2 < 0$  и  $\omega_\phi < 0$ : ( $\lambda_2-$ ) =  $\lambda_2$  (рис. 9г).



$\lambda_2$ -определение вихря было выведено из продифференцированного уравнения Навье-Стокса для однородной по плотности несжимаемой вязкой жидкости, в котором удалили два слагаемых по следующим вполне разумным причинам.

**Тезис 1.** *Нестационарные напряжения могут создавать минимум давления в течении, где вообще нет никаких вихрей.*

**Тезис 2.** *Вязкие эффекты могут удалить минимум давления из вихревого течения.*

$\lambda_2$ -визуализация популярна в Европе и в США. На рис. 6в-г и 10 представлены примеры использования  $\lambda_2$ -визуализации в случае однородной вязкой жидкости. В [10] при помощи  $\lambda_2$ -визуализации впервые открыт механизм формирования вихрей за двумерным круговым цилиндром,двигающимся в однородной вязкой жидкости. На рис. 10а показано место рождения вихря за цилиндром (на пересечении двух линий). Далее этот вихрь внедряется в вихревую оболочку, увеличивается и отрывается. На рис. 6в-г, 10б – стационарный двухнитевой след за сферой при  $Re = 250$  [10-11].

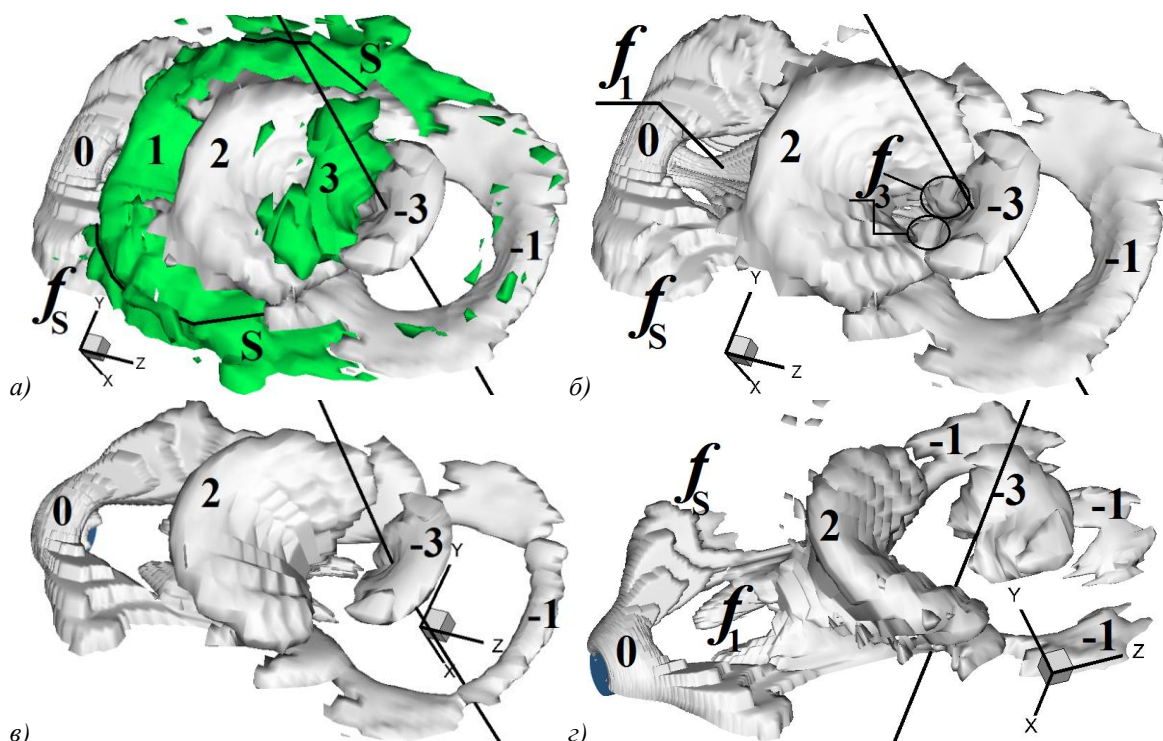


Рис. 9. Течение около диска с диаметром  $d$  и длиной  $L = 0.76 \cdot d$  при  $T = 1.5$ ,  $Fr = 0.8$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с: а-г – изоповерхности  $\beta_+ = \pm 0.002$  (а),  $(\beta_-) = 0.002$  (б),  $(Q_-) = 5 \cdot 10^{-6}$  (в) и  $(\lambda_2-) = -3 \cdot 10^{-6}$  (г) при  $X < 0$ . Черная вертикальная прямая проходит через место старта диска.

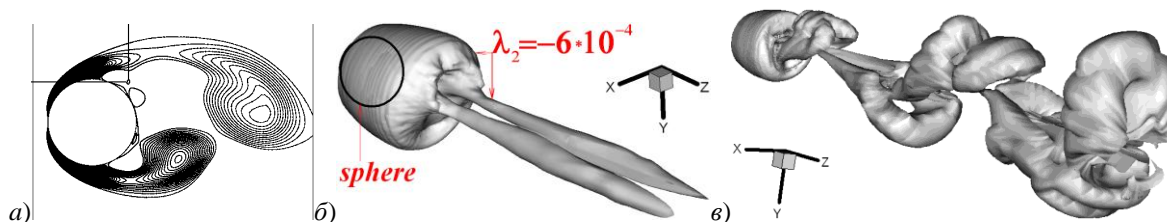


Рис. 10. Вихревые структуры течений однородной вязкой жидкости: а – 2D цилиндр, дорожка Кармана при  $Re = 140$  (изолинии  $\lambda_2 < 0$  с шагом 0.04); б-в – сфера, двухнитевой след при  $Re = 250$  (изоповерхность  $\lambda_2 = -6 \cdot 10^{-4}$ ) (б) и цепочка петель в виде шпилек для волос при  $Re = 350$  ( $\lambda_2 = -2 \cdot 10^{-5}$ ) (в)



На рис. 10в показана цепочка вихревых петель в виде шпилек для волос за сферой, механизм формирования которых описан в [11]. Этот механизм сложнее аналогичного механизма для цилиндра, но места периодического зарождения нового вихря для цилиндра и сферы примерно совпадают. В [11] при  $270 < Re \leq 360$  была открыта ненулевая осредненная по времени подъемная сила, действующая на сферу (рис. 10в).

### СРАВНЕНИЕ 2D $\beta$ -, $Q$ - и $\lambda_2$ -ВИЗУАЛИЗАЦИЙ ДЛЯ ЖИДКОСТИ

Покажем, что для несжимаемой жидкости в двумерном случае  $\beta$ -,  $Q$ - и  $\lambda_2$ -визуализации совпадают.  $G_{13} = G_{23} = G_{33} = G_{32} = G_{31} = 0$ , поэтому кубическое уравнение (3) становится квадратным. Пусть  $G_{11} = a$ ,  $G_{12} = b$ ,  $G_{21} = c$ ,  $G_{22} = d$ . В случае несжимаемой жидкости первый инвариант  $P = a + d = 0$ , тогда

$$(a - \sigma)(-a - \sigma) - b \cdot c = 0, \quad \sigma^2 - a^2 - bc = \sigma^2 + Q = 0, \quad \sigma_{12} = \pm i\sqrt{Q}, \quad \text{где } Q = -a^2 - bc.$$

Следовательно, если  $Q > 0$ , то  $\beta = \sqrt{Q} > 0$  и два собственных числа  $\mathbf{G}$  – комплексно-сопряженные, то есть для жидкости в двумерном случае картины изолиний  $\beta$ - и  $Q$ -визуализаций совпадают (если  $\delta\beta = \sqrt{\delta Q}$ , где  $\delta\beta$  и  $\delta Q$  – шаги в картинах изолиний).

$$F_{11} = a, F_{22} = -a, F_{12} = F_{21} = 0.5 \cdot (b + c), B_{11} = B_{22} = 0, B_{12} = 0.5 \cdot (b - c) = -B_{21}.$$

$$\mathbf{F}^2 + \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 0.25 \cdot [(b+c)^2 - (b-c)^2] & 0 \\ 0 & a^2 + 0.25 \cdot [(b+c)^2 - (b-c)^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}$$

Следовательно,  $(-Q - \lambda)^2 = 0$ ,  $\lambda_{12} = -Q$ .

Поэтому, если  $Q > 0$ , то  $\lambda_2 < 0$ ,  $\beta = \sqrt{-\lambda_2} > 0$ . То есть, картины изолиний  $Q$ -,  $\lambda_2$ - и  $\beta$ -визуализаций совпадают. Таким образом, на рис. 4г и 5б показан двумерный пример  $\lambda_2$ - и  $Q$ -визуализаций.

### СРАВНЕНИЕ $\beta$ -, $Q$ - и $-\lambda_2$ -ВИЗУАЛИЗАЦИЙ В 3D СЛУЧАЕ

В [6]  $\beta$ -визуализация называется  $\Delta$ -подходом и на примерах решения конкретных трехмерных задач для жидкости показывается, что  $\lambda_2$ -визуализация лучше чем  $|\omega|$ -,  $\beta$ - и  $Q$ -визуализации. Наиболее близкой к  $\lambda_2$ -визуализации стоит  $Q$ -визуализация.  $\beta$ -визуализация – на втором месте, так она немного переоценивает объем вихревой области (рис. 6), а иногда даже идентифицирует «ложные» вихревые области в некоторых экзотических случаях, описанных в [6]. А на последнем месте –  $|\omega|$ -визуализация. Автор настоящей статьи считает переоценку вихревой области не недостатком, а достоинством  $\beta$ -визуализации, так как с ее помощью получается более информативная вихревая структура. Например, на рис. 6а-б  $\beta$ -визуализация в плоскости симметрии двухнитевого течения в рециркуляционной области следа дает выступ верхней части вихревой оболочки в сторону поверхности сферы, который в [11] участвует в механизме формирования новой вихревой петли в виде шпильки для волос. В то время как  $\lambda_2$ -визуализация не показывает этот выступ на рис. 6в-г. Вихревые нити  $f_1, f_3$  и полукольцо  $-1$ , четко идентифицируемые при помощи изоповерхности ( $\beta$ -) на рис. 9б, немного «недорисованы» при помощи изоповерхностей ( $Q$ -) и ( $\lambda_2$ -) на рис. 9в и 9г, соответственно. На рис. 9 видно, что  $Q$ - и  $\lambda_2$ -визуализации близки друг другу.

### ВЫВОД ФОРМУЛЫ (1) ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛИУ [3]

Рассмотрим общий случай вращения сплошной среды по квазиэллиптическим орбитам вокруг некоторой точки  $M$  в двумерной системе отсчета СКЗ( $\mathbf{v}_M$ ) ( $x_1, x_2$ ) с началом в точке  $M$ . Из факта движения среды по квазиэллиптической орбите следует, что существуют некоторые минимальная  $\Omega_{\min}$  и максимальные  $\Omega_{\max}$  угловые скорости вращения

среды. Пусть  $\Omega_{\min}$  лежит на оси  $\zeta$ , а  $\Omega_{\max}$  – на оси  $\eta$ , угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $x_1$ ,  $\varphi$  – угол между осями  $\zeta$  и  $x_1$ . Тогда, исходя из того, что на эллиптической траектории частиц сплошной среды по два раза попадают точки с  $\Omega_{\min}$  и с  $\Omega_{\max}$ , получим следующее уравнение, аналогичное уравнению (2),

$$\dot{\theta} = A \cdot \sin(2(\theta - \varphi) - 0.5\pi) + \omega = A \cdot \sin(2\theta - \psi) + \omega, \quad \text{где } \psi = 2\varphi + 0.5\pi, \\ A = 0.5(\Omega_{\max} - \Omega_{\min}), \quad \omega = 0.5(\Omega_{\max} + \Omega_{\min}).$$

Найдем среднюю угловую скорость вдоль квазиэллиптической траектории частиц сплошной среды, сделав замену переменных  $\gamma = 2\theta - \psi$

$$\langle \Omega \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\theta} d\theta = \frac{A}{4\pi} \int_{-\psi}^{4\pi-\psi} \sin(\gamma) d\gamma + \omega = -\frac{A}{4\pi} \cos(\gamma) \Big|_{-\psi}^{4\pi-\psi} + \omega = \omega.$$

То есть,  $\omega(M)$  – это угловая скорость вращения сплошной среды около некоторой точки  $M$ , усредненная по квазиэллиптической траектории движения частиц сплошной среды вокруг  $M$ .

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [7-8] следует, что  $\beta$  – это усредненная по времени угловая скорость вращения жидкости около точки  $M$

$$\beta \approx \frac{2\pi}{T_n}, \quad T_n = \int_0^{T_n} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A \sin(2\theta - \psi) + \omega} = \int_{-0.5\psi}^{2\pi-0.5\psi} \frac{d\varepsilon}{A \sin(2\varepsilon) + \omega}, \quad \text{где } \varepsilon = \theta - 0.5\psi.$$

Так как  $\sin(2\varepsilon) = 2 \cdot \text{tg}(\varepsilon) / (1 + \text{tg}^2(\varepsilon))$ , то сделаем две последовательные замены переменных ( $k = \text{tg}(\varepsilon)$ ,  $dk = d\varepsilon / (\cos \varepsilon)^2$  и  $q = k + A/\omega$ ), тогда (если  $E = \Omega_{\max}$ ,  $F = \Omega_{\min}$ )

$$T_n = \frac{1}{\omega} \int \frac{(1+k^2) \cos^2 \theta \cdot dk}{2kA/\omega + 1 + k^2} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dk}{k^2 + 2kA/\omega + 1} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{q^2 - (A/\omega)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{q^2 + G^2} = \\ = \frac{1}{\omega G} \arctg\left(\frac{q}{G}\right), \quad \text{где } G^2 = 1 - \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 = 1 - \left(\frac{E-F}{E+F}\right)^2 = \frac{4EF}{(E+F)^2}, \quad \frac{1}{(\omega G)^2} = \frac{1}{\omega^2 - A^2} = \frac{1}{EF}, \\ T_n = \frac{1}{\sqrt{EF}} \left( \arctg\left(\frac{(E+F) \cdot \text{tg} \varepsilon + E-F}{2\sqrt{EF}}\right) \right) \Big|_{-0.5\psi}^{2\pi-0.5\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{EF}} = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \beta = \sqrt{EF} = \sqrt{\Omega_{\max} \cdot \Omega_{\min}}.$$

$$\begin{cases} \beta = \sqrt{\Omega_{\max} \cdot \Omega_{\min}} \\ 2\omega = \Omega_{\max} + \Omega_{\min} \end{cases} \Rightarrow \beta^2 = \Omega_{\min} (2\omega - \Omega_{\min}) \Rightarrow \Omega_{\min}^2 - 2\omega \Omega_{\min} + \beta^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega_{\min,12} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \omega \pm A, \quad \text{где } 0 \leq A = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \leq \omega \Rightarrow$$

$$\Omega_{\min} = \omega - A, \quad \text{если } \omega > 0; \quad \Omega_{\min} = \omega + A, \quad \text{если } \omega < 0.$$

$$Liu = 2 \cdot \Omega_{\min} = 2 \cdot (\omega \mp \sqrt{\omega^2 - \beta^2}), \quad \text{"-" при } \omega > 0, \quad \text{"+" при } \omega < 0 \text{ [3].}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были рассмотрены пять различных определений *пространственной* вихревой области течений жидкости и газа на основе функций  $\omega$ ,  $\beta$ , **Liu**,  $Q$  и  $\lambda_2$ . Рассмотренные определения вихря можно разделить на три группы, относящиеся к 19, 20 и 21 векам. К первой группе относится вектор завихренности  $\omega$ , ко второй группе –  $\beta$ -,  $Q$ - и  $\lambda_2$ -определения. К третьей группе – вектор **Liu**. Представление о вихре в форме вихревой трубки привело к  $\omega$ . Процедура нахождения собственных значений тензора **G** градиента скорости привела к  $\beta$ - [7-8] и  $Q$ - [9] определениям вихря (70-е и 80-е годы 20 века).  $\lambda_2$ -определение вихря (1995 г.) [6] было выведено из продифференцированного уравнения Навье-Стокса для однородной по плотности несжимаемой вязкой жидкости, в котором удалили два слагаемых по вполне разумным причинам. Идея **Liu**-определения вихря [2-3] состоит в удалении сдвигового течения из вращательного течения сплошной

среды (2018-19 гг.). Три определения на основе  $\omega$ ,  $\beta$  и  $\mathbf{Liu}$  имеют ясный физический смысл. Зафиксируем некоторую точку  $M$ , вокруг которой происходит вращение сплошной среды вокруг вектора  $\mathbf{q}$ , тогда в плоскости вращения  $P$ , перпендикулярной  $\mathbf{q}$ , точки среды двигаются по квазиэллиптическим орбитам, которые характеризуются максимальной  $\Omega_{\max}$  и минимальной  $\Omega_{\min}$  угловыми скоростями. Тогда  $\omega_q$  – средняя арифметическая,  $\beta$  – средняя геометрическая,  $0.5 \cdot \mathbf{Liu}_q$  – минимальная угловая скорости:

$$\omega_q = 0.5 \cdot (\Omega_{\min} + \Omega_{\max}), \quad \beta = \sqrt{\Omega_{\min} \cdot \Omega_{\max}}, \quad \mathbf{Liu}_q = 2 \cdot \Omega_{\min}.$$

В двумерном случае для течений жидкости ( $\beta$ )-,  $\lambda_2$ - и  $Q$ -определения вихревой структуры полностью совпадают: если  $\lambda_2 < 0$ , то  $Q = -\lambda_2 > 0$  и  $\beta = \sqrt{-\lambda_2} > 0$ . Границы вихревых областей  $\beta$  и  $\mathbf{Liu}$  совпадают как в двумерном, так и в трехмерном случае:

$$\mathbf{Liu} = 2 \cdot \Omega_{\min} = 2 \cdot \left( \bar{\omega} \cdot \bar{\mathbf{q}} \mp \sqrt{(\bar{\omega} \cdot \bar{\mathbf{q}})^2 - \beta^2} \right) = 0 \text{ при } \beta = 0 \text{ ("-" при } \bar{\omega} \cdot \bar{\mathbf{q}} > 0, \text{ "+" при } \bar{\omega} \cdot \bar{\mathbf{q}} < 0).$$

В трехмерном случае все эти определения, кроме  $\omega$ , дают примерно одну и ту же вихревую структуру течения сплошной среды. Трехмерные изоповерхности  $Q = 10^{-5}$  и  $\lambda_2 = -10^{-5}$  в некоторых задачах очень близки друг другу. В случае небольшой сдвиговой компоненты в течении, тоже самое относится и к изоповерхностям  $\beta = 3 \cdot 10^{-3}$  и  $|\mathbf{Liu}| = 3 \cdot 10^{-3}$ , которые, по мнению авторов статьи [6], немного переоценивают вихревую область течения. По моему мнению, эта переоценка идет на пользу в понимании динамики изменения вихревых структур течения со временем. Поэтому  $\lambda_2$ - и  $Q$ -определения можно объединить в группу  $g_1$ , а  $\beta$  и  $\mathbf{Liu}$  – в группу  $g_2$ .

В общем случае, с одной стороны можно использовать любую из  $\beta$ -,  $\lambda_2$ -,  $Q$ - и  $\mathbf{Liu}$ -визуализаций, а с другой стороны – все вместе одновременно, чтобы потом самому выбрать наилучшую из них для вашей задачи. Авторы статьи [6] считают, что в трехмерном случае  $\lambda_2$ -определение – наилучший метод визуализации вихрей в жидкостях, предложенный до 1995 г. На второе место они ставят  $Q$ -определение, а на третье –  $\beta$ -подход.  $\omega$ -подход активно критикуется как в [6], так и в [2]. Авторы статей [2–3] также расхваливают свое новое определение вихря  $\mathbf{Liu}$ . Но идеальное определение *пространственной* вихревой области течения жидкости и газа еще не придумано.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matyushin P.V.* The numerical simulation of the homogeneous viscous fluid flows past a sphere at Reynolds numbers between  $10^4$  and  $5 \cdot 10^5$  // Proceedings of International Conference "Fluxes and Structures in Fluids" (8-10 августа 2018 г., Тихоокеанский океанологический институт В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток), 2018, С. 140 - 143.
2. *Tian S., Gao Y., Dong X., Liu C.* Definition of vortex vector and vortex // J. Fluid Mech. 2018. V. 849. P. 312 - 339.
3. *Wang Y., Gao Y., Liu J., Liu C.* Explicit formula for the Liutex vector and physical meaning of vorticity based on the Liutex-Shear decomposition // Journal of Hydrodynamics. 2019. V. 31. No. 3. P. 464 - 474.
4. *Boussinesq J.* Essai sur la théorie des eaux courantes // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1877. V. 23. P. 1 - 680.
5. *Матюшин П.В.* Формирование пространственных внутренних волн за телом, движущимся в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 4. С. 117 - 130.
6. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 69 - 94.
7. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
8. *Chong M.S., Perry A.E., Cantwell B.J.* A general classification of three-dimensional flow field // Phys. Fluids. 1990. V. A 2. P. 765 - 777.

9. Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P. Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows // Center for Turbulence Research Report CTR-S88. 1988. 193 p.
10. Матюшин П.В. Численное моделирование пространственных отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости около сферы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2003. 194 с.
11. Гуцин В.А., Матюшин П.В. Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при  $200 < Re < 380$  // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 135 – 151.

Матюшин Павел Владимирович, pmatyushin@mail.ru

— ♦ ♦ ♦ —

## ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ДВИЖЕНИЕМ ПЛАСТИНЫ С НУЛЕВЫМ УГЛОМ АТАКИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

П.В. Матюшин

Институт Автоматизации Проектирования РАН, Москва  
pmatyushin@mail.ru

При равномерном перемещении пластины толщиной  $d$  с нулевым углом атаки со скоростью  $U$  справа налево в покоящейся линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости (*подсолённой воде*) над траекторией движения центра пластины  $x$  формируются гравитационные внутренние полуволны. Для изучения двумерных механизмов формирования этих полуволн (**МФВП**) был разработан и протестирован комплекс программ *sq25* для математического моделирования и визуализации плоских течений *стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости* около прямоугольника длиной  $L = N \cdot d$  (где  $N = 1, 2, 3, \dots$ ) при числах Рейнольдса  $Re = U \cdot d / \nu \leq 200$  (где  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости воды). Пусть **СК1** ( $x, y$ ) – покоящаяся декартова система координат, связанная жидкостью, начало ( $x, y$ ) совпадает с центром пластины при её старте; передняя и тыловая стороны пластины при её старте пересекаются с осью  $x$  в точках  $P$  и  $Q$  (рис. 1).

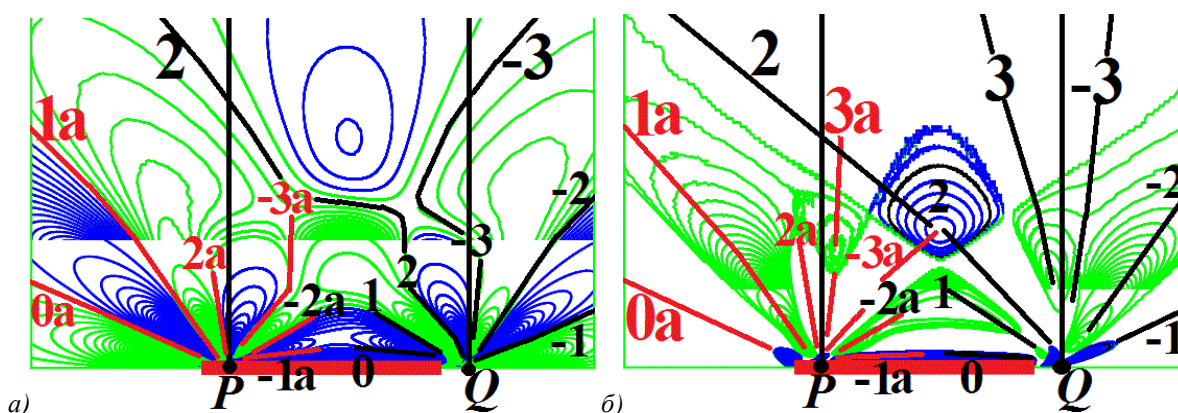


Рис. 1. Внутренние волны около пластины при  $T = 1.2$ ,  $L = 20 \cdot d$ ,  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$  ( $T_b = 5.236$  с,  $d = 0.5$  см): а – изолинии  $\partial S / \partial X$  с шагами  $8 \cdot 10^{-7}$  (внизу) и  $8 \cdot 10^{-8}$  (вверху), где  $S$  – возмущение плотности; б – изолинии  $\beta+$  с шагами  $2 \cdot 10^{-3}$  (внизу) и  $2 \cdot 10^{-4}$  (вверху), где  $\beta+ = \beta \cdot \text{sign}(\omega)$ ,  $\beta$  – мнимая часть комплексно-сопряженных собственных значений тензора градиента скорости,  $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$  – завихренность,  $\text{sign}(\omega) = 1$  при  $\omega \geq 0$ ,  $\text{sign}(\omega) = -1$  при  $\omega < 0$  [1]. Отрицательные изолинии показаны синим цветом.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Моделирование проводилось на основе решения безразмерной системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска [1], записанной в декартовой системе координат  $(X, Y)$ , связанной с центром пластины (СК2),  $Y$  – вертикальная прямая,  $\mathbf{v}(v_x, v_y)$  – вектор скорости в СК2.  $(X, Y)$  и  $\mathbf{v}$  безразмерены на  $d/2$  и  $U$ . Пусть  $N_b$  и  $T_b = 2\pi/N_b$  – частота и период плавучести жидкости,  $Fr = U/(N_b \cdot d)$  – внутреннее число Фруда,  $\lambda = \pi \cdot Fr \cdot d$  – длина полуволны,  $T$  – время, безразмеренное на  $T_b$ . Эта задача характеризуется четырьмя параметрами:  $T_b, Re, Fr, Sc = \nu/\kappa = 709.2$  – число Шмидта, где  $\kappa$  – коэффициент диффузии соли. Прямоугольная расчетная область делится на  $M$  вертикальных полос, из которых  $N$  полос накрывают прямоугольник. Каждая полоса считается на выделенном ей процессоре. Прямоугольник состоит из  $N$  квадратов, каждый из которых частично занимает один из  $N$  процессоров. Внутри прямоугольника сетка равномерная. Вне прямоугольника размер сторон ячеек монотонно увеличивается вдоль осей  $X$  и  $Y$  по полиномиальному закону до некоторого фиксированного значения. Расчеты проводилось на вычислительных ресурсах Центра коллективного пользования (ЦКП) ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на сетке  $[3000 \times 700]$ , которая занимает область  $[-148 < X < 509, -148 < Y < 148]$

## МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ВНУТРЕННИХ ПОЛУВОЛН (МФВП)

В настоящей работе МФВП, сформулированный в [1], где описывается МФВП только над точкой  $Q$ , дополняется описанием МФВП над точкой  $P$ . Из-за стратификации рассчитанные поля скоростей при  $y < 0$  и  $y > 0$  симметричны относительно оси  $x$ .

МФВП-2D (при  $y > 0$ ):

1) К моменту времени  $0.5 \cdot T_b$  после старта тела в силу гравитационной неустойчивости над точками  $P$  и  $Q$  формируются две тройки полувогн (0a, 1a, -1a) и (0, 1, -1), соответственно. Полувогны 0, 1a и -1a – короткие («корни»), а полувогны 0a, 1 и -1 – длинные.

2) Далее над  $P$  и  $Q$  периодически (каждые  $0.5 \cdot T_b$ ) генерируются пара «корней» (ka, -ka) и пара длинных полувогн (k, -k), соответственно, а верхняя часть полувогны k-1 переходит к «корню» ka-1, превращая «корень» ka-1 в длинную полувогну, а полувогну k-1 в «корень»; где  $k = 2, \dots, k_p + 1$  (рис. 1–2),  $(L/\lambda - 1) \leq k_p \leq (L/\lambda)$ .

3) При  $k = k_p + 2$  и  $k_p + 3$  над  $Q$  рождается пара длинных полувогн (k, -k), а верхняя часть полувогны k-2 переходит к «корню» ka-2, который соединен с «корнем» k-4, т.е. k-2 и k-4 объединяются в одну длинную полувогну ka-2 (рис. 3). 4) При  $k = k_p + 4$  над  $Q$  появляется пара длинных полувогн (k, -k).

5) При  $k = k_p + 5, \dots, k_{\max}$  над  $Q$  рождается пара длинных полувогн (k, -k), а верхняя часть полувогны k-3 объединяется с «корнем» k-5 в одну полувогну ka-3 (на рис. 3–4 нижние части полувогн ka при  $k \geq k_p$  имеют свои первоначальные названия).

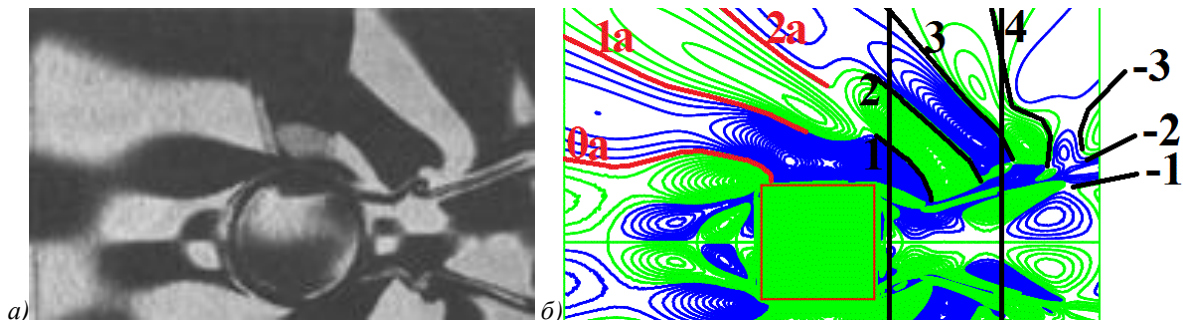


Рис. 2. Внутренние волнн и прослойки плотности за телом при  $L = d, Fr = 0.094, Re = 140, T = 1.91$  ( $T_b = 10.5$  с,  $\nu = 0.01$  см<sup>2</sup>/с): а) теневая картина «вертикальная щель – нож Фуко» на рис. 1б из [2] (эксперимент), б) изолинии  $\partial S / \partial X$  с шагом  $8 \cdot 10^{-6}$  в настоящем расчете.



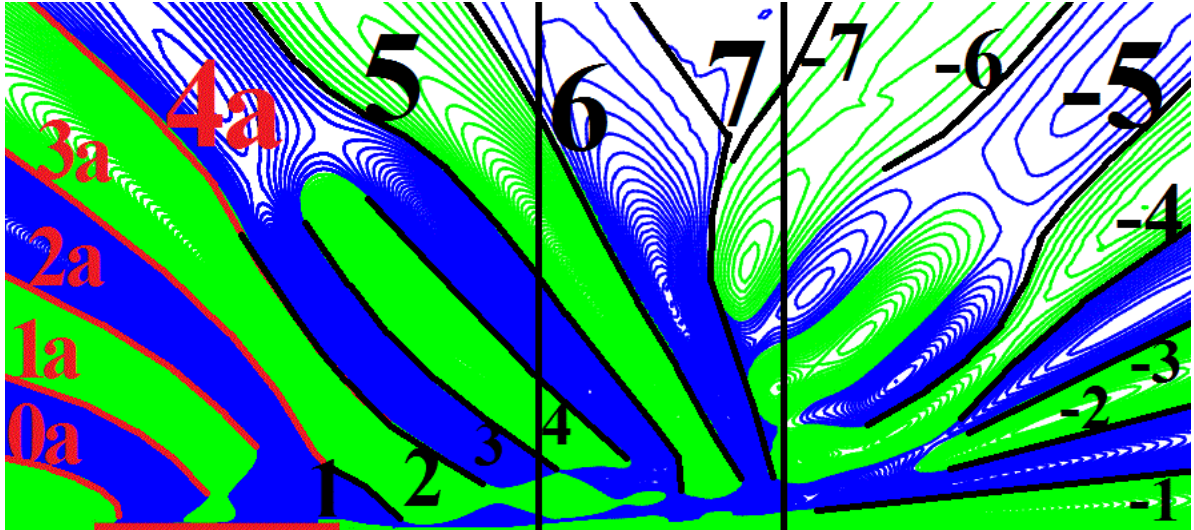


Рис. 3. Изолинии  $\partial S/\partial X$  около пластины при  $T = 3.5$ ,  $L = 20 \cdot d$ ,  $Fr = 1.6(6)$ ,  $Re = 50$  ( $T_b = 5.236$  с,  $d = 0.5$  см) с шагом  $10^{-7}$ . Синим цветом показаны отрицательные  $\partial S/\partial X$ .

Таким образом, МФВП над  $P$  подобен МФВП над  $Q$ , но имеет локальный характер. Если длинные полуволны  $k$  и  $-k$  формируются на большом расстоянии над  $Q$  и потом опускаются на точку  $Q$ , то короткие полуволны  $ka$  и  $-ka$  формируются непосредственно над точкой  $P$  (рис. 1). Удивительно, что, несмотря на движение тела справа налево, поля  $\partial S/\partial X$  и поля скоростей в СК1 при  $x < 0$  и  $x > 0$  квазисимметричны относительно оси  $y$ . Максимальные количества полуволн  $k_p$  и  $k_{\max}$ , формирующихся над  $P$  и  $Q$ , ограничены длиной тела  $L$  и расстоянием от центра тела до правой внешней границы расчетной области, соответственно. На рис. 2–4:  $L/\lambda \approx 3.4$ ,  $3.8$  и  $3.8$ , соответственно. Поэтому  $k_p = 3$ . На рис. 1, 2б, 3 и 4б красными и чёрными линиями выделены вершины полуволн гребней и низины полуволн впадин (см. [1–2]). На рис. 1 к моменту времени  $1.2 \cdot T_b$  над  $Q$  сформировались три левые полуволны: 1 (впадин), 0 и 2 (гребней), и две правые полуволны: –1 (гребней) и –2 (впадин). А над  $P$  родились три левые полуволны: 1а (впадин), 0а и 2а (гребней), и две правые полуволны: –1а (гребней) и –2а (впадин). При  $T = k/2$  и  $k > k_p$  вдоль горизонтальной прямой на расстоянии  $L/2$  от прямой  $x$  будет сформировано  $(k_p + k)$  левых полуволн (рис. 2–3), а вдоль дуги окружности с радиусом равным  $(2\pi \cdot Fr \cdot T \cdot d + 3L)$  и с центром в начале СК1 появятся  $k$  левых полуволн (рис. 3).

В [3] утверждается, что на рис. 4а внутренние волны генерируются краевыми сингулярностями на краях препятствия в противофазе, и что в центре пластины происходит интерференционное гашение волновых возмущений. Настоящая работа опровергает это ошибочное утверждение. МФВП-3D был частично описан в [4].

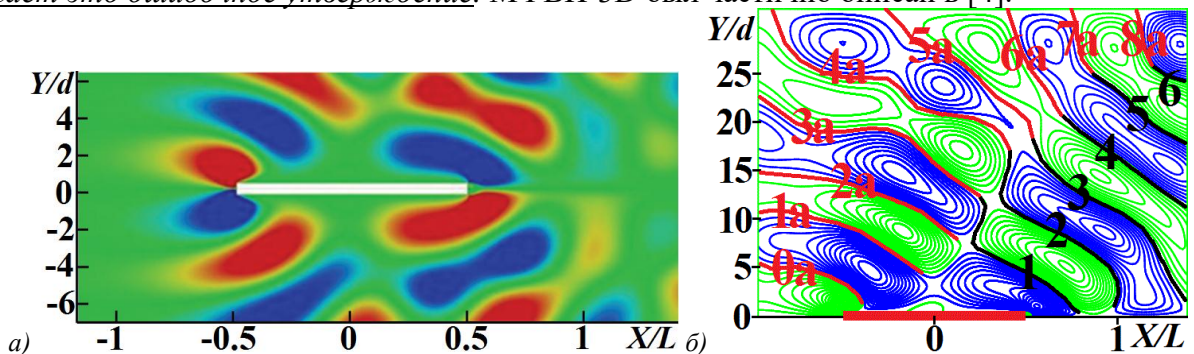


Рис. 4. Изолинии  $\partial v/\partial y$  около пластины при  $L = 20 \cdot d$ ,  $Fr = 1.6(6)$ ,  $Re = 50$  ( $T_b = 5.236$  с,  $d = 0.5$  см):

а) фиг. 1б из [3], б)  $\Delta v_y = 0.01$ ,  $T = 9.5$ . Аналог изолиний  $\partial S/\partial X$ . Синим цветом – отрицательные  $\partial v/\partial y$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матюшин П.В. Формирование пространственных внутренних волн за телом, движущимся в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 4. С. 117 - 130.
2. Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д. Трансформация висящих разрывов в вихревые системы в стратифицированном течении за цилиндром // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 1. С. 15 - 28.
3. Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д. Нестационарная вихревая картина обтекания пластины с нулевым углом атаки (двумерная задача) // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 48 – 65.
4. Матюшин П.В. Количество внутренних волн, генерируемых длинным телом, движущимся в стратифицированной вязкой жидкости // «Волны и вихри в сложных средах»: 15-ая Международная конференция – школа молодых ученых; 19-22 ноября 2024 г., Москва: Сборник материалов школы. – М.: ООО «ИСПО-принт», 2024. С. 141 - 144.

Матюшин Павел Владимирович, pmatyushin@mail.ru



## АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИЯХ В ГЕОМЕТРИИ С ТРЕМЯ ЭЛЕКТРОДАМИ

Е.А.Михайлов<sup>1,2</sup>, А.П.Степанова<sup>1\*</sup>, И.О.Тепляков<sup>3</sup>, И.Г.Поздеева<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва

<sup>2</sup>Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН, Москва

<sup>3</sup>Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

<sup>4</sup>Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва

nastasya\_stepanova@mail.ru

Электровихревые течения (ЭВТ) возникают при прохождении неоднородного электрического тока в результате силового воздействия вызванного взаимодействием тока с собственным или внешним магнитным полем ( $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ) [1]. Такие течения возникают при электродуговом и электрошлаковом переплаве в металлургии, также имеют место в аккумуляторных батареях, играют значимую роль при охлаждении некоторых атомных реакторов и даже изучаются в океанологии.

В работе рассмотрено электровихревое течение эвтектического сплава индий-галлий-олово в цилиндрической геометрии с тремя электродами (см. рис.1). Экспериментальная установка имеет следующую конструкцию: в цилиндрическом сосуде с непроводящим дном находится жидкость. Внутри, на оси расположен стержневой цилиндрический электрод радиусом 5 мм, также электродом является внешняя стенка цилиндра (внутренний радиус 50 мм), третий электрод представляет собой медную сетку установленную на расстоянии 25 мм от центра. Ток растекается от внутреннего и внешнего электродов к сетке. Внешнее магнитное поле создается провололочной катушкой намотанной на цилиндр, по которой пропускается ток. Ток в экспериментах составлял от 5 до 30 А, индукция магнитного поля от 0.001 до 0.01 Тл.





Рис. 1. Фотография экспериментальной установки с тремя электродами

В пространстве между электродами плотность тока имеет только радиальную компоненту  $J_r$ , при этом в областях между центральным и средним электродом и области между средним и внешним плотность тока имеет разный знак, катушка создает постоянно магнитное поле  $B_z$  направленное вдоль оси, и возникает азимутальная электромагнитная сила  $F_\phi = -J_r B_z$  закручивающая жидкость, причем эта сила имеет разные знаки в рассматриваемых областях, что приводит к возникновению разнонаправленных течений [2,3]. Взаимодействие разнонаправленных течений может привести к возникновению локальных поверхностных вихрей. На поверхность жидкого металла наносился раствор кислоты, что приводило к образованию пузырьков водорода служивших маркерами при видеосъемке. По положению маркеров определялась скорость течения на различном расстоянии от оси. Численно задача решалась как в осесимметричной так и трехмерной постановке, свойства жидкости считались постоянными. Были рассмотрены различные варианты граничных условий для сеточного электрода.

В заключение хотелось бы отметить, что полученные результаты интересны как с научной, так и с практической точки зрения, поскольку электровихревые течения активно применяют при перемешивании примесей в расплавленном металле для равномерного их распределения.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа А.П.Степановой по получению значений скорости течения была выполнена при поддержке Фонда поддержки теоретической физики и математики «Базис».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярев В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. // *Электровихревые течения* 1985. С. 135.
2. Kolesnichenko I., Mandrykin S. // Spin-up of electro-vortex flows under external magnetic field. Eur. Phys. J. Plus 137, 988, 2022
3. Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О., Гусева А.А., Токарев Ю.Н. // *Численное и экспериментальное исследование структуры закрученного электровихревого течения. Тепловые процессы в технике*, 2012. – 8. – С.345 – 352.

Степанова Анастасия Павловна, nastasya\_stepanova@mail.ru  
 Михайлов Евгений Александрович, ea.mikhajlov@physics.msu.ru  
 Тепляков Игорь Олегович, igor.teplyakov@mail.ru  
 Поздеева Ирина Геннадиевна, pozdeeva\_irina@mail.ru



# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМСЯ ЦИЛИНДРАМИ

*М.С. Мустайкин<sup>1\*</sup>, Е.Е. Пескова<sup>1</sup>, В.Н. Снытников<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,  
Саранск*

*<sup>2</sup>Институт катализа СО РАН, Новосибирск  
maksimmustajkin@mail.ru*

В настоящий момент нами разрабатывается вычислительный алгоритм и комплекс программ для моделирования дозвуковых газопылевых течений в цилиндрической геометрии [1]. За основу программы взят существующий код, реализованный в цилиндрической системе координат и рассчитанный на моделирование осесимметричных течений. [2]. На данном этапе в коде учтена возможность расчета вязких, теплопроводных многокомпонентных потоков. Код разработан с использованием технологии параллельных вычислений MPI [1]. Для дальнейшего расширения на учет других физико-химических процессов необходимо провести тестовые расчеты для верификации алгоритма в трехмерной постановке.

Проведено моделирование движения газового потока между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися вокруг оси [3]. Сравнение модуля скорости в наших расчетах хорошо согласуется с аналитическим решением, представленным в [3]. Исследована устойчивость течения. При малых значениях числа Рейнольдса течение остается ламинарным и газ движется по концентрическим окружностям вокруг оси цилиндров. В этом случае скорость имеет только азимутальную компоненту, а радиальная и осевая составляющие отсутствуют. Результаты настоящей работы сопоставлены с данными из [3].

Перспективы работы связаны с расширением модели и программы для учёта эффектов, характерных для химически активных двухфазных течений в присутствии лазерного излучения. Это позволит применять комплекс программ к решению задач химических технологий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мустайкин М.С., Пескова Е.Е.* Параллельный алгоритм для численного исследования дозвуковых реагирующих течений в цилиндрической системе координат // Параллельные вычислительные технологии – XIX всероссийская конференция с международным участием. Короткие статьи и описания плакатов. С. 211-217.
2. *Пескова Е.Е., Снытников В.Н.* Программный комплекс LasChemFVM-2D для моделирования нестационарных дозвуковых потоков двухфазной реакционной среды. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2024667038 от 19.07.2024
3. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.

Мустайкин Максим Сергеевич, maksimmustajkin@mail.ru  
Пескова Елизавета Евгеньевна, e.e.peskova@math.mrsu.ru  
Снытников Валерий Николаевич, snyt@catalysis.ru



# О НЕЛИНЕЙНОСТИ КОЛЕБАНИЙ РАСХОДА АНОМАЛЬНО ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Мухутдинова  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа  
mukhutdinova23@yandex.ru

Рассматривается течение термовязкой несжимаемой жидкости в кольцевом канале под действием постоянного перепада давления  $\Delta p$ . В первой половине канала на его внутренней и внешней стенках действует граничное условие первого рода, во второй половине учитывается конвективный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона–Рихмана (граничное условие третьего рода). Рассмотрена аномальная зависимость вязкости от температуры, предполагающая её немонотонное изменение [1].

Математическая модель рассматриваемого процесса представляет собой систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности, обобщённых уравнений Навье–Стокса [2], описывающих течение несжимаемой жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры, и уравнения конвективной теплопроводности. Уравнения математической модели реализованы с помощью компьютерного кода на основе метода контрольного объёма и алгоритма SIMPLE [3], модифицированных для учёта переменного коэффициента вязкости. Оригинальный компьютерный код реализован на языке программирования C++ в кроссплатформенной среде разработки Qt Creator.

Установлено, что резкое изменение теплообмена вдоль оси канала [4] может приводить к возникновению автоколебаний расхода жидкости. Данный эффект обусловлен динамикой вязкого барьера: изменение его положения, формы и размеров вызывает периодические колебания расхода. На рис. 1а представлено сопоставление незатухающих колебаний расхода аномально термовязкой жидкости в кольцевом канале с гармоническими колебаниями, заданными синусоидальной кривой. Из рисунка видно, что колебания системы по форме близки к гармоническим, однако наблюдается асимметрия: в верхней части колебания более узкие, тогда как в нижней — значительно шире. Данный факт свидетельствует о возникновении слабонелинейных автоколебаний томсоновского типа.

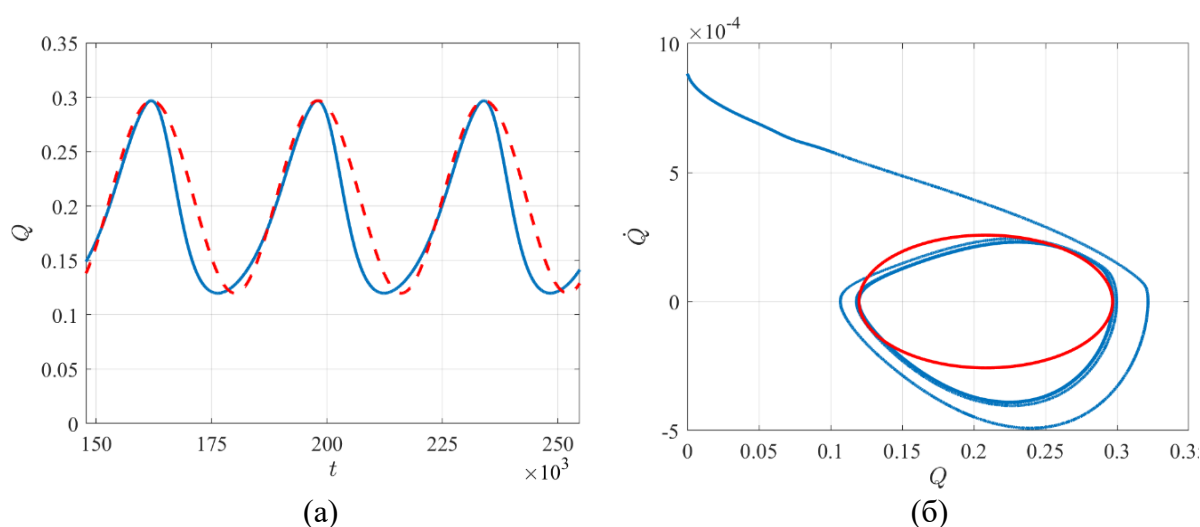


Рис. 1. Сравнение колебаний расхода аномально термовязкой жидкости с гармоническими колебаниями и их фазовых портретов.

Фазовые портреты колебаний, представленные на рис. 1б, описываются логарифмическими спиралями. В случае незатухающих колебаний фазовый портрет образует предельный цикл. Как видно из рисунка, гармонические колебания формируют замкнутую эллиптическую траекторию, а колебания расхода демонстрируют схожую структуру, однако с выраженной асимметрией.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Урманчеев С. Ф., Киреев В. Н.* Установившееся течение жидкости с температурной аномалией // Доклады Академии наук. 2004. Т. 396. № 2. С. 204-207.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 2 // М.: Физматлит. 1963. С. 728.
3. *Патанкар С. В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости // М.: МЭИ, 1984. 145 с.
4. *Киреев В.Н., Мухутдинова А.А., Урманчеев С.Ф.* Режимы автоколебаний при течении аномально термовязкой жидкости // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2024. Т.514.

Мухутдинова Айгуль Айратовна, mukhutdinova23@yandex.ru



## **ВАЛИДАЦИЯ ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКОГО КОДА STEG-IATE НА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

*А.С. Никулин\*, В.И. Мелихов*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

*iskander0215@gmail.com*

Российские атомные электростанции с водо-водяными энергетическими реакторами под давлением (ВВЭР) используют горизонтальные парогенераторы (ПГ) для выработки насыщенного пара [1, 2]. Надежное моделирование сложных теплогидравлических процессов, протекающих в объеме ПГ, необходимо для отработки различных технических решений, направленных на улучшение работы ПГ. На кафедре АЭС НИУ «МЭИ» разработан специализированный расчетный код STEG, позволяющий анализировать течение двухфазной пароводяной смеси во втором контуре горизонтального ПГ. Этот код прошел валидацию на экспериментальных данных, полученных как на экспериментальных испытательных установках, так и на натурных ПГ [3-7]. Тем не менее, несмотря на довольно успешную предсказательную способность кода STEG, работа по совершенствованию его математических моделей продолжается.

Следует отметить, что определяющее влияние на закономерности течения двухфазной пароводяной смеси оказывает система определяющих соотношений для описания межфазного трения [8]. Одним из важных параметров, определяющих интенсивность межфазных взаимодействий, является площадь межфазной поверхности в единице объема двухфазной смеси, которая существенным образом зависит от режима течения двух-

фазного потока. Для вычисления этой величины в коде STEG используется, так называемая, карта режимов течения, согласно которой определяется существование той или иной структуры двухфазного потока (пузырьковое течение, снарядное, дисперсное и т.п.) в данной области пространства в зависимости от объемного паросодержания и массовой скорости среды. В зависимости от режима течения рассчитывается площадь межфазной поверхности и выбираются соответствующие корреляции для расчета механического и теплового взаимодействия между фазами, а также каждой фазы с твердыми стенками. Однако, использование карты режимов течения имеет следующие недостатки: невозможно моделировать динамические изменения режимов течения; не учитываются эффекты, связанные с формированием потока, например, на входе в канал или при резком изменении геометрии; возникают искусственные разрывы значений параметров при смене режимов, зачастую вызывающие неустойчивость численного решения и т.д.

Уравнение переноса площади межфазной поверхности, учитывающее процессы коалесценции и фрагментации, а также фазового перехода и присоединенное к основной системе уравнений сохранения, позволяет непосредственно рассчитывать площадь межфазной поверхности в любой точке рассматриваемого течения в произвольный момент времени, не прибегая к карте режимов течения и критериальным соотношениям, что является ее несомненным преимуществом. В подробных недавних обзорных статьях [9, 10] представлено современное состояние исследований в этой области.

В данной работе представлена валидация кода STEG-IATE, в котором реализовано уравнение переноса площади межфазной поверхности с целью улучшения описания межфазных взаимодействий.

Для проведения тестирования теплогидравлического кода были выбраны данные по значениям уровнемеров в различных точках ПГВ-1000 в зависимости от уровня мощности реакторной установки (РУ), представленных в работе [11]. На первом этапе была построена нодализационная схема модели ПГВ-1000, приведенная на рисунке 1. В продольном, поперечном и вертикальном направлениях используются 77, 47 и 41 ячейки, соответственно. Типичный размер ячеек составлял 4-10 см. Нодализация выполняется с максимальным учетом геометрических особенностей ПГ.

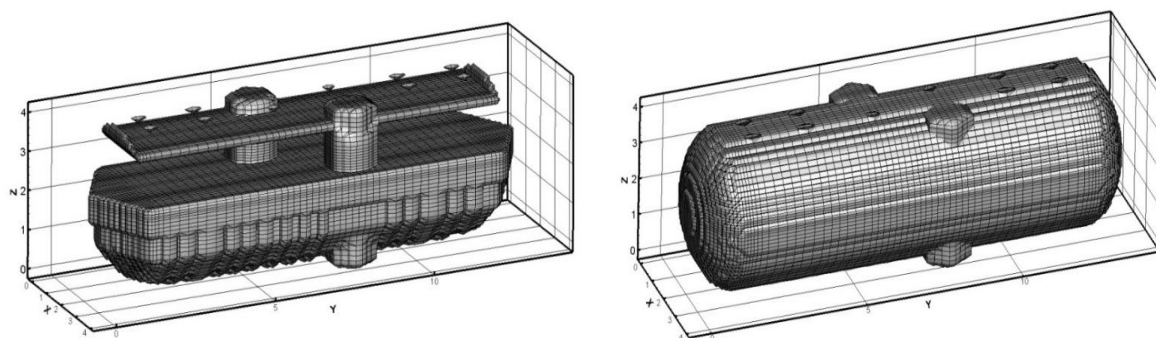


Рис. 1. Нодализационная схема ПГВ-1000

Далее произведено исследование теплогидравлических процессов в ПГ на четырех уровнях мощности РУ: 100%  $N_{ном}$ , 75%  $N_{ном}$ , 50%  $N_{ном}$  и 25%  $N_{ном}$ . Результаты расчетов усредняются по времени (50 с) при достижении установившегося состояния. Режим считался установившимся, если изменения таких параметров, как, средний уровень воды над ПДЛ, влажность пара на выходе, объемная доля пара над и под ПДЛ, скорости генерации и конденсации пара, меньше 10% от их средних значений. На рисунке 2 приведем сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными с учетом погрешности датчиков уровня.

Как видно из данных на рисунке 2 результаты расчета согласятся с экспериментальными данными и все значения лежат в пределах погрешности датчиков. Также стоит отметить, что массовый уровень в холодном торце остается практически неизменным с увеличением мощности, в то время как в центре ПГ с увеличением мощности уровень значительно возрастает.

В работе была выполнена валидация кода STEG-IATE на экспериментальных данных, полученных на натурном парогенераторе ПГВ-1000. В ходе испытания измерялись значения массового уровня над ПДЛ, в холодном и горячем торце ПГ на различных уровнях мощности РУ. Получено, что все результаты расчета лежат в пределах погрешностей датчиков. В дальнейшем теплогидравлический код STEG-IATE будет применяться для оптимизационных расчётов ПГ.

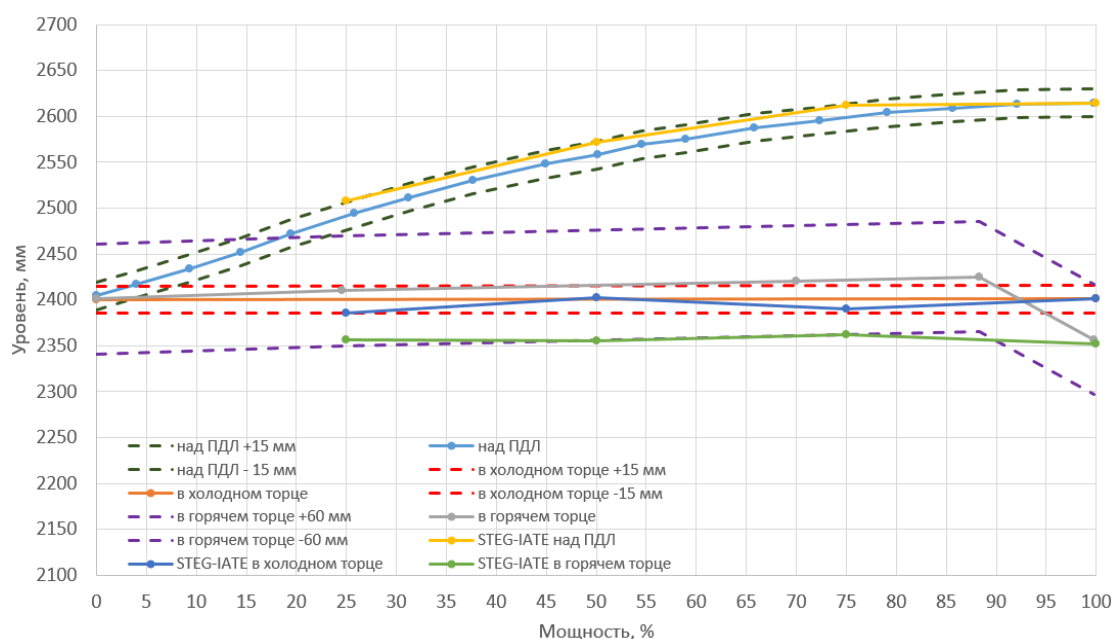


Рис. 2. Сравнение результатов расчета массового уровня на различных уровнях мощности РУ с экспериментальными данными [11]

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках проекта «Разработка и применение программного продукта для моделирования теплогидравлических процессов в горизонтальном парогенераторе для АЭС с ВВЭР» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программы научных исследований «Приоритет 2030: Технологии будущего» в 2024-2026 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукасевич Б.И., Трунов Н.Б., Драгунов Ю.Г., Давиченко С.Е. Парогенераторы реакторных установок ВВЭР для атомных электростанций. М.: Академкнига, 2004.
2. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Ле. Т.Т. Экспериментально-расчетные исследования гидродинамических процессов в горизонтальном парогенераторе. Москва: Наука, 2022.
3. Le T. T., Melikhov V.I., Melikhov O.I., Nerovnov A.A. and Nikonov S.M. Validation of the STEG code using PGV experiments on hydrodynamics of horizontal steam generator // Nucl. Eng. Des. 2020. V. 356. 110380. Pp.1-18.
4. Le T.T., Melikhov V.I., Melikhov O.I., Blinkov V.N., Nerovnov A.A. Nikonov S.M., Investigation of the equalization capability of submerged perforated sheets under thermal-

- hydraulic conditions of a horizontal steam generator // Ann. Nucl. Energy. 2020. V. 148. 107715. Pp. 1-21.
5. *Le T.T., Melikhov V.I., Melikhov O.I.* Recommended set of interfacial drag correlations for the two-phase flow under thermal-hydraulic conditions of a horizontal steam generator // Nucl. Eng. Des. 2021. V. 379. 111249. Pp.1-20.
  6. *Liu S., Yin F., Melikhov V.I., Melikhov O.I.*, Validation of the STEG code using experiments on two-phase flow across horizontal tube bundle // Nucl. Eng. Des. 2022. V. 399. 112048. Pp.1-19.
  7. Валидация кода STEG на экспериментальных данных по гидродинамике горизонтального парогенератора / Х. Абди, Н. Урегани Джафари, В.И. Мелихов, О.И. Мелихов // Теплоэнергетика, 2024, № 5, с.32-44.
  8. *Ishii M., Hibiki T.* «Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow». Springer. New York, 2011.
  9. *H. Chen; S. Wei; W. Ding; H. Wei; L. Li; H. Saxén; H. Long; Y. Yu* «Interfacial area transport equation for bubble coalescence and breakup: developments and comparisons». Entropy, 2021, V. 23, 1106, p.1-30.
  10. *S. Kim, M. Ishii, R. Kong, G. Wang* «Progress in two-phase flow modeling: Interfacial area transport». Nuclear Engineering and Design, 2021, V. 373, 111019, p.1-17.
  11. *Трунов Н.Б., Логвинов С.А., Драгунов Ю.Г.* Гидродинамические и тепло-химические процессы в парогенераторах АЭС с ВВЭР. М.: Энергоатомиздат, 2001.

Никулин Александр Сергеевич, iskander0215@gmail.com  
 Мелихов Владимир Игоревич, volodymyr.mel@yandex.ru



*Памяти академика РАН А.Г.Куликовского*

## ТРУСДЕЛЛ - СЕДОВ – КУЛИКОВСКИЙ

*В.М. Овсянников  
 Российский университет транспорта РУТ-МИИТ, Москва  
 Академия водного транспорта, Москва  
 OvsyannikovVM@yandex.ru*

В первом томе учебника Л.И.Седова «Механика сплошной среды» [1] имеется раздел Коэффициент кубического расширения параграфа Теория деформаций, стоящий в стороне от изложения основного материала. Леонид Иванович пишет, что точный геометрический расчет коэффициента объемного расширения  $\Theta$  твердой упругой среды имеет вид, зависящий от трех инвариантов тензора деформаций:  $I_1$  - линейного,  $I_2$  - квадратичного,  $I_3$  - кубического

$$\Theta = \sqrt{1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3} - 1$$

а потом посвящает весь курс гидродинамики, электродинамики и эластодинамики (теории упругости) упрощенным расчетам, пренебрегая высшими инвариантами,  $I_2$ ,  $I_3$  с использованием равенства  $\Theta \approx I_1$ , где первый инвариант  $I_1$  представляет собой оператор дивергенции. Как известно, оператор дивергенции не учитывает деформаций сдвига, а имеются упругие конструкции, работающие только на сдвиг.

С педагогической стороны понятно желание Л.И.Седова изложить студентам материал, уже освоенный наукой для практического применения. Но физические эффекты,



создающиеся в механике сплошной среды, учитывающей деформации сдвига, тогда будут потеряны.

Ученик Седова Андрей Геннадьевич Куликовский посвятил много времени теории учета высших инвариантов  $I_2$ ,  $I_3$ , опубликовав вместе со Свешниковой Е.И. монографию «Нелинейные волны в упругих средах» [2].

В ней авторы отмечают, что несмотря на проведение теоретических расчетов, они не знают опытных фактов, их подтверждающих.

Хочется высказать предположение о причинах, заставивших Леонида Ивановича отметить неполноту результатов существующей механики сплошной среды.

Известный математик и механик Кливленд Трусделл, переводя с латыни на английский язык первый вариант, ставшей классической работой, доклад 1752 года Эйлера в Прусской Королевской АН *Principia motus fluidorum* [3-5] не пренебрег членами высокого порядка малости, вычисленными геометрически Эйлером, а заботливо объединил их в якобианы. А.Т.Фоменко, которому я показал уравнение неразрывности, выведенное Эйлером, пояснил, что якобиан надо рассматривать, как меру искажения пространства.

Я показывал, выведенное Эйлером уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + (t - t_0) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

Г.Г.Черному. Больше часа мы обсуждали с В.В.Луневым возможный физический смысл вычисленных и отброшенных Эйлером слагаемых высокого порядка малости. И только В.А.Рыков – сотрудник ВЦ им. А.А.Дородницына Академии Наук с уверенностью определил, что это источники генерации звуковых колебаний. Это было трудно сделать, так как мы рассматривали выведенный Эйлером вариант уравнения неразрывности для несжимаемой среды, в которой звуковые волны не возникают.

У меня с 2006 года был записан вариант уравнения неразрывности с высшими инвариантами для сжимаемой среды. Поэтому удалось быстро вывести методом акустической аналогии Лайтхилла волновое уравнение и увидеть высшие инварианты в правой, источниковой части волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = I_2 + (t - t_0) I_3 \quad (1)$$

Возникает вопрос: что побудило дружившего с Седовым Трусделла, переводя доклад Эйлера на гидродинамическую тему, серьезно подойти к членам высокого порядка малости уравнения неразрывности и не уничтожить?

Ответ может заключаться в том, что диссертация Трусделла была посвящена поведению мембранных оболочек, которые плохо реагируют на деформацию сдвига. Поэтому Трусделлу жалко было выкидывать слагаемые сдвига, как основные элементы сопротивления оболочек тангенциальному воздействию.

Подтвердив физический смысл квадратичного инварианта решением нескольких задач на возникновение периодических колебаний, можно было обратиться к выяснению физического смысла кубичного инварианта  $I_3$ .

Волновое уравнение (1) можно представить суммой двух дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - k \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = I_2 \quad (2)$$

$$(1-k)\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = +(t-t_0)I_3 \quad (3)$$

Решение уравнения (1) является суммой решений уравнений (2) и (3) при некоторых значениях коэффициента  $k$ . Решение уравнения (3) дается возрастающей степенной функцией интервала времени  $(t-t_0)$  вида

$$p \sim (t-t_0)^3 I_3$$

и может описывать уединенную быстро возрастающую волну типа солитона.

Работы А.Г.Куликовского, К.Труделла и других исследователей [6-7], обративших внимание на неполноту применяемых в современных исследованиях уравнений сплошной среды, найдут применение в будущих физических открытиях.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука. 1973. 536 с.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский Лицей. 1998. 412 с.
3. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756-1757). Р. 271-311 - Opera omnia, ser. II. V. 13. Р. 1-369.
4. *Euleri L.* Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes // Volumen prius. Edidit Truesdell C. A. Lausannae. 1954.
5. *Эйлер Л.* Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН / Пер. с латинского Ивановой Е. В. и Овсянникова В. М. - 4-е изд., доп. – М.: Издательство «Спутник +» 2020. 203 с.
6. *Бубнов В.А.* Физические принципы гидродинамических движений. В сб.: Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Вып. 4, 1997. С. 206 – 269.
7. *Овсянников В.М.* Волнообразование и уравнение неразрывности Леонарда Эйлера с членами высокого порядка малости. Вторая часть . М: Спутник +, 2025. 56 с.

Овсянников Владислав Михайлович, [ovsyannikovvm@yandex.ru](mailto:ovsyannikovvm@yandex.ru)



## ТЕОРИЯ ШАРОВОЙ МОЛНИИ ПЕТРА ЛЕОНИДОВИЧА КАПИЦЫ – ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

*В.М.Овсянников*

*Российский университет транспорта РУТ-МИИТ, Москва*

*Академия водного транспорта, Москва*

*[OvsyannikovVM@yandex.ru](mailto:OvsyannikovVM@yandex.ru)*

Шаровые молнии известны издревле. В поведении шаровой молнии многочисленные исследователи отмечали необъяснимое современными законами электродинамики содержание большого количества энергии (см., например, [1] с. 595). Это подтвердил и П.Л.Капица. В 1955 г. Петр Леонидович Капица высказал гипотезу, что шаровая молния черпает и пополняет энергию извне от обычных молний [2], [3]. Ни один из известных

физических законов не мог это объяснить. В 1970-ые года академик Седов Л.И. напомнил [4], что в выведенном Эйлером в 1752 г. уравнении неразрывности для сплошных сред

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + (t - t_0) \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0)^2 \partial(u, v, w) / \partial(x, y, z) = 0$$

где  $u, v, w$  - компоненты скорости или перемещений вдоль осей координат  $x, y, z$ ;  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$  и  $\partial(u, v, w) / \partial(x, y, z)$  - якобианы поля скорости или перемещений второго и третьего порядков соответственно;  $t$  - время;  $t_0$  - время начала деформации, неправомерно выкидываются слагаемые, содержащие квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций или тензора деформаций

$$I_2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)}, \quad I_3 = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$$

Имеются основания для их учета. Это касается и гидродинамики, и других дисциплин механики сплошной среды: магнитодинамики, электродинамики, эластодинамики (теории упругости) [5].

Эйлер, работая в Берлине вывел дифференциальное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости и доложил в Королевской Прусской АН в знаменитом докладе *Principia motus fluidorum*, 1752 г., написанном на латыни. Уравнение было выведено для тех областей течения, где оправдывался линейный по времени лагранжев закон движения жидкой частицы. Объем при этом должен был изменяться по кубическому закону от времени, а в уравнении неразрывности появились слагаемые, зависящие от квадрата времени деформации контрольного объема. Эти слагаемые высокого порядка малости не влияли на расчет поля скоростей течения и были Эйлером отброшены. Но в волновое уравнение, имеющее второй порядок дифференциальности по времени, они проникают и становятся источниками генерации волн. Во втором докладе с обсуждением системы уравнений гидродинамики, сделанном в 1755 г., представленном на французском языке, Эйлер не выводил уравнения неразрывности, а представил его в укороченном виде. Второй доклад был напечатан раньше первого. Поэтому у научной общественности не создалось представления о наличии членов высокого порядка малости по времени, входящих в виде якобианов в квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций или тензора деформаций. О них стали вспоминать, когда решения уравнений гидрогазодинамики в основном были освоены и встали вопросы устойчивости счета, возникновения вибраций, звука, пульсаций и турбулизации.

Магнитодинамику и электродинамику Максвелл строил по подобию гидродинамики из-за сходства характера магнитных линий подковообразного магнита гидродинамическим линиям тока, идущим между источником жидкости и стоком. Поэтому, вычисленные геометрически в 1752 г. Леонардом Эйлером слагаемые уравнения неразрывности, содержащие квадратичный и кубичный инварианты [6-8], могут возникать и проявлять свое наличие и в системе уравнений Максвелла. Третье уравнение Максвелла принимает в этом случае такой вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + (t - t_0) \left[ \frac{\partial(E_x, E_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(E_y, E_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(E_z, E_x)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0)^2 \frac{\partial(E_x, E_y, E_z)}{\partial(x, y, z)} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $E_x, E_y, E_z$  компоненты напряженности электрического поля в направлениях осей координат. В статье [9] было представлено выведенное с его учетом волновое уравнение электродинамики для напряженности электрического поля

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = - \frac{t-t_0}{q\tau} \{ \partial I_{E2} / \partial x \} - \left( \frac{t-t_0}{q\tau} \right)^2 \{ \partial I_{E3} / \partial x \} \quad (2)$$

Здесь  $I_{E2}, I_{E3}$  квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций напряженности электрического поля

$$I_{E2} = \frac{\partial(E_x, E_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(E_y, E_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(E_z, E_x)}{\partial(z, x)}, \quad I_{E3} = \frac{\partial(E_x, E_y, E_z)}{\partial(x, y, z)},$$

$q\tau$  - неизвестный коэффициент, введенный для уравнивания размерностей слагаемых в уравнении (1).

Аналогичный вид имеют волновые уравнения для остальных компонент напряженности электрического поля.

Если его применить к поведению шаровой молнии, вошедшей в комнату, то мы можем видеть в течение 1-2 минут электрически нейтральный объем, который перемещается под действием ветра от открывающейся двери и сквозняка. А потом, шаровая молния вновь набирает потенциал и уходит в другое место.

Правая, неоднородная, источниковая часть волнового уравнения (2) содержит слагаемые, содержащие производные по пространственной координате от квадратичного и кубичного инвариантов. Они будут генерировать волны при большой неоднородности пространственного распределения напряженности стационарного электрического поля. Эта неоднородность измеряется величиной якобианов второго и третьего порядков, входящих в квадратичный  $I_{E2}$  и кубичный  $I_{E3}$  инварианты. Якобианы в отличие от оператора дивергенции учитывают также компоненты изменения напряженности в тангенциальных направлениях. Производные от инвариантов умножаются на интервал времени, отсчитываемый от времени остановки шаровой молнии в первой степени для квадратичного инварианта и во второй степени для кубичного инварианта. Это означает что со временем потенциал шаровой молнии повышается за счет находящихся поблизости неоднородностей напряженности электрического поля, создаваемых обычными линейными молниями. Выведенное в работе [9] волновое уравнение является математической формой выражения гипотезы П.Л.Капицы [2], [3], основанной на геометрическом расчете Эйлера [6-8].

После одномоментной - двухминутной подкачки потенциала шаровая молния делает новый галс, новую ступень своего пути, удаляясь из помещения.

Волновое уравнение содержит неизвестный коэффициент, обозначаемый  $q\tau$ , введенный для уравнивания размерностей уравнения неразрывности для напряженности электрического поля. Он должен быть определен экспериментально из какого-либо эксперимента с электричеством.

Во время «хорошей погоды» у поверхности Земли напряженность электрического поля [1] имеет величину около 130 В/м. При грозе в облаках эта величина увеличивается в 3000 раз, достигая значений 360000 В/м. В «хорошую погоду» производная от компоненты  $E_x$  по горизонтали невелика. Но в грозу из-за небольшой протяженности грозовой области производные вида  $\partial E_x / \partial x$ ,  $\partial E_x / \partial y$ , ... и инварианты  $I_{E2}, I_{E3}$  принимают большие значения.

Сравнительно недавно скоростной киносъемкой обнаружено явление остановки обычной молнии между ступенями на время порядка  $1/10000$  с. В статье [9] получение обычной молнией энергии для последующего движения объясняется в тех же словах, как и для шаровой молнии, черпаньем энергии из окружающих неоднородностей за счет слагаемых, содержащих высшие инварианты поля электрической напряженности.

Дж. Барри – автор книги о шаровых и чечеточных молниях [10] пишет: «Маловероятно, чтобы какой-то естественный источник энергии, заключенный в объеме шаровой молнии, до сих пор оставался необнаруженным и неидентифицированным». Мы увидели, что недостаточное внимание, как указал Л.И.Седов, проявлено к геометрическому выводу Эйлера уравнения неразрывности 1752 г., в котором упущен учет деформаций сдвига, подробно учитываемый в уравнениях движения пограничного слоя или в уравнениях Навье-Стокса.

В Нобелевской лекции П.Л.Капица сказал: «Шаровая молния – тоже явление, создаваемое высокочастотными колебаниями, возникающими в грозовом облаке после обычной молнии. Таким образом подводилась необходимая для поддержания продолжительного свечения шаровой молнии». Выведенное волновое уравнение с учетом высших инвариантов для поля электрической напряженности и описывает математически подводимую энергию от негладкости напряженности стационарного электрического поля.

Мы видим пример суммирования знаний о шаровой молнии на протяжении примерно 270 лет.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бычков В.Л.* Естественные и искусственные шаровые молнии в атмосфере Земли. М.: МАКС ПРЕСС. 2021. 624 с.
2. *Капица П.Л.* О природе шаровой молнии. ДАН СССР. Том 101, 1955, с.245.
3. *Капица П.Л.* Шаровая молния и радиоизлучение линейных молний. ЖЭТФ, т.38, 1968, с.1829.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука. 1973. 536 с.
5. *Овсянников В.М.* Волнообразование и уравнение неразрывности Леонарда Эйлера с членами высокого порядка малости. Вторая часть. М.: Издательство Спутник +. 2025. 56 с.
6. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756-1757). Р. 271-311 - Opera omnia, ser. II. V. 13. Р. 1-369.
7. *Euleri L.* Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes // Volumen prius. Edidit Truesdell C. A. Lausannae. 1954.
8. *Эйлер Л.* Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН / Пер. с латинского Ивановой Е. В. и Овсянникова В. М. - 4-е изд., доп. – М.: Издательство «Спутник +» 2020. 203 с.
9. *Овсянников В.М.* Использование геометрических свойств трех инвариантов в волновом уравнении для напряженности электрического поля. Известия РАН. Серия физическая, 2025. Том 89, № 2, с.164-171.
10. *Барри Дж.* Шаровая молния, чечеточная молния. М.: «МИР», 1983. 288 с.

Овсянников Владислав Михайлович, [ovsyannikovvm@yandex.ru](mailto:ovsyannikovvm@yandex.ru)



# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ПЕСЧАНЫХ СТРУКТУР НА ПОВЕРХНОСТИ ДНА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

*Л.Л. Огородников\*, С.С. Вергелес*

*Институт теоретической физики имени Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка  
logorodnikov@itp.ac.ru*

Проблема формирования структур на поверхности песка в виде барханов, на песчаном дне водного потока и в объеме воды под действием волн, распространяющихся на поверхности, уже давно вызывает огромный интерес у исследователей. Так, в [1] описаны различные типы поверхностных структур, которые могут образовываться при колебательном движении над слоем песка. Это направление до сих пор остаётся актуальным: в [2] сообщается об экспериментальном исследовании механизма формирования и развития изолированных зон ряби над песчаным слоем при однонаправленном распространении поверхностных волн. Теоретические модели, описывающие течения жидкости вблизи неровного дна, были предложены в работах [3,4]. В работах [5-7] проведен численный счет, учитывающий возможность изменения поверхности дна под действием внешнего течения.

В данной работе исследуется процесс формирования песчаного дна в стоячей волне. Задача рассматривается в пределе малой толщины слоя песка (высота гребней на дне мала по сравнению с периодом ряби), малой амплитуды колебаний течения по сравнению с периодом ряби. Размер частиц предполагается малым по сравнению с толщиной погранслоя Стокса. Используемый подход позволяет описывать, как на дне при умеренных амплитудах накачки формируются полосы из частиц, имеющие свою мелкомасштабную структуру. Также подход позволяет определить зависимость характерного периода мелкомасштабных песчаных структур от параметров задачи.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 23-72-30006.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bagnold R. A.* Motion of waves in shallow water. Interaction of waves and sand bottoms // *Proc. Roy. Soc. (A)*, 1946, Vol. 187, pp. 1 – 18.
2. *Sarkar S., Roy S., Barman K. et al.* Turbulence effect on the mechanics of ripple formation under regular wave // *J. Earth Syst. Sci.*, 2022, Vol.126, p.126.
3. *Lyne W. H.* Unsteady viscous flow in a curved pipe // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1971. – Т. 45. – №. 1. – С. 13-31.
4. *Benjamin T.B.* Shearing flow over a wavy boundary // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1959. – Т. 6. – №. 2. – С. 161-205.
5. *Blondeaux P.* Sand ripples under sea waves Part 1. Ripple formation // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1990. – Т. 218. – С. 1-17.
6. *Roos P. C., Blondeaux P.* Sand ripples under sea waves. Part 4. Tile ripple formation // *Journal of fluid mechanics.* – 2001. – Т. 447. – С. 227-246..
7. *Vittori G., Blondeaux P.* Sand ripples under sea waves Part 3. Brick-pattern ripple formation // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1992. – Т. 239. – С. 23-45.

Огородников Леон Леонтьевич, logorodnikov@itp.ac.ru

— ♦ ♦ ♦ —

# МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ ЖИДКОСТИ

А.А.Очиров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
otchirov@mail.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные периодические течения активно исследуются на протяжении нескольких столетий. Такой интерес связан с колоссальным количеством разнообразных практических приложений. Классическая теория линейных и нелинейных волн представлена в фундаментальных трудах 20-го столетия см. например [1 – 3]. В недавних работах обсуждалось построение полных решений, содержащих волновые и лигаментные компоненты поверхностных периодических течений в разных моделях [4 – 5]. Исследовалось влияние поверхностного электрического заряда на характер и динамику волновых и лигаментных компонентов [6 – 7]. В настоящей работе рассматривается методика получения полных дисперсионных соотношений, содержащих лигаментные и волновые компоненты периодических течений на примере поверхностных возмущений в двумерной вязкой несжимаемой стратифицированной жидкости.

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Математическая формулировка задачи базируется на фундаментальной системе уравнений механики жидкостей [8] и включает в себя уравнение переноса импульса, уравнение неразрывности, равновесное распределение плотности и естественные граничные условия на свободной поверхности и на бесконечности. С учетом несжимаемости жидкости компоненты скорости  $\mathbf{u} = (u, w)$  в двумерной задаче можно представить с помощью функции тока  $\mathbf{u} = (u, w) = (\partial_z \psi, -\partial_x \psi)$ . Тогда в линейной постановке в приближении Буссинеска математическая формулировка задачи записывается следующим образом:

$$z < 0: \begin{cases} \rho_{00} g \int_z^\zeta \partial_x \tilde{\rho}(x, \chi, t) d\chi + \rho_{00} g \partial_x \zeta - \nu \rho_{00} \partial_z \Delta \psi + \rho_{00} \partial_x \psi + \partial_x \tilde{P} = 0 \\ \nu \rho_{00} \partial_x \Delta \psi - \rho_{00} \partial_x \psi + \partial_z \tilde{P} = 0 \\ \partial_t \tilde{\rho} + \frac{\exp(-z_\Lambda) \partial_x \psi}{\Lambda} = 0 \end{cases}$$

$$z = 0: \begin{cases} \partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi = 0 \\ \tilde{P} + \sigma \partial_{xx} \zeta + 2\nu \rho \partial_{zx} \psi = 0 \\ \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho(x, z, t) = \rho_{00} [r(z) + \tilde{\rho}(x, z, t)] = \rho_{00} [\exp(-z_\Lambda) + \tilde{\rho}(x, z, t)], \quad z_\Lambda = z/\Lambda$$

$$P = P_{00} + \int_z^\zeta g \rho(x, \xi, t) d\xi + \tilde{P}(x, z, t), \quad z \rightarrow -\infty: (\partial_z \psi, -\partial_x \psi) \rightarrow (0, 0)$$

Здесь  $\rho, \rho_{00}, \tilde{\rho}$  – плотность, ее равновесное значение на уровне  $z = 0$  и возмущение, связанное с распространением периодических течений соответственно,  $g$  – ускорение



свободного падения,  $\zeta$  – отклонение свободной поверхности от равновесного положения,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $P, P_{00}, \tilde{P}$  – давление, его равновесное на уровне  $z = 0$  значение, и периодическое возмущение соответственно,  $\Lambda$  – масштаб стратификации,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Решение задачи (1) ищется в виде гармонических функций вида  $f(x, z, t) \sim A \exp(ik_x x + k_z z - i\omega t)$  с действительной и положительно определенной частотой  $\omega > 0$  и комплексно определенными компонентами волнового вектора  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ . Совместное решение системы уравнений (1) приводит к уравнению движения в спектральном виде:

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega) - N^2 k_x^2 \exp(-z_\Lambda) = 0, \quad N^2 = g/\Lambda \quad (2)$$

Здесь  $N$  – частота плавучести. Обезразмеривая задачу на собственные масштабы среды – обратную частоту плавучести  $\tau_N = N^{-1}$  и вязкий волновой масштаб  $\delta_N^{gv} = \sqrt[3]{g\nu}/N$  получим уравнение (2) в безразмерных переменных, в котором естественным образом выделяется малый параметр  $\varepsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N\nu^{1/3} / g^{2/3}$ , имеющий смысл отношения собственных пространственных параметров:

$$i\varepsilon(k_{*x}^2 - k_{*z}^2)^2 \omega_* + (k_{*x}^2 - k_{*z}^2)\omega_*^2 - k_{*x}^2 \exp(-z_\Lambda) = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (3) ищется относительно функции  $k_z = k_z(k_x, \omega)$ , поскольку вертикальная координата естественным образом выделяется из-за стратификации жидкости. Уравнение (3) относится к классу сингулярно возмущенных уравнений, поэтому асимптотические решения ищутся в виде регулярных  $k_{*z}$  и сингулярных  $k_{*l}$  разложений [9]:

$$k_{*z} = k_{z0} + \varepsilon k_{z1} + \varepsilon^2 k_{z2} + \dots, \quad k_{*l} = \varepsilon^{-\eta} (k_{l0} + \varepsilon k_{l1} + \varepsilon^2 k_{l2} + \dots), \quad \eta > 0 \quad (4)$$

Значение параметра  $\eta$  выбирается согласно теории сингулярных возмущений для каждого случая индивидуально. В настоящем уравнении анализ показывает, что  $\eta = 1/2$ . Асимптотические решения записываются следующим образом:

$$k_{z0} = \pm k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda)}}{\omega_*}, \quad k_{l1} = \pm \frac{ik_{*x} \exp(-z_\Lambda)}{2\omega_*^2 \sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda)}}, \dots \quad (5)$$

$$k_{l0} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_*}, \quad k_{l1} = \pm \frac{(1+i)k_{*x}(\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda))}{2\sqrt{2}\omega_*^{5/2}}, \dots$$

Анализ показывает, что регулярные решения  $k_{*z}$  описывают крупномасштабные волновые компоненты решений. Эти компоненты хорошо изучены в современной теории поверхностных волн, а регулярные решения (5) сводятся к известным классическим выражениям при выполнении предельных переходов. Сингулярные решения  $k_{*l}$  описывают тонкоструктурные высокоградиентные лигаментные компоненты течений. Лигаменты наблюдаются в природе и в лабораторных экспериментах. При упрощении модели и переходе к идеальной жидкости этот класс решений отбрасывается и теряется качественно отличающийся тип решений, по мощности сопоставимый с волновыми компо-

нентами. Для построения дисперсионных соотношений необходимо уравнения движения решать совместно с граничными условиями на свободной поверхности. С учетом (5) и граничных условий записывается дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} & (k_x^2 + k_z^2) \left( k_l \omega^2 - gk_x^2 - \sigma k_x^4 / \rho_{00} + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2) \right) - \\ & - (k_x^2 + k_l^2) \left( k_z \omega^2 - gk_x^2 - \sigma k_x^4 / \rho_{00} + i\omega \nu k_z (3k_x^2 - k_z^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Решения (5) в совокупности с решением дисперсионного уравнения (6) определяют все компоненты периодических поверхностных течений, возникающих в используемой модели. Усложнение модели и учет уравнения состояния, неоднородности температуры, химического состава, глобального вращения приводит к увеличению порядка системы уравнений и увеличению количества решений, определяемых сингулярными корнями и описывающих соответствующие лигаментные тонкоструктурные компоненты течений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитая аналитическая асимптотическая методика, с использованием методов теории сингулярных возмущений позволяет получать полные дисперсионные соотношения периодических течений. Представленная методика не ограничивается поверхностными возмущениями и может быть применена для расчетов крупномасштабной динамики и тонкой структуры периодических течений в жидкостях и газах различной природы: поверхностных, внутренних, акустических инерционных и гибридных волн, возникающих под влиянием нескольких факторов.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.
2. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 621 с.
3. Ле Блон, П., Майсек Л. Волны в океане В 2 томах. М.: Мир, 1981. 846 с.
4. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11 № 8. Art. No.402
5. Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 5. С. 524–533.
6. Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. Волновое движение в вязкой однородной жидкости с поверхностным электрическим зарядом // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87. № 3. С. 379–391.
7. Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. Двумерные периодические течения на поверхности несжимаемой жидкости в различных моделях среды // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2024. Т. 60, Вып. 1, С. 1–14
8. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.
9. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984.

Очиров Артем Александрович, otchirov@mail.ru



# ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ДИФФУЗИЕЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ

*А.А. Очиров\*, В.В. Головкин*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
otchirov@mail.ru*

Встречающиеся в природе жидкости и газы стратифицированы. Плотность связана сложной функциональной зависимостью с вариациями температуры, химического состава и давления, называемом уравнением состояния. Вследствие этого на топологии всегда возникают течения вследствие существования градиента солёности или температуры, что приводит к возникновению нестационарных потоков, индуцированных диффузией.

Впервые на эту проблему обратил внимание Л. Прандтль в своей фундаментальной работе "Гидроаэромеханика" [1]. Он рассматривал течения, возникающие на наклонной пластине в присутствии градиента температуры. Однако, в своих расчетах Л. Прандтль получил результат, в котором скорость индуцированного течения не зависит от угла наклона пластины. Позднее К. Вунш [2] в аналогичной задаче получил выражения, в которых присутствует зависимость от угла наклона пластины, вдоль которой возникает индуцированное течение. О. М. Филлипс провел простой эксперимент и экспериментально и аналитически показал, что в устойчиво стратифицированной жидкости, находящейся в контейнере с наклонными стенками, могут возникать спонтанные движения [3]. Филлипс определил распределения скорости и плотности, а также массовый перенос в диффузионно-индуцированном пограничном слое, где число Рейнольдса обратно пропорционально числу Прандтля. Его работа стала отправной точкой для большинства последующих исследований в этой области.

Аналитические методы решения получили развитие в статьях А. В. Кистовича и Ю. Д. Чашечкина, которые в работе [4] привели точное аналитическое решение задачи о нестационарном течении вдоль бесконечной наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной жидкости с учетом неравномерного распределения солёности и в пренебрежении температурной неоднородностью жидкости. В работе рассматривается неограниченная невозмущенная жидкость, линейно стратифицированная вдоль вертикальной координаты  $z$ , в которую в начальный момент времени помещается бесконечная непроницаемая жесткая пластина, наклоненная к горизонту под углом  $\alpha$ . Рассмотрение проводится в системе координат  $(\xi, \eta)$ ,  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\eta \in [0, +\infty)$ , связанной с пластиной. Уравнение состояния, связывающее плотность  $\rho$  с распределением солёности  $S$  записывается следующим образом:

$$\rho = \rho_0(1 + \beta S_i(z)), \quad \beta S_i(z) = -\sigma_0 z / \Lambda.$$

Здесь  $\rho_0$  – равновесное значение плотности на реперном уровне,  $\Lambda$  – масштаб стратификации;  $\beta = (\partial \rho / \partial S)_{T,p}$  – коэффициент солевого сжатия,  $\sigma_0$  – безразмерная константа,  $S_i(z)$  – невозмущённое распределение солёности. С учетом уравнения состояния в приближении Буссинеска в математическая формулировка задачи по определению поля скоростей  $\mathbf{u} = (u, w)$  и нормированного на коэффициент солевого сжатия возмущения солёности  $\tilde{S}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{S} + u \partial_\xi \tilde{S} + v \partial_\eta \tilde{S} - \sigma_0 (u \sin \alpha + v \cos \alpha) / \Lambda &= \kappa (\partial_{\xi\xi} \tilde{S} + \partial_{\eta\eta} \tilde{S}) \\
\partial_t u + u \partial_\xi u + v \partial_\eta u &= -\partial_\xi P + v (\partial_{\xi\xi} u + \partial_{\eta\eta} u) - \tilde{S} g \sin \alpha \\
\partial_t v + u \partial_\xi v + v \partial_\eta v &= -\partial_\eta P + v (\partial_{\xi\xi} v + \partial_{\eta\eta} v) - \tilde{S} g \cos \alpha \\
\partial_\xi u + \partial_\eta v &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $g$  - ускорение свободного падения;  $P$  - давление за вычетом гидростатического, нормированное на  $\rho_0$ ;  $\kappa$  и  $\nu$  - коэффициент диффузии соли и кинематическая вязкость соответственно. В работе [3] получено аналитическое автомодельное решение нестационарного течения, индуцированного диффузией:

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \frac{\sigma_0}{\Lambda} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \left[ \sqrt{\pi} \varepsilon \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) - 2 \exp \left( -\frac{y^2}{4\varepsilon} \right) \right] \cos \alpha. \\
u &= \frac{2gt}{\Lambda(1-\varepsilon)} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \left[ \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{y^2}{4\varepsilon} \right) \exp \left( -\frac{y^2}{4\varepsilon} \right) - \frac{y\sqrt{\pi}}{2} \left( 1 + \frac{y^2}{2\varepsilon} \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{y^2}{4\varepsilon} \right) \exp \left( -\frac{y^2}{4\varepsilon} \right) + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left( 1 + \frac{y^2}{2\varepsilon} \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \right] \sin 2\alpha, \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{\nu}, \quad y = \frac{\eta}{\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Современные исследования в основном используют численные методы и прикладные пакеты программ прямого численного моделирования для решения подобных задач. Это связано, во-первых, со сложностью получения аналитических нестационарных решений, а во-вторых, с развитием и доступностью технических средств для проведения расчетов.

Недавние численные исследования показывают, что течения, индуцированные диффузией на пластине конечных размеров, характеризуются разделением пространственных масштабов: в задаче возникает вязкий и диффузионный малые масштабы, характеризующие тонкую структуру возникающих нестационарных течений [5, 6]. Похожие исследования проводились на клине [7] и на сфере [8]. Анализ результатов показывает, что на симметричных объектах возникновение потоков жидкости не приводит к движению, а на несимметричных – является причиной медленного движения, связанного с возникновением диффузионных потоков. Этот тип движения является одной из причин перемещения микроорганизмов и загрязнений в мировом океане.

Результаты исследований течений, индуцированных диффузией, находят применение в океанологии для получения более полных и точных представлений о характере протекания процессов перемешивания в океане, моделирования взаимодействия подводных объектов с окружающей средой и анализа процессов в прибрежных зонах. Также подобные задачи актуальны с точки зрения приложений в физике атмосферы для прогнозирования погоды и возникновения и распространения долинных и горных ветров.

Исследования диффузионно-индуцированных течений в стратифицированных средах прошли путь от первых теоретических работ Прандтля и Филлипса до современных комплексных исследований, сочетающих аналитические, численные и экспериментальные методы. Развитие этой области способствовало углублению понимания фундаментальных процессов в природных и технических системах и продолжает оставаться актуальным направлением гидродинамики. Особенный интерес представляет поиск нестационарных решений для течений, индуцированных диффузией, асимптотические значения которых являются физически обоснованными начальными и граничными условиями для широкого класса задач механики жидкостей и газов.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. — М.: ИЛ, 1949.
2. *Wunsch C.* On oceanic boundary mixing // Deep sea research and oceanographic abstracts. 1970. V. 17. No. 2. P. 293-301.
3. *Phillips O. M.* On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // Deep sea research and oceanographic abstracts. 1970. V. 17. No. 3. P. 435-443.
4. *Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.* Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // Прикладная математика и механика. — 1993. — Т. 57. — №. 4. — С. 50.
5. *Загуменный Я. В., Чашечкин Ю. Д.* Тонкая структура нестационарного течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2013. №. 3. С. 100-117.
6. *Chashechkin Y. D., Zagumennyi I. V.* Formation of waves, vortices and ligaments in 2D stratified flows around obstacles // Physica Scripta. 2019. V. 94. No. 5. Art.no. 054003.
7. *Димитриева Н. Ф., Чашечкин Ю. Д.* Тонкая структура стратифицированного течения около неподвижного и медленно движущегося клина // Океанология. 2018. Т. 58. №. 3. С. 358-368.
8. *Байдулов В. Г., Матюшин П. В., Чашечкин Ю. Д.* Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2007. №. 2. С. 119-132.

Очиров Артем Александрович, otchirov@mail.ru

Головкин Вадим Владимирович, golovkin.vdm@gmail.com



## ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КОЛЬЦЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

*А.А.Очиров\*, У.О. Трифонова*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*otchirov@mail.ru*

## ВВЕДЕНИЕ

Аналитические исследования периодических течений, возникающих на поверхности жидкостей проводятся, начиная с классических работ Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, Дж. Г. Стокса и других исследователей. У. Томсон [1] в 1871 году подробно описал и теоретически обосновал картину волнообразования, возникающую при движении тел на воде. Исследования углублены лордом Рэлеем, разработавшим общий подход к анализу капиллярно-гравитационных волн [2]. Задачи, связанные с распространением течений на поверхности и в толще жидкости актуальны и в наше время [3]. Это связано с активно развивающимися академическими и технологическими приложениями в области биотехнологиях, в химической и нефтехимической промышленности. Совместное использование аналитических, экспериментальных и вычислительных подходов способствует более глубокому пониманию динамики и структуры течений [4]. Настоящее исследование по-

священо построению полных решений для осесимметричных кольцевых течений, возникающих на свободной поверхности равномерно стратифицированной жидкости с использованием аналитических асимптотических методов. Математическая модель основывается на фундаментальной системе уравнений механики жидкостей [5]. Рассмотрение проводится в приближении несжимаемой жидкости в отсутствии источников массы и тепла, пренебрегая зависимостью кинетических коэффициентов от температуры.

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается редуцированная задача о распространении осесимметричных кольцевых периодических течений по поверхности вязкой равномерно стратифицированной несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат  $Or\varphi z$ , ось  $z$  которой направлена против направления поля сил тяжести  $\vec{g}$ , а плоскость  $Or\varphi$  совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости, занимающей все нижнее полупространство  $z < 0$ . Жидкость характеризуется постоянными коэффициентами кинематической вязкости  $\nu$  и поверхностного натяжения  $\sigma$ . С учетом условия несжимаемости поле скорости  $\vec{u}$  задается двумя скалярными функциями  $\Phi$  и  $\Psi$  (тороидально – полоидальная декомпозиция):

$$\vec{u} = \left( \partial_{rr}\Phi, -\partial_r\Psi, -\frac{1}{r}\partial_r\Phi - \partial_{rr}\Phi \right)$$

Стратификация определяется равновесным распределением плотности и имеет экспоненциальный профиль  $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-z/\Lambda) = \rho_{00} \exp(-z_\Lambda)$ , где  $\rho_{00}$  – постоянное равновесное значение плотности на невозмущенной поверхности жидкости,  $\Lambda$  – масштаб стратификации, связанный с частотой плавучести соотношением  $N^2 = g/\Lambda$ :

$$\rho = \rho_0(z)(1 + \tilde{\rho}(r, z, t))$$

Давление жидкости состоит из атмосферного давления  $P_0$ , гидростатического давления и давления, вызванного периодическим возмущением  $P(r, z, t)$ :

$$P = P_0 + \int_z^{\zeta(r,t)} g\rho(r, \xi, t) d\xi + \tilde{P}(r, z, t)$$

Математическая формулировка задачи дополняется стандартными граничными условиями на свободной поверхности. В приближении Буссинеска принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{00}(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) = \rho_{00} \nu \Delta \vec{u} - \nabla P + \rho \vec{g} \\ \partial_t \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0 \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z - \zeta) + \vec{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0 \\ P - 2\nu\rho_{00}(\vec{n} \cdot \nabla)(\vec{u} \cdot \vec{n}) - \sigma \text{div} \vec{n} = 0 \\ -\nu\rho_{00}[(\vec{n} \cdot \nabla)(\vec{u} \cdot \vec{\tau}) + (\vec{\tau} \cdot \nabla)(\vec{u} \cdot \vec{n})] = 0 \end{array} \right.$$

Здесь  $\zeta(r, t)$  - поверхностное возмущение, распространяющееся радиально от оси Oz,  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  - векторы внешней и касательной нормали к свободной поверхности жидкости соответственно.

Возмущения полагаются малыми, что позволяет перейти к линеаризованной постановке задачи.

$$\begin{cases}
 \partial_r \tilde{P} + \frac{v \partial_{rz} \Phi}{r^2} + \rho_{00} \partial_{rt} \Phi - v \rho_{00} \partial_{rzz} \Phi - \frac{v \rho_{00} \partial_{rrz} \Phi}{r} - v \rho_{00} \partial_{rrrz} \Phi = 0 \\
 -\frac{v \partial_r \Psi}{r^2} - \partial_{rt} \Psi + v \partial_{rzz} \Psi + \frac{v \partial_{rr} \Psi}{r} + v \partial_{rrr} \Psi = 0 \\
 z < 0 \left\{ \begin{aligned}
 &e^{-\frac{z}{\Lambda}} g \rho_{00} \tilde{P} + \partial_z P w + \frac{v \rho_{00} \partial_r \Phi}{r^3} - \frac{\rho_{00} \partial_{rt} \Phi}{r} + \frac{v \rho_{00} \partial_{rzz} \Phi}{r} - \\
 &-\frac{v \rho_{00} \partial_{rr} \Phi}{r^2} - \rho_{00} \partial_{rrt} \Phi + v \rho_{00} \partial_{rrzz} \Phi + \frac{2v \rho_{00} \partial_{rrr} \Phi}{r} + v \rho_{00} \partial_{rrrr} \Phi = 0 \\
 &\partial_t \tilde{P} + \frac{\partial_r \Phi}{r \Lambda} + \frac{\partial_{rr} \Phi}{\Lambda} = 0
 \end{aligned} \right. \\
 z = 0 \left\{ \begin{aligned}
 &-\partial_t \zeta - \frac{\partial_r \Phi}{r} - \partial_{rr} \Phi = 0 \\
 &A_2 k_{l1} + A_3 k_{l2} + A_1 k_z = 0 \\
 &-g \partial_r \zeta - \frac{\gamma \partial_r \zeta}{r^2} + \frac{\gamma \partial_{rr} \zeta}{r} + \gamma \partial_{rrr} \zeta - \frac{3v \partial_{rz} \Phi}{r^2} - \partial_{rzt} \Phi + v \partial_{rzz} \Phi + \frac{3v \partial_{rrz} \Phi}{r} + 3v \partial_{rrrz} \Phi = 0 \\
 &-\frac{\partial_r \Phi}{r^2} - \partial_{rzz} \Phi + \frac{\partial_{rr} \Phi}{r} + \partial_{rrr} \Phi = 0
 \end{aligned} \right.
 \end{cases}$$

Решение задачи ищется в виде произведения гармонической функции и специальной функции Бесселя. Полагается, что частота  $\omega$  является положительно определённой величиной, волновой вектор  $\vec{k} = (k_r, k_z)$  принимает комплексные значения, при этом мнимая часть отвечает за пространственное затухание периодического течения:

$$f(r, z, t) \sim A_m J_0(k_r r) e^{ik_z z - i\omega t}$$

Для амплитудных множителей строится система линейных алгебраических уравнений. Из условия совместности получается спектральное уравнение, связывающее компоненты волнового вектора с частотой периодического движения:

$$(k_r^2 + k_z^2) v - i\omega (N^2 k_r^2 - i e^{z/\Lambda} (k_r^2 + k_z^2)) ((k_r^2 + k_z^2) v - i\omega) \omega = 0$$

Для последующего анализа проведена процедура обезразмеривания спектрального уравнения на собственные масштабы задачи – пространственные (вязкий волновой масштаб  $\delta_N^{gv} = \sqrt[3]{g\nu / N}$ ) и временные (обратная частота плавучести  $\tau_N = N^{-1}$ ). При таком выборе обезразмеривания естественным образом выделяется малый параметр  $\varepsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = \nu^{1/3} N / g^{2/3}$ , который характеризуется отношением собственных масштабов среды.



$$\begin{aligned}
& (k_{*r}^2 \varepsilon + k_{*z}^2 \varepsilon - i\omega_*) \times \\
& \times (k_{*r}^2 - ie^{z/\Lambda} k_{*r}^4 \omega_* \varepsilon - 2ie^{z/\Lambda} k_{*r}^2 k_{*z}^2 \omega_* \varepsilon - ie^{z/\Lambda} k_{*z}^4 \omega_* \varepsilon - e^{z/\Lambda} k_{*r}^2 \omega_*^2 - e^{z/\Lambda} k_{*z}^2 \omega_*^2) = 0 \\
& k_z = \pm \sqrt{-k_r^2 + i \frac{\omega}{\nu}}, \quad k_{*z} = \pm (-1)^{3/4} \sqrt{-ik_{*r}^2 - \frac{\omega_*}{\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{e^{-\frac{z}{2\Lambda}} \sqrt{4ik_{*r}^2 \varepsilon + e^{z/\Lambda} \omega_*^3}}{\varepsilon \sqrt{2} \sqrt{\omega_*}}}, \\
& k_{*z} = \pm (-1)^{3/4} \sqrt{ik_{*r}^2 + \frac{\omega_*}{\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{e^{\frac{z}{2\Lambda}} \sqrt{4ik_{*r}^2 \varepsilon + e^{z/\Lambda} \omega_*^3}}{\varepsilon \sqrt{2} \sqrt{\omega_*}}}
\end{aligned}$$

Индексом «\*» обозначены соответствующие безразмерные величины. Спектральное уравнение относится к классу сингулярно возмущенных уравнений и для решения требуют применения методов теории сингулярных возмущений [6]. Решения содержат регулярные и сингулярные корни, определяющие волны и лигаменты соответственно. При выполнении предельных переходов лигаментные и волновые компоненты сводятся к известным решениям.

Получены полные аналитические асимптотические решения редуцированной задачи о распространении периодических кольцевых течений в вязкой равномерно стратифицированной несжимаемой жидкости. Регулярные решения описывают динамику крупномасштабных волновых компонентов, сингулярные решения – структуру течения. В предельных переходах к более простым случаям полученные решения сводятся к известным классическим выражениям.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson W. Hydrokinetic solutions and observations // Phil. Mag. 1871. Vol. 42. Pp. 362–377.
2. Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука Т.2 М.: ГИТТЛ. 1955.
3. Chashechkin Y.D., Ochirov A.A. Periodic Flows in a Viscous Stratified Fluid in a Homogeneous Gravitational Field // Mathematics. 2023. V. 11. No. 21. P. 4443.
4. Хайирбеков Ш. Х., Чашечкин Ю. Д. // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2025. Т.26, вып. 1.
5. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984.

Очиров Артем Александрович, otchirov@mail.ru

Трифонов Ульяна Олеговна, ulya-trifonova02@yandex.ru



## ВОЛНЫ И ЛИГАМЕНТЫ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЯХ

*А.А.Очиров\*, Ю.Д. Чашечкин*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
otchirov@mail.ru*

Влияние неоднородности атмосферы и океана на разнообразные физические процессы и явления исследуется на протяжении нескольких столетий, начиная с работ Б. Франклина [1]. Знаковыми являются работы В. Экмана, в которых он исследовал явление «мертвой воды», обнаруженное Ф. Нансеном во время экспедиции к Северному полюсу на судне «Фрам» [2]. В этих исследованиях впервые продемонстрирована важность учета стратификации жидкости при исследовании физических явлений в океане, хотя еще в работах Дж. Г. Стокса было отмечено о необходимости составления математических уравнений с учетом гетерогенности жидкости [3] вплоть до 20-го века математические теории жидкости рассматривались в приближении постоянной плотности, что существенно упрощало вычисления и позволяло получить аналитические решения рассматриваемых задач. Существенный вклад в развитие представлений о распространении течений в атмосфере внес Г. Лэмб, отразив основные результаты в фундаментальном труде [4]. В конце 20-го – начале 21-го века появляются высокоразрешающие экспериментальные данные распространения внутренних гравитационных волн и лигаментов в стратифицированной жидкости и новые теоретические подходы, позволяющие получить аналитические и численные решения для крупномасштабных и тонкоструктурных компонентов течений [5 – 7]. Математические принципы построения решений сформулированы и представлены в [8]. Позднее аналитические подходы получили развитие для применения к расчету полных дисперсионных соотношений поверхностных возмущений [9] и возмущений в слабосжимаемой жидкости [10]. В гетерогенной жидкости уравнения движения нужно рассматривать совместно с уравнением состояния жидкости, определяющей связь между плотностью, вариациями давления, солёности, температуры. В случае малых возмущений изменяющихся величин допустимо использование линеаризованного уравнения состояния, определяющего стратификацию жидкости и изменение плотности, связанное с распространением возмущений [11]. Настоящая работа посвящена построению полных дисперсионных соотношений в вязкой сжимаемой неизотермической жидкости, включающих в себя крупномасштабные волновые и тонкоструктурные лигаментные компоненты течений.

В двумерной декартовой системе координат  $Oxz$  рассматривается неограниченная сжимаемая жидкость, в которой пренебрегается вариациями примесей, а уравнение состояния которой описывается линеаризованным соотношением, связывающим плотность  $\rho$  с давлением  $P$  и температурой  $T$ :

$$\rho = \rho(P, T) = \rho_0(z) \left[ 1 + \alpha_p (P(x, z, t) - P_0(z)) - \alpha_T (T(x, z, t) - T_0(z)) \right]$$
$$\alpha_p = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho c_s^2}, \alpha_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_s, P = P_0(z) + \tilde{P}(x, z, t), T = T_0(z) + \tilde{T}(x, z, t).$$

Здесь  $\rho_0(z)$ ,  $P_0(z)$ ,  $T_0(z)$  – равновесное распределение плотности, давления и температуры, соответственно,  $\alpha_p$  – коэффициент сжимаемости (в адиабатической атмосфере),  $c_s$  – адиабатическая скорость звука,  $\alpha_T$  – коэффициент температурного расши-

рения при постоянной энтропии. Собственные параметры среды формируют пространственные и временные масштабы, которые варьируются в широком диапазоне. В используемой модели возникают следующие параметры: частота плавучести  $N_c = \sqrt{N_{if}^2 - g^2/c_s^2} = \sqrt{g/\Lambda - g^2/c_s^2}$ , масштаб стратификации  $\Lambda = |\ln \rho / dz|^{-1}$ , вязкий волновой масштаб  $\delta_N^{vg} = \sqrt[3]{vg}/N_{if}$ , пространственный вязкий масштаб  $\delta_g^v = \sqrt[3]{v^2/g}$ , микромасштаб Рэлея  $\delta_N^v = \sqrt{v/N_{if}}$ , микромасштаб Стокса  $\delta_N^v = \sqrt{v/\omega}$ , временные и пространственные масштабы, связанные со сжимаемостью среды:  $\tau_c^v = v/c_s^2$ ,  $\delta_c^v = v/c_s$  и с неоднородностью температурного распределения:  $\tau_c^m = \chi_T/c_s^2$ ,  $\delta_c^m = \chi_T/c_s$ . Типичные значения собственных масштабов задачи для воздуха приведены в таблице 1.

Табл. 1. Характерные значения собственных масштабов задачи для воздуха

Параметр	Частота плавучести $N_c$	Период плавучести $T_b = 2\pi/N_c$	Вязкий масштаб $\delta_g^v = \sqrt[3]{v^2/g}$	Вязкий волновой масштаб $\delta_N^{vg} = (vg)^{1/3} N_{if}^{-1}$	Масштаб плавучести $\Lambda$ ,	Микромасштаб Рэлея $\delta_N^v = \sqrt{v/N}$
Значение	0.03 с <sup>-1</sup>	3.5 мин	0.005 см	200 см	10 км	1 см

Безразмерные параметры, характеризуют отношение пространственных масштабов. В рассматриваемой модели возникают следующие безразмерные параметры: параметр  $\Theta$ , характеризующий изменение плотности, связанное с изменением температуры; число Прандтля  $Pr = \nu/\chi_T$ ; число Фруда  $Fr$ , в котором в качестве характерной скорости выбрана адиабатическая скорость звука  $c_s$ , а в качестве характерного масштаба длины – пространственный вязкий масштаб  $\delta_g^v = \sqrt[3]{v^2/g}$ ; безразмерный параметр  $\varepsilon$  играет роль отношения пространственного вязкого  $\delta_g^v = \sqrt[3]{v^2/g}$  и вязкого волнового масштабов  $\delta_N^{vg} = (vg)^{1/3} N_{if}^{-1}$ . Типичные значения используемых в работе безразмерных параметров для воздуха приведены в таблице 2.

Табл. 2. Значения безразмерных параметров задачи для воздушной среды

Параметр	$\Theta = \frac{T_{00}\alpha_T\delta_N^{gv}}{\Lambda_T} = \frac{T_{00}\alpha_T(vg)^{1/3}}{N_{if}\Lambda_T}$	$Pr = \frac{\nu}{\chi_T}$	$Fr = \frac{c_s^2}{g\delta_g^v} = \frac{c_s^2}{v^{2/3}g^{2/3}}$	$\varepsilon = \frac{\delta_g^v}{\delta_N^{vg}} = \frac{N_{if}v^{1/3}}{g^{2/3}}$
Значение	10 <sup>-7</sup>	0,7	4·10 <sup>9</sup>	6·10 <sup>-5</sup>

Приводя постановку задачи к безразмерному виду относительно собственных естественных параметров задачи: обратной частоты плавучести  $\tau_N = N_{if}^{-1}$  и вязкого волнового масштаба  $\delta_N^{vg} = (vg)^{1/3} N_{if}^{-1}$  получим уравнению движения в спектральном виде, записанное в безразмерных переменных:

$$\Theta\left(i\varepsilon^2 k_{*z} \omega_* k_*^2 + \varepsilon \omega_*^2 k_{*z} - i k_{*x}^2\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\text{Pr}} k_*^2 - i \omega_*\right) \left[ \varepsilon k_*^2 (\omega_* - \varepsilon^2 k_{*z}) + i \varepsilon^2 (k_*^4 + k_{*z} \omega_*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\text{Fr}} \left( \frac{4}{3} \varepsilon^3 \omega_* k_*^4 + \varepsilon^2 \left( i k_*^2 + \frac{1}{3} i k_{*x}^2 - \frac{7}{3} i \omega_*^2 k_*^2 \right) + \varepsilon (k_{*z} k_*^2 + \omega_* (1 - \omega_*^2)) - i k_{*z} \omega_* \right) \right] = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) получено для решения в виде гармонических функций, вида  $f(x, z, t) \sim A \exp(ik_x x + ik_z z - i \omega t)$  с положительно определенной действительной частотой  $\omega > 0$  и комплексно определенными компонентами волнового вектора  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$

Решение уравнения (1) находится с использованием аналитических асимптотических методов и содержит регулярные и сингулярные корни, которые не выписываются здесь в силу своей громоздкости. Анализ показывает, что регулярные корни описывают крупномасштабные волновые компоненты и в предельных переходах равномерно сводятся к известным дисперсионным соотношениям для акустических волн. Сингулярные корни описывают тонкоструктурные лигаментные компоненты, определяющие структуру неоднородности температуры и импульса среды, а при выполнении предельных переходов равномерно сходятся к известным выражениям для лигаментов, сопутствующих внутренним гравитационным волнам.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые представлены полные решения для дисперсионных соотношений периодических течений в вязкой сжимаемой неоднородной по температуре жидкости с учетом линеаризованного уравнения состояния. Получены регулярные и сингулярные корни, описывающие динамику и тонкую структуру периодических течений.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Franklin B.* Experiments and observations on electricity. Cambridge University Press, 2018.
2. *Ekman, V.W.* On dead water. In: The Norwegian North Polar Expedition 1893–1896. Scientific results, Nansen, F., Yakov Dyewad: Christiania, Norway, 1906; V. 5. 152 p.
3. *Stokes, G.G.* On the theory of oscillatory waves. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 1847, 8. Part 4. 8, pp. 441-455
4. *Lamb H.* Hydrodynamics. Sixth edition. Cambridge.UK. CAP, 1932. 738 p.
5. *Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.* Регулярные и сингулярные компоненты периодических движений в толще жидкости // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. №. 5. С. 844-854.
6. *Байдулов В. Г., Матюшин П. В., Чашечкин Ю. Д.* Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. №. 2. С. 119-132.
7. *Загуменный Я. В., Чашечкин Ю. Д.* Тонкая структура нестационарного течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. №. 3. С. 100-117.
8. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.

9. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11 № 8. 402
10. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // *Mathematics*. — 2023. — Vol. 11, no. 21. — Art. No. 4443.
11. Очиров А. А., Трифонова У. О., Чашечкин Ю. Д. Расчет тонкой структуры двумерных периодических течений в сжимаемой атмосфере // *Прикладная математика и механика*. 2025. Т. 89. №. 3. С. 494-511.

Очиров Артем Александрович, otchirov@mail.ru  
 Чашечкин Юлий Дмитриевич, yulidch@gmail.com



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ДИФфуЗИЕЙ

А.А. Очиров\*, А.С. Чернов

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
 otchirov@mail.ru

### ВВЕДЕНИЕ

Диффузионные течения играют большую роль в судостроении, авиастроении, океанологии, метеорологии. Они возникают в стратифицированных средах, под действием градиентов температуры (горные и долинные ветры в атмосфере) [1] и солёности (в океане) [2]. Развитие численных методов и совершенствование вычислительной техники, а также повышение доступности для исследователей высокопроизводительных электронно-вычислительных машин позволяют производить прямое численное моделирование и визуализировать подобные течения в постановках, когда аналитическое решение затруднено. В настоящей работе обсуждается постановка задачи и физически обоснованные начальные и граничные условия в задачах, в которых возникают течения, индуцированные диффузией на топологии.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая формулировка задачи основывается на системе фундаментальных уравнений механики жидкостей и представляет из себя её редуцированную версию [3]. В линейно стратифицированной несжимаемой жидкости с использованием приближения Буссинеска, в отсутствии источников массы, солёности и в однородной по температуре жидкости математическая формулировка задачи записывается следующим образом [4]:

$$\rho = \rho_{00} (1 - z/\Lambda + s), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = - \frac{1}{\rho_{00}} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + s \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = \kappa_s \Delta s + \frac{w_z}{\Lambda_p},$$

Здесь  $\rho$  – распределение плотности,  $\rho_{00}$  – её равновесное значение,  $\Lambda$  – масштаб стратификации,  $s$  – возмущение солёности,  $\mathbf{u} = (u_x, w_z)$  – вектор скорости жидкости,  $\mathbf{g}$

– ускорение свободного падения,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\kappa_s$  – коэффициент диффузии соли,  $P$  – давление в жидкости.

В нулевой момент времени в покоящуюся и невозмущенную жидкость горизонтально подвешивают непроницаемую жесткую пластину нейтральной плавучести. Основные уравнения дополняются начальными и граничными условиями на поверхности пластины  $\Sigma$  – записываются условие прилипания и непротекания:

$$\mathbf{u}, s|_{t \leq 0} = 0, \quad u_x|_{\Sigma} = w|_{\Sigma} = 0, \quad \left[ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Sigma} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{u}, s|_{x, z \rightarrow \infty} = 0,$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности пластины  $\Sigma$ . Дополнительным граничным условием будем считать условие затухания возмущений скорости и солёности на бесконечности.

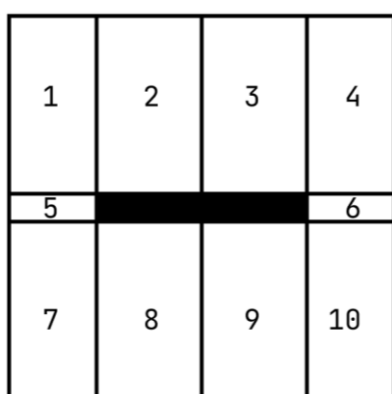
## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование задачи выполняется в программной среде OpenFOAM методом конечных объемов с помощью модифицированного несжимаемого решателя isoFoam [5]. Решатель дополняется переменными ( $\rho$  и  $s$ ) и соответствующими уравнениями для их расчета, а также новыми вспомогательными параметрами, определяющими жидкость – частота плавучести  $N$ , коэффициент диффузии  $\kappa_s$ , ускорение свободного падения  $\mathbf{g}$ , кинематическая вязкость  $\nu$  и др.

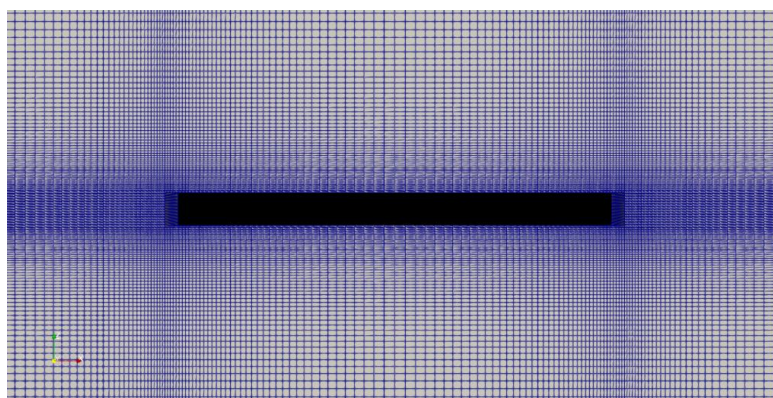
Особое внимание необходимо уделить подбору начальных и граничных условий, соответствующих реальным условиям. Требуется задать начальное распределение солёности  $S_0(z) = S_{00}(1 - z/\Lambda)$ , где  $S_{00}$  – равновесное значение солёности,  $\Lambda$  – масштаб стратификации.

## СОЗДАНИЕ РАСЧЕТНЫХ СЕТОК

Дискретизация расчетной области осуществлялась с использованием утилит blockMesh, а также в открытой интегрируемой платформе SALOME. Расчетная область была разделена на несколько блоков, со сгущением ячеек в направлении препятствия (рис.1 а).



а)



б)

Рис. 1. а) Разбиение вычисляемой области на блоки (для направленного сгущения сетки), б) представление расчетной сетки около пластины  $2.0 \times 0.15$  см (характерный размер ячейки около границ пластины  $l \leq 4 \cdot 10^{-6}$  м, или.  $1/10$  диффузионного масштаба  $\delta_N^{\kappa_s}$ )

При моделировании задачи необходимо учитывать естественные масштабы течений: макромасштаб  $\Lambda$ , определяющий стратификацию в жидкости и собственные микромасштабы течений, для тонких структур высчитываются диффузионный  $\delta_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s / N}$  и вязкий  $\delta_N^{\nu} = \sqrt{\nu / N}$ . Они являются основными критериями для оценки параметров области решения и дискретизации расчетной сетки.

Вблизи границ препятствия, где фиксируются наибольшие значения градиентов, требуют расположения такого количества ячеек, что их размер оказывается на порядок меньше минимального микромасштаба задачи. В случае жидкости с параметрами воды  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\kappa_s = 1.41 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $g = 9.8 \text{ м}/\text{с}^2$ ,  $N = 0.88 \text{ с}^{-1}$  размер ячеек для наблюдения тонких структур течения, представленный на рис. 1 б), должен быть на порядок меньше диффузионного масштаба жидкости  $\delta_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s / N}$ . Настройка параметра simpleGrading в утилите blockMesh позволила задать неравномерное распределение размеров ячеек вдоль координатных направлений внутри блока сетки и построить расчетную сетку с минимальным размером ячейки  $4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  вблизи непроницаемых границ препятствия, что удовлетворительно разрешает диффузионный микромасштаб  $\delta_N^{\kappa_s}$  при небольшом числе клеток. Для повышения точности расчетов и эффективности моделирования необходимо прибегать к адаптивным сеткам, позволяющим детально моделировать области с резкими градиентами физических параметров. Измельчение сетки в наблюдаемых и уменьшение детализации в неинтересующих нас областях позволяет на порядки уменьшить потребление вычислительных ресурсов. Расчеты течений часто выполняются в параллельном режиме на ядрах процессора помощью утилит decomposePar и reconstructPar, что заметно ускоряет время вычислений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача математического моделирования течений в непрерывно стратифицированных жидкостях с учетом эффектов нелинейности и диффузии. Исследования показали, что использование платформы OpenFOAM в решении подобных задач перспективно и может быть использовано для визуализации и численного расчета полных решений, содержащих волны и тонкоструктурные компоненты течений, индуцированных диффузией около неподвижной пластины, и качественно согласуется с экспериментальными данными.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. — М.: ИЛ, 1949.
2. *Phillips O. M.* On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // Deep sea research and oceanographic abstracts. 1970. V. 17. No. 3. P. 435-443.
3. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. No. 4. Art. no. 286.
4. Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д. Численный анализ течений стратифицированной и однородной жидкостей около горизонтальной и наклонной пластин // Прикл. Мат. Мех. 2019. Т. 83, № 3. С. 452–467.
5. *Dimitrieva N.F., Zagumennyi Ya.V.* Numerical simulation of stratified flows using OpenFOAM package // Proceedings of ISP RAS. 2014. V. 26, No 5. P. 187–200.





## ПРОГРАММНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕРМОХИМИИ

*Е.Е. Пескова<sup>1\*</sup>, В.Н. Снытников<sup>2</sup>, М.С. Мустайкин<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>НИИ Мордовский государственный университет, Саранск*

*<sup>2</sup>Институт катализа СО РАН, Новосибирск  
e.e.peskova@math.mrsu.ru*

Настоящее исследование направлено на разработку 3D-кода для моделирования дозвуковых течений в цилиндрических координатах. Течения характеризуются нестационарностью, наличием нелинейных процессов (гомо- и гетерогенных химических реакций, многокомпонентной вязкостью, диффузией, теплопроводностью, теплообменом между газом и нанокатализатором, поглощением энергии лазерного излучения компонентами газа и нанокатализатором) и существенно дозвуковым характером течения, что создает ряд вычислительных трудностей, успешное преодоление которых в цилиндрических координатах представляет отдельную научно-практическую ценность.

Разработка инструментария ведется на основе ранее разработанного 2D-кода для осесимметричных дозвуковых химически активных течений [1]. Математическая модель представляет собой расширенную на учет нанокатализатора и ввода лазерного излучения систему уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха в цилиндрической системе координат. Вычислительный алгоритм построен на основе метода расщепления по физическим процессам с использованием численных схем не ниже второго порядка аппроксимации. Разработанный код верифицирован средствами вычислительной математики: проведено исследование сходимости на последовательности сгущающихся сеток, для осесимметричной постановки задачи проведено сравнение с ранее разработанным кодом [1].

На основе разрабатываемого инструментария можно будет получать фундаментальные знания о возникающих пространственно-временных структурах в химически активных средах в случаях неоднородности ввода газа и наночастиц, лазерного излучения, получать достоверные, необходимые при разработке новых химических технологий знания о процессах тепло-массообмена и о возможных режимах энергосбережения в ходе конверсии метана, которая протекает со значительным энергопотреблением.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Программный комплекс LasChemFVM-2D для моделирования нестационарных дозвуковых потоков двухфазной реакционной среды. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2024667038 от 19.07.2024.

Пескова Елизавета Евгеньевна, e.e.peskova@math.mrsu.ru  
Снытников Валерий Николаевич, snyt@catalysis.ru  
Мустайкин Максим Сергеевич, maksimmustajkin@mail.ru



# ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ, К КОТОРЫМ ПРИЛОЖЕНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ВНЕШНЕЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

П. И. Поляков

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва  
paul.ingvarsson@yandex.ru

Разработка жидкометаллических батарей (ЖМБ) сопряжена с рядом нерешённых проблем, среди которых выделяется задача о гидродинамических неустойчивостях поверхности раздела двух жидких металлов, к которым приложен электрический ток от внешней цепи (когда батарея находится в процессе заряда) и при наличии внешнего магнитного поля (в первую очередь вертикально направленного). Жидкометаллической батареей называется химический источник тока, состоящий из трёх жидких слоёв: двух металлических и электролита между ними.

Начиная с конца XIX века известна так называемая «плескательная неустойчивость» [1] (в англоязычной литературе Metal Pad Roll Instability или Sloshing Instability), возникающая в электролизёрах на границе раздела двух жидкометаллических фаз: криолита и расплава чистого алюминия. Физика явления заключена во взаимодействии вертикального внешнего магнитного поля и пропускаемого электрического тока (силой порядка десятков кА), пространственное распределение которого зависит в том числе от малых деформаций поверхности раздела металлов. Критерием возникновения неустойчивости согласно [1]:

$$\beta = \frac{I B_z}{\Delta \rho g H_1 H_2} < \beta_c \approx 2.81 R,$$

где  $I$  – электрический ток;  $B_z$  – внешнее магнитное поле;  $\Delta \rho$  – разность плотностей жидких металлов;  $g$  – ускорение свободного падения;  $H_1, H_2$  – высоты слоёв металлов.

Другой магнитогидродинамической неустойчивостью в системах двух и более слоёв электропроводящих жидкостей является неустойчивость Тэйлера [2], возникающая при нарушении баланса магнитного давления и силы Ампера при числах Гартмана  $Ha > 20$ : малые возмущения способны в таких случаях образовать крупномасштабные несимметричные течения.

В настоящей работе проведено численное моделирование механического движения поверхности раздела двух жидких металлов уравнениями движения вязкой жидкости и электромагнетизма в системе из двух жидкометаллических слоёв. Эффекты, связанные с тепловыделением, диффузией, электрохимическими реакциями, каплеобразованием, не учитывались. В табл. 1 приведены физические свойства моделируемых сред при комнатной температуре (293 К): расплавов NaK, в верхней половине цилиндра, и InGaSn, в нижней половине.

*Таблица 1. Физические свойства моделируемых расплавов*

Свойство	NaK [3]	InGaSn [4]
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	870	6360
Динамическая вязкость, Па·с	$7.48 \times 10^{-4}$	$2.1 \times 10^{-3}$
Электропроводность, 1/(Ом·м)	$2.6 \times 10^6$	$3.3 \times 10^6$

Управляющими параметрами в данном исследовании приняты три безразмерных числа:

- число Гартмана  $Ha$ , характеризующее влияние внешнего магнитного поля на систему;
- число ЭВТ [3]  $S = \mu_0 I^2 / \rho \nu^2$ , определяющее отношение электромагнитной силы к вязкостной диссипации (здесь  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\nu$  – кинематическая вязкость);
- отношение высоты  $\Gamma$  ЖМБ к её радиусу.

Значения управляющих параметров выбирались таким образом, чтобы рассмотреть области устойчивых и неустойчивых течений согласно критериям, приведённым выше.

На рис. 1 (а) представлена расчётная область задачи – трёхмерная цилиндрическая область, разделённая в начальный момент пополам на области, занятые модельными жидкостями. Общая высота цилиндра, занятого расплавами, равна  $H$ ; диаметр –  $D$ . Сверху и снизу размещены цилиндры, моделирующие медные токоподводы диаметром  $0.5D$  (казаны оранжевым). На рис. 1 (б) показана сетка расчётной области при значении  $\Gamma = 0.5$ ; число ячеек составило порядка  $10^5$ .

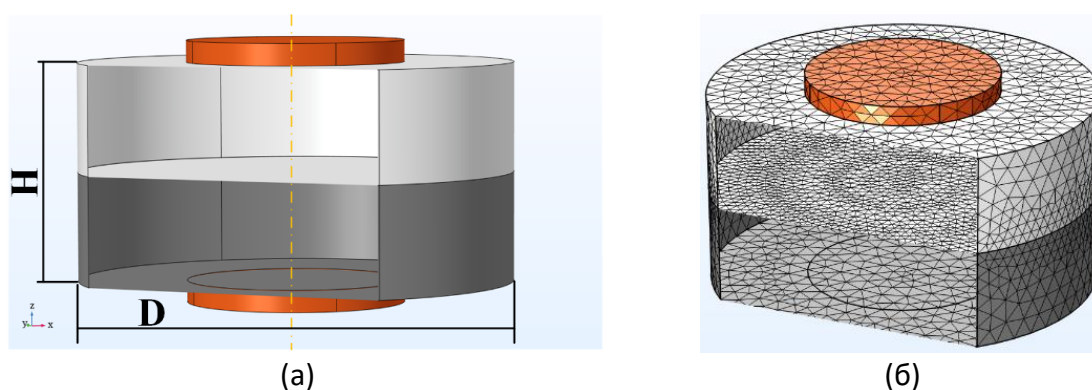


Рис. 1. Расчётная область (а) и сетка расчётной области (б) при значении  $\Gamma = 0.5$

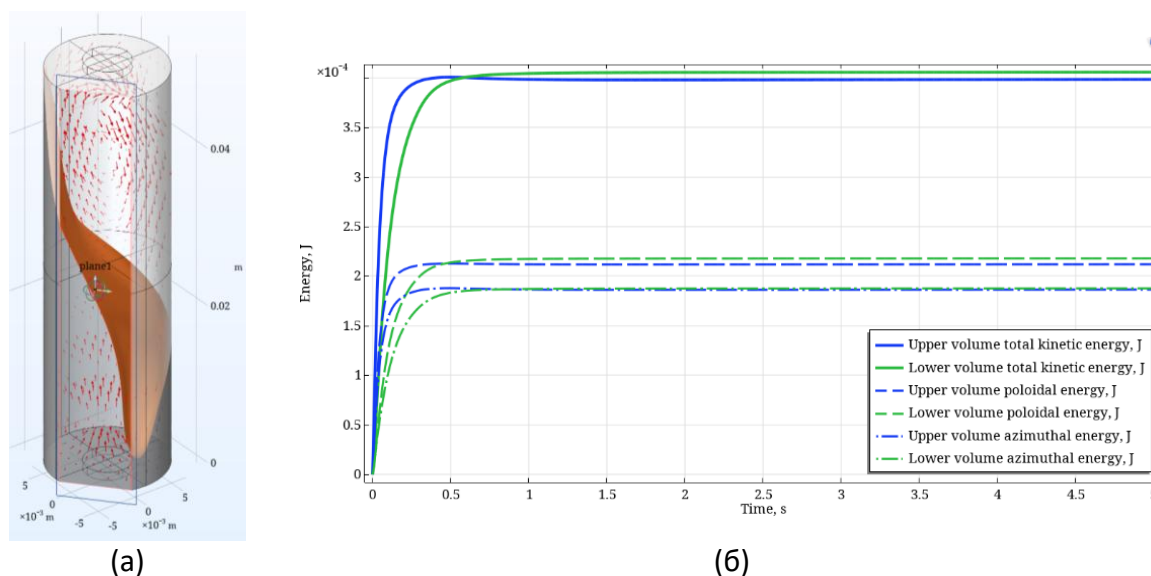


Рис. 2. Результаты для моделирования динамики поверхности раздела жидкостей при значении параметра  $\Gamma = 3.75$ , соответствующем пропорции батареи АА: (а) поле скорости и распределения фаз при магнитном поле Земли  $Ha \approx 1.5$  и числе  $S \approx 1.5 \times 10^8$ ; (б) кинетическая энергия течений по фазам: синим показаны энергии для верхнего металла, зелёным – для нижнего; штрихпунктиром – для азимутальной закрутки, штриховой линией – для полоидального вихревого движения, сплошной – для всего движения по фазам.

Для численного исследования использован метод конечных элементов, реализованный в программе для ЭВМ COMSOL [5]. Моделирование динамики поверхности раздела проводилось методом фаз, аналогом распространённой методики Volume of Fluid.

Итогом численного моделирования является карта режимов поведения поверхности раздела в пространстве управляющих параметров ( $Ha$ ,  $S$ ,  $\Gamma$ ). Данный график необходим для подбора размеров проектируемой батареи и режимов подключения электрического тока и внешнего магнитного поля. Дополнительно показаны графики кинетической энергии полоидальных и азимутальных течений.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 075-00269-25-00).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herreman W, Nore C, Guermond J-L, Cappanera L, Weber N, Horstmann GM.* Perturbation theory for metal pad roll instability in cylindrical reduction cells // *Journal of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 878. Pp. 598–646. doi:10.1017/jfm.2019.642
2. *Herreman W, Nore C, Cappanera L, Guermond J-L.* Tayler instability in liquid metal columns and liquid metal batteries // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 771. Pp. 79–114. doi:10.1017/jfm.2015.159
3. *Leonchuk S. S., Falchevskaya A. S., Nikolaev V., Vinogradov V. V.* NaK alloy: underrated liquid metal // *J. Mater. Chem. A*. 2022. Vol. 10(43). Pp. 22955–22976. DOI: 10.1039/D2TA06882F
4. *Plevachuk Yu., Sklyarchuk V., Eckert S., Gerbeth G., Novakovic R.* Thermophysical Properties of the Liquid Ga–In–Sn Eutectic Alloy // *Journal of Chemical & Engineering Data*. 2014. Vol. 59 (3). Pp. 757–763. DOI: 10.1021/je400882q
5. <https://www.comsol.com/> Дата обращения: 28.10.2025

Поляков Павел Игоревич, paul.ingvarsson@yandex.ru



## КОНВЕКТИВНАЯ ПЦР В МИКРОПРОБИРКЕ: ВЛИЯНИЕ УГЛА НАКЛОНА НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

*Л.Ю. Привалов*

*Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа  
lavrenty.privalov@gmail.com*

### ВВЕДЕНИЕ

Конвективная полимеразная цепная реакция (ПЦР) — вариант классической ПЦР, в котором тепловые циклы обеспечиваются естественной конвекцией в жидкости. Такой подход позволяет существенно упростить конструкцию прибора, что особенно важно для портативных и полевых систем [1]. Одним из современных вариаций конвекционной ПЦР является использование стандартных микропробирок [2, 3], что позволяет ещё больше упростить конструкцию, и, вследствие, стоимость.

Температурный режим в рабочем объёме микропробирки определяется не только разностью температур между нагревателем и охладителем, но и геометрией — в частности, углом её наклона относительно вертикали. Исследованиям в направлении изменения

параметров постановки посвящены первые работы [4, 5], но в них не представляется анализ, показывающий влияние наклона на ПЦР. Для получения стабильного и воспроизводимого результата важно знать, как изменение наклона сказывается на распределении температур, через которые проходит молекула дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), чему посвящена данная работа.

## МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ

В работе исследовано течение в стандартной полипропиленовой микропробирке объёмом 50 мкл, схема которой представлена на рис. 1. Нагрев снизу осуществляется при 375 К (102 °С), охлаждение сверху — при 280 К (7 °С). Расчёты проведены в пакете OpenFOAM с использованием приближения Буссинеска [6]. Рабочая среда — вода.

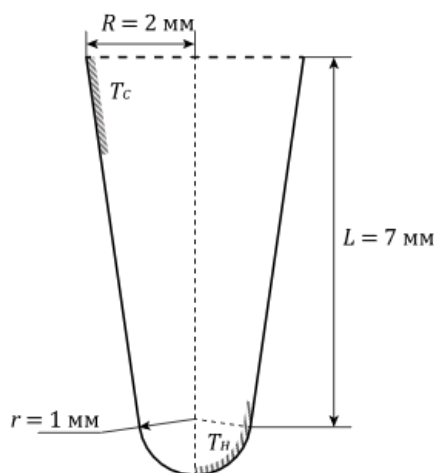


Рис. 1. Схема конструкции микропробирки. Пробирка является объёмной и осесимметричной вокруг главной оси (вертикальная штрихпунктирная линия). Наклон производится в плоскости рисунка.

Движение гипотетических молекул ДНК моделировалось методом Монте-Карло: случайно распределённые частицы перемещались в вычисленном поле скоростей, а для каждого шага фиксировалась температура. Диффузия считалась незначительной на коротких временах, что позволило сосредоточиться на конвективном переносе.

Рассматривались углы наклона от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$  (наклон влево и вправо). Для каждого угла вычислялось установившееся поле скоростей, после чего строились гistogramмы времени пребывания молекул в температурных интервалах с шагом 5 К.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Для каждого угла построены гistogramмы распределения времени пребывания молекул в температурных диапазонах. Сопоставление всех гistogramм даёт тепловую карту, представленную на рис. 2, на которой видно, что при наклоне влево (отрицательные углы) диапазон преобладающих температур смещается вверх, охватывая более высокие значения (до 55 °С), при наклоне вправо температуры снижаются (до 30 °С), распределение становится более узким, а в области наклонов от  $0^\circ$  до  $20^\circ$  наблюдается смена режима течения.

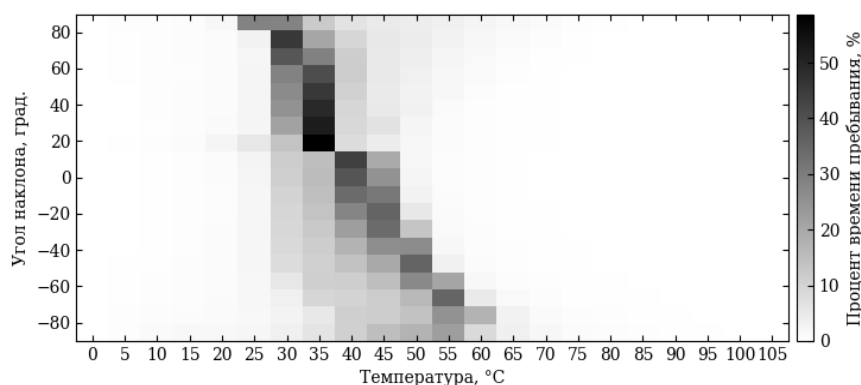


Рис. 2. Тепловая карта времени пребывания молекулы в определённых температурных интервалах. По вертикали обозначена ось, соответствующая углу наклона, по горизонтали — распределение температур.

Таким образом, угол наклона определяет не только среднюю температуру, но и ширину диапазона температур, в котором пребывает молекула ДНК. Это позволяет использовать наклон как регулируемый параметр настройки температурного режима.

## ОБСУЖДЕНИЕ

Для успешного протекания ПЦР молекула ДНК должна проходить определённые температурные циклы. В данной постановке не подразумевается точное следование этим температурным значениям, в пользу исследования механики течения. Полученные распределения показывают, что даже небольшое изменение наклона позволяет смещать температурные диапазоны вверх или вниз на 10-15 °C.

Это открывает возможность тонкой подстройки процесса без изменения мощности нагрева или охлаждения. Например, при недостаточном прогреве достаточно наклонить пробирку влево, чтобы увеличить долю времени, которое молекулы проводят при высоких температурах.

Такое регулирование особенно перспективно для портативных устройств ПЦР, где нет иной возможности стабильно контролировать температуру или где необходима простая ручная настройка.

## ВЫВОДЫ

Проведённое численное моделирование показало, что температурный режим в стандартной микропробирке объёмом 50 мкл существенно зависит от угла её наклона относительно направления силы тяжести. Использование приближения Буссинеска и трассировки частиц методом Монте-Карло позволило получить количественную оценку распределения времени пребывания молекул ДНК в различных температурных диапазонах. Выявлено, что наклон пробирки в сторону холодной границы приводит к снижению преобладающих температур и к их концентрации в более узком интервале, тогда как наклон в противоположную сторону вызывает расширение диапазона и смещение в сторону более высоких температур. В промежуточных углах наблюдается смена режима течения, что отражается в характере тепловых карт и форме гистограмм.

Таким образом, угол наклона может рассматриваться как эффективный управляющий параметр для регулирования температурных условий конвективной ПЦР без изменения граничных температур. Простое изменение положения микропробирки позволяет регулировать реакцию под требуемые режимы денатурации, отжига и элонгации, компенсируя колебания температуры нагревателя или нестабильность охлаждения. Это делает возможной адаптацию метода для компактных и портативных систем, где требуется

минимальное число регулируемых элементов. Представленный подход открывает путь к оптимизации конструкций приборов конвективной ПЦР, повышая их надёжность и воспроизводимость результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чемерис Д.А., Гарафутдинов Р.Р., Сахабутдинова А.Р., Малеев Г.В., Чемерис А.В. Конвекционная ПЦР в конвективных ячейках разных типов // Биомика. 2018. Т. 10, № 4. С. 410–443.
2. Garafutdinov R.R., Chemeris D.A., Sakhabutdinova A.R., Moiseev K.V., Urmancheev S.F., Mikhaylenko K.I., Privalov. L.Yu., Chemeris A.V. Convective polymerase chain reaction in standard microtubes // Analytical Biochemistry. 2022. Vol. № 641. P. 114565.
3. Miao G., Zhang L., Zhang J., Ge S., Xia N., Qian S., Yu D., Qiu X. Free convective PCR: From principle study to commercial applications — A critical review // Analytica Chimica Acta. 2020. Vol. 1108. P. 177–197.
4. Исламов А. И., Набиуллина К. Р. Моделирование термоконвекции в микропробирке при точечном нагреве: подготовка вычислительной сетки и выбор методов // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 2. С. 64–72.
5. Исламов А. И., Набиуллина К. Р. Моделирование температурной конвекции в микропробирках при точечном нагреве: зависимость скорости конвекции от угла наклона // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 3. С. 94–102.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Привалов Лаврентий Юрьевич, lavrenty.privalov@gmail.com



## ОБЪЕМНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ И АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЙ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ФОРМЫ

*В.Е. Прохоров*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
prohorov@ipmnet.ru*

Асферический пузырь – начальная нестабильная стадия типовых сферических пузырей, присутствующих повсеместно в водной среде. Они формируются в момент вовлечения воздуха на границе сред, при выходе газа из любого источника, в природном или технологическом процессе, в том числе из подводных гейзеров [1] и магистральных трубопроводов [2]. Начальная стадия пузыря сопровождается резонансным акустическим излучением, которое представляет интерес как носитель информации об интенсивности инициирующих процессов – дождя [3], вовлечения воздуха [4] и примеси [5] на границе "океан-атмосфера". Процессы образования резонансных источников звука – газовых пузырей – исследуются комплексно с одновременным применением гидрофонов и оптических средств визуализации, в том числе подводных [6] видеокамер и аппаратуры PIV.

Скоростные высокоразрешающие средства визуализации и новаторские методы обработки позволяют выявить тонкие особенности структуры и динамики газовых пузырей – выделить их контуры, измерить объемы и периоды осцилляций [7,8]. Актуальность исследований звукового излучения неизменно высока как для фундаментальной науки, так и многочисленных технологий. Объемные осцилляции были измерены и детально проанализированы в [7]. Там же был предложен и в [8] исследован механизм запуска ос-



цилляций – быстрый спад компоненты внешнего давления – давления Лапласа – вследствие резкого уменьшения интегральной кривизны пузыря в момент его отрыва от подводной каверны. Полученные результаты стали возможны благодаря выделению осесимметричных пузырей, которые эпизодически возникают при отрыве от подводных каверн. Подобно тому, как в гидромеханике использование тел правильной формы для моделирования характерных режимов течений, так и симметричные пузыри позволяют извлечь информацию о важнейших характеристиках пузырей на стадии активной осцилляции и акустического излучения – данные, которые невозможно получить в опытах с типовыми пузырями неправильной формы.

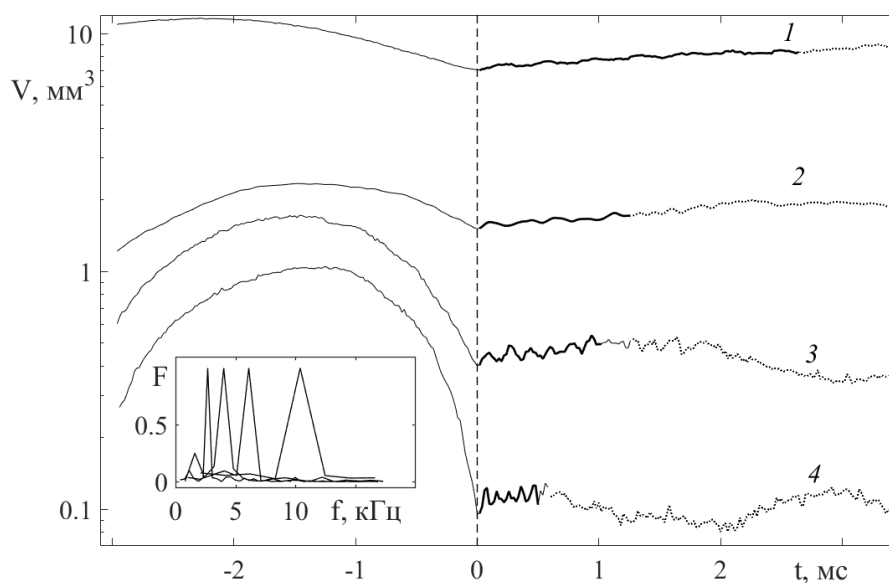


Рис. 1. Объемы пузырей разных размеров до ( $t < 0$ ) и после ( $t > 0$ ) отрыва от подводной каверны. Объемные осцилляции (выделенные участки кривых) регистрируются на стадии вращательной симметрии пузыря. Пунктирные участки – формальный расчет после нарушения симметрии. Вставка – спектры объемных пульсаций 1-4 с пиковыми частотами, соответственно, 2692, 4032, 6122, 10042 Гц.

В работе представлены результаты исследований пузырей, возникающих при ударе капли о водную поверхность.

Объемные пульсации выделяются путем специальной обработки данных скоростной видеосъемки. Симметричная форма пузыря позволяет вычислить его объем, и, при достаточно высокой скорости видеосъемки, обнаружить пульсации объема, возникающие непосредственно после отрыва от каверны. Примеры расчета представлены на рис. 1 для нескольких случаев, в которых равновесные объемы пузырей существенно различались.

Объемные осцилляции, в свою очередь, являются источниками акустического излучения.

Считая, что объем пузыря  $V(t) = V_0 + v(t)$ , где  $v(t) \ll V_0$ , представим каждый элемент объема  $dV = dx'dy'dz'$  с координатами  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  (рис. 2) как осциллятор с объемной скоростью  $q \cdot dV$ , где  $q(\mathbf{r}', t)$  – объемная плотность источника такая, что  $Q = \iiint_{x'y'z'} q(\mathbf{r}', t) dx'dy'dz'$ , где  $Q = dV / dt$  расход жидкости через любую замкнутую поверхность, внутри которой находится объем  $V_0$  [9].

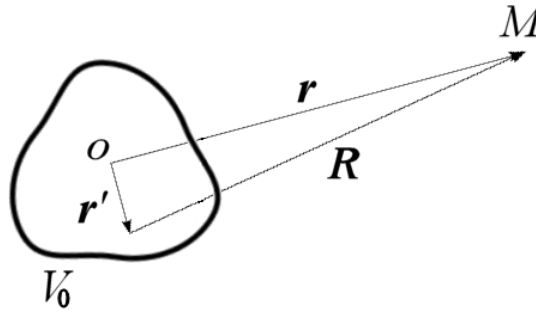


Рис. 2. Схема излучения объектом с осью симметрии. Элемент излучения  $q \cdot dx' dy' dz'$  находится в точке  $\mathbf{r}'$  относительно начала координат  $O$  на расстоянии  $R = |\mathbf{R}|$  от точки приема  $M$ .

Тогда уравнение волны давления  $p$ , возбуждаемого данной системой источников имеет вид  $\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho \frac{\partial q}{\partial t}$  [9], а его решение в форме запаздывающего потенциала с учетом  $R \gg |\mathbf{r}'|$

$$p(x, y, z, t) = -\frac{\rho}{4\pi r} \dot{Q} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (2)$$

Несмотря на близость свободной поверхности (излучаемая длина волны превышает глубину залегания пузыря), оценка (2) находится в удовлетворительном согласии с экспериментом. На рис. 3 показаны данные измерений объемных пульсаций ( $a$ , кривая 1), рассчитанная по ним согласно (2) зависимость акустического давления ( $b$ , кривая 3) и запись акустического сигнала ( $b$ , кривая 4), которая находится в хорошем согласии с расчетной кривой 1.

Отметим, что первый звуковой импульс сигнала 4 отличается по форме и длительности от последующих полуволн. В действительности он представляет собой реакцию гидрофона на быстрое расширение пузыря сразу после его отрыва от каверны [7].

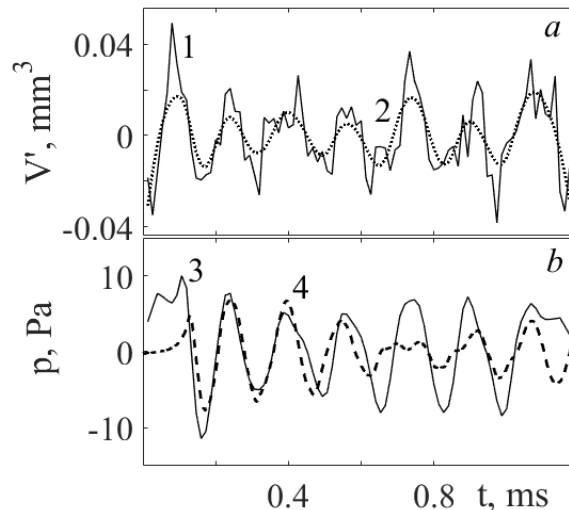


Рис. 3. Осцилляции объема пузыря ( $a$ ): 1 – измеренные, 2 – полученные скользящим осреднением (шаг 0.2), 3 – расчетные согласно (2), 4 – осцилляции акустического давления.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания 124012500442-3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. I. Kaevitsera, V. M. Smirnova, and I. V. Smolyaninova, "Use of Sonar Systems to Detect Areas of Gas Discharge of the Seabed Oceanology", 2024, 64(4), pp. 623–628.
2. Leighton T. G. and White P. R. Quantification of undersea gas leaks from carbon capture and storage facilities, from pipelines and from methane seeps, by their acoustic emissions. Proc. R. Soc. London, Ser. A 468. 485–510 (2012).
3. S. Hwang, C. Jun, C. De Michele, H.-J. Kim, J. Lee, "Rainfall Observation Leveraging Raindrop Sounds Acquired Using Waterproof Enclosure: Exploring Optimal Length of Sounds for Frequency Analysis", Sensors 24, 4281 (2024).
4. C. J. Huang, C. H. Yeh, and K. W. Liu, "Bubble entrainment and underwater noise caused by a single water drop falling on the surface of freshwater and saltwater", Phys. Fluids 36, 022109 (2024).
5. Murphy, D. W., Li, C., d'Albignac, V., Morra, D. & Katz, J. Splash behaviour and oily marine aerosol production by raindrops impacting oil slicks. J. Fluid Mech. 780, 536–577 (2015).
6. R. Meng, W. Q. Zhang, and H. Sun, "Experiment of underwater acoustic produced by single drop impacts," Appl. Mech. Mater. 226–228, 2137 (2012).
7. Prokhorov V.E. Acoustics of oscillating bubbles when a drop hits the water surface. Phys. Fluids 33, 083314 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0058582>.
8. Prokhorov V.E. Underwater gas bubbles produced by droplet impact: Mechanism to trigger volumetric oscillations. Phys. Fluids 35, 033314 (2023). doi: 10.1063/5.0140484.
9. Morse P. Vibration and Sound. McGraw-Hill Book Company Inc. 1948.

Прохоров Виктор Евгеньевич, prohorov@ipmnet.ru



## АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ЧАСТОТ КАВИТАЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ОТ ПОДАЧИ И КАВИТАЦИОННОГО ЗАПАСА ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА С БОКОВЫМ ПОДВОДОМ

А.А. Проценко\*, П.М. Шкапов

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва  
[protsenko.a@bmstu.ru](mailto:protsenko.a@bmstu.ru)

В результате проведенного экспериментального исследования был выполнен комплексный анализ автоколебательных процессов в лопастном центробежном насосе в зависимости от двух ключевых параметров — подачи  $Q$  и кавитационного запаса  $NPSH$ .

На основе экспериментальных данных построена гладкая аппроксимирующая поверхность периода колебаний  $T(Q, NPSH)$ , обеспечивающая высокую точность (средняя ошибка  $<5\%$ ) в заданном диапазоне параметров (Рис 1). Из этой поверхности аналитически получены первые и вторые частные производные, что позволило выделить области с различным характером чувствительности периода к изменению каждого параметра.

Проведенный анализ показал, что характер влияния параметров носит нелинейный и неоднородный по области определения характер, включая зоны согласованного и противоположного воздействия факторов.

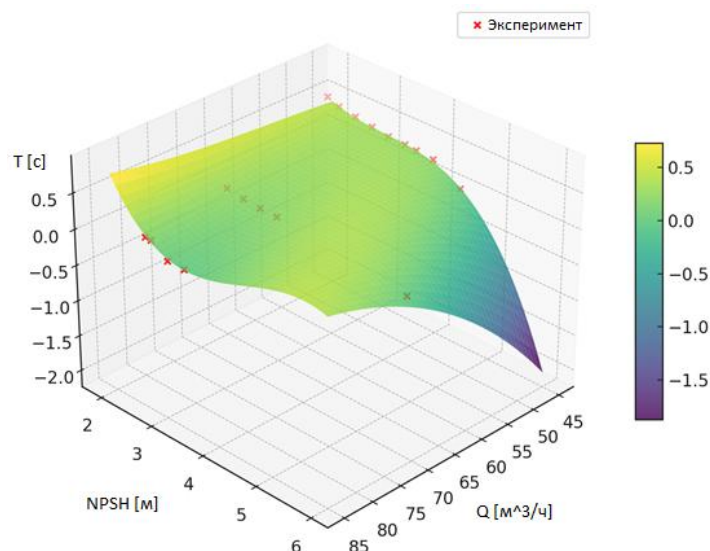


Рис. 1. Аппроксимированная поверхность  $T(Q, NPSH)$  по экспериментальным точкам. Жёлто-зелёные области соответствуют более высоким значениям периода  $T$ , фиолетовые – близким к нулю. Красные кресты обозначают исходные экспериментальные точки.

Выполнен градиентный анализ робастности, позволивший построить карты модуля ( $\|T\|$ ) и выделить критические линии  $\partial T/\partial Q=0$  и  $\partial T/\partial NPSH=0$ , разделяющие режимы с разным направлением влияния параметров.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Авторы выражают благодарность заведующему кафедрой Э-10 МГТУ им. Н.Э. Баумана В.О. Ломакину за помощь в проведении экспериментального исследования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов, Е. П. Кавитационные явления в гидравлических машинах. — М.: Машиностроение, 1987. 280 с.
2. В.П. Лаврентьев. Гидродинамика и кавитация в насосах. Л.: Судостроение, 1985. 312 с.
3. Барков, С. С., Петров, А. В. Анализ автоколебаний в центробежных насосах при переменных режимах подачи // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. — 2022. — Т. 30, № 4. — С. 45–53.
4. Козлов, Д. В., Лосев, А. А. Экспериментальное исследование кавитационных автоколебаний в насосах среднего давления // Научно-технический вестник Поволжья. 2021. № 6. С. 78–85.
5. Бондаренко, В. М., Чижов, А. Г. Применение методов машинного обучения для идентификации режимов автоколебаний в насосных агрегатах // Вестник МГТУ им. Баумана. Серия Машиностроение. 2023. № 2. С. 56–64.
6. Пахомов, И. В. Моделирование нестационарных процессов в центробежных насосах с учётом кавитации // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 1. С. 33–40.
7. Якунин, С. А., Григорьев, А. Ю. Диагностика автоколебаний в насосах на основе анализа вибрационных сигналов // Вестник Казанского государственного технического университета им. Туполева. 2021. Т. 27, № 3. С. 112–118.

8. Лантев, А. В., Федоров, М. С. Численное моделирование кавитационных явлений в центробежных насосах // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 5. С. 845–853.
9. Никитин, К. В., Поляков, А. М. Прогнозирование возникновения автоколебаний в насосных агрегатах с применением нейросетевых моделей // Известия вузов. Машиностроение. 2023. № 7. С. 65–72.
10. Brennen, C. E. Hydrodynamics of Pumps. Oxford University Press, 2011. P. 256.
11. Escaler, X., Farhat, M., Avellan, F., Coussirat, M. Experimental investigation of cavitation-induced instabilities in a centrifugal pump // Journal of Fluids Engineering. 2021. Vol. 143(7). — 071207.
12. Keller, J., Dupont, P., Legoupil, S. Advanced signal processing for the detection of cavitation inception in centrifugal pumps // Mechanical Systems and Signal Processing. 2020. Vol. 142. — 106734.
13. Zhang, Y., Wang, L., Chen, H. Influence of cavitation on hydraulic instabilities in centrifugal pumps // Renewable Energy. 2022. Vol. 192. pp. 987–997.
14. Li, Z., Zhang, D., Wu, Q. Dynamic modeling and stability analysis of pump systems under cavitation conditions // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 94. pp. 548–563.
15. Chen, X., Jiang, Y., Zhou, L. Nonlinear characteristics of cavitation-induced oscillations in centrifugal pumps // Physics of Fluids. 2023. Vol. 35(6). - 064101
16. Колесников К.С., Кинелев В.Г. Колебания жидкости в топливной магистрали, обусловленные пульсациями отрывных зон в шнековом преднасосе // Изв. АН СССР. Энерг. и трансп. 1976. № 6. С. 155–164.

Проценко Антон Александрович protsenko.a@bmstu.ru  
 Шкапов Павел Михайлович spm@bmstu.ru



## НЕКОТОРОЕ ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

А.И. Руденко

«Калининградский государственный технический университет»

ФГБОУ ВО «КГТУ», Калининград

alex-rudenko@bk.ru

Основной целью работы является вывод и анализ приближенного выражения для динамической глубины стационарной слабонелинейной поверхностной волны (ССНПВ). Были получены семь низших приближений решения нелинейной краевой задачи строения и характеристик волн, но выполнено это, в отличие от Стокса [1–4], для общего случая жидкости конечной глубины.

Для достижения цели была видоизменена методика Стокса. Прежде всего, упрощена математическая постановка задачи о ССНПВ.

$$\begin{aligned}
 &(-c + u(x, \eta(x)))\eta'(x) - v(x, \eta(x)) = 0, \\
 &(-c + u(x, \eta(x)))^2 + v^2(x, \eta(x)) + 2g\eta(x) = c^2 + 2gc^2P, \\
 &g = \text{const}, P = \text{const}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Это сделано следующим образом. Введена относительная функция тока. С ее помощью исходная форма кинематического условия упрощена путем интегрирования.

Исходная форма динамического условия превращена в новую форму с помощью интеграла Бернулли. Тем самым из рассмотрения исключено гидродинамическое давление. Введен интегральный оператор типа свертки. Определены четыре функции одной переменной, основными из которых являются уровень волны (то есть форма свободной поверхности) и относительная функция тока на нулевом горизонте  $y = 0$  (для нее используем сокращение ОФТНГ). Все выполненные действия позволили решение исходной двумерной задачи свести к решению пяти одномерных уравнений.

Будем исходить из (1), системы уравнений для функций  $\eta(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $\xi(x)$ , которые имеют следующий вид (ограничимся в (2), (3) слагаемыми седьмого порядка малости) [7,8]:

$$\begin{aligned} s\eta(x) - \xi(x) + \eta(x)\psi''(x) + \frac{1}{2}(\psi'(x))^2 + \frac{1}{2}H_2(x)\xi''(x) + \\ \eta(x)(\psi'(x)\xi'(x) - \psi''(x)\xi(x)) + \frac{1}{2}\xi^2(x) = gP, \end{aligned} \quad (2)$$

$$-\eta(x) + \psi(x) + \eta(x)\xi(x) - \frac{1}{2}H_2(x)\psi''(x) = d - h, \quad (3)$$

где  $\xi(x) = V(\psi(x))$ ,  $H_2(x) = \eta^2(x)$ .

Далее были введены и объяснены условия равенства нулю средних значений уровня ССНПВ и ОФТНГ, а также условие ортогональности дополнения уровня ССНПВ до ее основной гармоники самой основной гармонике уровня ССНПВ. Условие равенства нулю среднего значения уровня ССНПВ фактически определяет динамическую глубину жидкости.

На рисунке 1 показана зависимость динамической толщины жидкости  $d$  от толщины жидкости  $h$ .

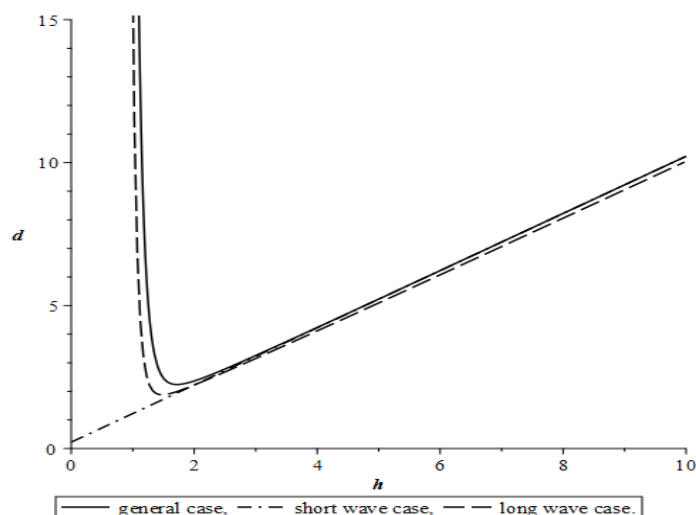


Рис. 1. Зависимость динамической толщины жидкости  $d$  от толщины жидкости  $h$ . Амплитуда основной гармоники  $a = 1$ , волновое число  $k = 0.5$ : сплошная линия – общий случай волн, штрихпунктирная – для  $\lambda \rightarrow \infty$ , пунктирная – для  $\lambda \rightarrow 0$ .

В случае длинной волны динамическая глубина жидкости  $d$  не зависит от длины волны и растет, когда обычная толщина жидкости  $h$  уменьшается, для коротких волн характерно, что увеличение толщины жидкости приводит к увеличению динамической

глубины. Начиная с некоторого значения  $h$ , динамическая глубина для указанных случаев волн совпадает между собой. Данный результат хорошо коррелирует, например, с [5,6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scott Russel J.* Report on waves // Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London: John Murray. 1845. P. 311 - 390.
2. *Stokes, G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Cambr. Trans.* V. 8, 1847. P. 443 - 473.
3. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers* 1. Cambridge. 1880. P. 197 - 229.
4. *Stokes G.G.* Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers* 1. Cambridge. 1880. P. 314 - 326.
5. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1033 -1037.
6. *Karabut E.A.* An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 372. P. 45 - 70.
7. *Зайцев А.А., Руденко А.И.* К теории стационарных волн на горизонтальном течении с линейным профилем скорости// *ПМТФ.* Т. 47. № 3. Новосибирск. 2006. С. 43 - 49.
8. *Руденко А.И.* Стационарные нелинейные волны на поверхности слоя идеальной однородной жидкости конечной толщины. Первый метод Стокса// *ПМТФ.* Т. 390. № 2. Новосибирск. 2025. С. 63 - 72.

Руденко Алексей Иванович, alex-rudenko@bk.ru



## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ СРЕДЫ НА ТЛЕЮЩИЙ РАЗРЯД

*Л.Б. Рулева\*, С.И. Солодовников*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
ruleva@ipmnet.ru*

## ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальные исследования газоразрядной плазмы [1,2], математическое моделирование аномального и нормального тлеющих разрядов [3,4] явились основой экспериментальных работ [5,6]. Эксперименты [5] с низкотемпературной газоразрядной плазмой проведены на специально созданной установке, для исследования нормального тлеющего разряда в неподвижной среде. Тлеющий разряд в установке ГУАТ исследован в воздушном потоке [6]. Показано влияние разряда на скорость воздушного потока, на изменение давления и теплового потока за зоной разряда в потоке. Тлеющий разряд исследовался поперек потока на встречных электродах и на плоских электродах вдоль потока. При определении температуры на модели в потоке выявлено влияние снижения температуры при вакуумировании среды [7], что влияет на изменение нулевых сигналов датчиков. Экспериментальная валидация математического моделирования ограничивается обеспечением заданного давления (10.....0.1 мбар), но температурные условия на заданной высоте атмосферы в экспериментах, судя по исследованным пуб-



ликациям, не обеспечиваются. Температура в атмосфере по высоте изменяется в широком диапазоне от  $+2$  до  $-123^{\circ}\text{C}$ . В данной работе показаны результаты экспериментальных исследований тлеющего разряда при изменении температуры среды в пределах атмосферы.

### ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА

Экспериментальная лабораторная установка для имитации давлений и температур, соответствующих высотам атмосферы, приведена на рис.1.

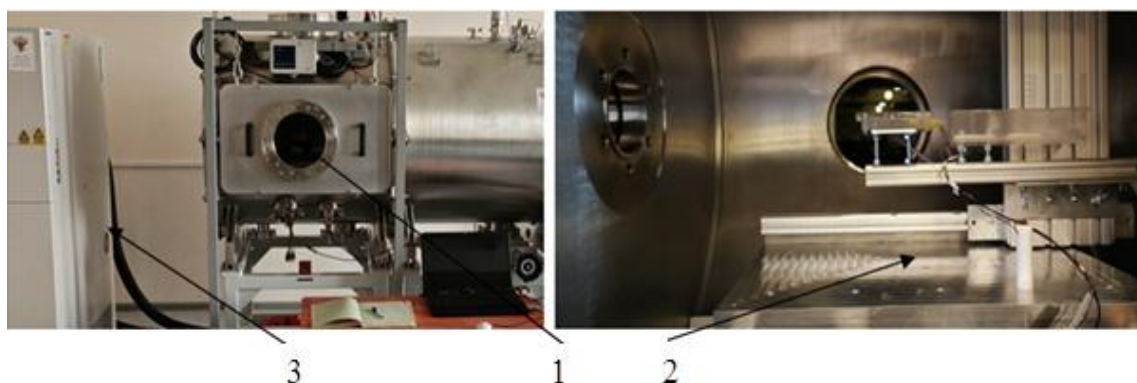


Рис.1. Экспериментальная установка: 1–рабочая камера, 2– термостол, 3–регулятор температур.

В рабочей камере 1 расположен термостол 2 с внутренним захлаживанием (нагревом) с подведенным извне трубопроводом от регулятора температуры среды 3. Модель с плоскими электродами, аналогичная [6], может содержать постоянный магнит. Турбомолекулярный вакуумный насос обеспечивает диапазон давлений в рабочей камере 1–5 торр. в молекулярном азоте. Использовался высоковольтный (1–2.6 кВ) регулируемый источник питания (1–7 мА). Напряжение на газоразрядном промежутке и ток в нем измерялись с использованием аналого-цифрового преобразователя АЦП (10МГц), подключенного к компьютеру посредством делителей: балластного сопротивления ( $R_0=300$  кОм) и шунта ( $R=75$  Ом), соответственно. Свечение разряда регистрировалось фотоэлектронным умножителем, Снимался спектр излучения. Проводилось фотографирование разряда при разных значениях питания. Датчики температуры и давления расположенные рядом с моделями подключены через АЦП к компьютеру, другие датчики соединены с информационными табло. Число электронов и электронная температура в разряде измерялись зондом Ленгмюра.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис.2 приведены вольт – амперные характеристики (ВАХ) в азоте при температурах от  $+60^{\circ}\text{C}$  до  $-80^{\circ}\text{C}$ , без магнита и с магнитом.

Выявлено, что в области температур от  $+60^{\circ}\text{C}$  до  $-50^{\circ}\text{C}$  ВАХ образуют близкую семейственность. Однако, при температуре  $-80^{\circ}\text{C}$  напряжение в разрядном промежутке выше на 20%. Обращает внимание области устойчивого нормального тлеющего разряда протяженные от 7 мА до 2 мА. Эти квазистационарные области наиболее удобны для валидации. Было замечено, что давление в рабочей камере не изменяется при снижении температуры до  $-50^{\circ}\text{C}$ . При дальнейшем захлаживании среды, замечено падение давления. На отметке  $-80^{\circ}\text{C}$  падение давления составило около 8%. Дальнейшие эксперименты по измерению ВАХ были проведены с восстановлением давления за счет припуска азота и также без восстановления давления. Выявлено, что малое падение давления не оказывает влияния на последующие измерения и восстановление давления было отменено.

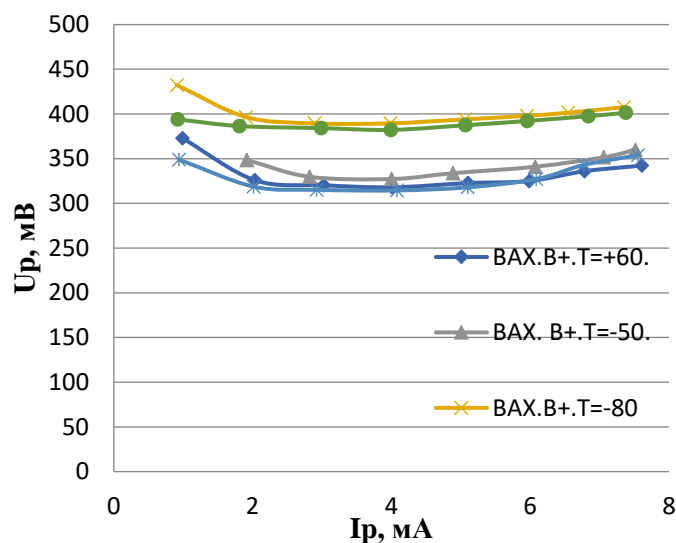


Рис.2. Вольт–амперные характеристики (BAX) тлеющего разряда в диапазоне температур от  $-80^{\circ}\text{C}$  до  $+60^{\circ}\text{C}$ .  $P=5$  торр. В–наличие магнитной индукции.

Нулевой сигнал датчика давления снижался при вакуумировании [7]. При расчете температуры на поверхности модели делают пересчет температуры от начальной, комнатной до температуры после окончания вакуумирования согласно изменению нулевого сигнала датчика.

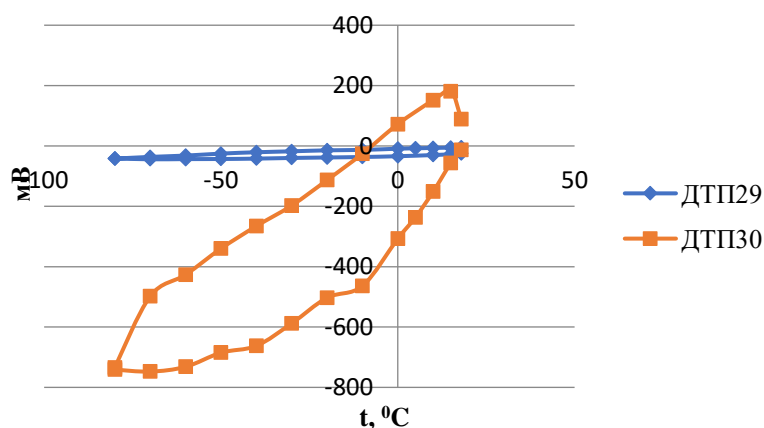


Рис.3. Сигналы датчиков при изменении температуры среды размещения модели от  $+18^{\circ}\text{C}$  до  $-80^{\circ}\text{C}$  и последующем нагреве от  $-80^{\circ}\text{C}$  до  $+18^{\circ}\text{C}$ .

В данном исследовании регистрировались нулевые сигналы температурного датчика и датчика теплового потока. Экспериментально получены значительные изменения нулевых сигналов при снижении температуры. Одна из зависимостей представлена на рис.3.

## ВЫВОДЫ

Выполнены предварительные экспериментальные исследования с газоразрядной плазмой на новой лабораторной установке по имитации давлений и температур, соответствующих высотам атмосферы. Показано устойчивое ее существование и квазистационарное состояние при давлениях среды: 3–7 торр и токе 2–7 мА. Выявлено, что при температуре  $-80^{\circ}\text{C}$ , напряжение в разрядном промежутке увеличивается на 20%, а нулевые сигналы датчиков снижаются в зависимости от типа датчика.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме госзадания № 124012500440-9.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shang J.J.S, Surzhikov S.T.* Plasma Dynamics for Aerospace Engineering. –2018. –
2. Cambridge University Press – 388 с. doi: 10.1017/9781108292566.
3. *Surzhikov S.T.* Theoretical and Computational Physics of Gas Discharge Phenomena. –2020.– De Gruyter. (Berlin, New York.– 537 с. doi: 10.1515/9783110648836.
4. *Surzhikov S.T.* Comparative Analysis of the Parameters of the Normal and Abnormal DC Glow Discharges//Plasma Physics Reports.– 2022.– С.1261–1272. doi: 10.1134/s1063780x22700337.
5. *Surzhikov S.T. and etc.* Normal Glow Discharge: Comparison of Calculated and Experimental Data//Interperiodica Publishing. – 2019. – С. 154–158. doi: 10.1134/s1028335819040049.
6. *Solodovnikov S.I., Ruleva L.B.* Experimental Studies of Gas-Discharge Plasma in Air Flow// Fluid Dynamics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), том 59, № 5, с. 1669–1676. doi: 10.1134/S0015462824604145.
7. *Рулева Л. Б., Солодовников С. И.* Экспериментальные исследования тлеющего разряда на плоских электродах в потоке//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2025. Т.26, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2025–26–1/articles/1165/>.
8. *Ruleva L.B., Solodovnikov S.I.* Effect of vacuuming on gas-dynamic parameters// MATEC Web of Conferences, том 362, с. 1–6. doi:10.1051/mateconf/202236201025.

Рулева Лариса Борисовна, ruleva@ipmnet.ru  
Солодовников Сергей Иванович, Sis63@yandex.ru



## РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПРЕЦЕССИЕЙ ДИСКА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С КОНИЧЕСКИМ ДНОМ

*К.Ю.Рысин\*, С.В.Субботин*

*Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,  
лаборатория вибрационной гидромеханики, Пермь  
rysin@pspu.ru*

В последнее время вопросы о влиянии гармонического воздействия на вращающиеся гидродинамические системы привлекают внимание многих исследователей в связи с геофизическим контекстом [1]. В частности, взаимодействие зональных течений с инерционными и внутренними волнами определяет характер диссипации энергии в океанах и жидких недрах планетарных тел. Особый интерес представляет динамика жидкости в шельфовых зонах при колебаниях свободной поверхности вокруг амфидромических точек, возникающих из-за приливного воздействия. В качестве модели подобных явлений удобно рассматривать вращающиеся жидкие слои с наклонным дном, где движение непосредственно задаётся прецессией крышки, расположенной вблизи одного из торцов

полости [2, 3]. Одним из интересных результатов является сильная зависимость пространственных инерционных режимов от направления прецессии по отношению к глобальному вращению. При переходе от кольцевой геометрии к сплошному длинному цилиндру постоянной глубины энергия возмущений сильно размазывается вдоль осевой координаты, что приводит к существенному обогащению структур течений и надкритической динамики жидкости [4]. Так, при определённых частотах форсинга амплитуда пульсационного течения нарастает настолько, что в жидкости происходит глобальное перемешивание, известное как «резонансный коллапс». Настоящая работа является прямым продолжением исследований [4], в отличие от которой глубина дна цилиндра уменьшается с радиальной координатой. Такая конфигурация позволяет поддерживать два основных типа резонанса во вращающихся полостях – глобальные инерционные моды и фокусировка волновой энергии на замкнутые траектории (волновые аттракторы). На данном этапе главной целью ставится классификация режимов течений в зависимости от частоты и знака форсинга.

Исследования проводились в цилиндрической полости радиусом  $R = 24.0$  мм и длиной  $L = 180.0$  мм, размещенной в оргстеклянном параллелепипеде. В качестве рабочей жидкости использовался водоглицериновый раствор вязкостью  $\nu = 3.3$  сСт. Возбуждение инерционных колебаний в жидкости осуществлялось с помощью плоского диска, установленного вблизи одного из торцов полости. Диаметр диска соответствует диаметру цилиндрической полости и равен  $d = 48.0$  мм. Амплитуда колебаний края диска фиксируется и поддерживается постоянной в течение эксперимента,  $b = 1.1$  мм. Конфигурация противоположного торца реализована расходящимся конусом, ось которого совпадает с осью вращения, а вершина с апертурой  $120^\circ$  направлена от прецессирующего диска. Исследование выполнено в диапазоне безразмерных параметров: число Экмана  $E = \nu / \Omega_{rot} R^2 = 9.12 \cdot 10^{-5}$  и частота осцилляций  $n = (\Omega_{osc} - \Omega_{rot}) / \Omega_{rot}$ , значения которой принадлежат области существования инерционных волн  $n \in [-2; +2]$ . Здесь  $\Omega_{rot}$  и  $\Omega_{osc}$  – угловая скорость вращения и частота осцилляций диска в лабораторной системе отсчета, соответственно. Знак частоты  $n$  определяет направление прецессии диска по отношению к направлению глобального вращения с частотой  $\Omega_{rot}$ . Для пространственной характеристики режимов пульсационного течения используется тройка волновых чисел  $\{n, m, k\}$ , соответствующих осевой, радиальной, азимутальной компонентам течения, соответственно. Визуализация течения осуществлялась в осевом сечении полости методом PIV (Particle Image Velocimetry).

Спектр наблюдаемых режимов характеризуется двумя основными классами явлений: инерционными модами в виде глобальных неосесимметричных колебаний с азимутальным числом  $k = \pm 1$ , где знак определяется направлением внешнего воздействия со стороны осциллирующего диска (знаком частоты  $n$ ), и эффектом фокусировки инерционных волн в виде волновых аттракторов. Аттракторы представляют собой замкнутые траектории, ограниченные относительно тонкими сдвиговыми слоями. Характерная структура поля завихренности, иллюстрирующая оба явления, представлена на рис. 1 и 2. Следует отметить, что оптические искажения, вносимые границей конического торца, препятствовали корректной визуализации течения в его окрестности, в связи с чем векторное поле скорости приведено только для прямоугольных областей, свободных от искажений.

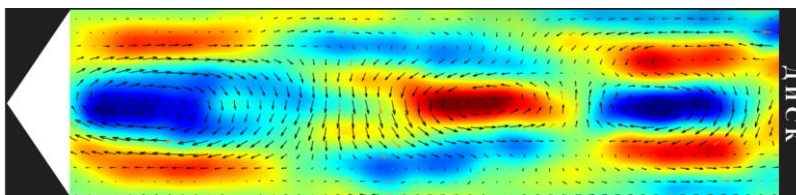


Рис. 1. Мгновенное поле скорости в условиях осцилляций инерционной моды  $M\{3,2,-1\}$  при  $n = -0.400$ . Цветом показано поле завихренности

На рис. 1 представлено мгновенное поле скорости, демонстрирующее возбуждение инерционной моды  $M\{3,2,-1\}$ . Данный режим проявляется как вытянутая вдоль оси вращения полости система вложенных трёх пар неосесимметричных вихрей. Причем знак завихренности во внутреннем и внешнем вихре является противоположным. Каждый из вихрей содержит азимутальную компоненту с числом  $k = -1$ , что является следствием антициклонического форсинга, задаваемого диском. Стоит отметить, что система несимметрична относительно центрального поперечного сечения. Вблизи конуса размер внутреннего вихря заметно доминирует по сравнению с внешним, в то время как вблизи диска наблюдается обратная пропорция. Эксперименты показывают, что в зависимости от знака безразмерной частоты наблюдаются пространственные режимы с разными волновыми числами. Причем при одинаковых по величине, но разных знаках  $n$  собственные частоты одинаковых мод отличаются. По всей видимости, это связано с осреднённым зональным течением, которое сносит вихри вслед за потоком [5].

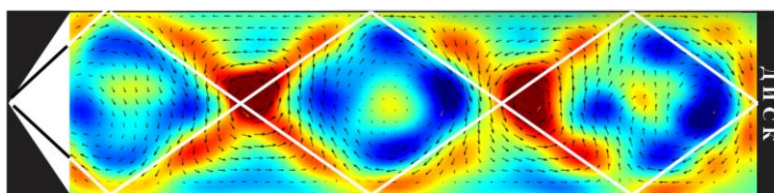


Рис. 2. Мгновенное поле скорости в условиях фокусировки волн в аттракторе  $A\{3,1,-1\}$  при  $n = -1.263$ . Белыми линиями показано фокусировочное отражение, полученное в рамках лучевой теории

На рис. 2 представлена характерная структура аттрактора типа  $A\{3,1,-1\}$ . В отличие от инерционной моды энергия колебаний жидкости сосредоточена в относительно тонких сдвиговых слоях, образующих пространственные конусы. Последние хорошо визуализируются в эксперименте, причем их положение относительно оси вращения определяется выражением  $\theta = \arcsin(n/2)$  (белые линии). Осцилляции диска приводят к повороту аттрактора вокруг оси вращения, что со стороны боковой поверхности воспринимается, как изменение направления колебаний жидкости в сдвиговых слоях. Исследования, выполненные во всём диапазоне частот  $n$  показывают, что аттракторы характерны только для антициклонической прецессии, что согласуется с экспериментами [3] и численными расчётами [2] для цилиндрического слоя.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №25-11-00358.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Le Bars, D. Cébron, and P. Le Gal. Flows driven by libration, precession, and tides // Annu. Rev. Fluid Mech. 2015. V. 47. P. 163–193.
2. I. Sibgatullin, E. Ermanyuk, L. Maas, X. Xu, and T. Dauxois. Direct Numerical Simulation of Three-Dimensional Inertial Wave Attractors // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS), Moscow, Russia, 2017, P. 137–143.

3. *S. Subbotin, N. Shmakova, V. Kozlov, E. Ermanyuk.* Nonlinear regimes of inertial wave attractors generated by a precessing lid: Zonal flows and Rossby waves // *Phys. Fluids*. 2023. 35(7). P. 074110.
4. *A. D. McEwan.* Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder // *J. Fluid Mech.* 1970. Vol. 40. P. 603–640.
5. *C. Baruteau and M. Rieutord.* Inertial waves in a differentially rotating spherical shell // *J. Fluid Mech.* 2013. Vol. 719. P. 47–81.

Рысин Кирилл Юрьевич, [gysin@pspu.ru](mailto:gysin@pspu.ru)

Субботин Станислав Валерьевич, [subbotin\\_sv@pspu.ru](mailto:subbotin_sv@pspu.ru)



## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ РАСПЛАВА ОЛОВА В ВОДЕ

*Н.С. Сиваков*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*[sivakov@ipmnet.ru](mailto:sivakov@ipmnet.ru)*

Паровой взрыв представляет собой процесс теплового и гидродинамического взаимодействия между горячей и холодной жидкостями при их смешении. В ходе взаимодействия внутренняя энергия горячей фазы преобразуется в механическую, что сопровождается формированием и дальнейшим усилением ударной волны (самоподдерживающаяся волна термической детонации). Изучение данного явления имеет важное значение для оценки потенциальных рисков тяжёлых аварий на атомных электростанциях [1].

Ключевым этапом развития парового взрыва является предварительное перемешивание, при котором формируется взрывоопасная смесь крупных капель расплава, окружённых тонкой паровой оболочкой. Существуют различные гипотезы о механизмах фрагментации капель расплава при контакте с водой. Исследования взрывов одиночных капель [2] указывают на ведущую роль гидродинамического механизма, связанного с образованием микроструек воды, их ударом по поверхности расплава.

Одним из подходов к изучению фундаментальных аспектов взаимодействия расплавов с водой является рассмотрение процессов взаимодействия отдельных капель расплава с водой. Часто рассматривается паровой взрыв одиночной капли в объеме холодной воды [3]. В то же время в реальных аварийных условиях в охлаждающую среду попадает множество частиц расплава, что приводит к коллективным эффектам взаимодействия. Взаимное влияние капель изменяет условия теплообмена и может способствовать развитию более сложных и интенсивных сценариев взрывного взаимодействия.

Целью данной работы является прямое численное моделирование взаимодействия двух капель расплава олова в холодной воде при прохождении импульса давления и выявление особенностей возникающего многофазного течения.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания трехфазной среды «расплав-вода-пар» с резкими границами между фазами применяется модель VOF (Volume of Fluid), реализованная в программной среде OpenFOAM. Для описания процесса взаимодействия был разработан оригинальный вычислительный модуль («решатель»), учитывающий как сжимаемость всех фаз, так и процессы испарения-конденсации воды на межфазных границах.

В модели VOF рассматривается «эффективная» жидкость, свойства которой являются средневзвешенными по объемным долям фаз  $\alpha_i$ .

Уравнение неразрывности для эффективной жидкости получается суммированием уравнений неразрывности для составляющих фаз и приводится к обобщенному уравнению для дивергенции скорости:

$$\frac{\partial \rho_i \alpha_i}{\partial t} + \nabla (\rho_i \alpha_i \mathbf{U}) = \Gamma_i$$

$$\nabla \mathbf{U} = - \sum_i \frac{\alpha_i}{\rho_i} \frac{d \rho_i}{dt} + \Gamma \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_w} \right),$$

где  $\Gamma = \Gamma_v = -\Gamma_l$  – массовая скорость фазового перехода на единицу объема ( $\Gamma > 0$  отвечает испарению воды).

Для эффективной жидкости справедливы уравнения импульса и энергии:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla P + \nabla \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_s$$

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) h \right) = \frac{dP}{dt} + \nabla \lambda \nabla T - \Gamma \Delta h_{ev}$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  – тензор вязких напряжений,  $\mathbf{F}_s$  – сила поверхностного натяжения,  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести,  $\Delta h_{ev}$  – скрытая теплота испарения воды.

Для вычисления скорости испарения воды в разработанном расчетном модуле используется усовершенствованная модель:

$$\Gamma = \frac{\lambda_w \nabla \alpha_i}{\Delta x \Delta h_{ev}} \max(T - T_{sat}, 0),$$

где  $\lambda_w$  – теплопроводность воды,  $\Delta x$  – характерный размер расчетной сетки,  $T_{sat}(P)$  – температура насыщения, зависящая от локального давления.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривается две капли расплава олова диаметром 4 мм, окруженные паровой пленкой толщиной 0.4 мм. Температура олова 973 К, воды – 338 К. Для нижней капли задана начальная скорость движения 1 м/с. Иницирующий импульс давления имеет амплитуду 20 бар и продолжительность 20 мкс.

Расчеты проводились в трехмерной постановке. Расчетная область представляет собой прямоугольную область и содержит 135×135×405 ячеек (моделировалась 1/4 часть объема в предположении о симметрии течения). Возмущение паровой пленки происходит за счет изменения давления на нижней границе расчетной области по линейному закону. Для пара используется уравнение состояния идеального газа, для воды и расплава используется слабосжимаемая линейная модель.

Основные стадии взаимодействия приведены на Рис.1. Под действием иницирующего импульса давления происходит первичное схлопывание паровой пленки без заметной деформации капель (момент времени 1 мс). Паровые пузыри вокруг капель расширяются за счет испарения воды и перераспределения давления (момент времени 1.5 мс), и после контакта пузырей друг с другом происходит вторичное схлопывание парового объема (момент времени 2 мс), сопровождающееся образованием высокоскоростных струй воды, оказывающих сильное ударное воздействие на поверхности капель расплава.



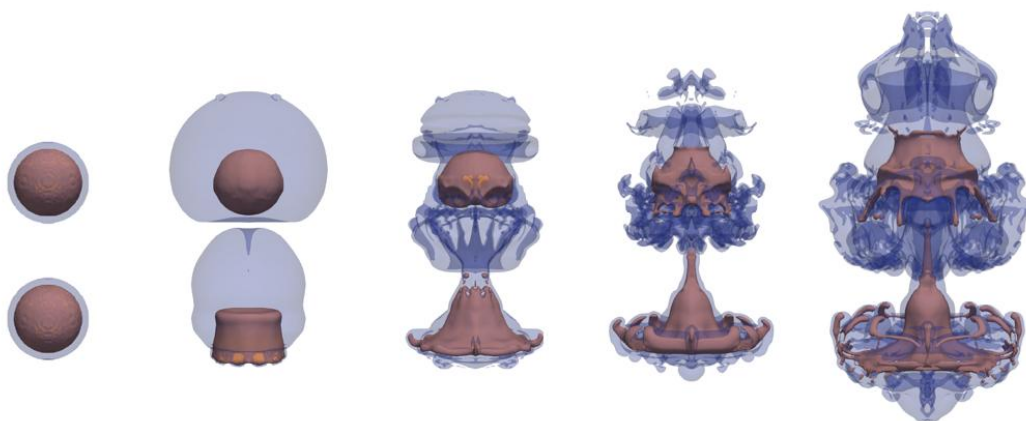


Рис. 1. Поверхности расплава и пара, представленные изоповерхностями объемных долей:  $t = 0, 1, 1.5, 2, \text{ и } 2.5 \text{ мс}$  (слева направо)

В моменты дальнейшего взаимодействия (2, 2.5 мс) наблюдается значительное увеличение парового объема и деформация поверхности олова, формируются мелко-дисперсные структуры расплава в виде отдельных капель и струек. Струя воды пробивает верхнюю каплю насквозь, что приводит к формированию цилиндрической оболочки расплава. Все это способствует росту межфазной поверхности расплава и интенсификации теплообмена.

На Рис. 2 приведены отношения объема паровой пленки и площади поверхности расплава к их начальным значениям. Значительное увеличение площади поверхности расплава начинается с вторичным схлопыванием паровых пузырей. В ходе взаимодействия площадь поверхности расплава увеличивается почти в 4 раза, а начальный объем паровой пленки – в 15 раз.

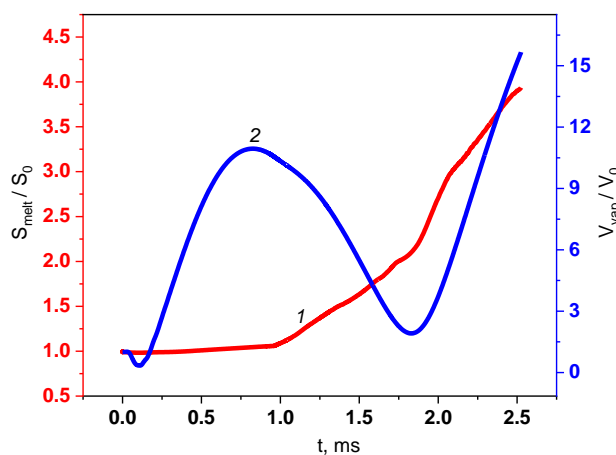


Рис. 2. Изменение относительной площади поверхности расплава (1) и относительного парового объема (2)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной в работе путем численного моделирования взаимодействия движущейся капли расплава с водой методом VOF проанализировано влияние скорости капли на параметры, характеризующие паровой взрыв. Показано, что в результате взаимодействия происходит два основных схлопывания парового пузыря, отличных по своей природе, но приводящих к существенной фрагментации капли расплава. Важно отметить, что результаты зависят не только от скорости капли, но и в значительной степени от формы парового пузыря в момент прихода импульса давления.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания ИПМех РАН (номер гос. регистрации 124012500440-9).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Теплофизика и гидродинамика паровых взрывов. М., ИПМех РАН, 2020, 276 с.
2. Thakre, S., Ma, W. 3D simulations of the hydrodynamic deformation of melt droplets in a water pool // Annals of Nuclear Energy. 2015. V. 75. P. 123–131.
3. Yakush S.E., Sivakov N.S. Numerical modeling of high-temperature melt droplet interaction with water // Annals of Nuclear Energy. 2023. V. 185. Paper 109718.

Сиваков Никита Сергеевич, sivakov@ipmnet.ru



## ПРИМЕНЕНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПУЗЫРЕЙ В РАСТЕКАЮЩЕЙСЯ ПО ПЕРЕГРЕТОЙ ПОВЕРХНОСТИ КАПЛЕ ЖИДКОСТИ

В.О. Ситников<sup>1,2</sup>, Е.О. Некрут<sup>1</sup>, Е.Я. Гатапова<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск  
egatapova@physics.msu.ru

В рамках данной работы был разработан программный комплекс на основе методов машинного обучения и ИИ, предназначенный для автоматизированного анализа экспериментов. Программа выполняет детекцию падающей капли, отслеживает ее эволюцию в процессе взаимодействия с подложкой, обнаруживает разрывы жидкой пленки и пузыри – рис. 1.

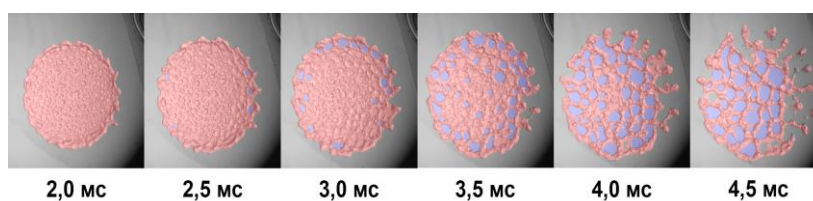


Рис. 1. Пример детекции капли жидкости и возникающих разрывов пленки

Настоящая работа является продолжением исследований, посвященных изучению динамики капли жидкости, падающей на нагретую поверхность [1-3]. В качестве рабочей жидкости применялись вода и диэлектрическая жидкость HFE-7100, температура подложки превышала температуру кипения жидкости, а числа Вебера варьировались в широком диапазоне. Запись экспериментов осуществлялась с помощью высокоскоростной камеры Phantom VEO 410L и стереомикроскопа Альтами. Полученные данные дают возможность анализа различных статистик экспериментов – рис. 2, по которым можно провести анализ поведения капли жидкости.

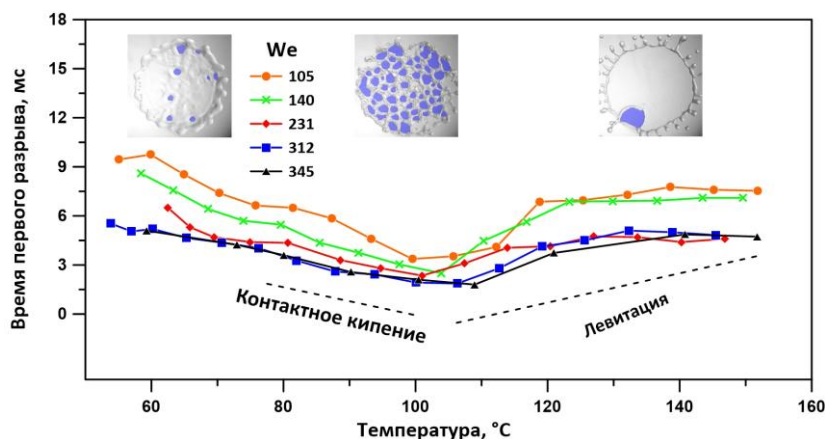


Рис. 2. Зависимость времени появления первого разрыва от температуры подложки и числа Вебера  $We$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-19-00581-П, <https://rscf.ru/project/22-19-00581/>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gatapova E. Y., Gatapova K.B., Bubble dynamics in thin liquid films and breakup at drop impact // *Soft Matter*. – 2020. – Т. 16. – №. 46. – С. 10397-10404.
2. Gatapova E. Y., Sitnikov V. O., Sharaborin D. K. Visualization of drop and bubble dynamics on a heated sapphire plate by high-speed camera enhanced by stereomicroscope // *Journal of Flow Visualization and Image Processing*. – 2022. – Т. 29. – №. 2. – С. 87-103.
3. Gatapova E. Y., Sitnikov V. O. Boiling regimes of HFE-7100 and water droplets at impact on a superheated surface // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2024. – Т. 206. – С. 109317.

Ситников Вадим Олегович, fonvizin112@gmail.com

Гатапова Елизавета Яковлевна, egatapova@physics.msu.ru

— ♦ ♦ ♦ —

## ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ И ЕЕ ОТРАЖЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВАРИАЦИЙ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ

А.В.Слюняев<sup>1,2\*</sup>, А.В. Кокорина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",

Нижний Новгород

slunyaev@ipfran.ru

При обработке данных измерений вариаций донного давления у берегов Сахалина (см. описание экспериментальных кампаний в [1, 2]) было замечено, что третий статистический момент  $Sk$  для них качественно зависит от безразмерного параметра глубины  $k_0h$ , где  $k_0$  – характерное волновое число и  $h$  – локальная глубина. Для достаточно большого значения  $k_0h$  знак третьего статистического момента становится отрицательным (рис. 1), что не согласуется с привычным представлением, что у нелинейных волн третий

момент смещения поверхности (асимметрия) исключительно положительный. Положительная асимметрия гравитационных поверхностных волн ассоциируется с несинусоидальной формой эталонных стационарных решений на глубокой воде (волны Стокса) и мелкой воде (кноидальные волны). Наиболее широко принятая нелинейная статистическая теория для морских поверхностных волн включает учет квадратичных поправок для формы индивидуальных волн (эффект второй гармоники), которые качественно согласуются с картиной однородных кноидальных и Стоксовых волн.

Обнаруженный эффект естественно связать с т.н. разностной квадратичной нелинейной компонентой волн, которая не проявляется в случае однородных волн и становится аномально малой (по сравнению с квадратичной «суммарной» компонентой, соответствующей второй гармонике) в условиях достаточно глубокой воды. Однако, в условиях т.н. «промежуточной» глубины  $k_0 h \sim 1$  разностная нелинейная компонента волн становится значимой. С ее вкладом связано хорошо известное «приседание» групп нелинейных волн на глубокой воде. Поскольку глубина проникновения волновых возмущений в толщу воды соотносится с их горизонтальным размером, то на дне вклад длинноволновых (разностных) гармоник в сравнении с доминирующей и кратными гармониками становится еще более значительным.

По этой причине становится возможной обратная асимметрия волновых движений (в частности, – вариаций придонного давления): отрицательные значения третьего статистического момента  $Sk$ .

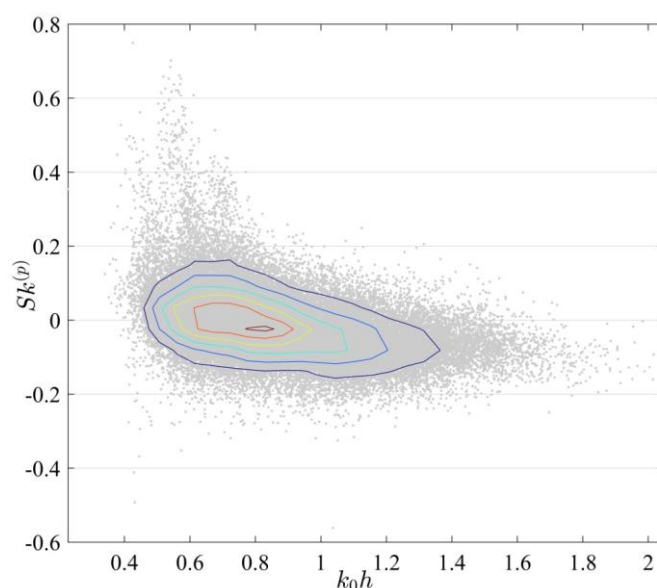


Рис. 1. Распределение значений третьего статистического момента для вариаций донного давления  $Sk^{(p)}$  от безразмерного параметра глубины для данных измерений у берега о-ва Сахалин. Изолинии характеризуют распределение плотности данных.

Классическая слабонелинейная теория для слабо модулированных гравитационных волн подтверждает высказанные выше качественные рассуждения. Учет квадратичной по нелинейности разностной компоненты ведет к снижению значения третьего момента для смещения поверхности ( $Sk^{(\eta)}$ , красная линия на рис. 2а) и отрицательным значениям третьего момента для вариаций донного давления для любой (!) глубины ( $Sk^{(p)}$ , красная линия на рис. 2б).

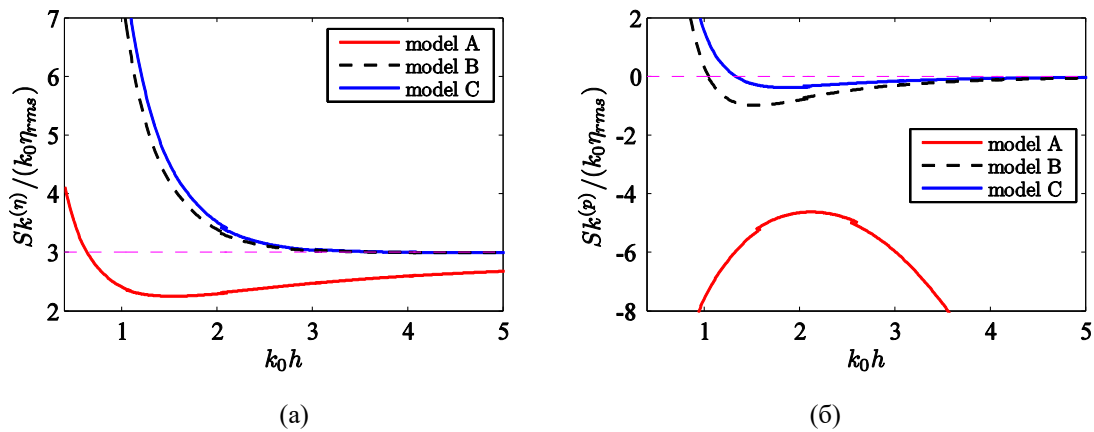


Рис. 2. Теоретический третий статистический момент, нормированный на среднюю крутизну волны  $k_0 \eta_{rms}$ , в зависимости от безразмерного параметра глубины для смещения поверхности (а) и вариаций донного волнения (б) для трех модельных структур волновых групп, приведенных на рис. 3.

Более того, при численном расчете модельной задачи эволюции уединенных волновых групп наблюдались отрицательные значения третьего статистического момента как для придонного давления, так и для смещения поверхности, что кажется противоречащим классической картине асимметрии Стоксовых и кноидальных волн.

Описанные особенности значений третьего статистического момента связаны с возникновением в задаче Коши для волновых групп длинных фоновых волн, а главное, — с подразумевающимся предположением, что вне волновых групп смещение поверхности и среднее течение убывают к нулю,  $\eta_\infty = 0$ ,  $U_\infty = 0$  (как схематически показано на рис. 3а). Такое предположение ведет к отрицательному среднему значению смещения поверхности и ненулевому (отрицательному) потоку массы под группами, а также аномально малым (и отрицательным) значениям третьего статистического момента для смещения поверхности и вариаций донного давления (красные линии на рис. 2). Строго отрицательные значения третьего статистического момента для вариаций донного давления явно противоречат наблюдаемой тенденции к положительным значениям  $Sk^{(p)}$  на небольшой глубине в натурных данных на рис. 1.

В качестве возможных альтернативных конфигураций волновых групп (кроме групп с нулевыми фоновыми возвышением и течением, рис. 3а, модель А) естественно рассмотреть группы с нулевым потоком массы,  $\langle U \rangle = 0$  (модель В, рис. 3б), и группы с нулевым средним смещением,  $\langle \eta \rangle = 0$  (модель С, рис. 3в). В зависимости от предположения о конфигурации групп, составляющих поле случайных нелинейных волн, значения и зависимости от глубины третьего статистического момента для смещения поверхности и придонного давления сильно отличаются (см. линии разного цвета на рис. 2). Соответствующий подробный анализ можно найти в нашей работе [3]. В зависимости от условий генерации и распространения морского волнения можно ожидать доминирование волновых групп разного типа, что объясняет огромный разброс значений третьего момента для полей давлений в натурных данных (см. рис. 1, а также библиографические ссылки в [3]). С другой стороны, измеренные значения  $Sk^{(p)}$  могут использоваться с диагностической целью. В частности, отрицательные значения  $Sk^{(p)}$  должны свидетельствовать об отрицательном потоке массы, то есть, эрозии берега.

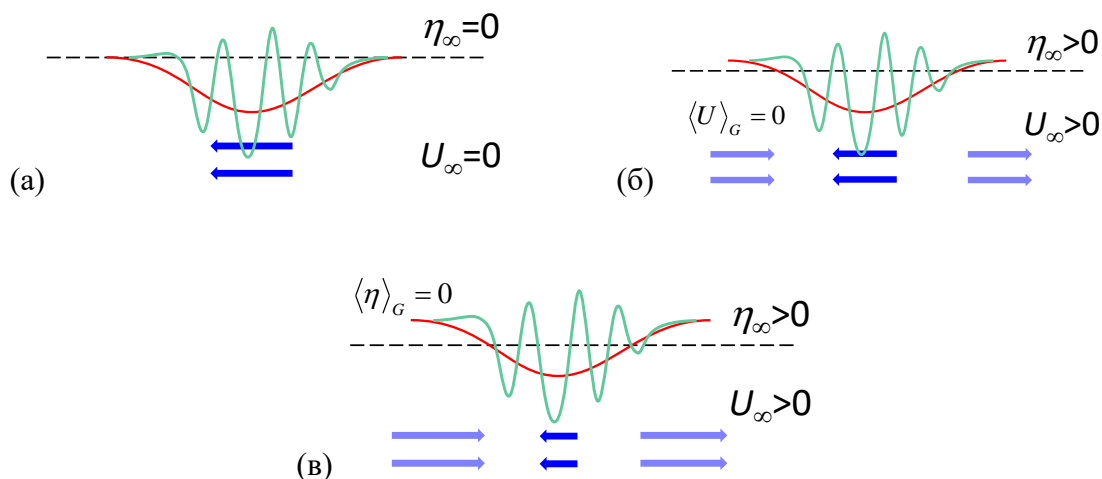


Рис. 3. Три модельных структуры групп волн: А – нулевое смещение поверхности и фоновое течение вдали от группы (а), В – нулевая средняя горизонтальная скорость жидкости (б) и С – нулевое среднее смещение поверхности (в). Разностная компонента схематически построена красной линией, поле течений – синими стрелками. Волны распространяются вправо.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке проекта РНФ 24-47-02007.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кокорина А.В., Слюняев А.В., Зайцев А.И., Диденкулова Е.Г., Москвитин А.А., Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н. Анализ данных долговременных измерений волн у о-ва Сахалин // Экологические системы и приборы. 2022. Т. 12. С. 45-54.
2. Слюняев А.В., Кокорина А.В., Зайцев А.И., Диденкулова Е.Г., Москвитин А.А., Диденкулов О.И., Пелиновский Е.Н. Зависимость вероятностных распределений высот волн от физических параметров по результатам измерений у о-ва Сахалин // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16. № 3. С. 18-29.
3. Slunyaev A.V., Kokorina A.V. The effect of induced flow on the water wave skewness // Phys. Fluids. 2025. V. 37. P. 087192.

Слюняев Алексей Викторович, slunyaev@ipfran.ru

Кокорина Анна Витальевна, a.kokorina@ipfran.ru



## ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА РАДИКАЛОВ В ГАЗОПЫЛЕВОЙ СРЕДЕ ПРИ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ КОНВЕРСИИ УГЛЕВОДОРОДОВ

В.Н. Снытников<sup>1\*</sup>, Е.Е. Пескова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт катализа имени Г.К.Борескова СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,  
Саранск  
snyt@catalysis.ru

Конверсия метана и других легких алканов в гетерогенно-гомогенных процессах с участием каталитически активных поверхностей сопровождается зарождением и рас-



пространением радикалов. Самосогласованный расчет динамики этих радикалов и продуктов проводится нами с учетом сложных кинетических механизмов радикальных цепных реакций для углеводородов [1], газодинамики двухфазной многокомпонентной среды с каталитически активными наночастицами, а также изменения внутренней энергии в эндотермическом химическом процессе. Эти расчеты осуществляются с помощью 2D параллельного кода с решением нестационарных уравнений в цилиндрических координатах [2]. В докладе рассматривается облако наночастиц, которое погружено в объем, занятый углеводородом. Начальная температура наночастиц достаточна для протекания реакций дегидрирования углеводорода с вылетом радикалов за пределы объема, который занят частицами твердой фазы. В расчетах для ряда начальных параметров получены волновые решения для динамики легких радикалов. Волновые решения этой модельной задачи сравниваются с известными аналитическими результатами для одномерного случая. Расчеты показывают, что физические представления об области пространства, занятой радикалами, требуют существенного уточнения. В частности, простые оценки по диффузии и гибели радикалов, не учитывающие цепной характер реакций, в разы занижают сферу влияния легких радикалов. Подобные уточнения области, которую могут занимать радикальные цепные реакции, могут быть использованы при проектировании соответствующих технологических процессов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lashina E.A., Peskova E.E., Snytnikov V.N.* Mathematical modeling of the homogeneous-heterogeneous non-oxidative CH<sub>4</sub> conversion: the role of gas-phase H or CH<sub>3</sub> // *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*. 2023. Vol. 136. P. 1775–1789.
2. *Пескова Е.Е., Снытников В.Н.* Программный комплекс LasChemFVM-2D для моделирования нестационарных дозвуковых потоков двухфазной реакционной среды. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2024667038 от 19.07.2024. – 2024.

Снытников Валерий Николаевич, snyt@catalysis.ru

Пескова Елизавета Евгеньевна, e.e.peskova@math.mrsu.ru



## О ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ В ЕСТЕСТВЕННО- КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

*Е.Б. Соболева*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
soboleva@ipmnet.ru*

В многокомпонентных жидких системах может возникать гравитационная неустойчивость, которая приводит к развитию концентрационно-конвективных течений. Яркий пример такого течения в пористой среде наблюдается при захоронении углекислоты (CO<sub>2</sub>) в подземных естественных образованиях. Вещество CO<sub>2</sub> улавливается из атмосферы и опускается под Землю. На глубине примерно в 800 м оно переходит в состояние сверхкритической жидкости, плотность которой меньше плотности воды, содержащейся в твердых породах. Если CO<sub>2</sub> располагается над слоем воды, то такая система устойчива. При диффузионном растворении CO<sub>2</sub> в воде образуется угольная кислота, которая более плотная, чем две исходные жидкости. Последнее обстоятельство приводит к



возникновению конвективной неустойчивости и усиленному растворению, обусловленному конвекцией. Механизм конвективного растворения существенно повышает надежность захоронения  $\text{CO}_2$  в подземных пористых образованиях [1, 2]. Исходно устойчивая жидкая система может перейти в неустойчивое состояние при растворении веществ друг в друге (в частности, пропиленгликоля в воде [3]) и протекании химических реакций (в частности, реакции нейтрализации азотной кислоты гидроксидом натрия [4]). В одном из подходов для описания таких систем используется гидродинамическая модель с нелинейным уравнением состояния [5-8], на основе которой проведено численное исследование односторонней концентрационной конвекции в пористой среде [6-8].

Стоит заметить, что в подобных системах характерной особенностью наряду с контрастом плотности является контраст вязкости. Например, на глубине 1.25 км под Землей, где температура составляет около 320 К, а давление достигает 124 атм, вода (отмечена индексом «1») имеет вязкость  $\mu_1 = 579.03 \cdot 10^{-6}$  Па·с, в то время как сверхкритический флюид  $\text{CO}_2$  (отмечен индексом «2») обладает вязкостью  $\mu_2 = 45.565 \cdot 10^{-6}$  Па·с ([webbook.nist.gov/chemistry/fluid/](http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/)). Видно, что указанные величины отличаются друг от друга более чем на порядок.

В данной работе продолжают исследования, начатые в [7, 8]. Выполняется численное моделирование концентрационно-конвективного течения в пористой среде, которое развивается при растворении жидкости 2 в жидкости 1 под непроницаемой породой. Плотность жидкой фазы зависит от количества вещества 2, что задается уравнением состояния. Предлагается новая форма уравнения состояния, которая более точно, чем в [7, 8], описывает растворение  $\text{CO}_2$  в воде, – кривая плотности представляет собой два линейных участка с изломом (рис. 1а). Концентрация  $c = \rho_2/\rho_{20}$  – это плотность вещества 2  $\rho_2$  в жидкой фазе, нормированная на плотность чистого вещества 2  $\rho_{20}$ ;  $\rho_{20} = \text{const}$ . Форма кривой на рис. 1а выбрана в соответствии с экспериментальными данными [9], которые указывают на линейный рост плотности раствора с количеством растворенного  $\text{CO}_2$  до достижения концентрации насыщения (отмечена индексом «т»). При больших концентрациях жидкая система становится двухфазной, однако в некотором приближении может рассматриваться как однофазная; ее плотность, которая представляет собой линейную комбинацию плотности насыщенного раствора и плотности чистой жидкости 2 (сверхкритического флюида  $\text{CO}_2$ ), линейно уменьшается с ростом количества  $\text{CO}_2$ . Таким образом, кривая на рис. 1а имеет излом при концентрации насыщения. В настоящей работе вязкость жидкой фазы  $\mu$  считается переменной. По данным [9], вязкость водного раствора незначительно линейно увеличивается с количеством  $\text{CO}_2$ . При концентрациях, превосходящих концентрацию насыщения, предлагаются различные аналитические формулы для расчета эффективной вязкости [10]. В данном исследовании полагается, что в этой области вязкость жидкой фазы линейно убывает, так что кривая вязкости также претерпевает излом при концентрации насыщения (рис. 1б).

Гидродинамическая модель включает уравнения неразрывности, движения (уравнение Дарси), переноса примеси. Система замыкается при введении уравнения состояния  $\rho = \rho(c)$  и функции вязкости  $\mu = \mu(c)$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho g \mathbf{e}) \quad (2)$$

$$\phi \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_2 = \nabla \cdot (\phi D \nabla \rho_2) \quad (3)$$

$$\rho = \rho(c), \quad \mu = \mu(c) \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкой фазы,  $\rho_2$  – плотность вещества 2 (суммарная масса молекул вещества 2 в единице объема жидкой фазы),  $\mathbf{u}$ ,  $P$  – скорость фильтрации и давление;  $\phi$ ,

$k$  – пористость и проницаемость твердой фазы;  $D$ ,  $g$ ,  $\mathbf{e}$  – коэффициент диффузии, ускорение свободного падения и единичный вектор, сонаправленный с вектором силы тяжести. Функции  $\rho = \rho(c)$  и  $\mu = \mu(c)$  соответствуют кривым на рис. 1.

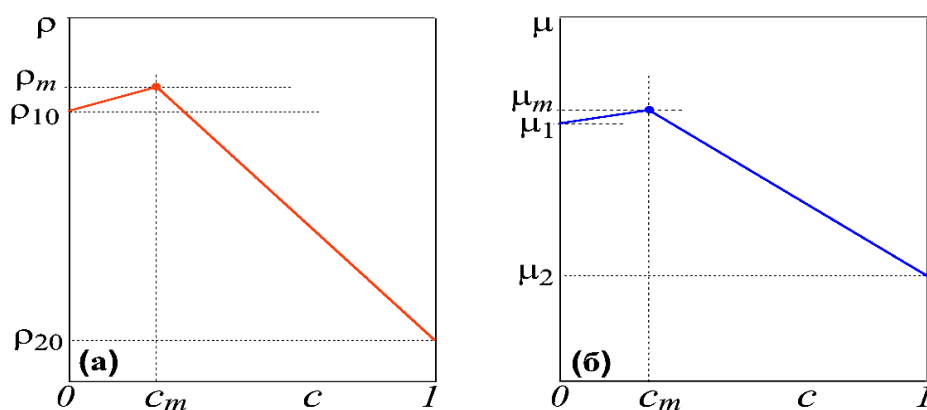


Рис. 1. Зависимость плотности  $\rho$  (а) и вязкости  $\mu$  (б) жидкой фазы от концентрации вещества 2  $c$ .

Задача характеризуется числом Рэлея-Дарси  $Ra$  (включает геометрический масштаб  $H$ ) и другими безразмерными параметрами:

$$Ra = \frac{k(\rho_m - \rho_{10})gH}{\mu_1 D \phi}, \quad \Sigma_d = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}, \quad \Sigma_\rho = \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{\rho_m - \rho_{10}}, \quad \Sigma_\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \Sigma_m = \frac{\mu_m}{\mu_1}, \quad c_m \quad (5)$$

Для численного решения задач о концентрационной конвекции создан вычислительный код, основанный на конечно-разностном методе [8]. Код модифицирован на случай переменной вязкости. Один из вариантов численного моделирования представлен на рис. 2 (дан фрагмент расчетной области). Параметры:  $Ra = 5 \cdot 10^3$ ,  $\Sigma_d = 0.9$ ,  $\Sigma_\rho = 10$ ,  $\Sigma_\mu = 0.2$ ,  $\Sigma_m = 1.01$ ,  $c_m = 0.1$ . Область:  $2 \times 1$ , сетка:  $1000 \times 2000$ . Безразмерный временной шаг  $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ . Показано, что при диффузии  $\text{CO}_2$  в воду образуется узкий слой более тяжелого, чем исходные жидкости, раствора (красный цвет), который деформируется и приходит в движение. Развивается односторонняя конвекция.

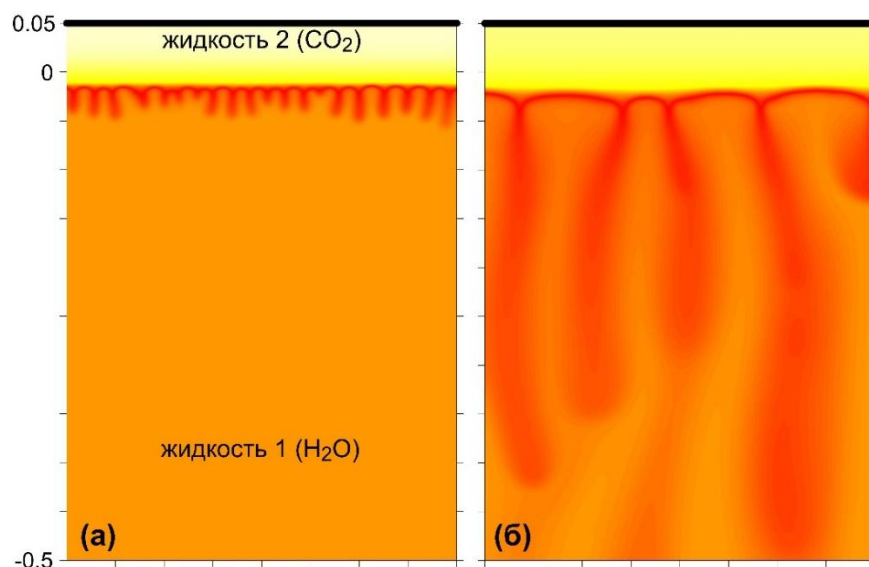


Рис. 2. Поле плотности жидкой фазы в последовательные моменты времени (безразмерные единицы)  $t = 0.12 \cdot 10^{-3}$  (а),  $0.86 \cdot 10^{-3}$  (б).

В данной работе исследуется влияние переменной вязкости на закономерности переноса  $\text{CO}_2$  вглубь области, на время конвективного растворения. Обсуждаются условия эффективного удержания  $\text{CO}_2$  в подземных пористых образованиях.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *De Paoli M.* Convective mixing in porous media: a review of Darcy, pore-scale and Hele-Shaw studies // *Eur. Phys. J. E.* 2023. V. 46. P. 129.
2. *Soboleva E.* Instability Problems and Density-Driven Convection in Saturated Porous Media Linking to Hydrogeology: A Review // *Fluids* 2023, V. 8 (2). P. 36.
3. *Backhaus S., Turitsyn K., Ecke R.E.* Convective instability and mass transport of diffusion layers in a Hele-Shaw geometry // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V 106. P. 104501.
4. *Мошова Е.А., Сураев Р.Р., Брацун Д.А.* Хемоконвекция смешивающихся растворов в наклонном слое // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2023. Т. 16. № 1. С. 5–16.
5. *Daniel D., Riaz A.* Effect of viscosity contrast on gravitationally unstable diffusive layers in porous media // *Phys. fluids* 2014. V. 26. P. 116601.
6. *Elenius M.T., Gasda S.E.* Convective Mixing Driven by Non-monotonic Density // *Transport in Porous Media* 2021. V. 138. P. 133–155.
7. *Соболева Е.Б.* Численное моделирование односторонней концентрационной конвекции в пористой среде // *Волны и вихри в сложных средах: 15-ая международная конференция – школа молодых ученых; 19 – 22 ноября 2024 г., Москва: Сборник материалов школы.* – М.: ООО «ИСПО-принт», 2024. (273 с.) – С. 200-203.
8. *Соболева Е.Б.* Моделирование односторонней конвекции в пористой среде с использованием нелинейного уравнения состояния // *Известия РАН. МЖГ.* 2025. № 3. С. 94–106.
9. *McBride-Wright M., Maitland G.C., Trusler J.P.M.* Viscosity and Density of Aqueous Solutions of Carbon Dioxide at Temperatures From (274 to 449) K and at Pressures up to 100 Мра // *J. Chem. Eng. Data.* 2015. V. 60(1). P. 171–180.
10. *Abou-Kassem J.H., Farouq Ali S.M.* Modelling of emulsion flow in porous media // *J. Canadian Pertol. Technol.* 1995. V. 34. P. 30–38.

Соболева Елена Борисовна, soboleva@ipmnet.ru

— ♦ ♦ ♦ —

## **ДИСПЕРГИРОВАНИЕ КАПЕЛЬ ВОДОУГОЛЬНОГО ТОПЛИВА ПРИ УДАРЕ О ПЛОСКУЮ ДВИЖУЩУЮСЯ ПЛАСТИНУ**

*С.В. Сыродой\*, Р.Р. Замалтдинов, Б.В. Борисов*  
ФГАО ВО НИ Томский политехнический университет, Томск  
ssyrodoy@yandex.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Проводимая многими государствами в последние десятилетия политика по полному отказу от угольной и атомной энергетики в пользу нетрадиционных возобновляемых источников энергии оказалась ошибочной. Можно констатировать, что внедрение НВИЭ в энергетику невозможно без использования высокоэффективных и энергоемких накопителей электрической энергии, появление которых в ближайшем будущем не предвидится [1]. В этих условиях в мире уже начинает наблюдаться достаточно очевидный «ренессанс» угольной энергетики. Необходимо отметить, что на сегодняшний день существует ряд объективных причин, существенно тормозящих широкомасштабное использование угля в целях производства электрической и тепловой энергии. Основная проблема сжигания угля – высокая антропогенная нагрузка угольных ТЭС станций на атмосферу. По этой причине исследователи всего мира, работающие в области энергетики, прикладывают интеллектуальные ресурсы к разработке и внедрению в реальной практике «чистых» угольных технологий. Одной из самых перспективных технологий считается технология сжигания угля в виде водоугольного топлива [2]. Надо сказать, что технологии ВУТ имеет ряд значимых недостатков. Самым существенным из таковых считаются высокие значения времен задержки зажигания типичных капель (с диаметром 3 мм) водоугольного топлива. По результатам проведенных экспериментальных исследований установлено, что при распылении ВУТ образуются капли с характерным размером в 3-5 мм [3]. Времена задержки зажигания таких относительно крупных капель составляет от 5 до 15 секунд (в зависимости от марки угля). Поэтому на настоящее время ведутся активные попытки создания технологий, позволяющих существенно уменьшить характерный размер капель ВУТ. Большинство современных способов уменьшения характерных размеров топливных капель базируются на принципе сужения соплового аппарата форсуночных устройств. Однако уменьшение выходного сечения соплового аппарата приводит значимому эрозионному износу. Как показали результаты экспериментов характерное время работы водоугольных форсунок не превышает 120 часов. Анализ опубликованных в последнее время статей по тематике диспергирования капель водоугольного топлива показывает, что на настоящее время не разработано технологий устойчивого дробления капель ВУТ. В этих условиях имеет смысл разработка новых нетрадиционных способов диспергирования крупных капель водоугольного топлива. Надо сказать, что на сегодняшний день практически не изучены характеристики и условия измельчения крупных капель ВУТ в условиях их ударного взаимодействия с твердыми поверхностями. Поэтому цель этой работы – экспериментальное исследование процессов диспергирования типичных капель водоугольного топлива при их высокоскоростном ударном взаимодействии с вращающейся подложкой.

## ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальные исследования проведены на специально разработанном экспериментальном стенде (рисунок 1), представляющего собой рабочее колесо с прямоугольными лопатками (высотой 100 мм и шириной 30 мм), установленными радиально по окружности вала (диаметром 20 мм). Последний приводился во вращательное движение при помощи электродвигателя, обеспечивающий диапазон изменения окружных скоростей в диапазоне от 10 до 100 м/с. Над поверхностью вращающегося рабочего колеса устанавливался генератор капель топлива, который позволяет формировать капли ВУТ с характерным диаметром 2 мм. Вблизи боковой (при повороте диска на угол  $\varphi = n\pi/2$  где:  $n=0, 2, 4 \dots \infty$ ) поверхности закрепленной на диске лопатки капля встречается с поверхностью последней. Лопатки устанавливались на диске не полностью с целью исключения влияния вентиляционного эффекта и обеспечить соударение капель с лопатками.

Конструкция экспериментального стенда позволяет детально изучать процессы столкновения капель о твердую поверхность при угле атаки  $\varphi=\pi/2$ .

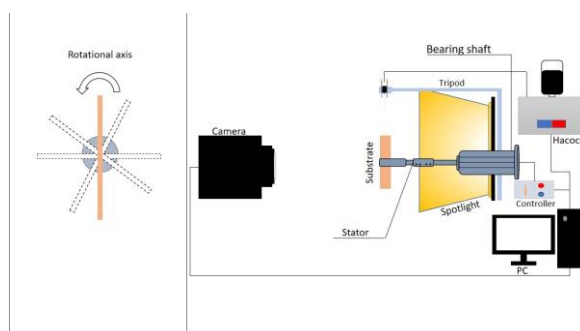


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментального стенда.

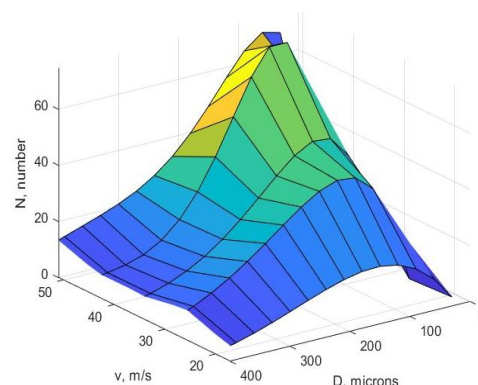


Рис. 2. Сравнение распределений количества вторичных капель при различных скоростях удара

## РЕЗУЛЬТАТЫ

На рисунке 2 показано распределение размеров вторичных капель, образующихся после удара начальной капли воды о высокоскоростной барьер, при изменении скорости удара (от 17 до 50 мс). Анализ показывает, что увеличение скорости удара приводит к увеличению количества вторичных капель. Это связано со сложным распределением давления в капле при высоких скоростях удара, как показано при моделировании высокоскоростного удара капли воды о твердую поверхность [4]. В капле, соединенной с поверхностью контакта, генерируется полусферическая ударная волна высокого давления. Частицы угля и их мелкие агломераты являются центрами напряжения в этой зоне. В результате капля ВУТ быстро разрушается. Анализ рисунка 2 показывает, что образуется больше всего (от 40 до 80 в зависимости от скорости удара) вторичных капель со средним диаметром  $d = 50...150$  мкм.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках гранта 23-79-10092

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jinchao Li, Ya Xiao, Shiqiang Lu. Optimal configuration of multi microgrid electric hydrogen hybrid energy storage capacity based on distributed robustness//Journal of Energy Storage. 2024. V.76, №109762
2. G.V. Kuznetsov, S.V. Syrodoy, V.V. Salomatov, D.Y. Malyshev, Z.A. Kostoreva, M.V. Purin, S.A. Yankovsky. Ignition and combustion characteristics of coal - water fuels based on coal & semi-coke//Combustion and Flame. 2022. V.246. №112430
3. Zhicun Xue, Yan Gong, Qinghua Guo, Fuchen Wang, Guangsuo Yu. Visualization study on breakup modes of coal water slurry in an impinging entrained-flow gasifier//Fuel. 2019. V.244. pp. 40-47
4. Gonor, A.L., Yakovlev, V.Y. Dynamics of the impact of a drop on a solid surface//Fluid Dyn. 1978. V.13. pp. 25-31

Сыродой Семен Владимирович, ssyrodoy@yandex.ru  
Замалтдинов Роман Ринатович, rrz@tpu.ru



# АНАЛИЗ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА МНОГОФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В OPENFOAM МЕТОДОМ MP-PIC

*А.Н. Теньков*

*Национальный Исследовательский Университет “МЭИ”, Москва*

*TenkovAN@mpei.ru*

Метод многофазных частиц в ячейках (MP-PIC) применяется для моделирования плотных газо-частичных потоков в различных инженерных задачах, таких как химическая промышленность и энергетика, в частности при проектировании котлов для сжигания твердого топлива в циркулирующем кипящем слое. В отличие от методов моделирующих столкновение отдельных частиц, в методе MP-PIC для плотных газо-частичных потоков используется моделирование большого количества частиц одним пакетом и применяется регуляризированная модель критической плотности для ограничения объемной доли частиц выше максимально возможного значения. Важное значение для данного метода имеет количество пакетов частиц в полностью заполненной частицами эйлеровой ячейке, при величине этого параметра порядка десятка при применении модели дельта-функции при переносе объемной плотности частиц с лагранжевой сетки на эйлерову вызывает образование когерентных структур вызванных дискретностью значений объемной плотности частиц, характерный размер которых связан с размером сетки, однако осредненные величины стремятся к пределу определяемому данным параметром. В данной работе предложена реализация MP-PIC в OpenFOAM с подходом “облако в ячейке” (CIC) и численным конвективно-диффузионным сглаживанием. В отличие от диффузионного сглаживания [1], метод включает конвективную составляющую на основе статистических моментов. Радиус облака также позволяет учитывать турбулентную дисперсию.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема утилизации твердых коммунальных отходов (ТКО) приобретает все большую актуальность в связи с ростом объемов их образования и ужесточением экологических требований. Одним из перспективных направлений является термическая переработка отходов с получением энергии. Вторичное топливо (RDF), производимое из ТКО, представляет собой важный энергетический ресурс позволяющий снизить стоимость отопления, однако его сжигание сопряжено с рядом технологических и экологических проблем.

Основные проблемы сжигания RDF в котлах с циркулирующим кипящим слоем (ЦКС) включают:

- Нестабильность состава топлива
- Сложность контроля процессов горения
- Высокий уровень выбросов вредных веществ ( $\text{NO}_x$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{HCl}$ )

Существующие методы расчета эмиссии часто оказываются недостаточно точными из-за сложного взаимодействия гидродинамических и химических процессов в ЦКС. Это обуславливает необходимость разработки новых методов моделирования, направленных на по-модульное изучение проблемы с верификацией модулей экспериментальными данными.

В данной работе рассматривается модуль движения частиц твердой фазы в газовом потоке при объемной доле твердых частиц близкой к критической. С точки зрения вычислительной математики, это проблема решения уравнения Больцмана движения частиц твердого топлива, а при учете воздействия турбулентности потока на движение

твердых частиц уравнение Фоккера-Планка. В данной работе влияние турбулентности и химические реакции не учитываются.

Для отработки технологии моделирования дисперсной фазы используются результаты работы [2] в которой описываются результаты измерения в модельных условиях псевдооживленного слоя в плексигласовом параллелепипеде (дисперсная фаза: стеклянные шарики,  $d_p = 0.25 \dots 0.3$  мм, воздух при  $20^\circ\text{C}$ , 1 атм). На рис. 1, показано сопоставление результатов расчета с данным экспериментом. Расчеты проводились в пакете OpenFOAM [3].

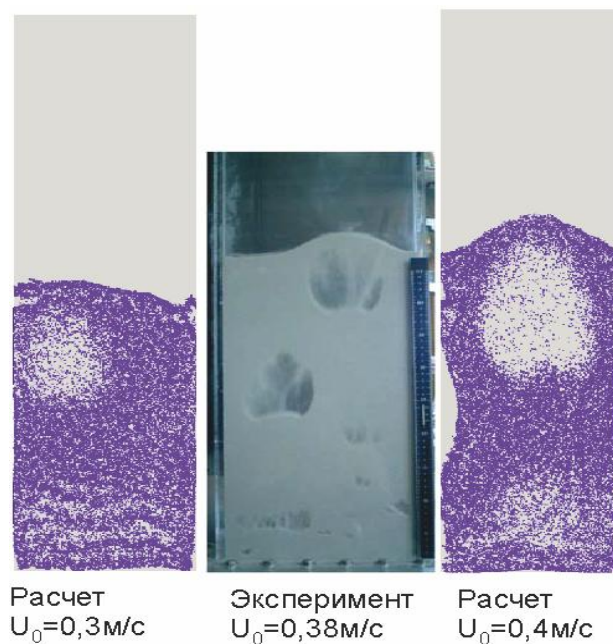


Рис.1 Сравнение результатов расчета по модели PIC с экспериментом из работы [2].

Результаты экспериментов и расчетов показывают, что при течении твердых частиц при работе системы в интересующем режиме псевдооживленного слоя возникают когерентные структуры, однако в части работ, например [4], указывается что существуют ограничения на количество пакетов частиц в полностью заполненной частицами эйлеровой ячейке, однако подробной информации по выбору данного параметра не приводится. Для изучения данного эффекта была придумана модельная задача осаждения частиц того же размера и плотности в объеме что в работе [2] из взвеси частиц. Было выбрано несколько расчетных сеток и несколько значений числа пакетов частиц в полностью заполненной частицами эйлеровой ячейке. Результаты данных расчетов представлены на рис. 2. Результаты расчетов показывают, что при малом количестве пакетов в полностью заполненной ячейке возникают когерентные структуры, вызванные методом расчета.

В реальных задачах для учета течения вблизи стенок планируется использовать нерегулярную сетку со сгущением сетки. Поэтому возникает задача разработки метода расчета, не создающего артефактов при малом числе пакетов частиц в заполненной ячейке.

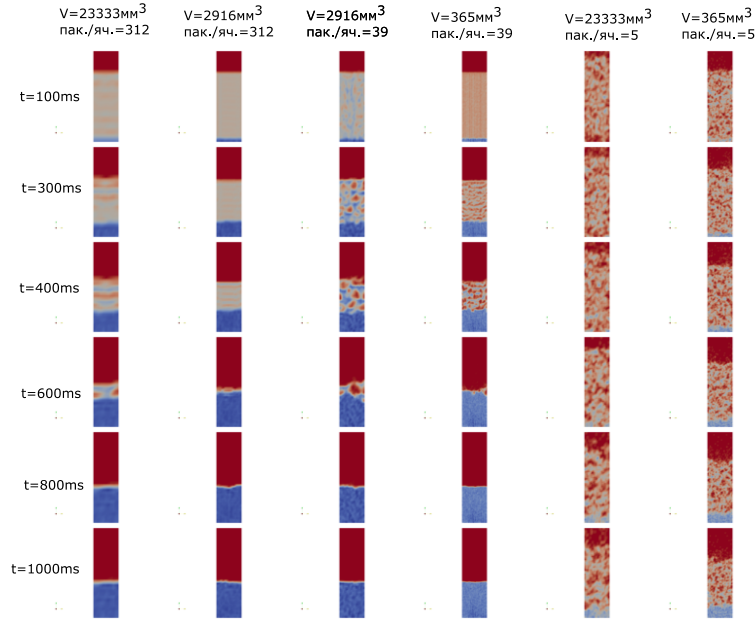


Рис. 2. Сравнение результатов расчета осаждения частиц в условиях, описанных в работе [8] при различных размерах расчетных ячеек и количества пакетов в полностью заполненной эйлеровой ячейке

Для переноса данных о плотности частиц с лагранжевой сетки на эйлерову предлагается следующий алгоритм, являющийся развитием алгоритма [1]:

1. Расчет радиуса облака  $R_i$ , соответствующего пакету  $R_i = \left(\frac{3Np_iV_i}{4\pi\varepsilon_{CV}}\right)^{1/3}$ ,

где  $Np_i$  - количество частиц в пакете,  $V_i$  - объем частицы в  $i$ -м пакете,  $\varepsilon_{CV}$  - доля объема занимаемая частицами.

2. Перенос пакетов по траекториям
3. Перенос данных на эйлерову сетку. Расчет моментов

$$\overline{\delta r_{CV}} = \frac{\sum (\tilde{r}_i - \tilde{r}_{CV}) Np_i V_i}{\sum Np_i V_i}, \quad \delta^2 r_{CV,k,l} = \frac{\sum \left( (r_{i,k} - r_{CV,k})(r_{i,l} - r_{CV,l}) + \frac{2}{5}(R_i)^2 \delta_{k,l} \right) Np_i V_i}{\sum Np_i V_i},$$

где  $\delta_{k,l}$  - символ Кронекера,  $\tilde{r}_i$  - положение пакета,  $\tilde{r}_{CV}$  - положение центра контрольного объема.

4. Если  $\delta^2 r_{CV,k,k} < \Delta^2$ , то  $\delta^2 r_{CV,k,k} = \Delta^2$ , где  $\Delta$  - размер сетки
5. Рассчитывается плотность для описания частиц как  $\delta$ - функций  $\varepsilon^* = \frac{\sum Np_i V_i}{V_{CV}}$ .
6. Решается конвективно-диффузионное уравнение во всей области

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tau} + \text{div}(\overline{\delta r_{CV}} \tilde{\varepsilon}) - \nabla \left( \frac{1}{2} \delta^2 r_{CV} \nabla \tilde{\varepsilon} \right) = 0.$$

7. С граничными условиями:

$$\tilde{\varepsilon}|_{\tau=0} = \varepsilon^*, \quad \nabla_n \tilde{\varepsilon}|_{\Gamma} = 0.$$

8. Значение  $\tilde{\varepsilon}$  при  $\tau = 1$  принимаем за значение доли объема занимаемого частицами на  $n + 1$  временном шаге  $\varepsilon^{n+1} = \tilde{\varepsilon}|_{\tau=1}$



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J. Capecelatro and O. Desjardins*, “An Euler–Lagrange strategy for simulating particle-laden flows,” *J. Comput. Phys.*, vol. 238, pp. 1–31, 2013.
2. *F. Taghipour, N. Ellis, C. Wong*, Experimental and computational study of gas–solid fluidized bed hydrodynamics, *Chemical Engineering Science*, Vol. 60, No. 24, pp. 6857–6867, 2005, <https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.05.044>.
3. OpenFOAM Documentation: MPPIC Modeling (v2112) [Электронный ресурс]. URL: [https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/group\\_\\_grpLagrangianIntermediateMPPICSubModels.html](https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/api/group__grpLagrangianIntermediateMPPICSubModels.html) (дата обращения: 05.11.2023)
4. *Liang, Y., Zhang, Y., Li, T., & Lu, C.* (2014). A critical validation study on CPFD model for modeling gas–solid bubbling fluidized beds. *Powder Technology*, 263, 121–134

Теньков Артем Николаевич, TenkovAN@mpei.ru



## ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ КОНВЕКТИВНОГО ФАКЕЛА НЕПРЕРЫВНОГО ОПТИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ГЕРМЕТИЧНОЙ КАМЕРЕ

*М.В. Торчик\*, В.Н. Андросенко, М.А. Котов, Н.Г. Соловьев, А.Н., Шемякин,  
М.Ю. Якимов*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
mari.torchick@ipmnet.ru*

Непрерывный оптический разряд (НОР) является плотной плазмой, сконцентрированной вблизи фокальной перетяжки сфокусированного лазерного луча. Стабилизированный НОР может служить источником широкополосного излучения высокой спектральной яркости. В данном случае под стабилизацией НОР понимается прекращение периодических пульсаций факела термогравитационной конвекции вокруг НОР [2] поскольку такие пульсации являются причиной колебаний излучательных характеристик плазмы. Подавления конвективных колебаний вокруг НОР можно добиться, например, с помощью нагретого стержня или подогреваемой электричеством сетки, располагаемых снизу вблизи факела [3]; при внедрении в сосуд с НОР конца теплоотводящего стержня [4] или с помощью модуляции излучения лазера с частотой определенных резонансных акустических колебаний в разрядном объеме [5].

В работе [6] был обнаружен эффект стабилизации конвективного факела НОР, находящийся между двумя электродами, в лампе с ксеноном при увеличении подводимой к НОР мощности лазерного излучения до определённого значения, при котором происходило уменьшение амплитуды колебаний факела с последующей полной его стабилизацией. С помощью расчетной модели в программном пакете Ansys CFX [7] было установлено, что стабилизация достигается за счет нагрева электродов до температуры 1200 К.

Данная работа посвящена исследованию НОР в герметичной камере, сконструированной в лаборатории лазерных разрядов ИПМех РАН. Эксперименты по поддержанию НОР в ксеноне проводились при давлении ~13 бар (рис. 1). Расчетная модель, используемая в работе [6], была переделана в соответствии с экспериментом в камере с ксеноном. Расчетная область представляет собой трёхмерную модель, по форме и размерам соответствующую внутренней области герметичной камеры. Источник представляет собой однородную область объемного тепловыделения в виде эллипсоида с полуосями 0.2 и 0.6 мм. Граничные условия задавались в соответствии с условиями эксперимента.

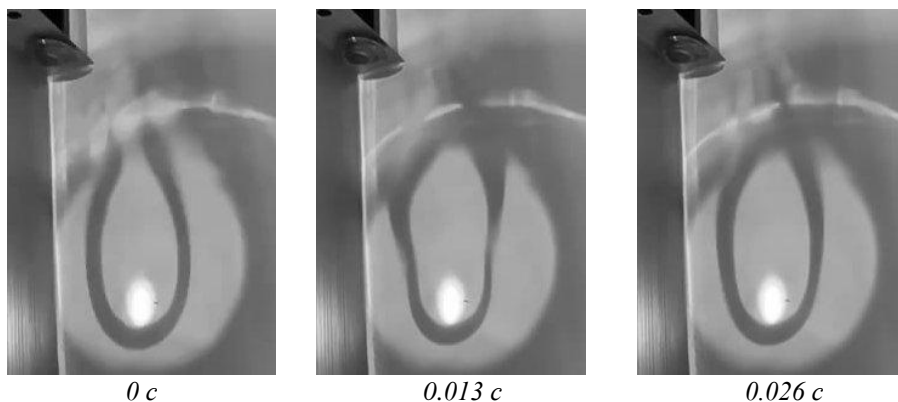


Рис. 1. Последовательность теневых изображений конвективного факела вокруг НОР в течение одного полного колебания

На рис. 2 представлен пример результатов расчета плотности газа в герметичной камере.

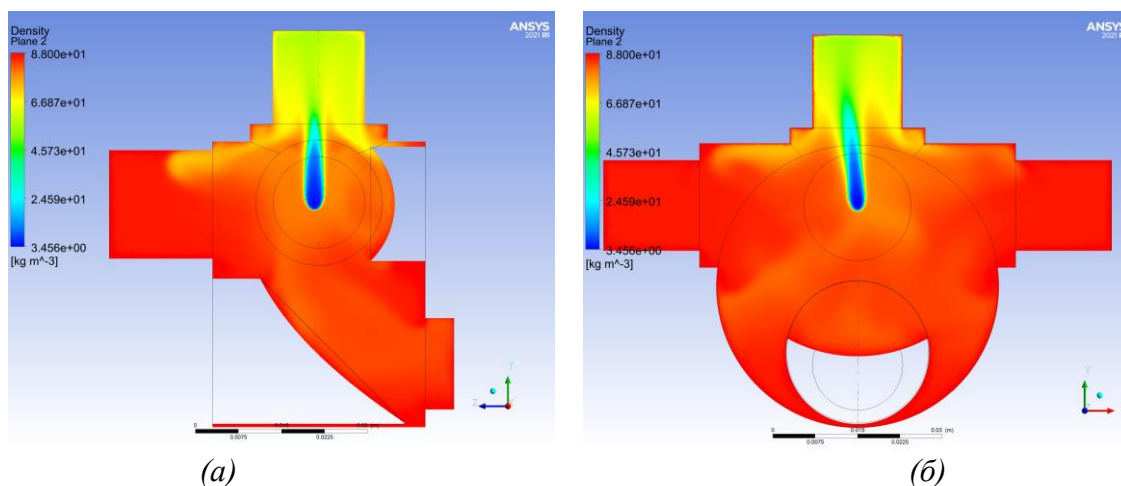


Рис. 2. Результаты расчета плотности ксенона в герметичной камере

Исследования оптического разряда в камере открывают более широкие возможности в исследовании конвективного факела от НОР и позволяют организовывать оптический разряд в более широком диапазоне параметров, а также позволяют более эффективно решить вопрос стабилизации и вывода исходящего излучения.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500440-9) с использованием оборудования, полученного по программе обновления приборной базы Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зимаков В. П., Кузнецов В. А., Лаврентьев С. Ю., Соловьев Н. Г., Шемякин А. Н., Шилов А. О., Якимов М. Ю. Новые возможности применения оптических разрядов в аэрофизическом эксперименте // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17. № 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-2/articles/653/>

2. Kotov M. A., Lavrentyev S. Y., Shemyakin A. N., Solovyov N. G., Yakimov M. Yu. Oscillations of convective flow around a continuous optical discharge in high-pressure xenon // Plasma Sources Science and Technology. 2022. Vol. 31, 12. 124002.
3. Барановский А., Муха З., Перадзыньский З. (Польша). Неустойчивость непрерывного оптического разряда в газах // Успехи механики. 1978. Т. 1. № 3. С. 125 – 147
4. Патент № 2 734 162 Российская Федерация, МПК H01J 61/02 (2006.01). Устройство и способ стабилизации излучения оптического разряда : № 2020118924, : заявл. 08.06.2020: опубл. 13.10.2020 / Соловьев Н. Г., Шемякин А. Н., Якимов М. Ю.–12 с.
5. Патент № 2 734 111 Российская Федерация, МПК H01J 61/02 (2006.01). Способ предотвращения колебаний оптического разряда : № 2020118918, : заявл. 08.06.2020 : опубл. 13.10.2020 / Соловьев Н. Г., Лаврентьев С. Ю. Шемякин А. Н., Якимов М. Ю. – 12 с.
6. Androsenko V.N., Kotov M.A., Solovyov N.G., Torchick M.V., Shemyakin A.N., Yakimov M.Yu. Stabilization of laser-sustained plasma convective plume in the interelectrode gap of high-pressure xenon lamps // Physics of Fluids. 2025. Vol. 37, no. 6.
7. ANSYS CFX <http://www.ansys.com/Products/Fluids/ANSYS-CFX> (reference date 10/18/2021)

Андросенко Владислав Николаевич, androsenko@ipmnet.ru

Котов Михаил Алтаевич, kotov@ipmnet.ru

Соловьев Николай Германович, solovyov@lantanlaser.ru

Торчик Марина Васильевна, mari.torchick@ipmnet.ru

Шемякин Андрей Николаевич, shemyakin@lantanlaser.ru

Якимов Михаил Юрьевич, yakimov@lantanlaser.ru



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВДУВА КАПЕЛЬНОГО ПОТОКА В ПОТОК ЗАПЫЛЕННОЙ СРЕДЫ

Д.А.Тукмаков  
ИММ ФИЦ КНЦ РАН, Казань  
[tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из теоретических основ процессов химических технологий являются процессы гидродинамики газов и жидкостей. В монографии [1] представлена общая теория динамики многофазных сред. В монографии [2] в одномерном приближении, без учета вязкости среды разработаны математические модели проведены численные расчеты динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред. В монографии [3] разработаны магматические модели, численные алгоритмы моделирования и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах металлических частиц. В публикации [4] проведено физико-математическое моделирование процесса адсорбции газовых компонентов на адсорбент, инжектируемый в паровоздушный поток в цилиндрической трубе и трубе Вентури. В работе [5] выполнено численное моделирование научно-технической задачи определения эффективности насадочных скрубберов при конденсационном охлаждении и очистки газов от дисперсной фазы газов. Дисперсная фаза моделировалась как многофракционная полидисперсная, фракции дисперсной

фазы могут отличаться как плотностью материала, так и размером дисперсных включений [6]. Применяемая для численных расчетов математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования течений многофазных сред [7]. Учитывался межфазный теплообмен и межфазный обмен импульсом. Математическая модель учитывала несколько сил межфазного обмена импульсом, что позволяет более точно описать динамику дисперсных включений в потоке газа. Целью работы было исследование пространственных распределений фракции газозвеси в процессе бокового вдува капельных фракций.

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЕ

Численные расчеты, описанные в данной работе были проведены вычислительным комплексом [8]. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [7-13]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = -\sum_{i=1,n} F_{xi} + \sum_{i=1,n} \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = -\sum_{i=1,n} F_{yi} + \sum_{i=1,n} \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) =$$

$$= \sum_{i=1,n} Q_i - \sum_{i=1,n} (|F_{xi}|(u - u_i) - |F_{yi}|(v - v_i)) + \sum_{i=1,n} \alpha_i \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right), \quad (4)$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Динамика каждой из фракции дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности фракции, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения энергии [7-13]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) = F_{xi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) = F_{yi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(e_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i) = -Q_i, \quad (8)$$

$$\rho_i = \alpha_i \rho_{i0}, \quad e_i = \rho_i C_{vi} T_i,$$

$$F_{xi} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2} (u - u_i) + \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha_i \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned}
F_{yi} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{(d_i)} C_d \rho \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2} (v - v_i) + \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\
&+ 0.5 \alpha_i \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right), \\
C_{di} &= \frac{24}{Re_i} + \frac{4}{Re_i^{0.5}} + 0.4, \quad M_i = |\bar{V} - \bar{V}_i| / c, \\
Re_i &= \rho |\bar{V} - \bar{V}_i| d_i / \mu, \quad Pr = C_p \mu / \lambda \\
Q_i &= 6 \alpha_i \lambda Nu_i (T - T_i) / d_i^2, \quad i=2, \dots, n
\end{aligned}$$

Система уравнений динамики многофазной среды (1)-(8) решалась двухэтапным явным конечно-разностным методом Мак-Кормака, позволяющим получать решения второго порядка точности [14].

Алгоритм численного метода можно отобразить на примере нелинейного уравнения (9):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial b(f)}{\partial y} = c(f) \quad (9)$$

При реализации алгоритма последовательно выполняются действия (10) и (11) [14]:

$$f_{j,k}^* = f_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j+1,k}^n - a_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k+1}^n - b_{j,k}^n) + \Delta t c_{j,k}^n \quad (10)$$

$$f_{j,k}^{n+1} = 0.5(f_{j,k}^n + f_{j,k}^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j,k}^* - a_{j-1,k}^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k}^* - b_{j,k-1}^*) + 0.5 \Delta t c_{j,k}^* \quad (11)$$

Здесь  $\Delta x, \Delta y, \Delta t$  – шаги конечно-разностной сетки. Для подавления численных осцилляций, возникающих в процессе интегрирования уравнений методом Мак-Кормака, применялась схема нелинейной коррекции [14,15]. Для увеличения устойчивости численного решения применяется схема сглаживания конечно-разностного решения [16].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. Москва: Наука, 1978. 336с.
2. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург.: Недра, 2003. 284 с.
3. Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газовзвешах частиц металлов. Новосибирск: Параллель, 2015. 301 с.
4. Шиляев М.И., Хромова Е.М. Динамика процесса тепломассообмена при инжектировании диспергированного адсорбента в парогазовый поток // Теоретические основы химической технологии. 2021.Т. 55. № 4. С. 506-516.
5. Лаптева Е.А., Лаптев А.Г., Аласгарли С.У. Математическая модель контактного охлаждения и очистки от дисперсной фазы газов в насадочных скрубберах // Теоретические основы химической технологии. 2022. Т. 56. № 2. С. 244-251.
6. Алемасов В.Е., Дрегаллин А.Ф., Тишин А.П., Худяков В.А. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: справочник в 5-ти томах. Т. 1 Методы расчета. Москва: Изд-во ВИНТИ, 1971. 267 с.
7. Тукмаков А.Л. Динамика коагулирующей полидисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле акустического резонатора // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 1. С. 11-19.

8. Тукмаков А.Л. Программа для ЭВМ "Программный код для моделирования динамики однородных и дисперсных сред явным методом Мак-Кормака в обобщенных криволинейных координатах (2D)" Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2018616542 заявл. 02.08.2018 опублик. 19.06.2018.
9. Тукмаков А.Л. , Тукмаков Д.А. Динамика заряженной газовой взвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию // Теплофизика высоких температур. Т. 55. № 4. 2017. С. 509-512.
10. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Генерация акустического возмущения движущейся заряженной газовой взвесью // Инженерно-физический журнал. 2018. №5. С.1207-1213.
11. Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния параметров дисперсной фазы на генерацию течения газа, формирующегося при гравитационном осаждении аэрозоля // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 279-287.
12. Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газовой взвеси в двухкомпонентной среде // Инженерно –физический журнал. 2020. Т. 93. №2. С. 304-310.
13. Тукмаков Д.А. Численное моделирование взаимодействия газовой взвеси с ударной волной континуальными математическими моделями с идеальной и диссипативными несущими средами // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2022. Т. 11. № 4. С. 67–87.
14. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. Москва: Мир, 1991. 551 с.
15. Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т.5. №3. С.74-83.
16. Пирумов У. Г., Росляков Г.С. Газовая динамика сопел. Москва: Наука, 1990. 368 с.

Тукмаков Дмитрий Алексеевич, tukmakovda@imm.knc.ru



## АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С НЕМОНОТОННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Урманчеев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа  
said@anrb.ru

Автоколебательные режимы в гидродинамических системах являются одним из наиболее интересных направлений изучения особенностей течения жидкостей в различных условиях. В многофазных средах, если речь идёт о потоках жидкости с пузырьками газа, колебательные режимы могут возникать в результате динамического взаимодействия фаз, как это происходит, например, на супергидрофобной поверхности, образованной совокупностью каверн, содержащих пузырёк газа [1]. Примером могут служить, также, циклические извержения гейзеров [2], которые происходят благодаря выбросу паро - водяных струй из подземной камеры, нижняя часть которой соприкасается с горячей магмой. Сама камера непрерывно пополняется пластовой водой через систему тре-

щин в грунте. Во многом аналогичная картина наблюдается при эффузивных извержениях магмы, но с тем существенным отличием, что в этом случае процессы кристаллизации и рекристаллизации силикатов из-за изменения температуры, происходящего по мере движения магмы в дайке, обуславливают резкое изменение вязкости магмы [3] и, в итоге, устанавливается автоколебательный режим эффузивного извержения. В гидродинамике существует и множество других процессов, однако, остановимся на последнем примере и рассмотрим вопрос, как изменение физических свойств жидкости при движении в неоднородном температурном поле приводит к тем или иным режимам течения, в том числе автоколебательным.

Например, в расплавах некоторых полимеров при увеличении температуры существенно меняется молекулярная структура вещества, в котором образуются длинные полимерные цепочки, что, в свою очередь, приводит к увеличению вязкости. Однако, дальнейший рост температуры сопровождается уже разрушением полимерных цепочек и соответствующим снижением вязкости жидкости. Такое реологическое поведение характерно для жидкой серы, термозависимых реагентов, применяемые для блокирования заводнённых пропластков в технологии добычи нефти, ряд эмульсий промышленного назначения. Эти полимерные жидкости обладают общей для них особенностью: зависимость их вязкости от температуры описывается немонотонной функцией.

В статьях [4] – [7] были проведены обстоятельные численные исследования течения такого рода жидкостей с некоторыми модельными зависимостями вязкости от температуры. Для удобства исследования влияния параметров, характеризующих эти зависимости, в расчётах использовалась функция Гаусса. Для этих жидкостей был введён термин – аномально термовязкие жидкости.

Основной вывод статьи [4], в которой были представлены результаты впервые проведённых исследований по установившемуся режиму течения жидкостей с температурной аномалией вязкости, заключается в том, что при заданном перепаде давления ключевую роль играют условия теплообмена на стенках канала, которые, в конечном итоге, определяют тот или иной режим течения. Гидродинамические характеристики потока определяются в результате формирования вязкого барьера – высоковязкой области, разделяющей нагретую и холодную зоны жидкости в соответствии с немонотонной зависимостью вязкости от температуры. Следует отметить, что протяжённость высоковязкой области зависит от теплопроводности среды.

В дальнейшем были проведены исследования влияния интенсивности теплообмена, а итоговые результаты были представлены в работе [5], посвящённой течению аномально термовязкой жидкости в кольцевом канале. В этой же работе было установлено, что при увеличении интенсивности теплообмена в области его малых значений, расход плавно снижается до некоторых критических значений коэффициента теплоотдачи, когда происходит резкий скачок в сторону уменьшения расхода. При дальнейшем увеличении интенсивности теплообмена расход также увеличивается при всех значениях относительной ширины кольцевого канала.

При постановке задачи с граничными условиями, соответствующими стационарному теплообмену, претерпевающему скачкообразное изменение по длине кольцевого канала, был обнаружен эффект автоколебаний расхода жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры при фиксированном перепаде давления [6], [7]. Этот эффект, интересный сам по себе, как физический феномен, может стать основанием, например, для интерпретации причин пульсирующих режимов эффузивного истечения магмы или для применения в технологическом процессе, в котором необходим переменный расход рабочей жидкости.

Настоящее исследование связано с установлением влияния различных параметров на возникновение незатухающих автоколебаний. В известной мере это продолжение

работы [7], в которой подробно исследовалось изменение параметра, называемого FWHM – полная ширина гауссовой кривой на половине её максимального значения. В упомянутой работе было показано, что автоколебания возникают в достаточно узком интервале изменения внешних параметров задачи, а варьирование FWHM приводит к различным режимам автоколебаний: при относительно больших его значениях происходят слабо нелинейные колебания, которые можно отнести к автоколебаниям томсоновского типа, что отчётливо демонстрируют соответствующие аттракторы на фазовых портретах. При малых же значениях параметра ширины колебательные процессы приобретают признаки релаксационных автоколебаний.

В модели зависимости вязкости от температуры с применением гауссовой функции при удалении аргумента от среднего значения график функции асимптотически стремится к нулю. В расчётах были рассмотрены два подхода: с полным набором значений функции Гаусса на заданном интервале изменения температуры, являвшейся аргументом функции, и с фрагментом функции Гаусса, взятом на некотором отрезке значений температуры, определяемой горизонтальной линией, проведённой через значение безразмерной вязкости, равной 0,1, как указано на рисунке 1. При этом пределы изменения безразмерной вязкости находятся в пределах  $[0, 1]$ . Возникает вопрос о целесообразности использования этих подходов.

Дело в том, что в первом случае мы имеем дело с правильным математическим описанием температурной зависимости вязкости. Однако экспериментальные данные, приведённые, в частности, в статье [8] имеют ограниченный набор измеренных значений вязкости и нет никаких оснований требовать их асимптотической экстраполяции. Возникла необходимость выяснить степень влияния описанной разницы на появление осцилляционных режимов течения аномально термовязкой жидкости.

В итоге, после проведения многочисленных расчётов по математической модели, представленной и описанной в [6], [7] с применением модифицированного алгоритма SIMPLE, были установлены области существования осцилляционных режимов, графическое представление которых приведено на рисунке 1.

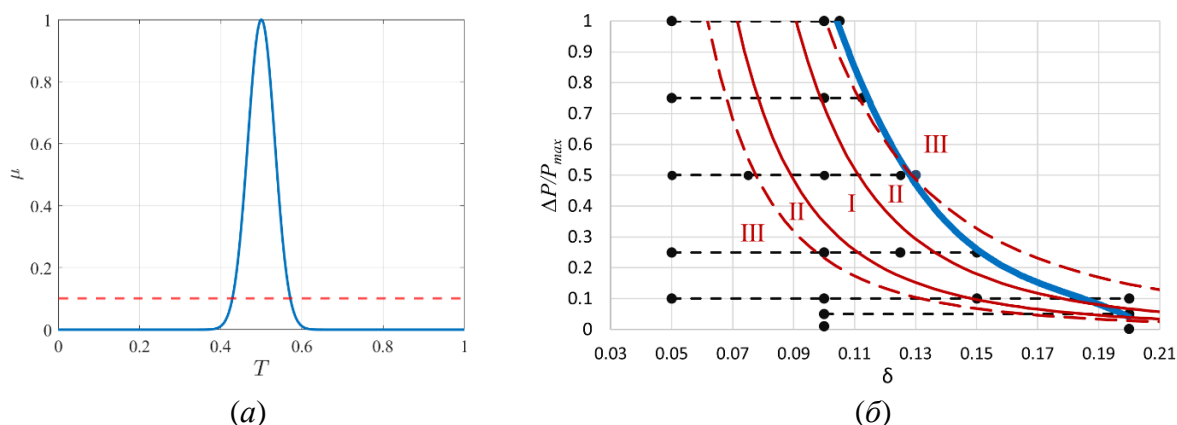


Рис. 1. (а) Кривая зависимости вязкости от температуры в безразмерном виде.  
(б) Области возникновения автоколебаний. Красные линии соответствуют усечённой гауссовой кривой. I – незатухающие колебания; II – затухающие колебания; III – установившееся течение. Синяя линия разделяет области незатухающих колебаний (слева) и установившихся течений для полной гауссовой кривой

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агеев А.И., Осипцов А.Н.* Сдвиговое течение вязкой жидкости над каверной, содержащей пульсирующий пузырек газа // Доклады Академии наук. 2020. Т. 493. С. 38–41.
2. *Ланда П.С., Власов П.А.* Гейзер как автоколебательная система // Доклады Академии наук. 2007. Т. 415, N 6. С. 742–747.
3. *Melnik O., Sparks R.S.J.* Controls on conduit magma flow dynamics during lava dome building eruptions // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. 2005. Vol. 110, B02209
4. *Урманчиев С.Ф., Киреев В.Н.* Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, №2. С. 204–207
5. *Kireev V.N., Mukhutdinova A.A., Urmanceev S.F.* On the Critical Conditions of Heat Transfer for a Fluid Flow with a Nonmonotonic Dependence of the Viscosity on the Temperature in an Annular Channel // Fluid Dynamics. 2023. Vol. 58, No. 7. Pp. 1310–1317.
6. *Киреев В.Н., Мухутдинова А.А., Урманчиев С.Ф.* Режим автоколебаний при течении аномально термовязкой жидкости // Доклады Академии наук. Физика и технические науки. 2024. Т. 514. С. 63–69
7. *Mukhutdinova A.A., Kireev V.N., Urmanceev S.F.* Numerical Modeling of Unsteady Flow Regimes of Anomalously Thermoviscous Liquids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46, No. 5. Pp. 2172–2182
8. *Kalur G.C., Frounfelker B.D., Cipriano B.H., Norman F.I., Raghavan S.R.* Viscosity Increase with Temperature in Cationic Surfactant Solutions Due to the Growth of Wormlike Micelles // Langmuir. 2005. V. 21. P.p. 10998–11004

Урманчиев Саид Федорович, said@anrb.ru



## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОЛЯ СКОРОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СТРУИ

*В.А. Усанов\*, Н.С. Сиваков*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
usanov@ipmnet.ru*

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование особенностей взаимодействия газовых струй с жидкостью представляет собой важную область прикладной науки, имеющую широкий спектр технических приложений. Данный процесс характеризуется образованием сложной двухфазной системы, состоящей из газовой и жидкой фаз, взаимодействующих через поверхность раздела. Важность изучения таких явлений обусловлена необходимостью решения ряда инженерных задач, таких как проектирование эффективных устройств подводного движения, разработка технологий очистки газов, обеспечение экологической безопасности при эксплуатации подводных коммуникаций и улучшение технологических процессов в металлургии [1].

Основные факторы, определяющие сложность поведения газовых струй в жидкости, включают разнообразие режимов истечения, пространственное положение струи относительно поверхности жидкости, физико-химические свойства газа и жидкости, температуру среды и глубину погружения. Это создает необходимость детальных исследований как локальной динамики вблизи выходного отверстия, так и формирования крупных структур вдали от точки впрыска, включая особенности распределения пузырьков и структуру самой струи [2, 3].

## ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ

Экспериментальная часть работы выполнялась в специально построенном под данную задачу бассейне, представляющем собой прямоугольный параллелепипед с прозрачными стенками из акрилового стекла. Размеры емкости составляли: высота 2000 мм, длина 1800 мм, ширина 1800 мм. Суть экспериментов состояла в определении скорости жидкости в окрестности газовой струи, вертикально истекающей из сопла, а также определение формы газовой струи. Для отслеживания скорости жидкости около газовой струи использовалась пузырьковая завеса (см. рис. 1), которая хорошо видна на кадрах экспериментов. При обработке результатов скорость всплытия пузырьков вычиталась из вертикальной составляющей скорости пузырька.

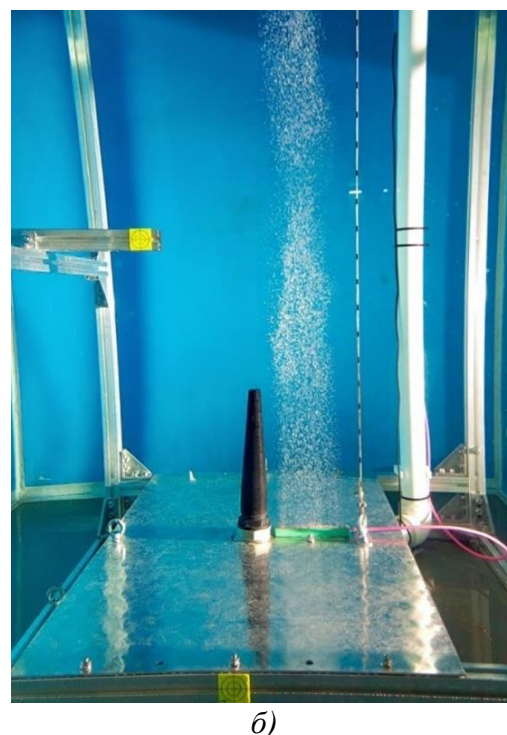
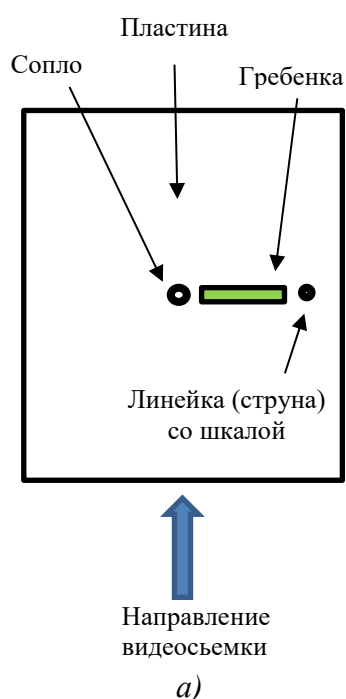


Рис. 1. (а) – расположение гребенки на пластине; (б) – завеса из микропузырьков для измерения скорости течения воды. На рисунке (б) вертикальная линия с разметкой – это линейка (струна) с нанесенной на нее шкалой, используемая при обработке результатов видеосъемки для определения линейного масштаба

Численное моделирование проводилось в программном пакете OpenFOAM в трехмерной постановке, при этом расчетная область повторяла экспериментальный бассейн и представляла собой прямоугольный параллелепипед, на дне которого распола-

гался подающий патрубок. Размер расчетной сетки составлял порядка 5 млн ячеек. Использовался стандартный расчетный модуль *interFoam*, он позволяет моделировать несжимаемые многофазные течения методом VOF с возможностью решения уравнения для объемной доли газовой фазы  $\alpha$  методом MULES. Межфазная граница строится как изоповерхность  $\alpha(x,y,z) = 0.5$ . Для моделирования турбулентности использовалась модель крупных вихрей LES с моделью Смагоринского для подсеточной вязкости.

Численные расчеты проводились для параметров проведенных экспериментов. Варианты численных расчетов и экспериментов отличаются расходом воздуха на входе в сопло, а также диаметром выходного отверстия сопла. В расчетах на срезе сопла задавалась постоянная (по сечению и по времени) скорость газа, газосодержание  $\alpha = 1$ , на всех твердых поверхностях использовалось условие прилипания, а на верхней границе расчетной области  $\alpha = 1$ , при этом условии вода не покидает область. Начальный уровень воды соответствует уровню в экспериментах (1.5 м), выше находится воздух.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате экспериментов и численных расчетов получено общее представление о развитии течения газовой струи в жидкости, а также восстановлено векторное поле скорости жидкости. Определено, что при истечении газа в затопленное пространство характер течения сильно отличается от классических турбулентных струй. Течение в ближней зоне от сопла носит выраженный периодический характер с образованием и отрывом крупномасштабных (поперечным размером порядка 1.5–2 диаметра сопла и продольным размером 2–4 диаметра) газовых объемов, пространство между которыми заполняется водой. Характерный момент развития газовых объемов вблизи среза сопла показан на рис.2а, где представлены видимые контуры занятой газом области, как экспериментальные, так и полученные с помощью численного расчета. Видно, что расчет качественно правильно воспроизводит форму газовой области (включая узкую «воронку» на оси симметрии, также видимую на кадрах видеосъемки), формирование сужающейся кверху «ножки», соединяющей поднимающийся пузырь с соплом, трансформацию пузыря к характерной грибовидной форме. При повышении скорости газа пузыри становятся более вытянутыми в вертикальном направлении, что обусловлено более значительным вертикальным импульсом газа. Кроме того, при более быстром истечении уменьшаются зазоры между последовательными газовыми пузырями, которые практически сливаются в единую струю, хотя дискретный характер газовых объемов при этом остается заметным.

Определение скорости осуществлялось в точках, часть из которых располагалась вблизи границы газовой области, тогда как другая часть находилась в окружающем пространстве, не захватываемом проходящими объемами газа. При этом скорости, определенные по первой группе точек, характеризуют скорость движения самой границы раздела.

На рис. 2б показаны вектора скорости, определенные по видеозаписям и полученные в расчетах для одного момента времени для варианта с диаметром сопла 50 мм и скоростью газа 10 м/с. При этом построенные вектора имеют одинаковую длину (т.е. указывают направление скорости), тогда как цветом указана абсолютная величина скорости. Качественный вид поля скорости воспроизводится адекватно, включая расходящееся поле скорости вокруг увеличивающегося в размерах пузыря и сходящееся к оси течение в хвостовой части находящегося над ним предыдущего пузыря. По мере отрыва от сопла, пузырь также формирует интенсивное сходящееся к оси течение в следе за собой.

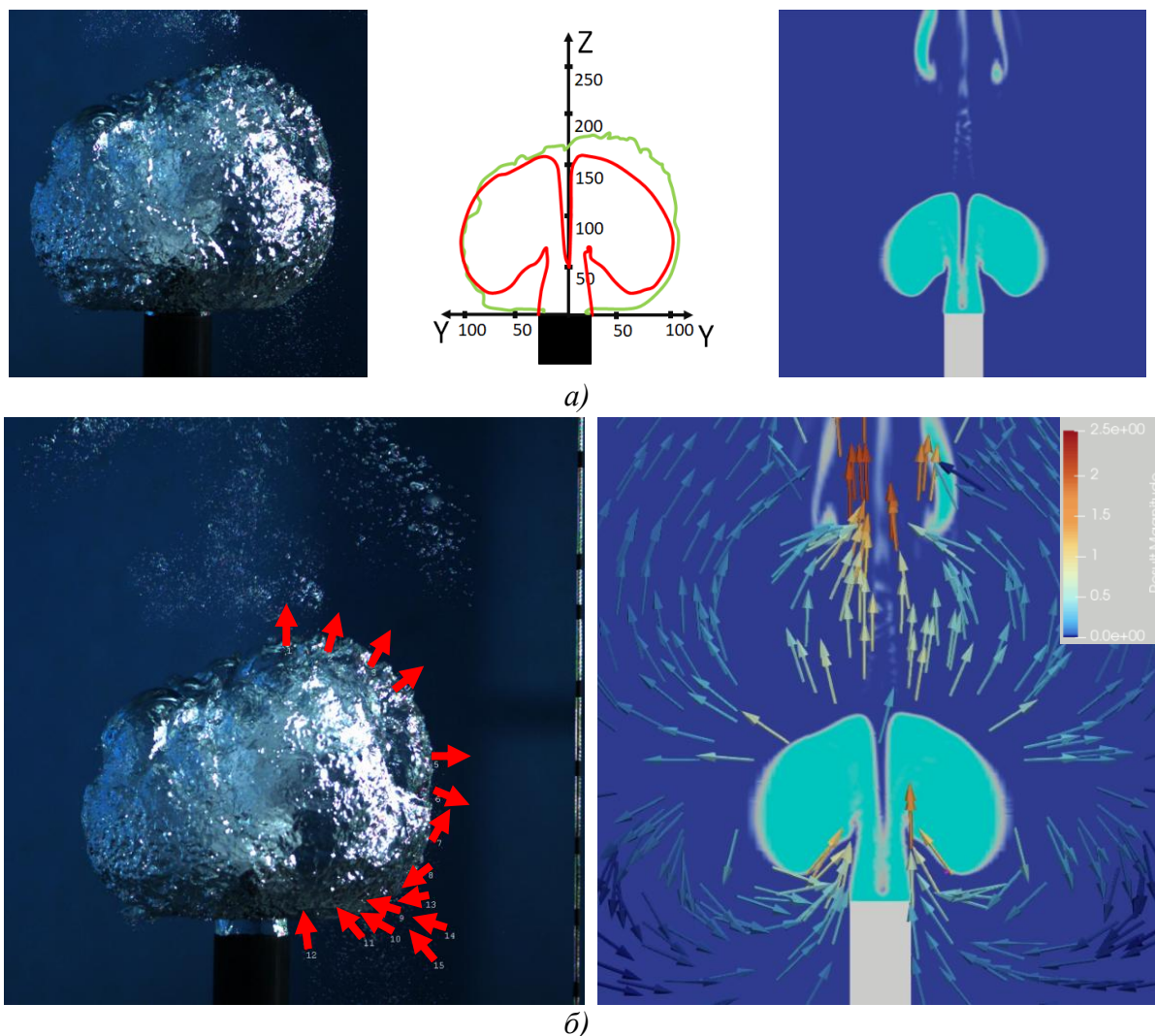


Рис. 2. Сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными: (а) – мгновенная форма газовой струи; (б) – поле скорости жидкости вокруг газовой струи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе произведено сравнение численных и экспериментальных результатов для задачи о определении скорости жидкости около подводной газовой струи. По результатам сравнения расчетов с экспериментами можно заключить, что математическая модель правильно воспроизводит качественные особенности течения в ближней к соплу зоне (периодический характер течения с образованием, отрывом и слиянием крупных пузырей). Количественные характеристики движения пузырей (динамика развития, размеры, период осцилляций струи) воспроизводятся с приемлемой точностью. Локальные характеристики течения (компоненты скорости в выбранных характерных точках) хорошо согласуются на качественном уровне: правильно воспроизводятся вихревые течения в воде, в том числе периодически возникающие направленные струйные течения за поднимающимся пузырем. Количественное согласование по локальным скоростям оценивается в 50–70% (характерный диапазон относительной погрешности), что объясняется наличием внутренне присущих флуктуаций скорости и нерегулярностью турбулентного течения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов Н.А., Петров Б.В.* Газожидкостные потоки в технике // Вестник МГТУ. Серия: Технические науки. 2018. № 2. с. 15–24.
2. *Конев Е.Н., Яковлев Д.М.* Моделирование газодинамических процессов в двухфазных средах // Инженерно-физический журнал. 2020. Том 93. № 6. с. 1156–1168.
3. *Смирнова О.С., Сергеев Г.И.* Экспериментальные исследования газовых струй в воде // Научные труды Института механики МГУ. 2022. №15. с. 35–48.

Усанов Владислав Александрович, usanov@ipmnet.ru

Сиваков Никита Сергеевич, sivakov@ipmnet.ru



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РЕЖИМОВ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ РЕАКТОРЕ ХЕЛЕ-ШОУ

*В.Ю. Уточкин*

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь  
vladimir.utochkin.97@mail.ru*

В последние годы появляется все больше передовых технологий, требующих изучения процессов тепло- и массопереноса во вращающейся ячейке Хеле-Шоу (рис. 1). В частности, данная конфигурация может эффективно использоваться при проектировании микрожидкостных устройств и маломасштабных химических реакторов проточного типа [1]. Квазидвумерная конструкция позволяет регистрировать поле плотности с помощью оптических методов, а вращение позволяет управлять этим полем с помощью пространственно-распределенных инерционных сил. Как известно, в пределе бесконечно тонкого слоя число Россби, представляющее собой отношение силы Кориолиса и инерционного слагаемого уравнений движения, стремится к бесконечности. Это означает, что в рамках стандартной математической модели данная сила инерции пренебрежимо мала. Однако экспериментальные наблюдения за течением жидкости во вращающейся ячейке Хеле-Шоу указывают на то, что эффект Кориолиса проявляет себя в полной мере [2].

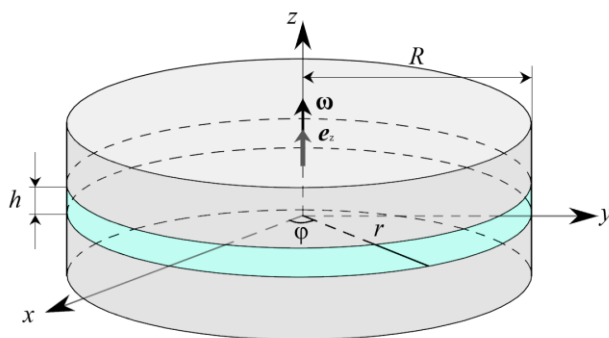


Рис. 1. Схематическое изображение цилиндрической ячейки Хеле-Шоу

В настоящей работе демонстрируется, что основанный на теории возмущений вывод уравнений движения в приближениях Буссинеска и Хеле-Шоу приводит к появлению слагаемого плавучести, вызываемой силой Кориолиса [3]. Для изучения эффекта рассматривается задача о конвективной устойчивости жидкости с внутренней генерацией компонента переноса. Последовательное изучение системы включает нахождение

основного состояния, линейный анализ его устойчивости, анализ слабонелинейных решений вблизи бифуркации равновесия, а также прямое численное моделирование нелинейных режимов конвекции. Проводится исследование общих свойств спектра возмущений. Ветвление решений вблизи бифуркации равновесия изучается с использованием метода многих временных масштабов.

Разложение решений в ряд по степеням надкритичности приводит к амплитудным уравнениям, определяющим динамику системы вблизи порога неустойчивости. Система уравнений включает два безразмерных параметра – центробежное число Рэлея  $R_\omega$  и число Экмана  $Ek$ , ответственное за вклад кориолисовой плавучести. Если пренебречь эффектом Кориолиса, решение сводится к ответвлению от неподвижной точки однопараметрического семейства устойчивых аттракторов (рис. 2а). Появление цикла равновесий обусловлено наличием  $SO(2)$ -симметрии. Интересно, что в несимметричных условиях аналогичная динамическая система демонстрирует ответвление семейства аттракторов, соответствующих стационарным течениям с различной структурой [4]. В симметричной системе все равновесия идентичны – каждая точка семейства соответствует структуре течения, повернутой на некоторый угол относительно оси вращения. При сколь угодно малом  $Ek \neq 0$  цикл равновесий переходит в устойчивый предельный цикл (рис. 2б). Таким образом, из анализа следует, что при достижении числом Рэлея порогового значения стационарное равновесие жидкости сменяется колебательной конвекцией при прохождении системой бифуркации Хопфа (рис. 2в).

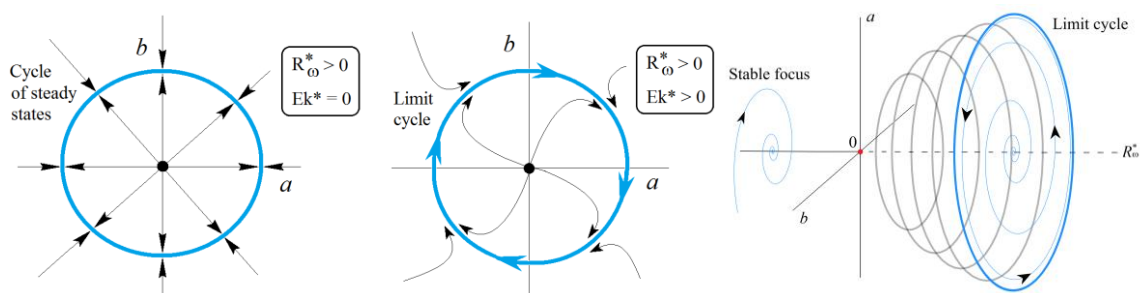


Рис. 2. Динамика в окрестности первой точки бифуркации: а) — однопараметрическое семейство устойчивых неподвижных точек; б) — устойчивый предельный цикл в) — диаграмма для сверхкритической бифуркации Хопфа

Для исследования нелинейной динамики вдали от первой бифуркации система уравнений интегрируется численно [5]. На плоскости параметров  $(R_\omega, Ek)$  строится область неустойчивости, вид которой позволяет сделать заключение о стабилизирующем влиянии силы Кориолиса на равновесие. Данная область имеет форму мешка, ограниченного нейтральной кривой бифуркации Хопфа. При ее пересечении в фазовом пространстве системы возникает 1-Т предельный цикл (рис. 3а), что подтверждает вывод слабонелинейного анализа о возникновении колебательной конвекции при произвольно малом значении числа Экмана. С ростом  $R_\omega$  в системе происходит вторая бифуркация Хопфа, вследствие чего от предельного цикла ответвляется двухчастотный тор. На рисунке 3б можно видеть появление резонансного 7-Т цикла на поверхности тора. В отношении сильно нелинейных режимов следует заметить, что плавучесть Кориолиса приводит к усложнению сценария перехода к хаотической конвекции. Переход сопровождается серией бифуркаций предельных циклов и торов, финальным разрушением 2-D или 3-D торов и появлением странных аттракторов тороидального типа (рис. 3в).



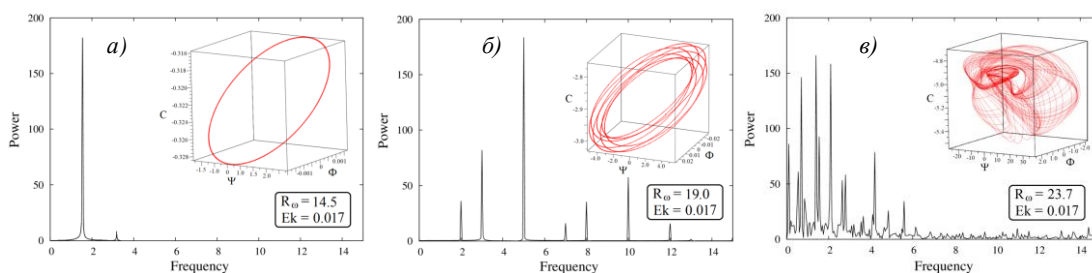


Рис. 3. Спектры мощности и фазовые портреты, полученные в ходе прямого численного моделирования: а) 1-Т предельный цикл; б) 7-Т резонансный цикл на поверхности тора; в) хаотический аттрактор тороидального типа

Например, рисунок 4 иллюстрирует поля возмущений функции тока при значениях управляющих параметров  $R_\omega = 23,7$ ,  $Ek = 0,017$ . Можно видеть, что хаотичность течения главным образом проявляется в самопроизвольном рождении и исчезновении вихрей. Кроме того, при достаточно больших числах Экмана наблюдается появление сдвиговых неоднородностей в структуре вихрей, что обусловлено ростом влияния силы Кориолиса при движении жидкости к периферии кюветы.

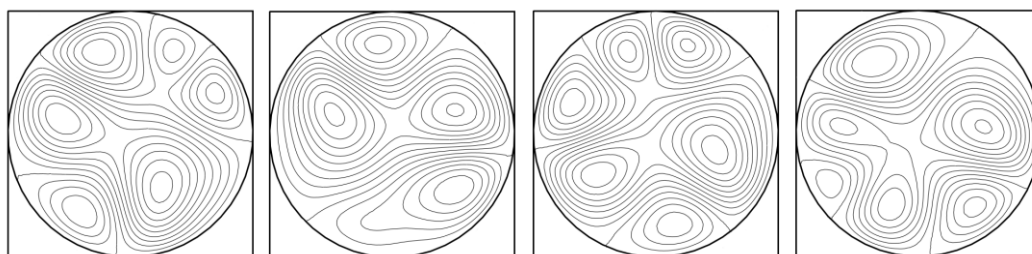


Рис. 4. Поля возмущений функции тока для значений параметров в последовательные моменты времени, соответствующие точкам аттрактора на рис. 3в.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2025-0001).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krasnyakova E.A., Bratsun D.A., Siraev R.R., Shmyrov A.V., Mizev A.I. Gravity-Independent Relaxation Oscillations Enhancing Mixing Performance in a Continuous-Flow Microchannel. // Microgravity Science and Technology. — 2024. — no. 36.
2. Shmyrov A.V., Denisova M.O., Mizev A.I. The effect of the centrifugal field on the reaction-diffusion-convection processes in a two-layer system of immiscible solvents. // Bulletin of Perm University. Physics. — 2022. — no. 4. — pp. 70 — 80.
3. Bratsun D.A., Utochkin V.Yu. Convection induced by centrifugal and Coriolis buoyancy in a rotating Hele-Shaw reactor. // Physics of Fluids. — 2024. — no. 36.
4. Bratsun D.A., Lyubimov D.V., Roux B. Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium. // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1995. — no. 82. — pp. 398 — 417.
5. Уточкин В.Ю., Брацун Д.А. Устойчивость слоя жидкости во вращающемся реакторе Хеле-Шоу при конкуренции эффектов плавучести, генерируемых силами инерции // Вычислительная механика сплошных сред. 2025. Т. 18. № 1. С. 15 – 31.

Уточкин Владимир Юрьевич, vladimir.utochkin.97@mail.ru



# КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

А.И. Федюшкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
fai@ipmnet.ru

Конвективная конфигурация для замкнутой области с подогревом сбоку (вектора потока тепла и силы тяжести не параллельны) является абсолютно неустойчивой в отличие от случаев с подогревом области снизу или сверху. Колебательной конвекции жидкости и ламинарно-турбулентному переходу посвящено много работ, в частности, колебательная конвекция в замкнутой области, подогреваемой сбоку, для разных чисел Прандтля изучалась в работах [1–5]. В работе [3] был показан механизм периодически-колебательного режима для воздуха ( $Pr=0.7$ ) при  $Gr=10^7$ . При превышении критического числа Грасгофа нарушается метастабильная устойчивость вторичных вихрей, которые увлекаются основным течением и двигаются вдоль всего замкнутого пограничного слоя [3]. Вследствие этого течение приобретает упорядоченный колебательный периодический характер с образованием волн Толлмина–Шлихтинга.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В данной работе представлены результаты параметрических расчетов на основе численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. В модели граничные условия, следующие: для скорости на всех границах заданы условия прилипания, для температуры заданы условия 1 рода (на вертикальных стенках заданы постоянные температуры, а на горизонтальных стенках линейные профили температуры) рис.1 а.

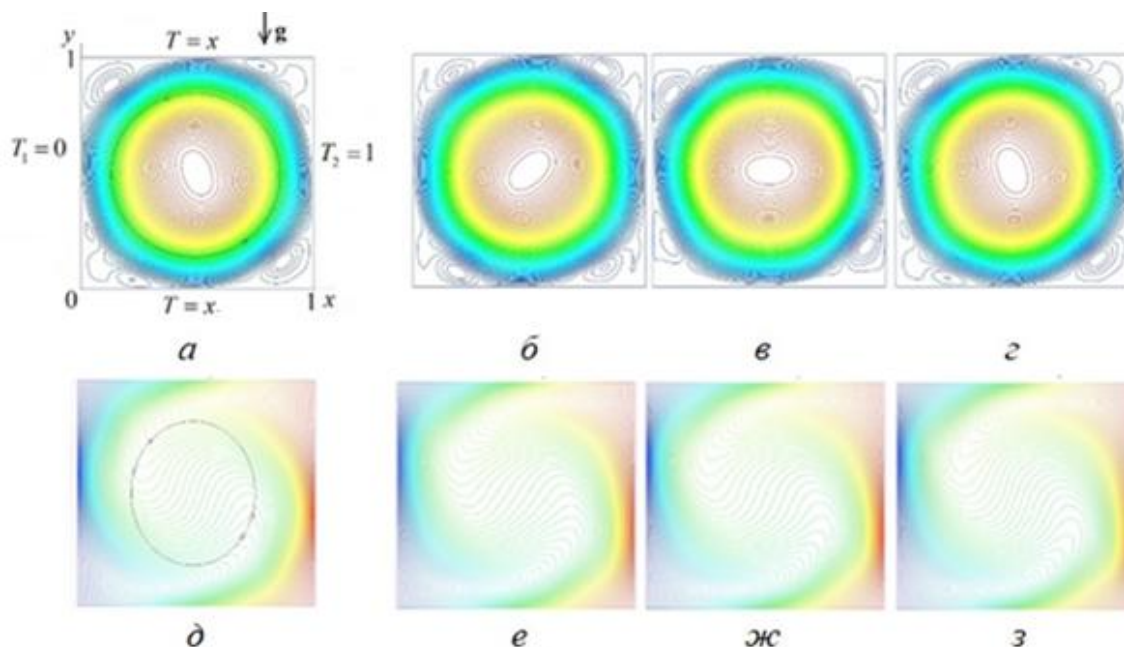


Рис. 1. Схема расчётной области и граничные условия (а). Колебательная тепловая конвекция на установившемся режиме при  $Gr=10^7$ ,  $Pr=0.01$ : (а-з) – значения изолиний функции тока и (д-з) – изотермы для четырёх моментов времени на одном периоде колебаний  $\tau$  через одинаковые промежутки времени  $\tau/3$ .



В начальный момент скорости равны нулю, распределение температуры линейно по горизонтали. Для решения используется метод конечных разностей с монотонной аппроксимацией второго порядка точности по пространству и первого по времени. Математическая модель верифицирована, сравнением с экспериментальными и численными результатами, полученными другими численными методами и другими авторами [3-5].

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Поскольку динамические и тепловые характерные безразмерные времена, следующие:  $Fo_v = \nu t / H^2$ ,  $Fo_a = at / H^2$ , где  $H$  – геометрический масштаб,  $\nu$  и  $a$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности. Отношение этих безразмерных масштабов времён есть:  $Fo_v / Fo_a = Pr$ , то есть при малых числах Прандтля перенос тепла происходит в  $Pr$  раз быстрее, чем изменения скорости течения, а при больших числах Прандтля – медленнее в  $Pr$  раз, соответственно. Отношение толщины теплового пограничного слоя к толщине динамического пограничного слоя пропорционально  $Pr^{-0.5}$ . То есть температурный пограничный слой шире динамического в  $Pr^{-0.5}$  раз. Поэтому при тепловой конвекции взаимодействие сил вязкости и гравитации для жидкостей с числами Прандтля большими и меньшими единицы обладают дополнительными нелинейными особенностями по сравнению со случаем, когда число Прандтля равно единице.

В данной работе рассмотрена колебательная конвекция при  $Pr=0.01$ . На рис.1 представлены картины структуры установившегося периодического конвективного течения при  $Gr=10^7$ ,  $Pr=0.01$  в виде изолиний функции тока (рис. 1 а-г) и изотерм (рис. 1 д-з) для четырёх моментов времени на одном периоде колебаний  $\tau$  через одинаковые промежутки времени равные  $\tau/3$ . Расплав при  $Pr=0.01$  является маловязкой жидкостью с большой температуропроводностью, что сказывается на распространении температурных возмущений при потере неустойчивости и на структуре конвективного течения. При превышении критического числа Грасгофа в углах квадратной области зарождаются вторичные макро-вихри и нарушается устойчивость стационарного течения. Уже при числе Грасгофа  $Gr=10^6$  ( $Pr=0.01$ ) конвективное течение имеет слабые осцилляции. При  $Gr=10^7$  течение интенсифицируется, что влияет на динамику угловых вторичных вихрей и сказывается на поле температуры. Вторичные вихри в углах области периодически возникают и диссипируют, поэтому температурное поле «дышит», а изотермы приобретают поступательно-возвратные вращательные осциллирующие движения с малой амплитудой и большой частотой (сотни герц) вдоль линий тока расплава, как показано стрелками на рис. 1 д. Необходимо сказать, что при моделировании на один период колебаний приходилось тысячи временных шагов. На рис. 1 а-г видно, что форма изолиний функции тока не идеальная окружность, и в центре ячейки изолинии имеют вытянутую эллипсоидную форму, которая вращается против часовой стрелки. Изолинии осреднённой по времени функции тока имеют форму окружностей. Вследствие этого течение расплава ( $Pr=0.01$ ) приобретает упорядоченный квазипериодический осциллирующий характер, природа которого отличается от случаев при  $Pr \geq 0.7$  [3].

На рис. 2 показано изменение во времени вертикальных производных от температуры  $\partial T / \partial y$  (максимальных – кривая 1, средних – кривая 2 и минимальных значений – кривая 3, вычисленных во всей расчётной области) для расплава полупроводника ( $Pr=0.01$ ) при числе Грасгофа:  $Gr=10^7$ . Конвективные течения имеют упорядоченный периодический колебательный характер. Критические числа Грасгофа

возникновения колебательной конвекции (осцилляций) нелинейно зависит от величины числа Прандтля.

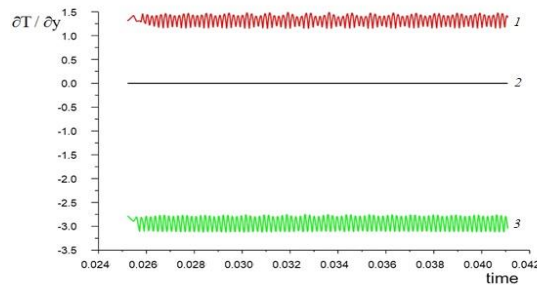


Рис. 2. Временные зависимости производной от температуры по вертикальной координате  $\partial T / \partial y$  (1 - максимальных, 3- минимальных и 2 - средних значений по пространству) в вертикальном сечении ( $x=0.5$ ) для тепловой колебательной конвекции при  $Gr=10^7$ ,  $Pr=0.01$

На рис. 3 представлены мгновенные и осреднённые характеристики течения для двух случаев: а)  $Gr=10^7$ ,  $Pr=0.01$ , б)  $Gr=10^5$ ,  $Pr=100$ . При малых и больших числах Прандтля нелинейные особенности конвективных течений проявляются по-разному. Это подтверждается результатами представленными на рис. 3 а ( $Ra=GrPr=10^5$ ,  $Pr=0.01$ ) и на рис. 3 б ( $Ra=10^7$ ,  $Pr=100$ ), показывающие, что в первом случае конвекция колебательная, а во втором стационарная. Это говорит о том, что число Рэлея ( $Ra$ ) в общем случае не является определяющим для возникновения колебательной конвекции.

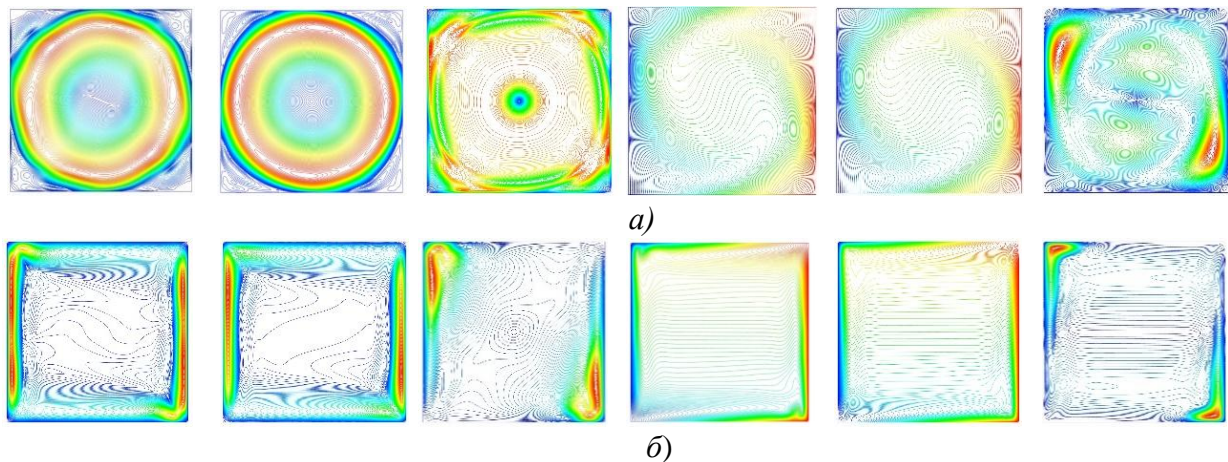


Рис. 3. Изолинии следующих функций: модуля скорости  $|\vec{V}|$  (1-я колонка), модуля скорости осреднённого по времени  $MEAN |\vec{V}|$  (2-я колонка), среднеквадратичного отклонения модуля скорости от среднего  $RMSE |\vec{V}|$  (3-я колонка), температуры  $T$  (4-я колонка), температуры, осреднённой по времени  $MEAN T$  (5-я колонка), среднеквадратичного отклонения температуры от среднего значения  $RMSE T$  (6-я колонка) для двух наборов параметров: а) –  $Gr=10^7$ ,  $Pr=0.01$ , б) –  $Gr=10^5$ ,  $Pr=100$

Спектральные плотности мощностей для функций колебаний скорости и градиентов температуры на установившихся режимах показали, что частоты квазипериодических колебаний скорости и температуры при одинаковых числах Грасгофа и разных числах Прандтля отличаются от частот колебаний в случае  $Pr=1$  в  $1/Pr$  раз – это согласуется с отношением характерных временных масштабов.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-29-00101.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни, Г.З., Жуховицкий, Е.М., Тарунин, Е.Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР МЖГ. №5, 1966. С. 56–62.
2. Тарунин Е. Л., Шайдулов В. Г., Шарифулин А. Н. Экспериментальное и численное исследование устойчивости замкнутого конвективного пограничного слоя. Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. Сб. статей. Свердловск, 1979 (УНЦ АН СССР). С. 3-16.
3. Fedyushkin A. Convection and stratification of temperature and concentration // Fluid Dynamics and Materials Processing. 2024. Vol. 20, no. 6. P. 1351–1364.
4. Федюшкин А. И. Влияние чисел Рэлея, Прандтля и граничных условий на конвективные течения жидкости в горизонтальных слоях // Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 1. С. 28–44.
5. Davis G de Vahl. Natural convection of air in a square cavity a benchmark numerical solution Int. journal for numerical methods in fluids, vol.3, 1983. С. 249-264.

Федюшкин Алексей Иванович, fai@ipmnet.ru



## ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ДЕТЕКТОРОМ НА ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ИНДУКЦИОННОМ ПЛАЗМОТРОНЕ ВГУ-4

Ф.В.Филиппов<sup>1\*</sup>, А.В.Чаплыгин<sup>1</sup>, М.А.Котов<sup>1</sup>, Н.Г.Соловьев<sup>1</sup>,  
В.Н.Глебов<sup>2</sup>, Г.А.Дуброва<sup>2</sup>, А.М.Малютин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>НИЦ «Курчатовский институт» КККиФ, Отделение ИПЛИТ-Шатура, Шатура  
filippov@ipmnet.ru

Термоэлектрические детекторы, используемые для измерения интенсивности излучения в различных областях спектра, являются важным инструментом в научных исследованиях. Регистрация изменения тепловых потоков в газодинамическом эксперименте является одним из наиболее существенных факторов при постановке и проведении исследований теплопередачи в импульсных сверх- и гиперзвуковых течениях. Определенный научный интерес представляет проведение эксперимента в струях диссоциированных газов, создаваемых плазмотроном ВГУ-4 [1]; возможность проанализировать соответствие плотности мощности тепловых потоков, выдаваемых проточными калориметрическими датчиками и термоэлектрическими детекторами. Важно оценить «стойкость» работы датчика в непрерывном режиме работы и достоверность выдаваемых им данных, в условиях длительных тепловых и радиационных нагрузок. Термодатчики использовались в ударных трубах под разными нагрузками, в том числе когда воспроизводятся условия спуска летательных аппаратов. В некоторых траекторных точках эти условия также воспроизводятся в ВГУ 4. Данная работа представляет первые результаты использования ТД в индукционных плазмотронах и является дополнением [2,3], где описывается калибровка термоэлектрических детекторов в широком спектре излучения.

Датчики, имеющие различные чувствительные элементы, успешно зарекомендовали себя в следующих исследованиях: измерение теплового потока за отраженной ударной волной (УВ) малой интенсивности в азоте; получение достаточно больших значений тепловых потоков (до 50 МВт/м<sup>2</sup>) в ударно нагретом ксеноне при числах Маха УВ до М=8 [4]; получение истории изменения тепловых потоков при высоких значениях давления газа за отраженной УВ (более 30 атм) в экспериментах по воспламенению горючих смесей в ударной трубе; регистрация полного теплового потока и радиационной составляющей при различных значениях интенсивности УВ.

Источником полного теплового потока в эксперименте является факел воздушной плазмы на оси струи за выходным сечением разрядного канала диаметром 80 мм при давлении 100 гПа и диапазоне мощности ВЧ-генератора плазмотрона от 20 до 50 кВт.

Термоэлектрический детектор закрепляется на алюминиевом цилиндрическом патроне, затем помещается в водоохлаждаемую металлическую оправку диаметром 13,75 мм на глубину 52,3 мм от торца. Расстояния оправки до сопла плазмотрона составляет 60 мм. Выводы термоэлектрического детектора закрыты диафрагмой с диаметром отверстия 3 мм.

Далее механическим приводом датчик вместе с оправкой вводится в струю плазмы на фиксированные временные интервалы с изменением плотности мощности теплового потока в диапазоне от 1 до 7 Вт/см<sup>2</sup>. В процессе эксперимента датчик генерирует термо-ЭДС в плоскости анизотропной пленки за счет температурного градиента, создаваемого нагревом внешней поверхности пленки поглощенным излучением. Полученные значения разности потенциалов с датчика можно сопоставить со значениями плотности мощности теплового потока на датчике, зная калибровочный коэффициент. На рисунке 1 представлены зависимости мощности теплового потока от анодной мощности плазмотрона, снятые с термодатчика и со стационарных проточных калориметров при различном массовом расходе охлаждающей жидкости.

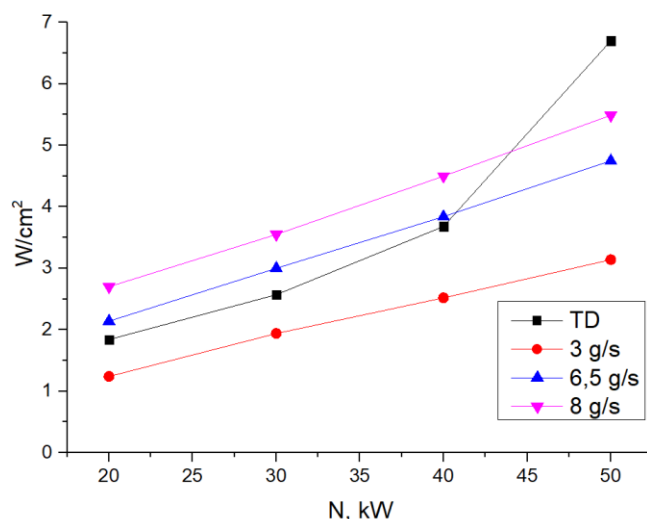


Рис. 1. Зависимости мощности теплового потока от анодной мощности плазмотрона, снятые с термодатчика и со стационарных проточных калориметров при различном массовом расходе охлаждающей жидкости.

Этот метод открывает новые возможности для точной настройки и тестирования детекторов в условиях разнообразных спектральных диапазонов и высоких интенсивностей излучения. Проведенные калибровочные процедуры позволяют получать вольт-ваттные характеристики для термоэлектрических детекторов, которые помогут лучше описать тепловые процессы высокоинтенсивных ударно-волновых взаимодействий, происходящих в импульсном газодинамическом эксперименте.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ 124012500440-9).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордеев А., Колесников А. Высокочастотные индукционные плазмотроны серии ВГУ // Сб Актуальные Проблемы Механики Физико-Химическая Механика Жидкостей И Газов Москва Наука. 2010. С. 151–177.
2. Kotov M.A., Solovyev N.G., Glebov V.N., Dubrova G.A., Malyutin A.M. Pulse thermal load for thermoelectric detector calibration // St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics. 2023. Vol. 16. No. 1.1.
3. Filippov F.V., Kotov M.A., Solovyev N.G., Glebov V.N., Dubrova G.A., Malyutin A.M. Calibration features of thermoelectric detector using pulsed laser exposure// Letters to the Journal of Technical Physics 2024. Vol. 50. No. 23. DOI: 10.21883/00000000000
4. M.A. Kotov, A.N. Shemyakin, N.G. Solovyov, M.Yu. Yakimov, V.N. Glebov, G.A. Dubrova, A.M. Malyutin, P.A. Popov, S.A. Poniaev, T.A. Lapushkina, N.A. Monakhov, V.A. Sakharov. The analysis of applicability of thermoelectric radiation detectors for heat flux measurements behind a reflected shock wave, Journal of Physics: Conference Series 2103 (1) (2021).

Филлипов Филлип Владимирович, filippov@ipmnet.ru



## ПОГРУЖЕНИЕ ПЛАВУЧЕЙ ПОЛИЭТИЛЕНОВОЙ ПЛЕНКИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ КРУТЫХ ВОЛН. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Г.Е. Хазанов<sup>1\*</sup>, С.А. Ермаков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород

<sup>2</sup>Волжский Государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород  
g.khazanov@ipfran.ru

Важной областью исследований проблемы пластикового загрязнения океана является разработка физических основ дистанционного зондирования пластикового мусора [1]. Пластиковый мусор в океане в значительной степени связан с плавучими полиэтиленовыми (ПЭ) пленками. Ежедневные наблюдения показывают, что ПЭ пленки частично или полностью погружены в приповерхностный слой воды, даже несмотря на то, что плотность этих фрагментов меньше плотности воды. Данная работа посвящена численному моделированию начальной стадии динамики плавучей пластиковой пленки, размещенной на поверхности воды, при приближении к ней интенсивной гравитационно-капиллярной волны (ГКВ) с использованием программного обеспечения с открытым исходным кодом «OpenFOAM». Выявлено, что для сильно нелинейной ГКВ с выпуклой структурой вблизи гребня волны происходит «перетекание» воды через пленку с последующим опусканием ее края. Предложено объяснение эффекта притапливания пленки на основе гипотезы о том, что в поле орбитальных волновых движений частиц жидкости возникает усредненная гидродинамическая сила, направленная против силы Архимеда.

## ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Для задач взаимодействия жидкости и твердых упругих тел, в среде «OpenFOAM» существует набор инструментов «solids4foam» [2]. Данный пакет использует подход разделения вычислительного домена на две области: жидкость и тело, с последовательным вычислением динамики того и другого в отдельности, учитывая взаимодействие между ними. Решается двумерная задача в плоскости XZ, где ось OX направлена вдоль распространения волны, ось OZ направлена вертикально вверх. Основные уравнения гидродинамики – уравнение непрерывности и уравнение Навье-Стокса записываются в виде:

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla * \mathbf{v}) = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\mathbf{g} = (0, -g_z)$  здесь  $g_z$  – ускорение свободного падения,  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Для твердого тела мы предполагаем конечные деформации, так как отклонения предполагаются достаточно большими, чтобы считать их линейными. Уравнение, определяющее динамику тела – закон сохранения импульса.

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

Где  $\rho$  – плотность тела,  $\mathbf{u}$  – вектор деформации,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \left[ \frac{K}{2} (J^2 - 1) \mathbf{I} + \mu J^{-\frac{2}{3}} \text{dev}[\mathbf{F} * \mathbf{F}^T] \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \quad (5)$$

$\mathbf{F}$  – тензор деформации, представляющий собой разницу между исходным и деформированным состоянием материала.  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $J = \det[\mathbf{F}]$  – якобиан.

Кинематическое граничное условие на границе раздела жидкости и твердого тела – скорость должна быть непрерывной. Из уравнения сохранения импульса следует динамическое граничное условие, отвечающее равенству сил вдоль нормали к границе раздела. Таким образом, на каждом временном шаге происходит решение отдельно для жидкости, затем вычисляется сила на границе раздела жидкости и твердого тела, вычисление деформации тела, вычисление скорости на границе раздела и обновление сетки в области жидкости. Затем все то же самое на следующем шаге по времени. На Рис. 1 представлена геометрическая схема численного эксперимента

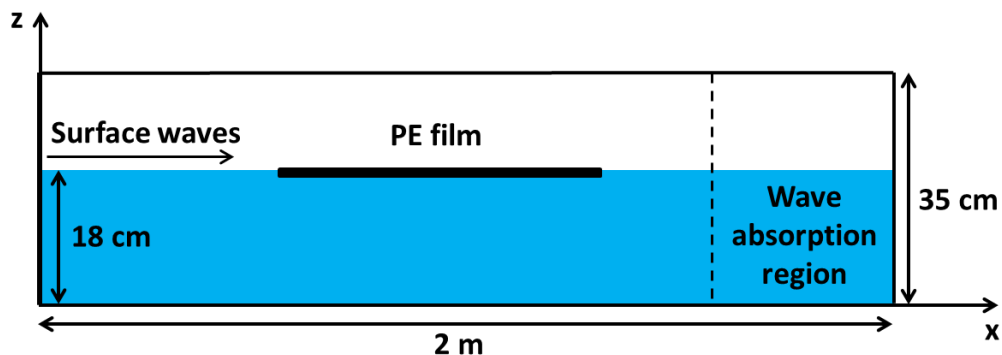


Рис. 1 Геометрическая схема численного эксперимента

Рассматривалась плоская задача, бегущая волна распространялась слева направо вдоль оси  $x$ , в присутствии имитатора плавучей полиэтиленовой пленки на поверхности воды. Длина волны 40 см, крутизна волны варьировалась от  $ka = 0.14 - 0.33$  ( $k$  – волновое число,  $a$  – амплитуда волны). Вязкость воды  $0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ . Длина имитатора варьировалась от 20 - 80 см, толщина 0.4 мм. Плотность имитатора составляла  $0,9 \text{ г/м}^3$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сначала были проведены эксперименты с поверхностными волнами малой амплитуды ( $ka \sim 0,14-0,18$ ). В этом диапазоне крутизны эффект погружения не наблюдается, и пленка практически повторяет форму волны и остается на поверхности воды, как показано на рисунке 2.



Рис. 2 Малая амплитуда ГКВ. Синий цвет соответствует воде, серый — воздуху, а жёлтый — плёнке.

На рис. 2 представлен результат моделирования распространения волны малой амплитуды в присутствии ПЭ-пленки с упругостью  $Es = 2 \cdot 10^8 \text{ Па}$ , расположенной на поверхности воды. Видно, что пленка практически полностью следует профилю волны. В рассматриваемом случае длина пленки примерно вдвое превышала длину волны, однако качественно эффект остался неизменным и при других соотношениях размера пленки к длине волны.

Ниже рассматривается случай ГКВ большой крутизны ( $ka \sim 0,28-0,33$ ) набегающей на пленку. Локальное обрушение крутой ГКВ произошло вблизи левой границы плёнки. Обрушение приводит к перетеканию воды через плёнку и, как следствие, к её погружению под поверхность воды. Этот процесс показан на рисунке 3.

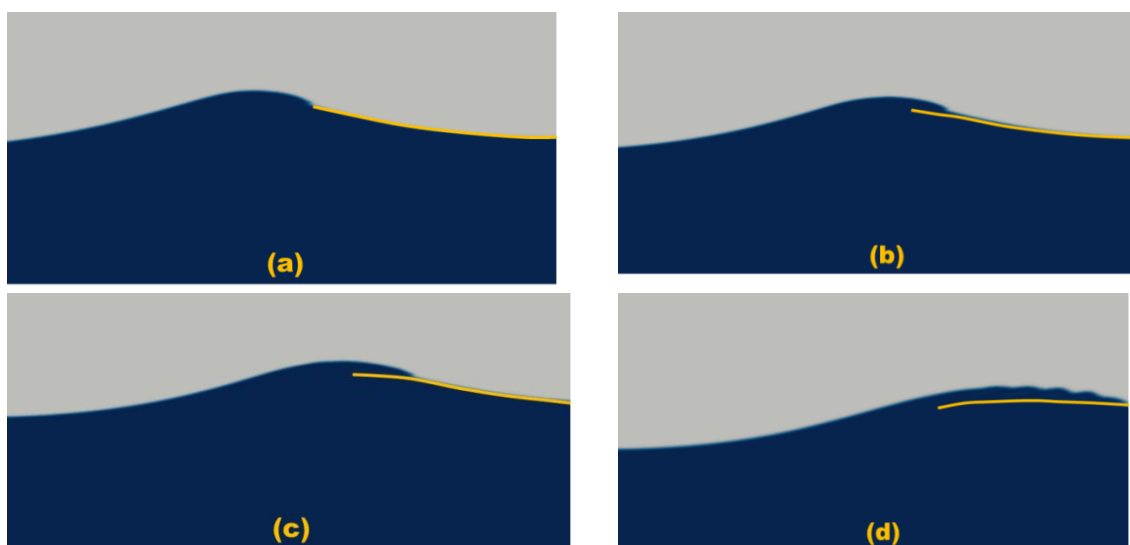


Рис. 3. Крутая ГКВ и высокоэластичная плёнка (а):  $t = 2,97 \text{ с}$ ; (б)  $t = 3,003 \text{ с}$ ; (в)  $t = 3,036 \text{ с}$ ; (г)  $t = 3,102 \text{ с}$ ; Упругость плёнки  $Es = 2 \cdot 10^8 \text{ Па}$ .



Видно, как крутая волна набегает на пленку и переливается через нее. Далее левый край пленки отходит от поверхности воды в приповерхностный слой. Это связано с вертикальной скоростью падения на гребне, что согласуется с профилем вертикальной скорости, показанным на рис 4.

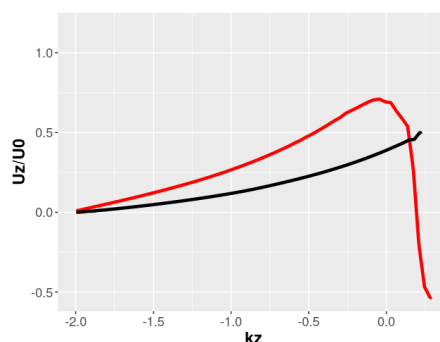


Рис. 4 Безразмерная вертикальная скорость ( $U_0$  – полная скорость на поверхности воды) на горизонтальном сечении гребня волны для ГКВ большой крутизны (красная линия) и ГКВ малой крутизны (черная линия) в зависимости от безразмерной глубины.

Профиль ГКВ большой крутизны характеризуется наличием выпуклой структуры в области гребня волны, что типично для ГКВ длиной около 30-40 см и менее и может быть описано как «микрообрушение» [3]. Микрообрушение также сопровождается появлением нисходящего течения в узком слое вблизи поверхности воды. Это иллюстрирует рисунок 4, на котором изображён вертикальный профиль скорости волн ГКВ на горизонтальном сечении гребня волны. Такое нисходящее течение не наблюдается в случае волн относительно малой амплитуды, которые далеки от обрушения, как можно увидеть на рис. 4. Наличие этой вертикальной скорости, направленной вниз, вероятно, является причиной погружения края пленки под поверхность воды.

Численное моделирование показало, что при малых амплитудах поверхностных волн плавающая полиэтиленовая пленка, расположенная на поверхности раздела вода-воздух, совершает колебания вместе с волной, следуя ее форме. Обнаружено, что для сильно нелинейной волны с выпуклой структурой вблизи гребня (микрообрушение) происходит «перетекание» воды через пленку с вертикальной скоростью, направленной вниз на гребне, что приводит к последующему погружению ее края в приповерхностный слой воды. Это движение затем распространяется по всей пленке и постепенно заставляет пленку притапливаться целиком.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ в рамках проекта № 23-17-00167.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hu C.*, Remote detection of marine debris using satellite observations in the visible and near infrared spectral range: Challenges and potentials, *Remote Sensing of Environment*, 2021, Vol. 259, pp. 112414. doi.org/10.1016/j.rse.2021.112414
2. *Cardiff, P. et al.* An open-source finite volume toolbox for solid mechanics and fluid-solid-interaction simulations. *Computer Physics Communications*, 2018, P 1.
3. *H. Qiao, J. Duncan*, “Gentle spilling breakers: Crest flow-field evolution,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 439, pp. 57–85, 2001.

Хазанов Григорий Ефимович, g.khazanov@ipfran.ru

Ермаков Станислав Александрович, stas.ermakov8@gmail.com





## ОЦЕНКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

*Хайирбеков Ш.Х.<sup>\*</sup>, Ильиных А.Ю.*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
msturistt09@gmail.com*

Капиллярные волны на поверхности жидкости активно исследуются теоретически [1, 2], экспериментально [3] и численно [4], имеют широкое практического значение в медицинской, нефтехимической, энергетической и других отраслях промышленности. В разработке новых методов доставки лекарств фармакологии [5]. В контексте биомедицинских технологий капиллярно-волновые поля миллиметрового и субмиллиметрового масштаба предлагается использовать для контроля движения микрочастиц в объеме жидкости [6], что может иметь решающее значение в 3D-биопечати, электронике, где моно-слои частиц обеспечивают защитные или функциональные покрытия с заданными химическими и электрическими свойствами. Наличие коротких возмущений на поверхности жидкости может влиять на распространение звуковых волн. Важное практическое значение капиллярные волны имеют в экологии, где с помощью спутникового зондирования обнаруживают нефтяные пятна и разливы нефти [7].

Физические параметры задачи включают: плотности  $\rho_{a,l,d}$ ; кинематическую  $\nu_{a,l,d}$  и динамическую вязкости  $\mu_{a,l,d}$ ; полный  $\sigma_l^a, \sigma_d^a, \sigma_l^d$  и нормированный на плотность жидкости  $\gamma_l^a, \gamma_d^a, \gamma_l^d$  коэффициент поверхностного натяжения ( $a$  – воздуха;  $d$  – капли;  $l$  – принимающей жидкости). Энергетика импакта капли напрямую влияет на интенсивность и характер образования капиллярных волн. Потенциальная поверхностная энергия (ППЭ) определяется через площадь  $S_d$  капли:  $En_{\sigma,d} = \sigma_d^a S_d$ . Кинетическая – через массу  $M_d$  и скорость капли в момент контакта с принимающей жидкостью  $U$ :  $En_{k,d} = M_d U^2 / 2$ . Соотношение энергий  $R_{En}^{k,\sigma}$  определяет режим слияния капли: при  $En_{k,d} > En_{\sigma,d}$  однозначно устанавливается импактный характер слияния.

Опыты выполнены на стенде для изучения тонкой структуры быстропротекающих процессов (ТСТ), входящем в состав УИУ «ГФК ИПМех РАН». Картины слияния капли с принимающей жидкостью и последующего волнообразования регистрировались скоростной видеокамерой Optronis CR 300x2 под углом  $\vartheta = 70^\circ$ . В опытах использовался сплав галлия, индия и олова - «Галинстан» (температура плавления  $19^\circ\text{C}$ ) с коэффициентом поверхностного натяжения на границе с воздухом  $\sigma_l^a = 670 \text{ г/с}^2$  и плотностью  $\rho_l = 6.492 \text{ г/см}^3$ , а также чистая или подкрашенная чернилами вода.

Дисперсия капиллярных волн исследовалась для одинаковых жидкостей капли и принимающей (расплава металла и воды соответственно). В другой серии опытов проведен качественный анализ динамики капиллярных волн на поверхности металлического расплава. Волны инициируются падением одиночной капли воды, а эксперименты проводятся при двух температурах расплава  $T = 20^\circ\text{C}$  и  $T = 100^\circ\text{C}$ . Волны рассматриваются как капиллярные волны на глубокой воде, поскольку отношение характерной длины волны  $\lambda$  к глубине жидкости  $H$  в эксперименте составляет  $\sim 10^{-2}$ .

Капиллярные волны на рис. 1, начиная с самых первых кадров, имеют характерную осесимметричную структуру на всей длительности наблюдения, что качественно отличает их от волн на поверхности жидкого металла. Зависимость длины волны от времени имеет вид  $\lambda = 0.1466 \cdot t$ . Измеренные длины волн лежат в диапазоне 0.523–0.968 мм. На одних и тех же временах после импакта характерная длина волны на поверхности воды в  $\sim 1.5$  раза больше, чем на поверхности галинстана. Зависимость частоты осцилляций от времени имеет вид  $f = 4.558 \cdot t^{-2/3}$ . Найденные частотные точки находятся в диапазоне 0.17 – 2.0 кГц.

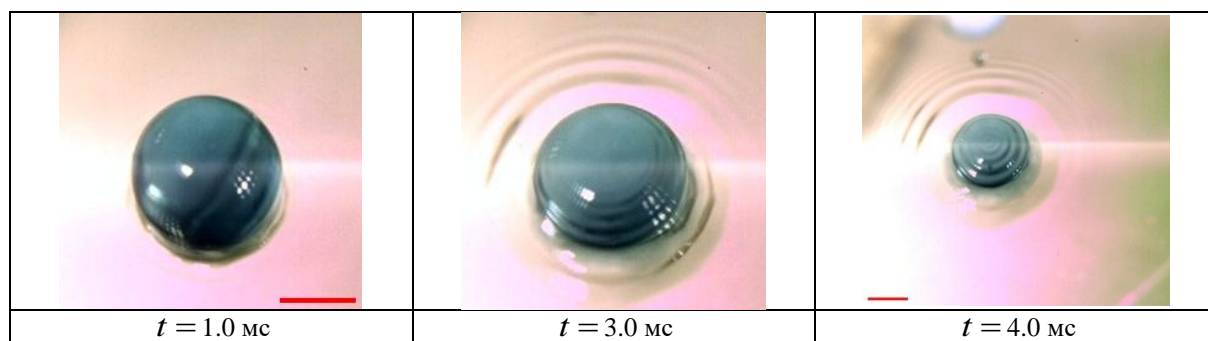


Рис. 1. Эволюция пакета капиллярных волн при слиянии подкрашенной капли воды с чистой водой.

$D = 4.3 \text{ мм}$ . Длина метки – 2 мм

На начальной стадии растекания капли по поверхности высокотемпературного расплава (рис. 2) наблюдаются те же компоненты течений, что и представлены на рис. 1. Временные параметры генерации коротких капиллярных волн вблизи выступов и более длинных волн по периметру венца соответствуют параметрам, зафиксированным для холодного расплава.

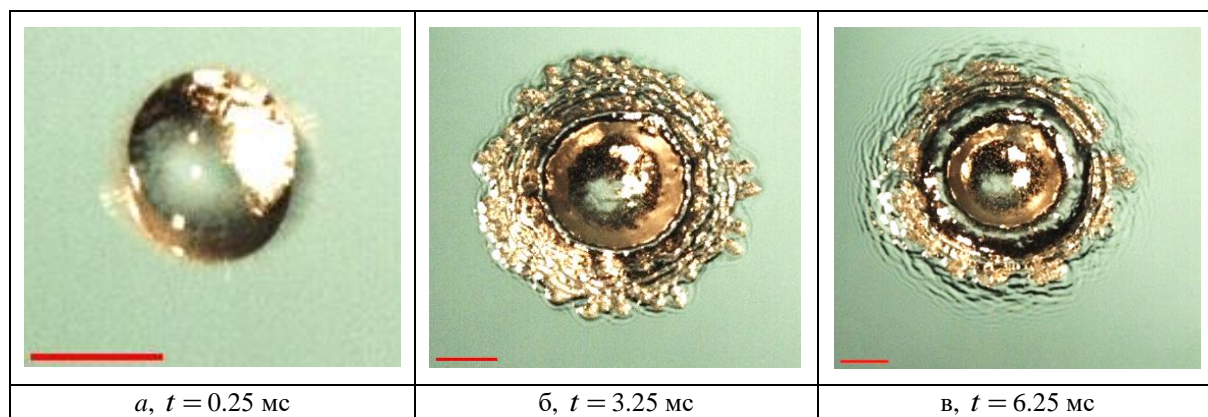


Рис. 2. Эволюция капиллярных волн при растекании капли воды по поверхности галинстана ( $T = 110^\circ\text{C}$ ). Длина маркера – 4 мм. Диаметр капли  $D = 4.8 \text{ мм}$ , контактная скорость  $U = 1.085 \text{ м/с}$ .

$$En_{\sigma,d} = 5.284 \text{ мкДж}; En_{k,d} = 34.083 \text{ мкДж}; R_{En}^{k,\sigma} = 6.45$$

В эксперименте исследуется распространение цуга капиллярных волн, формирующегося за венцом каверны и состоящего из 6–8 волн. На ранних этапах импакта и роста каверны наблюдается ярко выраженная аксиальная неоднородность ее границы. Капиллярные волны приобретают вид «классических» кольцевых коротких волн лишь на поздних стадиях импакта (после  $t \sim 10 \text{ мс}$ ). Теоретическое дисперсионное соотношение  $\lambda = 0.866 f^{-2/3}$ .

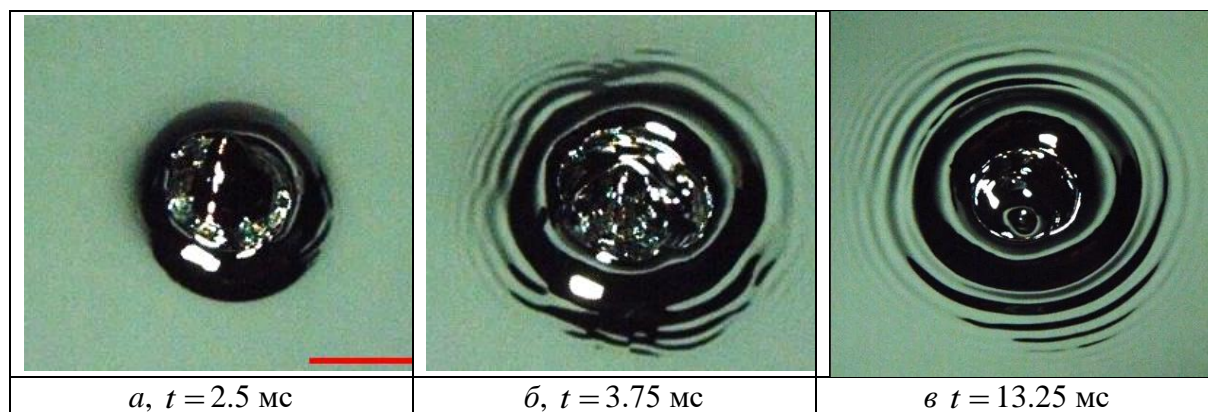


Рис. 3. Эволюция коротких волн на поверхности расплава металла после падения металлической капли. Длина маркера – 5 мм.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для двух опытов с различными жидкостями было выполнено сравнение дисперсионного соотношения, получаемого в эксперименте с теоретическим. Полученные результаты говорят об удовлетворительной согласованности эксперимента и теории капиллярных волн идеальной жидкости. Были проанализированы наблюдаемые явления и погрешности примененной методики.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chashechkin Y. D., Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021, vol. 10, no. 4, p. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>.
2. Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А., Ланишина К. Ю. Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т.23, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
3. Wout M. Goesaert, Paul S. W. M. Logman; Easy method to establish the dispersion relation of capillary waves on water jets. *Am. J. Phys.* 1 February 2024; 92 (2): 93–99. <https://doi.org/10.1119/5.0144849>
4. Van der Eijk, M., & Wellens, P. R. (2020). A compressible two-phase flow model for pressure oscillations in air entrapments following green water impact events on ships. *International Shipbuilding Progress*, 1–29. doi:10.3233/isp-200278
5. Alvarez, M., Friend, J., & Yeo, L. Y. (2008). Rapid generation of protein aerosols and nanoparticles via surface acoustic wave atomization. *Nanotechnology*, 19(45), 455103. doi:10.1088/0957-4484/19/45/455103
6. Orme, B., Torun, H., Unthank, M. et al. Capillary wave tweezer. *Sci Rep* 14, 12448 (2024). <https://doi.org/10.1038/s41598-024-63154-0>
7. Brekke, C. and Solberg, A. (2005) Oil Spill Detection by Satellite Remote Sensing. *Remote Sensing of Environment*, 95, 1-13. <http://dx.doi.org/10.1016/j.rse.2004.11.015>

Хайирбеков Шамиль Хаирбекович, [msturistt09@gmail.com](mailto:msturistt09@gmail.com)  
 Ильиных Андрей Юрьевич, [ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)



# НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЙ ГЕТЕРОГЕННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Ю.Д. Чашечкин

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*yulidch@gmail.com*

Применение высокоразрешающих инструментов показывает, что во всем доступном для наблюдения диапазоне масштабов течения жидкостей и газов характеризуются многомасштабной структурой. Для описания и динамики, и структуры течений используется система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей (СФУ). Классификация структурных компонентов течений, основанная на полных решениях линейаризованной СФУ, построенных объединенными методами теории сингулярных и регулярных возмущений, включает крупные компоненты – струи, следы, волны, вихри и тонкие лигаменты, которым в картине течения соответствуют волокна и прослойки. В формировании тонких компонентов определяющую роль играют процессы прямой и обратной конверсии компонентов структурированных термодинамических потенциалов. Анализируется теория периодических волн и лигаментов. Приводятся картины течений в природных и лабораторных условиях.

В природных, промышленных и лабораторных условиях гетерогенные среды, которые характеризуются неоднородными распределениями физических величин – термодинамических потенциалов, плотности, давления, температуры, концентрации примесей и других [1], естественно стратифицируются в гравитационном и других полях. Стратификация, которая может быть и сильной, и неизмеримо слабой в потенциально однородных средах, проявляется в форме многомасштабных структур, которые регистрируются во всем доступном для наблюдения диапазоне масштабов (приводятся примеры). Физической основой формирования тонких компонентов течений служит дискретность строения веществ на атомно-молекулярном и супрамолекулярном уровне – результат объединения атомов и молекул в ассоциаты – комплексы, клатраты, бондов и другие образования, обладающие потенциальной поверхностной энергией (ППЭ) [2,3]. Визуальной моделью термодинамической картины среды служат фотографии фотосферы Солнца [4]. Процессы конверсии преобразуют распределенную тепловую энергию и кинетическую энергию течений в ППЭ в процессе образования ассоциатов и возвращают в кинетическую энергию движений на микромасштабах при их распаде непрерывно перестраивающихся ассоциатов. Сложная атомно-молекулярная и термодинамическая структура жидкостей и газов исключает возможность существования сред с актуально однородной плотностью  $\rho \equiv \text{const}$ . Классификация распределений плотности в атмосфере и гидросфере приводится в [5]. В силу существования градиентов стратифицирующих величин гетерогенная среда неравновесна – ее состояние перестраивается. Непрерывно идущие диффузионные процессы также формируют компенсационные индуцированные диффузией течения около непроницаемых поверхностей, вызывающие самодвижение взвешенных тел нейтральной плавучести [6].

Динамику и структуру течений описывает аксиоматизированная система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей (СФУ) [7,8], которая замыкается уравнениями состояния для потенциала Гиббса и плотности [1]. Включение в СФУ уравнения состояния для потенциала Гиббса позволяет дополнить механизмы передачи энергии в текучих средах – макроскопические с потоком, волнами, вихрями и микроскопические диффузионные, конверсионным механизмом, которые включает перенос тепловой и кинетической энергии в ППЭ при формировании ассоциатов и передачу ППЭ в

тепловую и кинетическую энергию движений на микромасштабах. Сложная алгебро-дифференциальная СФУ обычно упрощается за счет пренебрежения рядом явлений, например, теплопередачей в течениях с малыми вариациями температуры.

Классификация структурных компонентов течений проведена по результатам анализа полных решений линеаризованной [9] и слабонелинейной [10] редуцированной СФУ, построенных методами объединенной теории регулярных и сингулярных возмущений [11]. Регулярные компоненты набора полных решений СФУ для периодических течений, которые определяются как процессы, в которых масштабные параметры мгновенной картины течений (длина волны) связаны с характеристиками временной изменчивости в выбранной точке (частотой) функциональным (характеристическим, дисперсионным) соотношением, описывают волны. В пределе идеальной стратифицированной или однородной жидкости регулярные решения равномерно переходят в известные выражения [12]. Сингулярным компонентам решений соответствуют тонкие волокна и прослойки в картине течений (соответствующие им параметры обозначаются индексами “ $l$ ”).

Усложнение вида дисперсионного соотношения выразительно прослеживается на примере анализа двумерных периодических течений с положительно определенной частотой  $\omega$  и комплексным волновым вектором  $\mathbf{k}$  на поверхности жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  ( $\gamma = \sigma/\rho$  – нормированное на плотность  $\rho(z)$  значение в гравитационном поле с ускорением свободного падения  $g = g_z$ ). В экспоненциально стратифицированной жидкости с масштабом  $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$  и периодом плавучести  $T_b = 2\pi\sqrt{\Lambda/g}$  и кинематической вязкостью  $\nu$  дисперсионное соотношение имеет сложный вид [13]:

$$\begin{cases} -N^2 k_x^2 + e^{z/\Lambda} (k_x^2 - k_{z,l}^2) \omega (ik_x^2 \nu - ik_{z,l}^2 \nu + \omega) = 0 \\ gk_x^2 - 3ik_x^2 k_{z,l} \nu \omega + k_{z,l} (ik_{z,l}^2 \nu - \omega) \omega + k_x^4 \gamma = 0, \end{cases}$$

в вязкой жидкости однородной плотности упрощается [14]:

$$k_x [2k_x (k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2) (\omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^3 + 2i\omega \nu k_x^2)] = 0,$$

и совсем простой формулой, характеризующей только волны  $\omega^2 = gk + \gamma k^3$ , описывает течение в однородной идеальной жидкости [7] (лигаменты теряются).

Свойства функций в наборе лигаментов – сингулярных решений СФУ, определяются природой периодического течения (инерционного с частотой  $\Omega$ , гравитационного поверхностного или внутреннего, акустического с частотой  $\omega$ ) и диссипативными параметрами среды – коэффициентами кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии [9,12]. В полном нелинейном описании все компоненты взаимодействуют и порождают новые с собственными пространственно-временными масштабами [10]. Одновременно в среде идут диссипативные процессы, характерные для каждого компонента. В общем случае в силу различия пространственно-временных масштабов непрерывно перестраиваемых множественных компонентов течения стратифицированных гетерогенных сред нестационарны.

Наборы собственных пространственно-временных масштабов течений определяют требования к методикам опытов, обеспечивающие полноту и точность получаемых данных. При этом собственно система СФУ определяет набор регистрируемых в эксперименте и использующихся в расчете физических величин, в который входят параметры среды – термодинамический потенциал, давление, плотность, температура, концентрации веществ, скорость звука, показатель преломления и другие, их градиенты, а также параметры движения – импульс, динамическое давление, кинетическая энергия, расход.



Пространственно-временные параметры регулярных компонентов определяют требования к выбору размеров поля наблюдения (области счета) и длительности регистрации течения. Свойства лигаментов задают требования к чувствительности инструментов, величине их пространственного и временного разрешения (числу знаков рассчитываемых величин, размеру сеток и временному шагу в численных расчетах).

Экспериментальные исследования динамики и структуры стратифицированных течений и внутренних волн выполнены на стендах Уникальной исследовательской установки «ГФК ИПМех РАН» [15].

Классическое черно-белое изображение с ножом Фуко визуализирует многомасштабную картину обтекания равномерно движущегося полого цилиндра в ползучем режиме при  $Re < 100$ , в которой представлены опережающее возмущение, периодические внутренние волны, высокоградиентные прослойки и волокна – лигаменты (рис. 1а). Одни прослойки, оконтуривающие след, контактируют с донной частью тела. Другие, «висящие», появляются в поле присоединенных волн и не соприкасаются с телом.

Метод Максутава выделяет богатую структуру лигаментов – высокоградиентных прослоек как контактирующих с телом, так и висящих в поле внутренних волн. На передней кромке нижней висящей прослойки выражен «завиток» зародыш вихря, который визуализируется при увеличении скорости тела (рис. 1б).

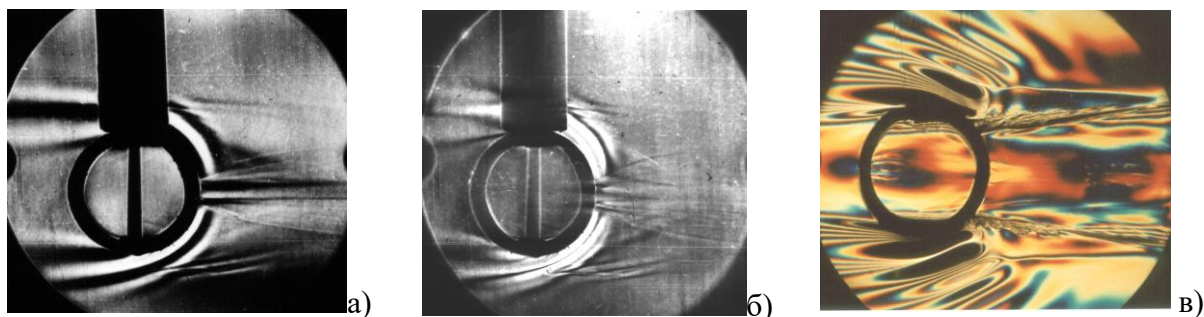


Рис. 1. Картина возмущений в непрерывно стратифицированной жидкости при равномерном движении полого горизонтального цилиндра,  $T_b = 20.5$  с,  $D = 7.6$  см,  $U = 0.04$  см/с, вертикальная щель: а) – нож Фуко, б) – нить Максутава; в) – горизонтальная щель – решетка, обеспечивающие визуализацию дисперсии белого света в воде ( $T_b = 6.1$  с,  $D = 7.6$  см,  $U = 0.24$  см/с)

Наиболее информативным оказывается цветное теневое изображение, приведенное на рис. 1в. Распределение изолиний иллюстрирует опережающее возмущение, оконтуренное группой нестационарных волн; семейство присоединенных волн, включающее висящий разрыв, спутный след с гладким ядром; семейство наклонных лигаментов, стартовых в области отрыва спутного следа от тела, доходящих до висящего разрыва, не контактирующего с движущимся телом.

На теневой фотографии в волновом режиме течения в следе за сферой представлены и волны, и вихри, и разделяющие области течения высокоградиентные прослойки – лигаменты [16]. При малых скоростях движения в следе за сферой выражены два типа внутренних волн собственной фазовой структуры – внешние присоединенные и погруженные в след, которые разделяет высокоградиентная прослойка на рис. 2а. Деформация плотностной метки – следа за всплывающим газовым пузырьком, иллюстрирует гладкий профиль распределения скорости. Длина присоединенной внутренней волны растет пропорционально скорости тела (рис. 2б). При этом меняется вихревая структура плотностного следа, в котором сохраняется слоистое пятно и формируются «вихревые пузыри», положение которых синхронизовано с фазовой структурой поля присоединенных внутренних волн.

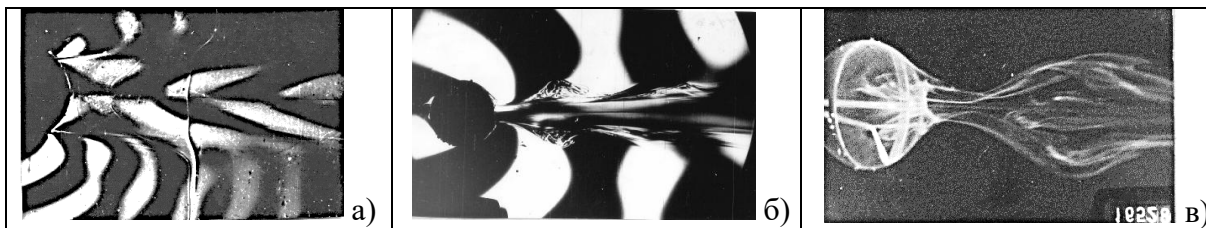


Рис. 2. Теневая и электролитическая визуализация картины течения за горизонтально движущейся сферой: а – в) –  $T_b = 3.0, 3.0, 9.0$  с,  $D = 5.0, 4.0, 5.0$  см,  $U = 0.76, 1.37, 1.38$  см/с

С увеличением скорости прослойки истончаются, их геометрия усложняется. Картина распределения вещества, сходящего с поперечного диаметра сферы в методе электролитической преципитации показывает «вихревой пузырь» более сглаженной формы, что указывает на независимость динамики различных физических величин в течении за движущимся телом (рис. 2в).

Одновременно с совершенствованием техники экспериментов развивалась и методика численного решения редуцированной СФУ с начальными и граничными условиями на основе открытого пакета OpenFOAM [17]. С целью обеспечения достоверности численного моделирования для дискретизации дифференциальных уравнений использовались высокоточные численные схемы, как по времени, так и по пространству. Для обеспечения требуемого пространственного разрешения структуры течения вычисления проводились в параллельном режиме с использованием высокопроизводительных вычислительных ресурсов с декомпозицией расчетной области равномерным разбиением сетки на блоки. Разработанные программы позволяют проводить в единой постановке расчеты всех компонентов многомасштабных стратифицированных течений – опережающего возмущения, внутренних волн, следа и разделяющих высокоградиентных прослоек в широком диапазоне чисел Рейнольдса для сильной, слабой и потенциально однородной стратификации. Результаты расчетов и экспериментов, приведенные на рис. 3, показывают хорошее совпадение результатов.

В волновом режиме в опережающем возмущении выражено отдельное ядро (рис.3б). В вихревом режиме вариации положения границ следа коррелируют с фазовыми поверхностями присоединенных внутренних волн. За пластиной располагается нестационарный донный вихрь, на размеры и положение которого также влияет текущая фаза волны.

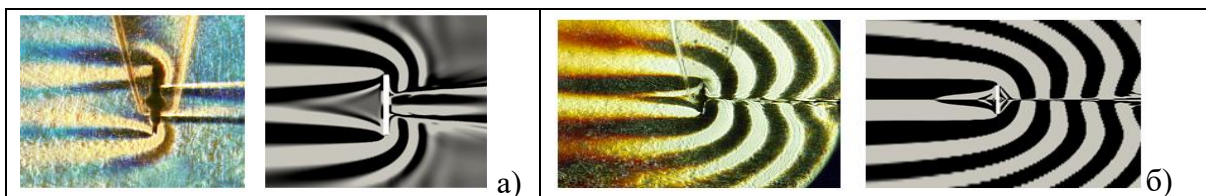


Рис. 3. Сравнение теневых изображений и рассчитанных картин горизонтальной компоненты градиента плотности непрерывно стратифицированной жидкости ( $T_b = 12.5$  с) около пластины высотой  $H = 2.5$  см, буксируемой со скоростью: а – в) –  $U = 0.03$  и  $0.18$  (слева – теневая визуализация градиента коэффициента преломления методом «вертикальная щель-нить», справа – расчет).

Проведенные расчеты и высокоразрешающие эксперименты показывают, что течения гетерогенных жидкостей характеризуются непрерывной изменчивостью тонкой структуры.



Система фундаментальных уравнений течений гетерогенных жидкостей с уравнением состояния для потенциала Гиббса и плотности позволяет проводить расчеты энергии, структуры и динамики течений, результаты которых согласуются с данными прецизионных высокоразрешающих опытов.

Дальнейшее развитие полноты и точности опытов позволит получить данные, необходимые для разработки алгоритмов расчетов динамики, структуры и эволюции течений гетерогенных жидкостей в природных и промышленных условиях с гарантированной оценкой погрешности без привлечения дополнительных параметров и гипотез.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в ИПМех РАН рамках Государственного задания (номер госрегистрации 124012500442-3). Эксперименты проведены на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Feistel R.* Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // *Ocean Sciences*. 2018. V.14. P. 471–502.
- 2 *Eisenberg D., Kauzmann W.* The Structure and Properties of Water (Oxford Classic Texts in the Physical Sciences). Oxford: Oxford University Press, 2005.
- 3 *Malenkov G.G.* Structure and dynamics of surfaces of thin films and water microdroplets // *Colloid Journal*. 2010. V. 72(5). P. 649–659. DOI: 10.1134/S1061933X10
- 4 Изображения и фотографии Солнца. Site: [https://xras.ru/sun\\_pictures.html](https://xras.ru/sun_pictures.html)
- 5 *Chashechkin Y. D., Ochirov A. A.* Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // *Mathematics*. 2023. V. 11(21). P. 4443. <https://doi.org/10.3390/math11214443>
- 6 *Левицкий В. В., Димитриева Н. Ф., Чашечкин Ю. Д.* Визуализация самодвижения свободного клина нейтральной плавучести в резервуаре, заполненном непрерывно стратифицированной жидкостью, и расчет возмущений полей физических величин, приводящих тело в движение // *ПММ*. 2019. Т. 83, № 3, С. 439–451. DOI: 10.1134/S0032823519030111
- 7 *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- 8 *Chashechkin Yu.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10. P. 286.
- 9 *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Регулярные и сингулярные компоненты периодических движений в толще жидкости // *ПММ*. 2007. Т. 71(5). С. 844 – 854.
- 10 *Chashechkin Yu. D.* Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // *Mathematics*. 2021. V. 9(6). P. 586. <https://doi.org/10.3390/math9060586>
- 11 *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984, 536 с.
- 12 *Очиров А.А., Трифонова У.О., Чашечкин Ю.Д.* Расчет тонкой структуры двумерных периодических течений в сжимаемой атмосфере // *ПММ*. 2025. Т. 89(3). С. 494–511. DOI: 10.31857/S0032823525030101
- 13 *Chashechkin Yu. D., Ochirov A.A.* Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11(8), P. 402.
- 14 *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Динамика гравитационно-капиллярных волн на поверхности неоднородно нагретой жидкости // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2007. Т. 43(1). С. 109–116.

- 15 УИУ “ГФК ИПМех РАН”: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>
- 16 Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V. 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes // Fluids. 2021. V. 6(9). P. 310.
- 17 Chashechkin Y.D. Discrete and continuous symmetries of stratified flows past a sphere // Symmetry. 2022. V. 14(6). P. 1278.

Чашечкин Юлий Дмитриевич, [yulidch@gmail.com](mailto:yulidch@gmail.com)



## ЭВОЛЮЦИЯ КАПЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

*Ю.Д. Чашечкин*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
[yulidch@gmail.com](mailto:yulidch@gmail.com)*

Проведена цветная видеорегистрация картины течения, возникающего в процессе отрыва капли от капилляра, падения и слияния с покоящейся жидкостью в гравитационном и электростатическом полях при комнатной температуре. Прослежена деформация свободной поверхности и картины переноса вещества в различных режимах. Обсуждаются механизмы распада капли на волокна в импактном режиме. Параметризация процессов проводится с учетом всех компонентов полной энергии – кинетической, потенциальной гравитационной и электрической.

Рост активности изучения капельных течений объясняется рядом причин – фундаментальностью темы, объединяющей классическую и атомно-молекулярную физику, компактностью установки, энергичным развитием вычислительной и экспериментальной техники, ростом числа практических применений научных результатов в технологиях био-, нефте-, химической, металлургической, фармацевтической и других отраслей промышленности. В качестве научной основы экспериментов все более активно используется система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей (СФУ), включающая уравнения неразрывности, переноса вещества, импульса, и энергии с уравнениями состояния для потенциала Гиббса и плотности вязкой стратифицированной сжимаемой жидкости с физически обоснованными граничными условиями [1,2].

Необходимость учета процессов конверсии энергии объясняется неоднородностью пространственного распределения потенциала Гиббса, включающего дополнительный член в подслое толщиной в молекулярный кластер, учитывающий потенциальную энергию поверхностного натяжения (ППЭ) и электростатическую энергию в еще более тонком поверхностном заряженном слое [3]. Сложная «зернистая» структура непрерывно перестраиваемого пространственного распределения потенциала Гиббса на супрамолекулярных масштабах (оптическим образом структуры потенциала Гиббса жидкости служат изображения фотосферы Солнца [4]) предопределяет важность учета процессов конверсии энергии – перехода тепловой и кинетической энергии движения в ППЭ образующихся ячеек и наоборот, перехода ППЭ оболочек ассоциатов в тепловую и кинетическую

энергию движения жидкости на самых малых масштабах [5]. Включение в СФУ термодинамических потенциалов позволяет анализировать влияние различных механизмов переноса энергии: *радиационного* – с тепловым излучением; *макроскопического* – с потоком, волнами и вихрями; *микроскопического* – диссипативного и конверсионного. Классификация компонентов течений проводится на основе анализа полных решений линеаризованной СФУ, включающего и волны, и лигаменты в слабо диссипативных средах [6]. Полные решения СФУ находятся методами объединенной теории регулярных и сингулярных возмущений [7].

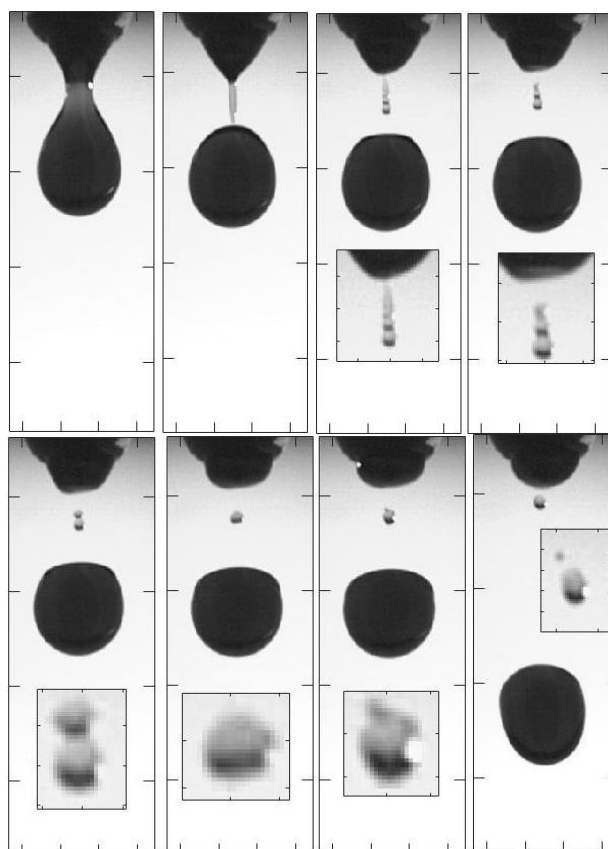
Полная СФУ с граничными и начальными условиями определяет размерные физические величины задачи, параметры макро- и микроструктурных компонентов течений, полную энергию падающих капель, включающую кинетическую, потенциальную поверхностную (ППЭ) и энергию электростатического поля (при наличии).

Собственные временные и пространственные параметры задачи – геометрические (размеры области течений), физические в начальных условиях, функциональные (масштабы регулярных компонентов – волн, вихрей, следов, и сингулярных – тонких волокон) и энергетические определяют требования к методике опытов и выбору безразмерных отношений, использующихся для сравнительной оценки условий и результатов опытов. Выбор размеров области наблюдения, вида и числа регистрируемых параметров, длительности опыта определяется масштабами регулярных компонентов. Временное и пространственное разрешение инструментов задается условием регистрации лигаментов – быстро эволюционирующих тонких компонентов течений.

Установки для регистрации картины отрыва, свободного падения и слияния капли с принимающей жидкостью, входящие в состав Уникальной исследовательской установки «ГФК ИПМех РАН» Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН [8] включают: капельницу; устройство контроля пролета капли, запускающее регистрирующую аппаратуру – фото-, кино- или видеокамеру; яркий источник света; прозрачный бассейн с принимающей жидкостью, гидрофон и микрофон, блоки управления электрическими полями и экспериментом в целом с компьютером.

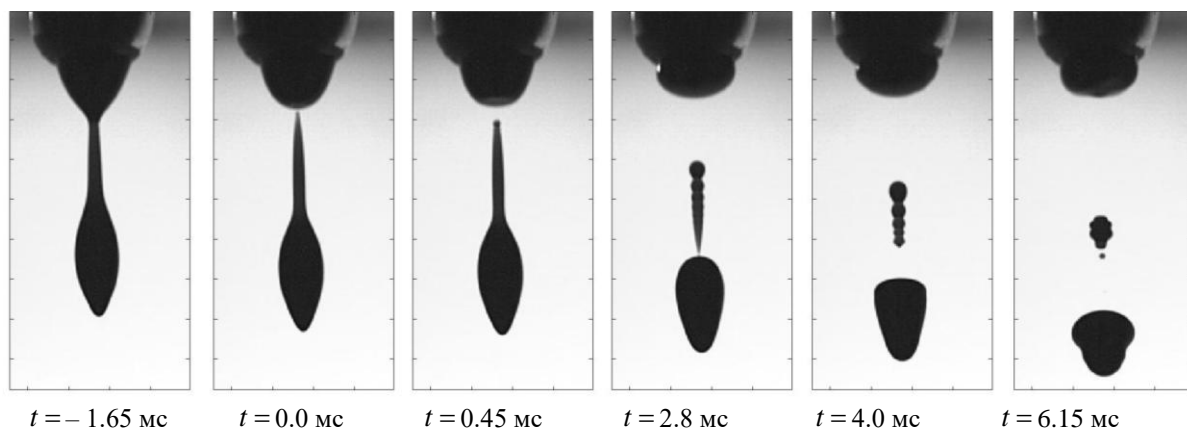
Эволюцию картины течения при отрыве капли в гравитационном поле иллюстрирует выборка из видеофильма, представленная на рис.1.

В последние годы возродился интерес к изучению влияния электростатического поля на картину отрыва капли от капилляра. В дополнение к традиционному исследованию распада струи жидкости на волокна в сильном электростатическом поле, в опытах рассматривается действие более слабых полей, влияющих на форму и размеры отрывающейся от капилляра капли. Отличие картин течений в гравитационном поле и при включенном дополнительном вертикальном электростатическом поле иллюстрирует сравнение выборок из видеофильмов, представленных на рис. 1 и 2. При неизменных условиях опытов наложение электрического поля уменьшает объем капли и заметно изменяет ее форму [9]. Растущая капля вытягивается в направлении поля и принимает булавовидную форму, ее хвостовая часть заметно толще перемычки при отрыве под действием собственного веса (рис. 2).



$t = -7.15 \text{ мс}$   $t = -0.05 \text{ мс}$   $t = 0.8 \text{ мс}$   $t = 1.2 \text{ мс}$   $t = 1.5 \text{ мс}$   $t = 2.4 \text{ мс}$   $t = 2.7 \text{ мс}$   $t = 20.8 \text{ мс}$

Рис. 1. Отрыв капли воды с постепенным наполнением и отрывом капли, отделением перетяжки, формированием сателлитов с увеличенными изображениями сателлитов на вкладках



$t = -1.65 \text{ мс}$   $t = 0.0 \text{ мс}$   $t = 0.45 \text{ мс}$   $t = 2.8 \text{ мс}$   $t = 4.0 \text{ мс}$   $t = 6.15 \text{ мс}$

Рис. 2. Картины отрыва заряженной капли в плоском электростатическом поле с потенциалом  $\Phi = 15 \text{ кВ}$  (отсчет – от момента отделения кромки хвостовика, шаг сетки – 2 мм)

Дальнейшая эволюция картины течения зависит от отношений компонентов энергии капли и плотностей сливающихся жидкостей [10]. В интрузивном режиме, когда ППЭ капли превышает ее кинетическую энергию, капля большей плотности, чем принимающая среда, плавно втекает в толщу жидкости и образует связанную интрузию, которая постепенно трансформируется в погружающееся вихревое кольцо. Эволюция картины течения в боковой проекции приведена на рис. 3.

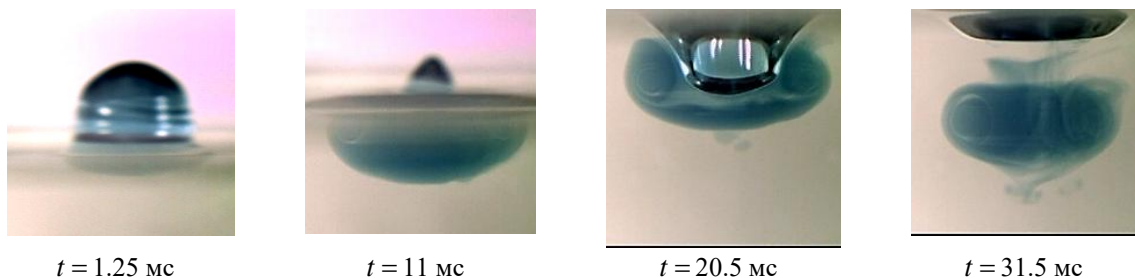


Рис. 3. Эволюция картины слияния капли раствора чернил с водой в интрузивном режиме ( $D = 4.3 \text{ мм}$ ,  $U = 0.34 \text{ м/с}$ )

Если плотность жидкости капли меньше плотности принимающей жидкости, образующаяся интрузия всплывает и сдавливает стенки каверны, которая принимает коническую форму. Стягивающаяся оболочка – конический сингулярный компонент течения (плоский лигамент), сворачивается и выбрасывает в толщу жидкости сингулярный вихорек [11]. Его размеры мало меняются по мере продвижения в глубину толщу жидкости (рис. 4). Достигнув горизонта нейтральной плавучести вихорек останавливается и образует вторичную интрузию, содержащую легкую жидкости капли. Эффекты плавучести выталкивают ядро легкой жидкости, которое начинает всплывать и трансформируется в регулярный вихрь, диаметр которого равномерно растет со временем, как и у вихря на последнем кадре рис. 3. Более детально картина течения анализируется в [5,11].

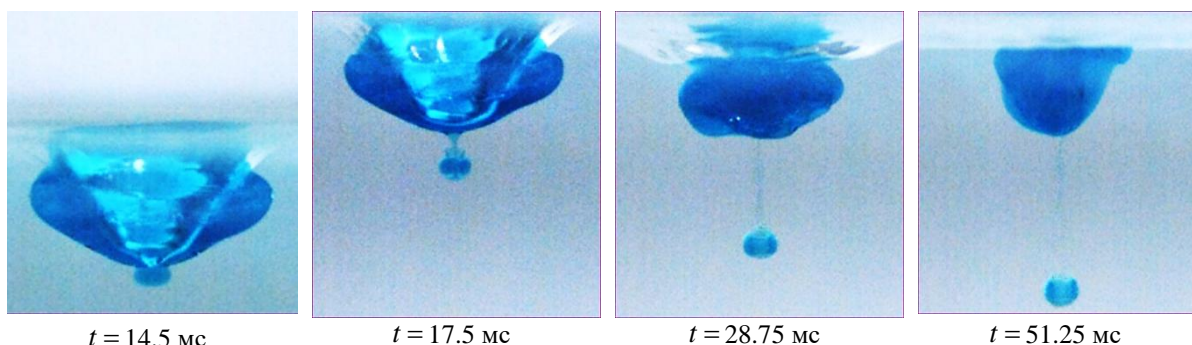


Рис. 4. Эволюция картины течения на этапе погружения сингулярного вихря с этанолом на интервале  $14.5 < t < 51.25 \text{ мс}$ , условия опыта приведены на рис. 3

Картина течения радикально перестраивается в импактном режиме, когда кинетическая энергия капли превышает ее ППЭ, и происходит изменение структуры течения в пятне контакта сливающихся жидкостей. Здесь окрашенная капля распадается в воде на волокна, часть которых растекается по поверхности жидкости, венца, пронизывает пленку и выбрасывает капельки в воздух [5,10]. Типичная картина распределения вещества капли в принимающей жидкости показана на выборах из видеофильма, приведенных на рис. 5. По мере развития течения высота венца растет, число и длина шипов уменьшается, диаметры капелек на их вершинах увеличиваются. Сложная картина распределения пигмента в капельках – следствие вовлечения в быстрое течение обеих контактирующих жидкостей. Наличие пигмента отмечается на всей поверхности венца. Быстрые струйки с повышенным содержанием пигмента оставляют яркие тонкие следы на поверхности венца. Сохранение четкости линейчатой структуры течения по мере эволюции течения – свидетельство стабильности азимутального положения быстрых окрашенных струек на

границе области контакта сливающихся жидкостей, которые выносят окрашенное вещество из области слияния, где идет уничтожение свободных поверхностей контактирующих жидкостей.

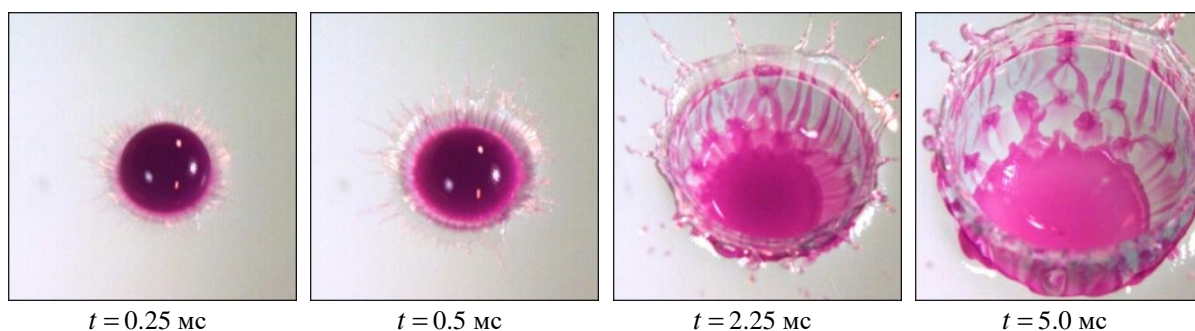


Рис. 5. Эволюция картины распределения вещества капли раствора перманганата калия по поверхности каверны и венца, сливающейся с водой в импактном режиме ( $D = 4.3$  мм,  $U = 3.1$  м/с)

Далее происходят качественные изменения в структуре распределения вещества капли. На дне каверны вещество капли продолжает перетекать вдоль волокон и собираться под узлами сетки в отдельных пятнах, распределение которых имеет выраженную зональную структуру. Собравшаяся в узлах решетки жидкость капли образует новые лигаменты, которые продавливают дно и стенки каверны. Они внедряются в толщу принимающей жидкости в форме сингулярных вихорьков на коротких ножках, которые постепенно преобразуются в волокнистые петли при схлопывании каверны.

С началом фазы стягивания (коллапса), когда поверхность каверны покрывается большими капиллярными волнами, приграничные течения вытягивают неоднородности стенки в наклонные петли 1, 2 (наиболее длинные 1 – в приповерхностном слое). Одновременно вниз растет центральный уединенный лигамент – тонкая струйка 3 – след первичного контакта капли с принимающей жидкостью – области с максимальной эффективностью конверсии ППЭ (рис. 6,  $t = 37.5$  мс). Картина теней и каустик визуализирует кольцевые волны с острыми гребнями и глубокими впадинам.

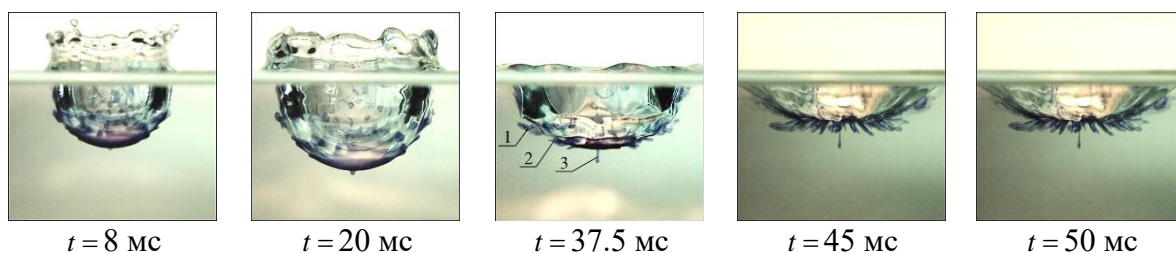


Рис. 6. Эволюция вихревых петель импакта капли ализариновых чернил:  $D = 0.43$  см,  $U = 3.1$  м/с

Другая часть волокон пронизывает дно каверны. Особенности процесса переноса вещества капли в толщу жидкости в импактном режиме слияния поясняют выборки из видеограммы картины течения в вертикальной плоскости, приведенные на рис. 7. На начальной стадии слияния капли плоское дно каверны пронизывают тонкие лигаменты – волокна, разделенные прослойками принимающей жидкости. Каверна быстро углубляется и при  $t = 0.5$  мс сквозь окрашенную стенку начинает просматриваться газовая полость. Рост размеров примыкающей ко дну каверны волокнистой структуры – основы промежуточного слоя, замедляется при  $t = 0.75$  мс. Все традиционные компоненты течения – каверна, растущий венец с лигаментами, шипами и облаком брызг, представлены при  $t = 1.0$  мс.



Сложное течение в области контакта сливающихся жидкостей включает семейства лигаментов – тонких плоских струек, бегущих по дну каверны к шипам на кромке венца, и еще более тонких игольчатых волокон, пронизывающих дно каверны, которые формируют промежуточный слой. На начальном этапе поверхность раздела жидкостей попеременно проходит то по вершинам лигаментов с пигментом капли, то «перепрыгивает» на вершины прослоек принимающей жидкости, разделяющих окрашенные волокна. Т.е. на одних участках она проходит по внешней границе волокнистого промежуточного слоя, а на соседних – по внутренней. Качественно можно считать, что в нижней части растущей каверны граница области слияния имеет сложную трехмерную кусочно-гладкую форму.

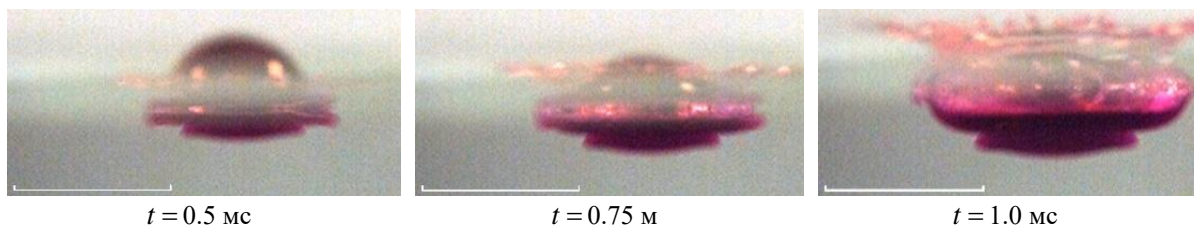


Рис. 7. Вид сбоку на картину течения при слиянии капли водного раствора  $\text{KMnO}_4$  с водой (длина метки 5 мм, параметры опытов указаны на рис. 5)

Лигаментная структура капельных течений сохраняется при слиянии капель легкой жидкости с более плотной в импактном режиме и при слиянии капель растворов химически реагирующих веществ. При этом области протекания химических реакций располагаются на разветвленной площади оболочек лигаментов.

Интегрированные исследования картины течения и генерации звука в гравитационном поле и при одновременном действии электростатического поля впервые выполнены на модифицированном стенде «Динамика заряженной капли» (ДЗК), входящем в состав УИУ «ГФК ИПМех РАН» [8]. Синхронизованная с видеорегистрацией аудиодиаграмма сигнала гидрофона – изменение звукового давления, приведена на рис. 8.

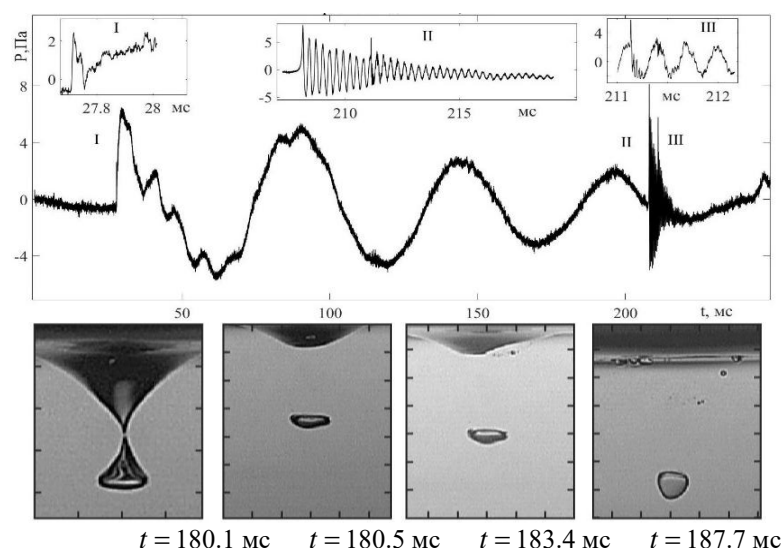


Рис. 8. Аудиодиаграмма с выборками первичного импульса (I), резонансного пакета (II) и его высокочастотного дополнения (III), масштаб шкалы 2 мм



Первичный импульс сменяется интенсивными низкочастотными осцилляциями акустического давления гидродинамической природы. Появление резонансного пакета *II* совпадает с разрывом лигамента – перемычки, соединяющей отделяющийся газовый пузырь сложной формы от дна быстро сокращающейся каверны при  $t = 180.1$  мс. По мере излучения частота сигнала несколько увеличивается, что объясняется сглаживанием формы пузыря. Более подробно акустика капельных течений в гравитационном поле анализируется в [12].

Эволюцию изменения акустического давления и картины течения, возникающего в принимающей жидкости при слиянии капли диаметром  $D = 5,0$  мм, соприкасающейся с принимающей жидкостью при скорости  $U = 3.4$  м/с, в вертикальном электростатическом поле с потенциалом  $\Phi_e = 2$  кВ иллюстрирует выборка из видеограммы, приведенная на рис. 9.

Даже относительно слабое электростатическое поле с потенциалом  $\Phi_e = 2$  кВ существенно изменяет картину отрыва газовой полости, приведенную на рис. 9. В электростатическом поле нижняя цилиндрическая часть второй каверны со скругленным основанием отделяется как целое образование, без формирования стягивающегося пояса и перемычки. Разрыв каверны происходит одновременно по всему сечению без изменения формы ее внешнего контура. Излучение резонансного звукового пакета *II*, аудиограмма которого приведена на рис. 9, начинается в момент разрыва цилиндрического участка каверны и отделения ее нижней части. От появления разрыва на теле каверны до полного отделения пузыря в данном опыте проходит 140 мкс.

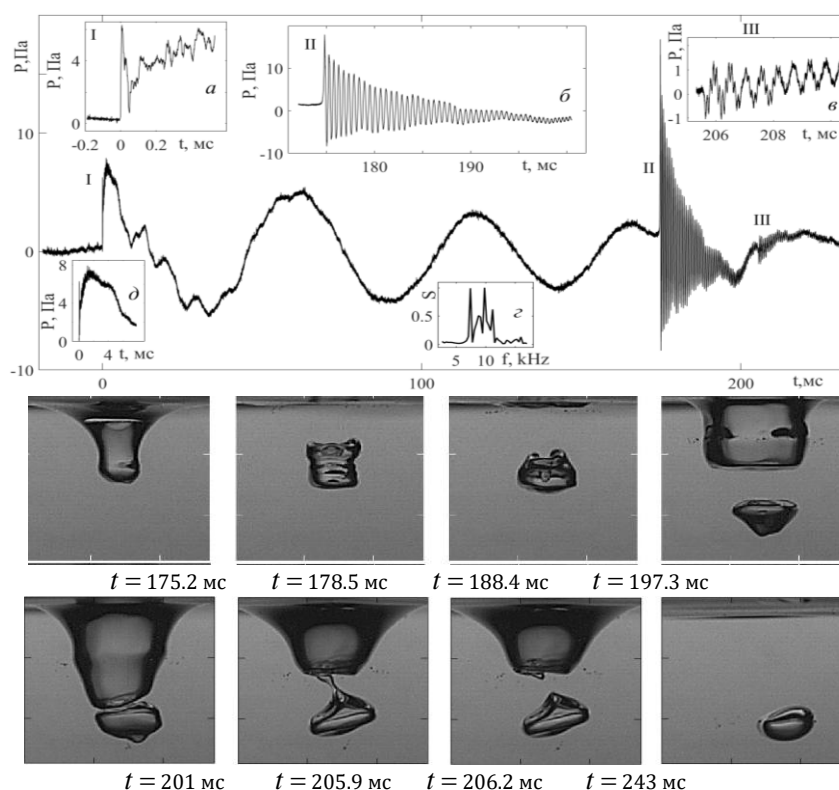


Рис. 9. Эволюция акустических сигналов и картины течения в процессе отрыва и присоединения излучающей звук газовой полости при слиянии капли жидкости в электростатическом поле с потенциалом  $\Phi_e = 2$  кВ

Частота пакет *II* плавно увеличивается от 2030 Гц в начале до 2100 Гц в конце пакета. Изменение связано со сглаживанием формы и уменьшением объема излучающей газовой полости. На интервале  $197.3 < t < 224.2$  мс происходит активное изменение картины течения. Быстро растущая каверна с плоским дном приближается к газовой полости сложной формы, пространственное положение которой фиксируется сформировавшимися течениями. Верхний выступ на пузыре приближается к дну каверны и соприкасается с ним на небольшой поверхности. Далее каверна, часть дна которой принимает коническую форму, начинает стягиваться к свободной поверхности и оставляет остроконечный выступ, связанный тонкой перетяжкой с коническим выступом на пузыре. Разрыв перемычки сопровождается излучением нового резонансного звукового пакета *III*, основная частота которого немонотонно меняется. В его спектре сигнала также присутствуют высокочастотные осцилляции, обусловленные излучением одного из мелких пузырей.

В отсутствие полного математического описания наблюдаемых свойств капельных течений, интерес представляет обсуждение физической природы их эволюции на основе анализа общих свойств системы фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей (СФУ). Уравнения СФУ с физически обоснованными начальными и граничными условиями определяют **течение жидкости** как *перенос независимых физических величин – плотности вещества, импульса и энергии, на который влияют процессы трансформации внутренней энергии* [1,2]. Основу классификации компонентов течений составляют наборы полных решений СФУ в линейном или слабонелинейном приближении, построенные объединенными методами теории регулярных и сингулярных возмущений [7,8]. Пространственная и временная многомасштабность нелинейно взаимодействующих компонентов течений на фоне действия диссипативных факторов обеспечивает непрерывную трансформацию динамики и структуры течения, не переходящего в стационарную форму даже при неизменных внешних условиях.

Основным физическим параметром жидкости является потенциал Гиббса, учитывающий ППЭ, неравномерное распределение которого отражает «зернистость» энергетической структуры среды и наличие контактных поверхностей. Процессы передачи энергии включают макроскопические механизмы с течениями, волнами и вихрями, и микроскопические – диссипативные и конверсионные (влияние теплового излучения здесь не рассматривается вследствие малости изменений температуры). Конверсионные механизмы обеспечивают формирование микротечений – основы нулевого трения покоя жидкостей, математическим образом которых являются лигаменты – наборы сингулярных решений СФУ [2, 7]. В экспериментах лигаментам соответствуют тонкие струйки жидкости, пронзающие стенки каверны и кромку пелены на вершине венца на начальном этапе слияния капли жидкости в импактном режиме. Они образуют сингулярные вихорьки и петли при деформации стенки стягивающейся каверны, а также газовые каналы при отрыве газовых полостей, излучающих звук. Стягивающаяся оболочка каверны – двумерный лигамент, порождает сингулярный вихорек при слиянии капли жидкости меньшей плотности, чем принимающая в интрузивном режиме [11]. В импактном режиме лигамент при стягивании оболочки каверны проявляется в форме центрального всплеска и последующего стримера.

СФУ предопределяет состав набора физических величин, которые одновременно должны измеряться или рассчитываться на основе данных проведенных экспериментов в аэро- и гидродинамике. Он включает потенциал Гиббса, термодинамические величины – плотности контактирующих жидкостей, давление, температуру, концентрацию примесей, скорость звука, физические величины другой природы (коэффициент преломления света, удельная электропроводность), в начальном состоянии и их эволюцию. Описание течений включает определение импульса и энергии движения, их градиенты, параметров

их временной изменчивости, а также мер взаимодействия потока с телами как в начальном состоянии системы, так и в ходе ее эволюции во времени.

Предварительный анализ методики опытов на основе СФУ позволяет определить минимальный набор наблюдаемых параметров, позволяющий выделить ключевые особенности изучаемого явления. Метод избыточности – определения значения выбранной физической величины несколькими независимыми способами, обеспечивает возможность объективного контроля точности описания параметров сложных явлений. Собственные масштабы задачи – геометрические, длины регулярных компонентов определяют размер области наблюдения, содержащей ключевые объекты наблюдения. Масштабы сингулярных компонентов течений определяют требования к пространственной разрешающей способности, быстродействию измерителей и наблюдательных систем в целом.

На основе методики, вытекающей из анализа СФУ при описании энергетики, динамики и структуры капельных течений, на стендах УИУ «ГФК ИПМех РАН» выполнены согласованные акусто-гидродинамические исследования течений, которые формирует в принимающей жидкости свободно падающая капля в гравитационном и электростатическом полях. Впервые изучена эволюция структуры и тонких лигаментов (струек, газовых каналов и оболочек, брызг), и более крупных – каверны, венца, кольцевой впадины, всплеска, также проведена регистрация сопутствующих акустических сигналов.

Впервые отмечено влияние перестройки потенциала Гиббса на общую картину течения, форму излучающей газовой полости и спектральный состав звукового пакета в гравитационном и электрическом полях.

Рекомендуется продолжить согласованное развитие теоретической и экспериментальной аэрогидродинамики на основе системы фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей, установление метрологических требований к методикам опытов с гарантированной оценкой погрешностей и создание необходимых инструментов.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Эксперименты проведены на стендах УИУ «ГФК ИПМех РАН». Работа выполнена по госзаданию, номер госрегистрации: 124012500442-3.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Chashechkin Yu.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V.10. P. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
3. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. Т. 1(94). С. 73–92. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-73-92>
4. Изображения и фотографии Солнца. Site: [https://xras.ru/sun\\_pictures.html](https://xras.ru/sun_pictures.html)
5. Чашечкин Ю.Д. Закономерности распределения вещества свободно падающей окрашенной капли в прозрачной принимающей жидкости (обзор) // Известия РАН. МЖГ. 2025. №1. С. 34–55.
6. Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11(8). P. 402. doi: 10.3390/axioms11080402
7. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 476 с.
8. УИУ “ГФК ИПМех РАН”: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>

9. Чашечкин Ю. Д., Прохоров В. Е. Влияние электрического поля на динамику структурных компонентов течения при гравитационном отрыве капли воды // Известия РАН. МЖГ. 2024. № 3. С. 29–42. DOI: 10.1134/S0015462824602419
10. Chashechkin Yu.D., Pinykh A.Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with target fluid // Axioms. 2023. V. 12(4). P.374.  
<https://doi.org/10.3390/axioms12040374>
11. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Погружающийся и всплывающий вихрь в картине плавного втекания свободно падающей капли этанола в воду // Изв. РАН. МЖГ. 2024. № 6. С. 62–81. DOI: 10.31857/S10244708424
12. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Акустика периодических и множественных ударов капель о водную поверхность // Акустический журнал. 2023. Т. 69. № 3. С. 330–339.

Чашечкин Юлий Дмитриевич, yulidch@gmail.com



## БИОКОНВЕКТИВНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ СУСПЕНЗИИ ГЛАВИТАКТИЧЕСКИХ МИКРООРГАНИЗМОВ

*И.Н. Черепанов, Б.Л. Смородин\**

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь  
bsmorodin@yandex.ru*

Биоконвективные течения вызываются перераспределением концентрации микроорганизмов в окружающей среде связаны с их коллективным плаванием [1]. Без направленного внешнего воздействия микроорганизмы плывут случайным образом, их траектория представляет собой случайные блуждания. Такое поведение называется активной диффузией. Коэффициенты диффузии среды микроорганизмов ( $D = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$ ) значительно выше, чем в молекулярных жидких смесях, что на порядок увеличивает вклад диффузионного транспорта в перераспределение концентрации.

Под влиянием внешних воздействий средняя скорость движения микроорганизмов  $V_c$  приобретает некоторое значение. Если скорость микроорганизмов  $V_c$  направлена вверх (против силы тяжести), говорят про отрицательный гравитаксис. В случае, когда скорость  $V_c$  сонаправлена с полем тяжести – гравитаксис положительный. Присутствие ионов тяжелых металлов (ртути, меди, кадмия, свинца) в среде, влияет на микроорганизмы (например, фотосинтезирующую жгутиковую водоросль *Euglena gracilis*) и заставляет их переключаться с положительного на отрицательный гравитаксис [2]. Подобная реакция меняет поле концентрации микроорганизмов, и, как следствие, характер биоконвективного течения, что может быть использовано, для мониторинга и диагностики загрязнения водоемов тяжелыми металлами.

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой суспензии микроорганизмов в воде, ограниченный плоскостями  $z = 0$  и  $z = H$ . Средняя концентрация микроорганизмов –  $\bar{C}$ . Используя масштабы:  $H$  – длины,  $\frac{H^2}{D}$  – времени,  $D/H$  – скорости,  $p = \rho H^3/D\nu$  – давления,  $\theta$  – температуры и  $\bar{C}$  – концентрации, запишем безразмерную систему уравнений тепловой биоконвекции в виде [3-4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sc} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) &= -\nabla p' + \Delta \mathbf{V} + Le Ra_T T \mathbf{k} - Ra_c C \mathbf{k}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) C &= \Delta C + Pe \nabla C, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T &= Le \Delta T, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $Ra_T = \frac{\beta_T g}{\chi \nu} \Theta H^3$ ,  $Ra_c = \frac{\beta_c g}{\nu D} \bar{C} H^3$  – тепловое и концентрационное числа Релея,  $Sc = \frac{\nu}{D}$ ,  $Le = \frac{\chi}{D}$  – числа Шмидта и Льюиса.  $Pe = \frac{V_c H}{D}$  – число Пекле, характеризующее среднюю скорость плавания микроорганизмов.

Для твердых, непроницаемых для микроорганизмов, теплопроводных границ слоя, соответствующих нагреву снизу, граничные условия для скорости, концентрации и температуры запишутся в виде:

$$z = 0, 1: \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} + Pe C = 0; \quad T(0) = 1, \quad T(1) = 0, \quad (2)$$

В состоянии механического равновесия распределение температуры линейно, а концентрация микроорганизмов соответствует барометрическому закону:

$$\mathbf{V}_0 = 0, T_0 = 1 - z, C_0 = \frac{e^{-Pe z}}{(1 - e^{-Pe})}. \quad (3)$$

Положительный гравитаксис микроорганизмов в неподвижной жидкости приводит увеличению концентрации клеток у дна слоя.

Неустойчивость механического равновесия суспензии (3) относительно малых возмущений проанализирована стандартным методом [5] с помощью численного интегрирования (методом Рунге–Кутты–Мерсона) системы уравнений, полученной из (1) в результате линеаризации.

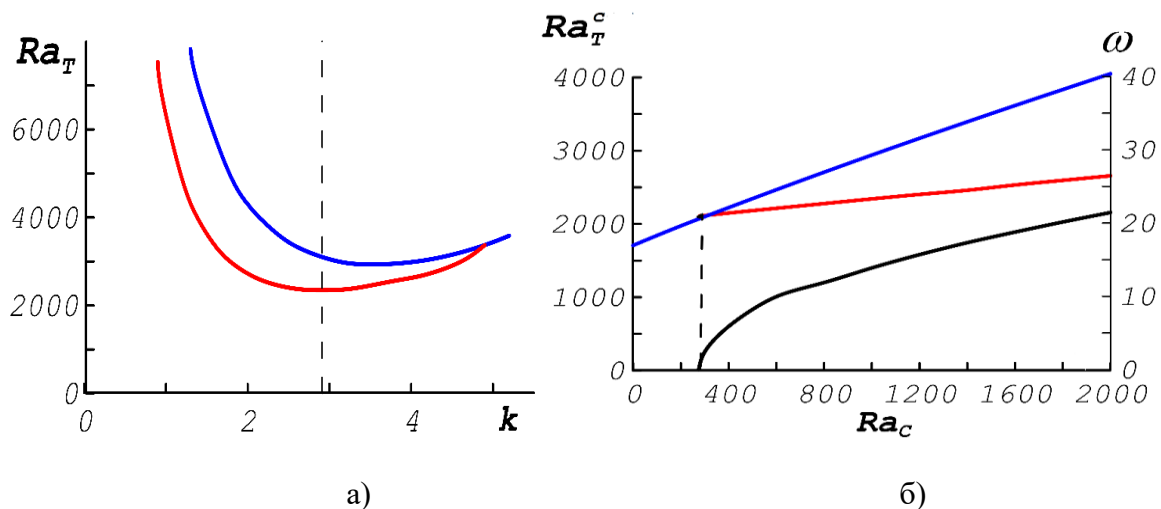


Рис. 1.  $Pe=2$ ,  $Sc=20$ ,  $Le=2.86$ . а) Зависимости теплового числа Релея от волнового числа,  $Ra_c=1000$ ; б) Зависимости теплового числа Релея и частоты нейтральных колебаний от концентрационного числа Релея. Красная линия – колебательная мода, синяя – монотонная мода.

Нейтральные кривые  $Ra_T(k)$  для монотонных и колебательных возмущений изображены на рис. 1а для слоя толщиной  $H=2$  мм, заполненного суспензией зеленой водоросли *Euglena Gracilis* ( $Pe=2$ ,  $Sc=20$ ,  $Le=2.86$ ). Значение  $Ra_c=1000$  соответствует средней концентрации  $\bar{C} = 1,6$  %. Минимум нейтральной кривой  $Ra_T^c = 2342,2$  соответствует

колебательным возмущениям с волновым числом  $k^c = 2,91$  и частотой колебаний  $\omega = 13.88$ . В чистой воде  $Ra_C=0$  конвекция возникает монотонным образом при  $Ra_T^c = 1708$ . Увеличение концентрационного числа Релея  $Ra_C$  (рис.1б) приводит смене монотонной неустойчивости на колебательную. Критическое тепловое число Релея  $Ra_T^c$  линейно растет с ростом  $Ra_C$ , а частота нейтральных колебаний – по корневому закону.

Нелинейная задача решена методом конечных разностей на сетке  $81 \times 31$  с использованием функции тока  $\psi$  и завихренности. Для критического значения волнового числа  $k^c = 2,91$  построена бифуркационная диаграмма (рис. 2). Неустойчивость равновесия (CS, conductive state) возникает при  $Ra_T^c = 2390$  (погрешность относительно линейной теории 2%). В результате прямой бифуркации формируется стоячая волна (standing wave, SW).

Вблизи от порога возникновения волновое течение слабо-нелинейное – содержит в одну частоту спектре Фурье для эволюции функции тока от времени в фиксированной точке конвективной ячейки. На одном пространственном периоде течение в основном состоит из пары противоположно вращающихся конвективных валов. Через половину периода колебаний направление вращения соседних валов меняется.

Рост степени нагрева  $Ra_T$  ведет к увеличению интенсивности течения и уменьшению частоты конвективных колебаний. Стоячая волна становится сильно нелинейной. Колебания функции тока во времени становятся ангармоническими, в спектре Фурье появляется множество высших гармоник.

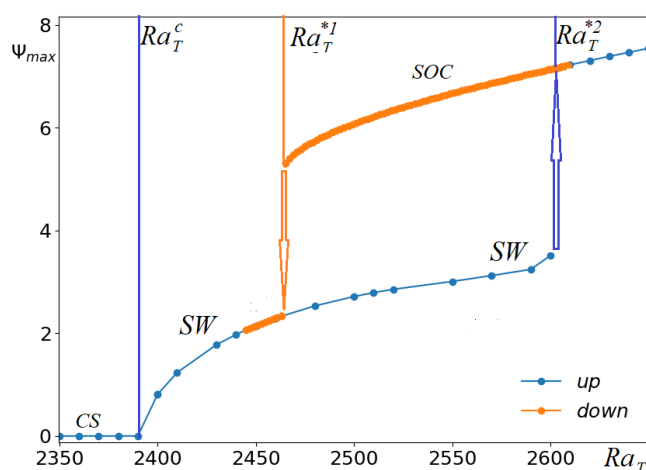


Рис. 2.  $Ra_C=1000$ ,  $Pe=2$ ,  $Sc=20$ ,  $Le=2.86$ . Бифуркационная диаграмма при  $k=2,91$ .

В точке  $Ra_T^{*2} = 2605$  в результате обратной бифуркации происходит переход к стационарной конвекции (steady overturning convection, SOC): интенсивность течения резко растет, а частота осцилляций падает до нуля. Если в качестве начального состояния взять режим стационарной конвекции высокой интенсивности и уменьшать тепловое число Релея в область  $Ra_T < Ra_T^{*2}$ , то этот режим сохраняется вплоть до значения  $Ra_T^{*1}=2465$ , после чего возникает переключение на низкоинтенсивный режим стоячей волны.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-20108, <https://rscf.ru/project/25-21-20108/> при финансовой поддержке Пермского края.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Childress S., Levandowsky M., Spiegel E.A. Pattern formation in a suspension of swimming microorganisms: equations and stability theory// J. Fluid Mech. 1975. Vol. 63. P. 591–613.
2. Stallwitz E., Häder D.-P. Effects of heavy metals on motility and gravitactic orientation of the flagellate, *Euglena gracilis* // Europ. J. Protistol. 1994. Vol. 30. P. 18-24.
3. Alloui Z., Nguyen T.H., Bilgen E. Stability analysis of thermo-bioconvection in suspensions of gravitactic microorganisms in a fluid layer // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2006. Vol. 33. P. 1198-1206.
4. Alloui Z., Nguyen T.H., Bilgen E. Numerical investigation of thermo-bioconvection in a suspension of gravitactic microorganisms // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2007. Vol. 50. P. 1435-1441.
5. Гериуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М: Наука, 1972. 392 с.

Сморodin Борис Леонидович, bsmorodin@yandex.ru  
Черепанов Иван Николаевич, che-email@yandex.ru



## НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РАЗРЫВОВ. ОБОБЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ФОН НЕЙМАНА

*М.В. Чернышов*

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»  
им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург  
chernyshov\_mv@voenmeh.ru*

Сверхзвуковые газовые течения в соплах и воздухозаборниках летательных аппаратов, в задачах внешней аэродинамики и струйных технологий сопровождаются образованием многочисленных газодинамических разрывов и волн (скачков уплотнения, тангенциальных и слабых разрывов), их взаимодействием (регулярным или нерегулярным) и отражением от поверхностей различной формы и природы. При нерегулярном отражении и взаимодействии скачков уплотнения возникают разнообразные тройные конфигурации – совокупности трех скачков, имеющих общую (тройную) точку, из которой, кроме того, исходит тангенциальный разрыв.

Большое различие параметров течения на сторонах тангенциального разрыва за тройными конфигурациями может быть использовано во многих технических приложениях. В частности, предлагается использовать различие скоростных напоров за тройными конфигурациями скачков уплотнения и бегущих ударных волн для оптимизации трансляционного воздействия взрыва – защиты уязвимых объектов от перемещения в спутном потоке за взрывной волной или, напротив, для увеличения дальноточности транспортировки твердых и жидких частиц потоком газа. При анализе цикла работы ротационного детонационного двигателя сообщается, что более высокая температура за главной (маховской) волной тройной конфигурации способствует возникновению детонационных процессов, в то время как в более холодной газовой смеси за отраженной



волной химические реакции нередко не возбуждаются. Обсуждается идея перспективного комбинированного прямоточного реактивного двигателя, частично использующего детонационные эффекты, для полёта с большими числами Маха.

Попытки численного моделирования и аналитической оценки [1, 2] параметров течения с маховским отражением при наличии детонационных эффектов показывают, что энерговыделение и изменение химического состава газовой смеси на главном скачке заметно влияют на его размер. Кроме того, они изменяют условия перехода от маховского отражения к регулярному. Выделение энергии на главном скачке приводит к увеличению высоты тройной точки, а также к маховскому отражению относительно слабых падающих скачков, которые в «обычных» условиях отражаются только регулярно. Обратный эффект может оказать поглощение энергии на главном скачке, которое возникает, например, при возбуждении колебательных степеней свободы или при диссоциации молекул высокотемпературного газа. Преобразование химического состава газовой смеси (математически выражаемое, например, в виде изменения показателя адиабаты) также оказывает свое влияние, хотя и менее существенное.

Смена типа отражения скачков уплотнения в установившихся сверхзвуковых течениях газа чаще всего описывается так называемым критерием фон Неймана. Согласно этому критерию, при маховском отражении образуются тройные конфигурации с главным скачком, отклоняющим поток в ту же сторону, что и падающий. При образовании стационарной маховской конфигурации высота прямого главного скачка стремится к нулю, а маховское отражение переходит в регулярное. Решения, соответствующие маховскому отражению более слабых скачков, физически неустойчивы и практически не реализуются.

В работе [3] проведён анализ условий смены типа отражения косых скачков уплотнения при условии, что на главном скачке, если он образуется, имеет место импульсное энерговыделение, а также изменение химического состава (показателя адиабаты) газа. С этой целью аналитически выведен и численно исследован аналог критерия фон Неймана для смены типа (регулярного или маховского) отражения косоугольного скачка уплотнения, если при маховском отражении присутствует импульсное выделение или поглощение энергии, а также изменение состава газовой смеси на сильном главном скачке («обобщенный критерий фон Неймана»). Оценено влияние перечисленных факторов на смещение параметров падающего скачка, соответствующих смене типа отражения, по сравнению с общеизвестным случаем течения без химических реакций и эффектов «реального газа».

В ходе исследования выявлено, что энерговыделение и увеличение показателя адиабаты заметно смещают критерий фон Неймана в сторону более слабых, а обратные явления – в сторону более сильных падающих скачков по сравнению с «классическим» случаем. Полученные аналитические соотношения качественно описывают смещение критерия фон Неймана в рамках модели стационарной детонации Чепмена-Жуге, но, возможно, подлежат численному анализу и уточнению с использованием более современных моделей газовой детонации.

## **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FZWF-2024-0003).

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Чернышов М.В., Савелова К.Э. Приближенно-аналитическая модель струйного течения с маховским отражением и импульсным энерговыделением на главном скачке // Авиационная техника. 2023. № 1. С. 49-60.*

2. *Chernyshov M.V., Savelova K.E. An Approximate Analytical Model of a Jet Flow with Mach Reflection and Pulsed Energy Supply at the Main Shock // Fluids. 2023. Vol. 8. Issue 4. Paper No. 132. 16 p.*
3. *Чернышов М.В., Лаптинская М.М. Обобщенный критерий фон Неймана для течений с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газовой смеси на маховском скачке уплотнения // Письма в Журнал технической физики. 2026. Т. 52. Вып. 1. С. 8-13.*

Чернышов Михаил Викторович, [chernyshov\\_mv@voenmeh.ru](mailto:chernyshov_mv@voenmeh.ru)



## СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ПОД БОЛЬШИМ УГЛОМ АТАКИ: ВИХРЕВЫЕ ЗОНЫ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

*И. А. Широков*  
*МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*  
[ivanshirokov@inbox.ru](mailto:ivanshirokov@inbox.ru)

Осесимметричная форма часто используется при конструировании различных летательных аппаратов, и изучение особенностей обтекания таких тел является важной задачей аэродинамики. Режим обтекания при больших углах атаки представляет отдельный интерес, поскольку картина течения газа может иметь нестационарный характер с появлением турбулентных зон и несимметричных вихрей. Это может приводить, в частности, к появлению поперечных сил, исследование которых является отдельной задачей. В сверхзвуковом случае обтекание под большими углами атаки сопровождается появлением сложной структуры ударных волн, которые влияют на расположение областей отрывных течений, на поверхностные тепловые потоки и на аэродинамические силы, действующие на тело.

Наряду с продувками моделей в аэродинамических трубах и теоретическими исследованиями на основе различных моделей, мощным средством исследования особенностей обтекания тел различной формы является трехмерное численное моделирование на основе полных уравнений газодинамики. Моделирование может требовать использования математических моделей, учитывающих те или иные особенности течения. В частности, моделирование течений с турбулентными зонами может проводиться с использованием метода крупных вихрей (LES) с введением различных вариантов турбулентной вязкости. Альтернативным подходом является квазигазодинамический (КГД) алгоритм, основанный на регуляризованных уравнениях Навье–Стокса: КГД уравнениях, дающий возможность проводить моделирование общих закономерностей картины обтекания и явлений нестационарности, в дозвуковых и сверхзвуковых вариантах [1, 2]. В настоящей работе КГД алгоритм применяется к моделированию сверхзвукового обтекания вязким газом осесимметричной стандартной модели НВ-2 [3] с числом Маха 1.5 и углом атаки  $29^\circ$ , число Рейнольдса  $Re_D = 2.3 \cdot 10^6$ . За основу взята постановка из работы [4], в которой изложены результаты продувок моделей НВ-2 в аэродинамической трубе. Методика моделирования аналогична методике, применяемой в [5].

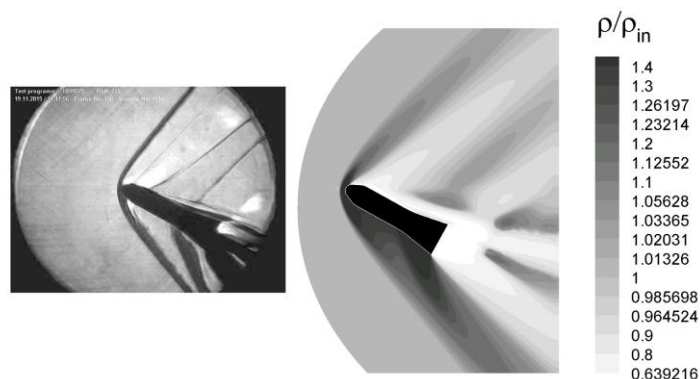


Рис. 1. Картины обтекания в сечении  $z=0$ : шлирен-изображение в эксперименте (слева), уровни плотности при моделировании (справа).

На рис. 1 приведены картины обтекания: экспериментальные данные из [4] (шлирен-изображения) и результаты моделирования (уровни безразмерной плотности). При сравнении экспериментальных и расчетных данных видно, что общий вид скачков уплотнения удовлетворительно разрешаются при моделировании.

На рис. 2–3 показаны уровни плотности и линии тока для различных моментов времени с разницей 0.014 с в сечениях  $z=0$  (рис. 2),  $x=0.4918$  м (рис. 3). Для разных моментов времени картина вихрей и уровней плотностей в донной области существенно различна. Также видна несимметричность как вихрей, так и распределения плотности.

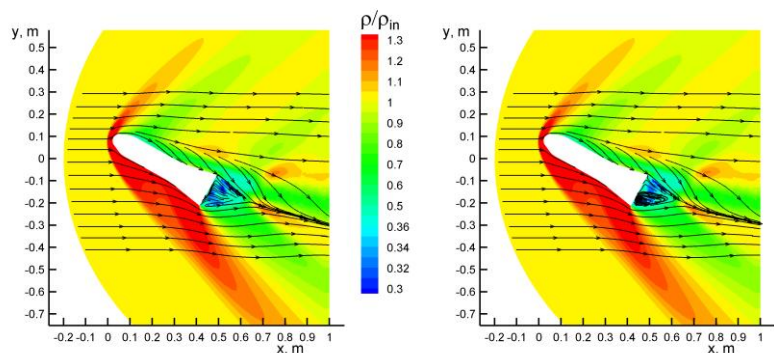


Рис. 2. Уровни плотности и линии тока для моментов времени, отличающихся на 0.014 с в сечении  $z=0$ .

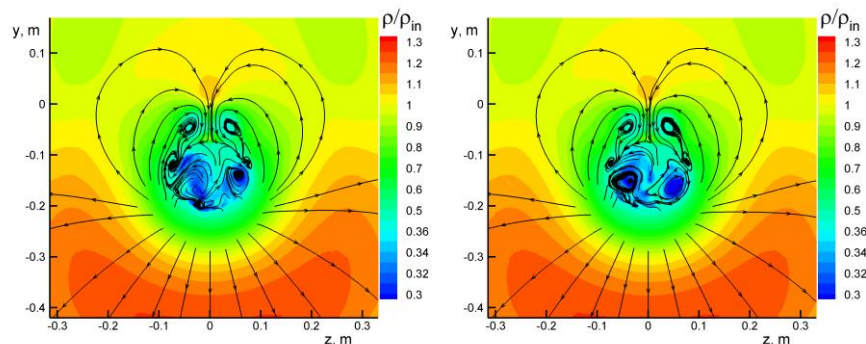


Рис. 3. Уровни плотности и линии тока для моментов времени, отличающихся на 0.014 с в сечении  $x=0.4918$  м.

На рис. 4 приведены линии тока в окрестности модели в двух ракурсах.

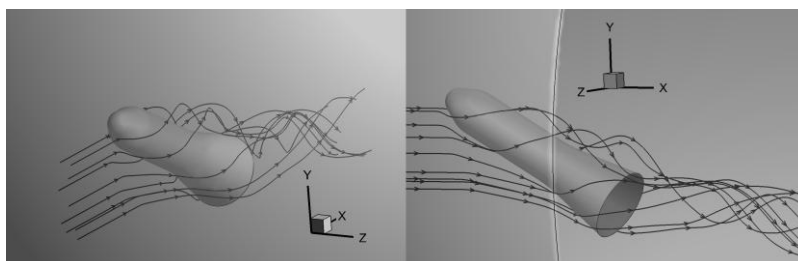


Рис. 4. Пространственные линии тока.

На рис. 5 приведено сравнение аэродинамических коэффициентов полной осевой силы  $C_{At}$ , носовой осевой силы  $C_{Af}$  и нормальной силы  $C_N$  с экспериментальными значениями из [4]. Увеличение номера варианта по оси абсцисс соответствует уменьшению величин искусственной вязкости в КГД алгоритме, при этом результаты расчетов становятся ближе к экспериментальным данным.

Можно сделать вывод, что моделирование сверхзвукового обтекания осесимметричного тела под большим углом атаки на основе КГД алгоритма позволяет разрешить общую структуру ударных волн вокруг тела, а также с достаточной точностью рассчитать величины аэродинамических коэффициентов, при этом уменьшение значений искусственной вязкости в КГД алгоритме увеличивает точность моделирования. Структура картины обтекания и вихревых зон качественно соответствуют результатам расчетов обтекания осесимметричной модели, приведенных в [6, 7].

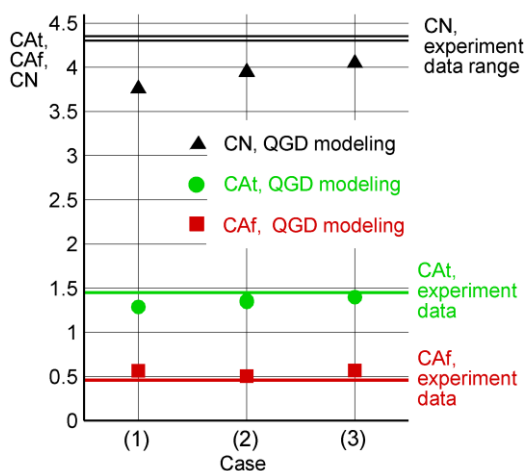


Рис. 5. Значения аэродинамических коэффициентов, моделирование (символы) и эксперимент (горизонтальные прямые).

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Автор выражает благодарность профессору Т. Г. Елизаровой за помощь в обсуждении рассмотренной темы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elizarova T. G.* Quasi-Gas Dynamic Equations. Dordrecht: Springer. 2009. IBSN 978-3-642-0029-5
2. *Елизарова Т. Г., Широков И. А.* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс. 2017. 136 с.

3. *Gray J. D.* Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2 // AEDC-TDR-64-137. 1964
4. *Vukovic Dj., Damljanovic D.* HB-2 high-velocity correlation model at high angles of attack in supersonic wind tunnel tests // Chinese Journal of Aeronautics. 2019. Vol. 32(7). P. 1565–1576.
5. *Широков И. А., Елизарова Т. Г.* Влияние характеристик тетраэдральных сеток на точность моделирования сверхзвукового обтекания осесимметричной модели // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2025. Т. 26. Вып. 1.
6. *Суржиков С. Т.* Численная интерпретация экспериментальных данных по аэродинамике модели HB-2 с использованием компьютерных кодов USTFEN и PERAT-3D // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2020. Т. 21. Вып. 1.
7. *Четверушкин Б. Н., Борисов В. Е., Давыдов А. А., Луцкий А. Е., Ханхасаева Я. В.* Моделирование тепловых потоков при обтекании баллистической модели на основе гиперболической квазигазодинамической системы // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 2. С. 41–54.

Широков Иван Анатольевич, ivanshirokov@inbox.ru



## КВАЗИДВУМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЕНЫ В ЯЧЕЙКЕ СКВОЗЬ КАНАЛЫ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

*Н. Д. Шмакова, А. А. Спицына\**

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
a.spitsyna2@g.nsu.ru*

Жидкие пены встречаются как в повседневной жизни и отраслях промышленности (например, продукты и технологии в пищевой, косметической и фармацевтической промышленности добыча руды, рекультивация почвы и нефтедобыча), так и в природе (морская пена, вспененная защитная оболочка некоторых личинок насекомых). Такое повсеместное применение связано с простотой создания пены – барбатирование жидкости газом. Гетерогенная структура пены приводит к сложному реологическому поведению. В зависимости от типа и параметров внешних воздействий могут одновременно проявляться упругие, пластические и вязкие свойства пены [1,2].

Стандартные реометры могут измерять только общие макроскопические параметры, такие как модули вязкоупругости. Они не способны уловить гетерогенный поток мягких аморфных материалов на мезоскопическом уровне, который возникает в результате перестройки микроструктурных элементов (смена соседей ячеек пены, событие T1). Этот аспект крайне важен для построения точных моделей. Ряд экспериментальных исследований был направлен на изучение реологии пены при обтекании препятствия в квазидвумерной постановке [3, 4]. Показано, что с высотой препятствия, либо с уменьшением эффективной жидкой фракции, увеличивается скорость за препятствием (эффект отрицательного следа).

В данной работе исследуется квазидвумерное течение пены в ячейке Хеле-Шоу при наличии препятствий. Ячейка представляет из себя две стеклянные пластины, разделенные миллиметровым зазором. С одного края к ячейке прикреплен резервуар, заполненный мыльным раствором. В резервуар через иголку диаметром 0.6 мм подается воздух с постоянным расходом 1 мл/с. Таким образом, средняя скорость потока и площадь ячеек пены постоянны. В качестве препятствий в ячейке созданы

каналы: пространства между двумя вытянутыми препятствиями из силиконового шнура диаметром 2 мм. Исследуются «каналы» трёх видов: сужающиеся, прямой, расширяющиеся. В экспериментах с прямыми «каналами» варьируются их длина и ширина. А в экспериментах с сужающимися и расширяющимися «каналами» - их длина, ширина входа и выхода. Над ячейкой расположена камера, которая фиксирует серию изображения с частотой 4 кадра в секунду. Полученные изображения бинаризируются и анализируются при помощи кросс-корреляционного алгоритма.

На Рис. 1 показана продольная компонента скорости за вычетом средней скорости потока при прохождении потоком пены сужающегося, прямого и расширяющегося канала. Скорость внутри расширяющегося канала уменьшается по гиперболическому закону, а на выходе наблюдается эффект отрицательного следа (Рис. 1а).

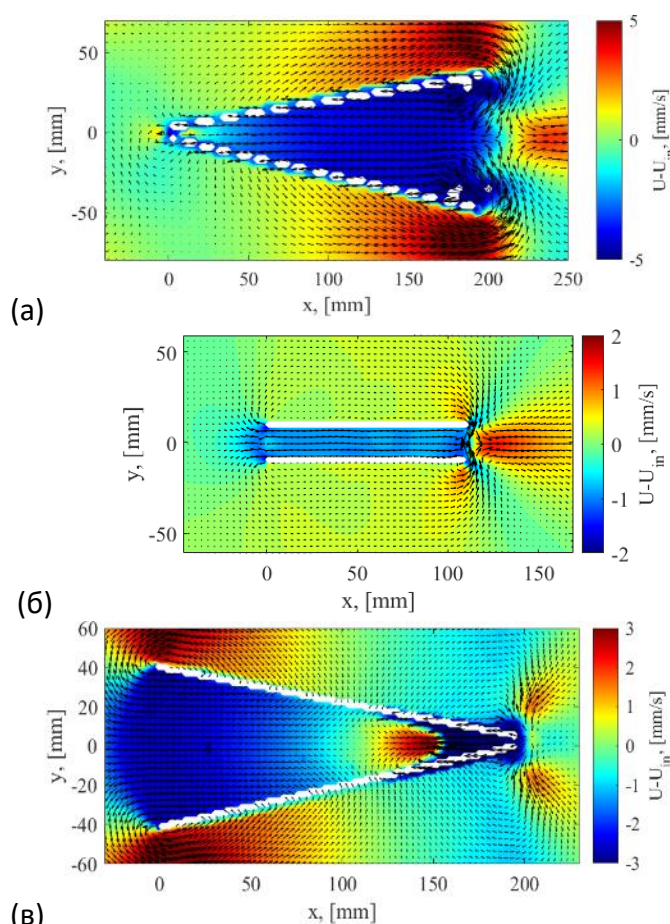


Рис.1 Продольная компонента и векторное поле скорости потока пены в ячейке Хеле-Шоу при наличии а) расширяющегося канала, ширина на входе 0,5 см, на выходе – 8 см; б) прямого канала шириной 2 см; в) сужающегося канала, ширина на входе 8 см, на выходе – 0,5 см.

Картина течения, наблюдаемого в прямом канале, качественно схожа с течением сквозь пронизываемое препятствие [3]: наблюдается замедление потока в «канале» и ускорение (эффект отрицательного следа) после прохождения канала (Рис. 1б). Наблюдается зависимость скорости от длины и ширины канала: чем уже канал, тем меньше скорость потока и тем более выражен эффект отрицательного следа. Для сужающегося канала наблюдается пик скорости в самом «канале», после чего резкое её снижение (Рис. 1в).



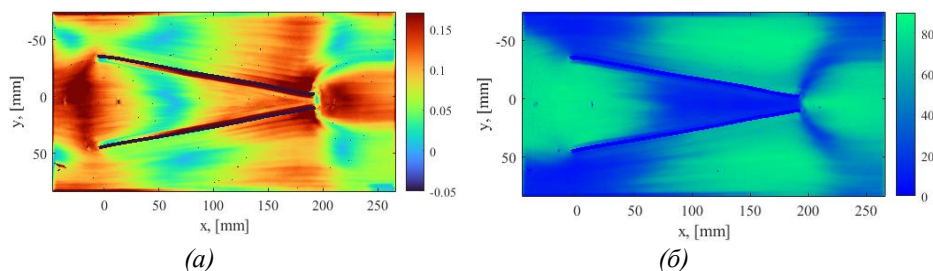


Рис.2. а) Карта деформации (анизотропии формы) потока пены в сужающемся канале, б) Модуль угла ориентации элементов потока пены в сужающемся канале

Используя алгоритм, описанный в [5], рассчитан тензор деформации количественно характеризующая анизотропию формы ячеек пены. Поле логарифма деформации представлено на Рис. 2а: чем выше значение, тем более вытянуты ячейки, что особенно выражено на входе и на выходе канала. На Рис. 3б представлено распределение среднего абсолютного значения ориентации ячейки: угла наклона большей оси эллипса, который можно вписать в ячейку пены, с горизонталью. Максимальные углы также наблюдаются на входе и на выходе канала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weaire D. The Physics of Foams. Oxford University Press, 1999
2. Hohler R. & Cohen-Addad S. Rheology of liquid foams // J. Phys. Condens. Matter 2005. V. 17. R1041–R1069.
3. Shmakova N.D., Chevalier T., Puisto A., Alava M., Raufast, C., Santucci S. Quasi-two-dimensional foam flow through and around a permeable obstacle // Phys. Rev. Fluids. 2020. V.5. 93301
4. Stennikova O., Shmakova N., Carrat J.-B., Ermanyuk E. Liquid Fraction Effect on Foam Flow through a Local Obstacle // Polymers. 2022. V. 14. 5307
5. Rose L. Écoulement de mousse en milieu confiné inhomogène // Matière Condensée [cond-mat]. Université de Lyon. 2022. 125.

Спицина Арина Артемовна, igil@hydro.nsc.ru



## ЗАКРУЧЕННЫЕ ПРИСТЕННЫЕ СТРУИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.С. Щеглов\*, А.М. Гайфуллин

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,  
Жуковский  
shcheglov@phystech.edu

## ВВЕДЕНИЕ

Исследованы струи, истекающие из отверстий диаметра  $d$  в затопленное пространство параллельно бесконечной твердой плоскости  $y = 0$ . Струи обладают в начальном



сечении осевым моментом импульса (закруткой) и выдуваются вдоль оси  $x$  с характерной линейной скоростью  $u_0$  и угловой  $\Omega$ . Интерес представляет наличие автомодельности течения в дальней области по переменной  $x$ .

## ЛАМИНАРНЫЕ СТРУИ

Численное моделирование показывает, что при умеренной закрутке течение в дальней области имеет характер, схожий со случаем незакрученной струи: существуют две подобласти течения, разделённые предельной линией тока (рисунок 1).

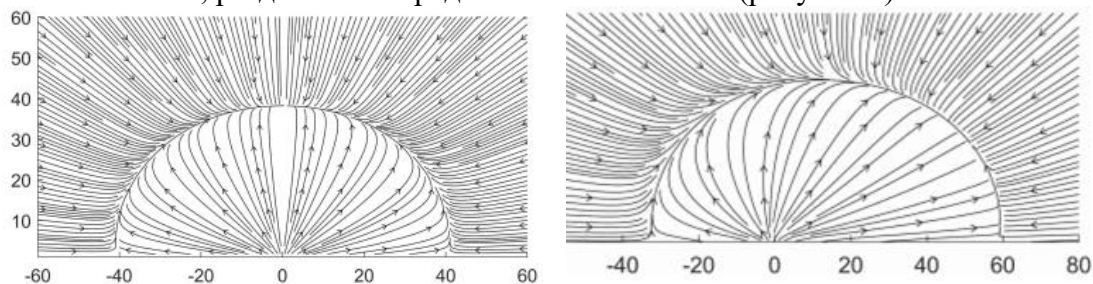


Рис. 1. Линии тока поперечного течения при  $Re = u_0 d / \nu = 154$  (плоскость  $x = 300d$ , горизонтальная ось –  $z/d$ , вертикальная –  $y/d$ ). Справа - для  $S = \Omega d / (4u_0) \approx 0.33$ , слева - для  $S = 0$

Определим кривую центра струи  $(x, y_c(x), z_c(x))$  как множество точек, в которых достигает максимума составляющая скорости, параллельная твёрдой плоскости в сечении  $x = \text{const}$ . При  $x \gg d$  проекция  $z_c \sim x \cdot \tan \theta$ , то есть за счёт приобретённого бокового импульса струя распространяется вдоль прямой, наклонённой к оси  $x$  (рисунок 2).

Кроме того, после перехода в систему координат, ось  $\tilde{x}$  которой направлена вдоль касательной к кривой  $z_c(x)$ , течение становится симметричным относительно  $\tilde{z} = 0$ . В новой системе координат приближённое решение в области  $x \gg d$  описывается теми же автомодельными зависимостями, что и в случае незакрученной струи [1].

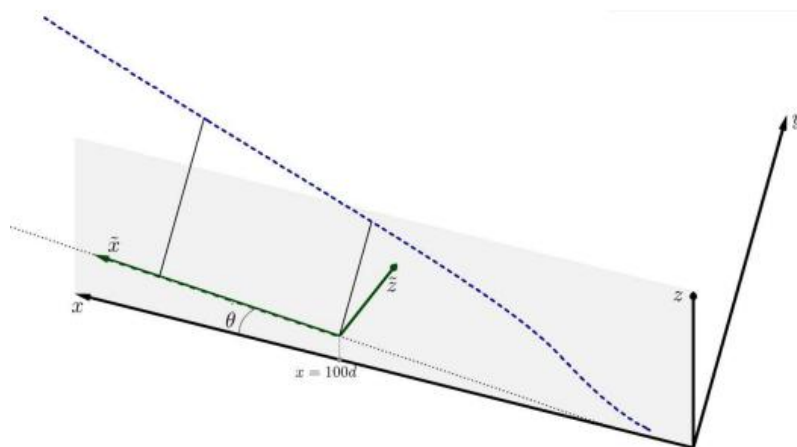


Рис. 2. Прямоугольные декартовы системы координат  $x, y, z$  и  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ ; синяя пунктирная линия – центр струи

Дальнейшее увеличение закрутки приводит к появлению в потоке областей рециркуляционного течения вблизи выходного сечения трубы, из которой выдувается струя. На рисунке 3 приведены линии тока в плоскости  $z = 0$  для  $S \approx 1.1$ .

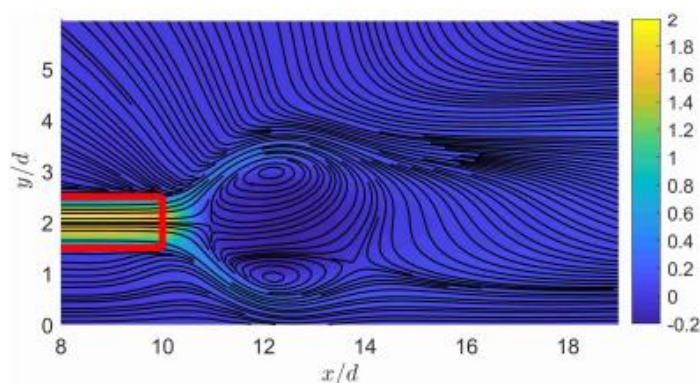


Рис. 3. Область рециркуляционного течения (вид сбоку); красным цветом выделен контур трубы

## ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУИ

Численное моделирование, проведенное методом крупных вихрей для умеренных значений закрутки  $S \approx 0.14$  и  $S \approx 0.26$  [2], показывает, что осредненное по Рейнольдсу течение выходит на автомодельный режим при  $x \approx 30d$ . Увеличение закрутки слабо влияет на рост вертикальной толщины струи  $y_{1/2}$ , тогда как скорость роста поперечной толщины  $dz_{1/2}/dx$  значительно увеличивается с ростом  $S$ .

Структуры течений в турбулентном и ламинарном случаях существенно различны. В турбулентной струе существенным является наличие пары продольных вихрей (рисунки 4, 5), приводящих к быстрому росту её поперечной толщины.

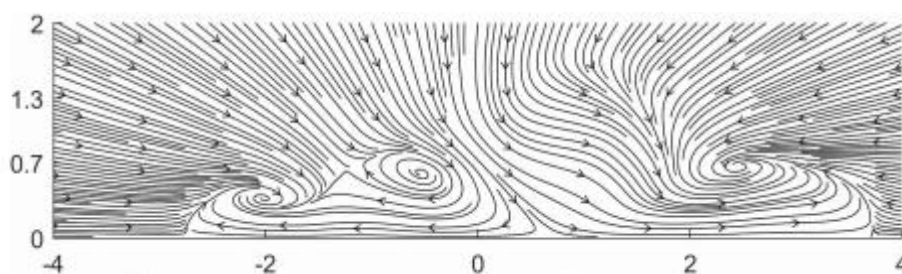


Рис. 4. Линии тока осреднённого поперечного течения в плоскости  $x = 5d$  ( $S \approx 0.26$ )

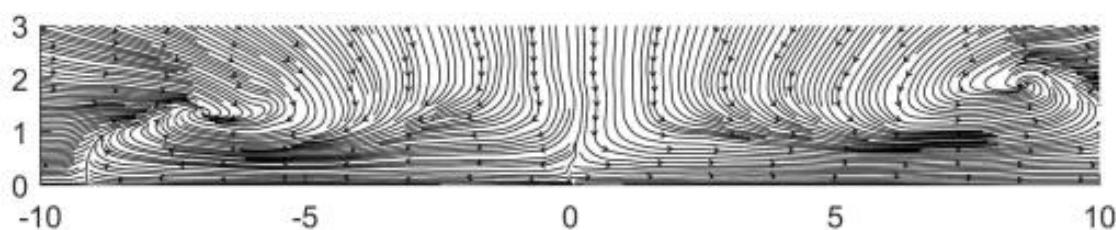


Рис. 5. Линии тока осреднённого поперечного течения в плоскости  $x = 15d$  ( $S \approx 0.26$ )

Этот механизм существенно отличается от механизма распространения ламинарной струи, в которой преобладает вязкая диффузия. Различаются и показатели автомодельности ( $k \approx 1.33$  в ламинарном случае и  $k \approx 1$  в турбулентном). Соответственно, различаются и законы роста толщин струй ( $y_{1/2} \sim x^{1.33}$ ,  $y_{1/2} \sim x$ ), и законы затухания скорости ( $u_{\max} \sim x^{-1.67}$ ,  $\langle u \rangle_{\max} \sim x^{-1}$ ).

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайфуллин А.М., Щеглов А.С.* Пристенные ламинарные закрученные струи // Изв. РАН МЖГ. 2023. № 6. С. 67-74.
2. *Gaifullin A. M., Shcheglov A. S.* Swirling Three-Dimensional Turbulent Wall Jet // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 5. P. 1616 – 1620

Гайфуллин Александр Маркович, amgaif@mail.ru

Щеглов Андрей Сергеевич, shcheglov@phystech.edu



## МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЖИГА КОКСОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ ИЗ СЛОЯ КАТАЛИЗАТОРА

*О.С. Язовцева*

*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,  
Саранск  
kurinaos@gmail.com*

В докладе представлена многомасштабная модель выжигания многокомпонентных коксовых отложений из слоя катализатора гидроочистки с учётом цилиндрической формы зерна, детальной схемы гетерогенных химических превращений, вынужденного конвективного переноса и диффузионных процессов в порах зерна. Модель является нелинейной начально-краевой задачей для системы уравнений смешанного типа [1].

Система включает в себя гиперболические уравнения диффузии-конвекции-реакции в осесимметричной постановке [2], уравнение для расчета коэффициента вынужденной конвекции, уравнение теплопроводности по скелету катализатора и уравнения тепломассопереноса для описания движения газа в слое катализатора [3].

Численный алгоритм построен на основе принципа расщепления по физическим процессам. Изменения концентраций веществ в ходе реакций рассчитаны трехстадийным методом Рунге-Кутты пятого порядка точности [4]. Для интегрирования уравнений диффузии-конвекции-реакции и теплопроводности записана трехслойная разностная схема [5]. Уравнение расчета коэффициента вынужденной конвекции решено методом характеристик [6]. Уравнения тепломассопереноса по длине слоя катализатора проинтегрированы с использованием схемы предиктор-корректор [7].

Построенный алгоритм верифицирован на экспериментальных данных, теоретических оценках и известных аналитических решениях. Анализ алгоритма выявил второй порядок точности (на измельчающихся сетках и путем сравнения с известными аналитическими решениями).

С использованием модели и алгоритма получены рекомендации по режимам динамического выжигания коксовых отложений из слоя катализатора гидрокрекинга при различных температурах и концентрациях реагентов [8, 9]. Рекомендации позволяют снизить разогрев катализатора путём диссипации тепловой волны, образующейся на входе в реактор, с сохранением эффективности удаления кокса.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-00242 «Разработка численных моделей для исследования нестационарных химических процессов в слое катализатора»).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матрос Ю.Ш.* Нестационарные процессы в каталитических реакторах. Новосибирск: Наука, 1982. 302 с.
2. *Язовцева О.С., Пескова Е.Е.* Математическое моделирование нестационарного химического процесса в зерне катализатора цилиндрической формы // Вычислительные методы и программирование. 2025. Т. 26, № 2. С. 129-139. DOI: 10.26089/NumMet.v26r209.
3. *Yazovtseva O.S.* Mathematical Modeling of Unsteady Combustion of Coke Sedimentations in a Catalyst Layer with Spherical Grains // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2025. Vol. 65, No. 6. P. 1441-1452. DOI: 10.1134/S0965542525700514.
4. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II. Springer-Verlag, 1996.
5. *Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A.* An Explicit Difference Scheme for a Nonlinear Heat Conduction Equation // Mathematical Models and Computer Simulations, 2023. V. 15. P. 529–538. DOI: 10.1134/S2070048223030031.
6. *LeVeque R.J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 558 с.
7. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Лаборатория знаний, 2015. 636 с.
8. *Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И.* Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М.: Химия, 1987. 144 с.
9. *Губайдуллин И.М.* Математическое моделирование динамических режимов окислительной регенерации катализаторов в аппаратах с неподвижным слоем: автореферат диссертации ... канд. физ.-мат. наук. Уфа: Институт нефтехимии и катализа АН РБ, 1996. 24 с.

Язовцева Ольга Сергеевна, kurinaos@gmail.com



## ГАЗОЖИДКОСТНЫЕ ПОДВОДНЫЕ СТРУИ: ЭКСПЕРИМЕНТЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

*С.Е. Якуш*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
yakush@ipmnet.ru*

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение газовых струй, истекающих в заполненное жидкостью пространство, представляет как фундаментальный интерес с точки зрения механики многофазных сред, так и практический интерес в связи с различными приложениями. Можно выделить следующие основные направления, в которых проводятся исследований течений такого типа:

- подводные движители реактивного типа (underwater propulsion) [1, 2],
- технологии очистки газа путем продувки через слой жидкости (scrubbing) [3–5],
- металлургия (воздушно-кислородное дутье) [6],
- аварийные выбросы газов при разгерметизации подводных трубопроводов [7, 8].

Решаемые задачи, объединенные наличием двух несмешивающихся фаз, разделенных межфазной поверхностью, могут значительно отличаться по характеристикам истечения (дозвуковое, звуковое, сверхзвуковое), направлению выброса газа (горизонтальное, вер-

тикальное, под углом к горизонту), наличием или отсутствием бокового сносящего течения, свойствам газа (неконденсируемый газ, пар жидкости, их смеси), термическим аспектам (изотермическое истечение, выброс горячего или холодного газа), масштабам задачи (микроструи, струи лабораторного и промышленного масштаба), глубине выброса и толщине слоя жидкости.

Анализ экспериментальных и расчетных работ по газожидкостным струям, возникающим при истечении газа в затопленное пространство, показывает, что характер течения на различных удалениях от сопла является качественно различным. Если на больших удалениях режим течения является пузырьковым, распределение газовой фазы по сечению струи близко к гауссову, то в ближней зоне выбрасываемый газ образует систему крупномасштабных пузырей, формирующихся у сопла, отрывающихся от него и взаимодействующих друг с другом. Характеристики течения в ближней зоне являются существенно неравномерными и нестационарными, что должно учитываться при формулировке математической модели для описания газожидкостной струи и ее воздействия на находящиеся вблизи сопла объекты. Более того, оценка точности и адекватности математических моделей применительно к описанию турбулентного многофазного течения в ближней зоне требует обязательной валидации на экспериментальных данных.

В данной работе представлен цикл экспериментальных и численных исследований развития вертикальной газожидкостной струи при истечении воздуха в заполненный водой бассейн. Изучалась как собственно газожидкостная струя, так и ее силовое воздействие на погруженные в поток тела простой геометрической формы (куб, цилиндрическая труба). Валидация проводилась путем сравнения экспериментальных данных и результатов трехмерных нестационарных расчетов, сравнивались геометрические характеристики газожидкостной струи, поля газосодержания и скорости, а также силы и моменты, действующие на погруженное тело.

## ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Исследования проводились на экспериментальной установке, представленной на рис. 1. Установка представляет собой бассейн внутренним размером  $1.5 \times 1.5 \times 2.0$  м, имеющий стальное основание и две прозрачные стенки. Бассейн оснащен системой фильтрации и очистки воды, для защиты от брызг по периметру расположен акриловый экран, имеющий с одной стороны две створки для загрузки образцов.

Тестовое тело располагается внутри жесткой платформы-штатива, каркас которой изготовлен из легкого алюминиевого профиля повышенной жесткости. Подача сжатого воздуха с заданным расходом осуществляется через сменный патрубок (сопло), установленный на основании платформы. Фиксация тела относительно подающего газ сопла осуществляется системой позиционеров, крепление к которым осуществляется через шестиосевой силомоментный датчик, позволяющий одновременно измерять три компоненты силы и три компоненты момента силы. Для визуализации движения водной среды в областях, не затронутых газожидкостной смесью, в воде создается плоская завеса из воздушных микропузырьков, создаваемых у дна бассейна. В ходе экспериментов производится видеосъемка на камеру Photron FASTCAM Nova S9 со скоростью 2000 кадров/сек. Получаемые в ходе эксперимента данные с силомоментного датчика передаются на устройство накопления и обработки информации на базе персонального компьютера. Видеозаписи с камеры поступают на другой компьютер для дальнейшей обработки.

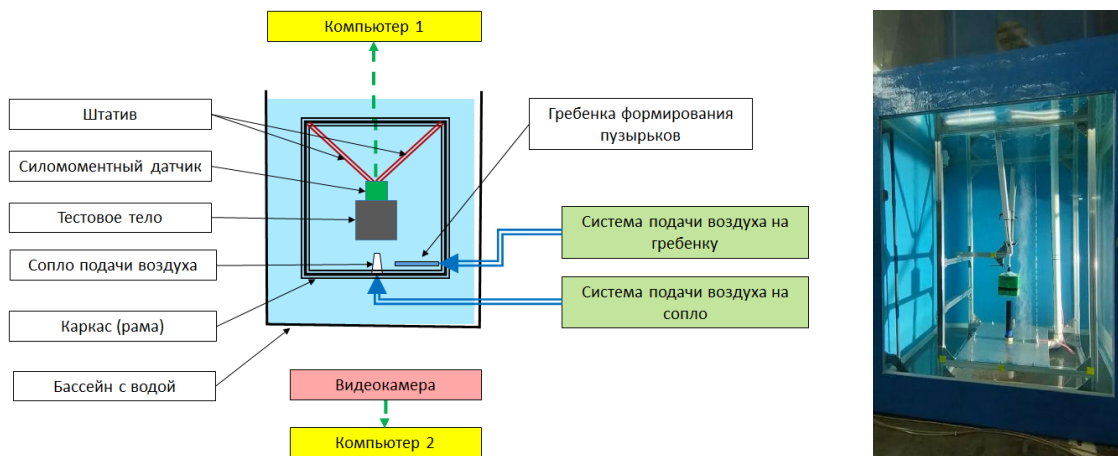


Рис. 1. Схема (слева) и фотография (справа) экспериментальной установки

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Описание газожидкостной струи осуществляется на основе совместного решения уравнений Навье-Стокса для газовой и жидкой фаз с учетом турбулентного характера течения. Для отслеживания межфазных границ применяется метод расчета объемной доли VOF (Volume-of-Fluid) [9], при этом как газовая, так и жидкая фазы считаются несжимаемыми. Для описания турбулентного течения используется метод крупных вихрей LES [10]. Совместное применение обеих моделей позволяет производить прямой численный расчет газовых образований (пузырей) и вихрей в жидкости и газе с масштабами, превышающими размер нескольких ячеек расчетной сетки, поэтому для получения корректных результатов необходимо использовать подробные (с размерами ячеек гораздо меньше размеров обтекаемого тела) сетки.

Аппроксимация уравнений неразрывности, импульса и объемной доли газовой фазы осуществляется методом конечного объема на трехмерных сетках с произвольными выпуклыми ячейками. Для получения согласованных полей скорости и давления применяется известный метод PISO. Численная реализация вычислительной модели осуществлена в программном пакете с открытым исходным кодом OpenFOAM, при этом применяется расчетный модуль interFoam [11]. Расчет действующих на погруженное тело сил и моментов производится интегрированием рассчитанных напряжений по поверхности тела.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В экспериментах и численных расчетах исследованы свободно развивающиеся вертикальные газожидкостные струи при истечении газа из сопла диаметром 2 и 5 мм, глубина бассейна, заполненного водой, во всех случаях составляла 1.5 м. Расход газа через подающий патрубок устанавливался таким, что средняя по сечению сопла линейная скорость истечения составляла 20 м/с и 10 м/с для малого и большого сопла, соответственно. В качестве тестового тела использовался куб с размером стороны 15 см.

Эксперименты и расчеты показали, что в ближней от сопла зоне течение является существенно нестационарным и носит выраженный периодический характер. Истечение газа сопровождается образованием и отрывом крупномасштабных газовых объемов (крупных пузырей), которые формируются вблизи сопла, срываются и движутся вверх, сменяя друг друга (рис. 2), при этом стационарная пузырьковая струя возникает лишь на большом удалении от сопла.



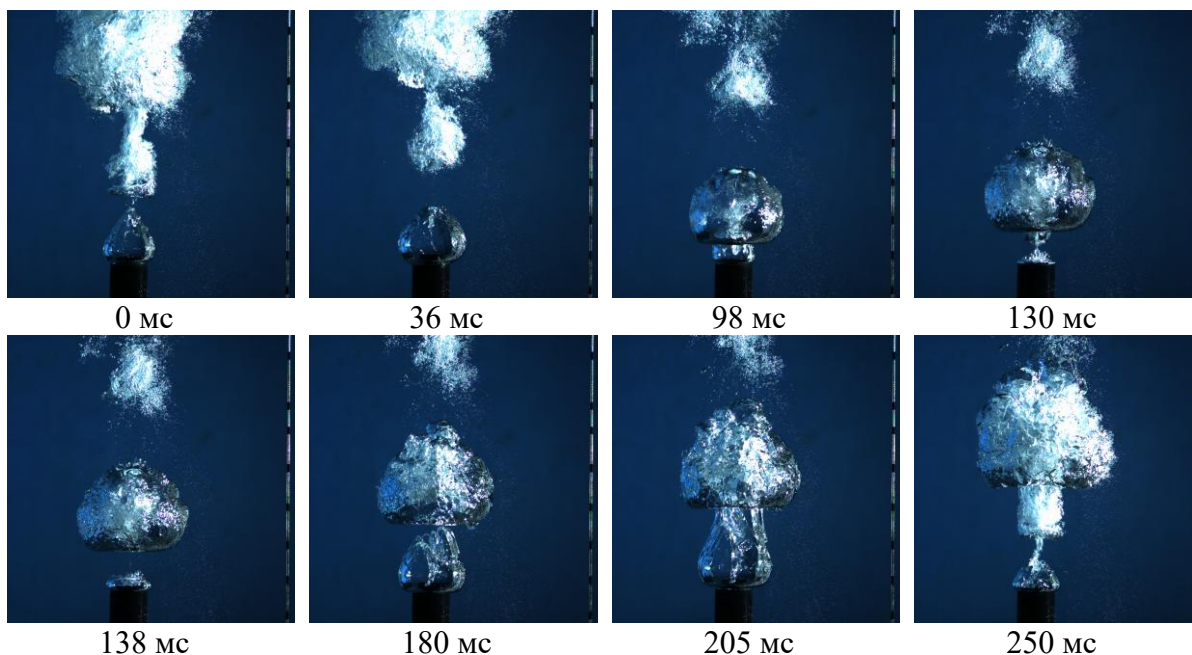


Рис. 2. Характерные стадии квазипериодического развития газовой струи в воде: выдувание пузыря (0–98 мс), отрыв пузыря (130, 138 мс), формирование вторичного пузыря (180–205 мс), отрыв слившихся пузырей (250 мс)

При помещении в струю тестового тела характер истечения газа из сопла остается периодическим, с формированием и отрывом от сопла дискретных газовых объемов. Зарождение, рост, отрыв и прохождение газовых пузырей порождает периодические вихревые течения в окружающей воде, причем распределения скорости оказываются сильно неравномерными, как по пространству, так и по времени (рис. 3). При этом в воде формируются концентрированные струйные течения, удар которых по поверхности тела приводит к возникновению кратковременных всплесков действующей силы.

Действующие на тело силы и моменты носят знакопеременный характер, причем амплитуда изменения в положительную и отрицательную сторону значительно превосходит среднее значение (рис. 4). Хорошо видны периодические кратковременные удары по телу, при этом главная частота воздействия составляет порядка 4–5 Гц.

На рис. 5а представлена диаграмма соответствия результатов расчета и экспериментальных данных для вертикальной силы, демонстрирующая хорошее согласование как по средним значениям, так и по амплитудам действующих сил. На рис. 5б показано сравнение для амплитудных значений силы, определенных по уровням 5% (нижнее значение) и 95% (верхнее значение) кумулятивной функции распределения соответствующего сигнала.

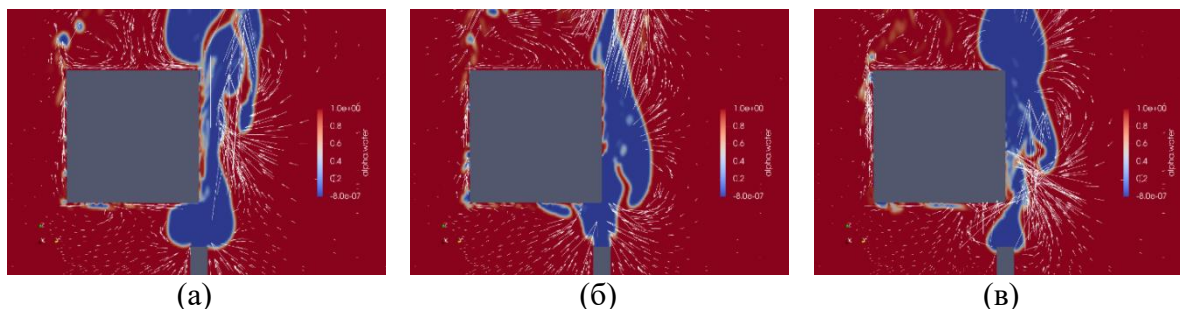


Рис. 3. Поле скорости воды при прохождении газовых пузырей вблизи куба: (а) формирование пузыря, (б) отрыв пузыря от устья; (в) подъем пузыря вдоль грани куба



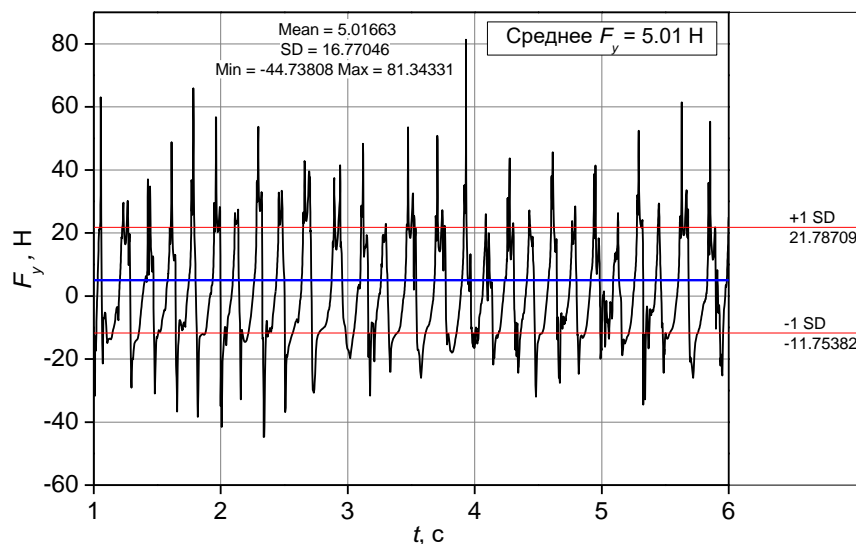
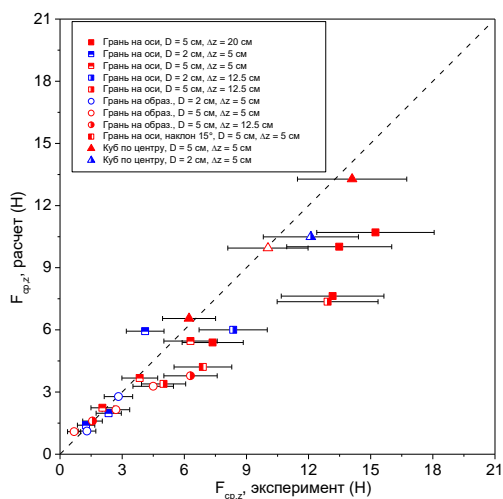
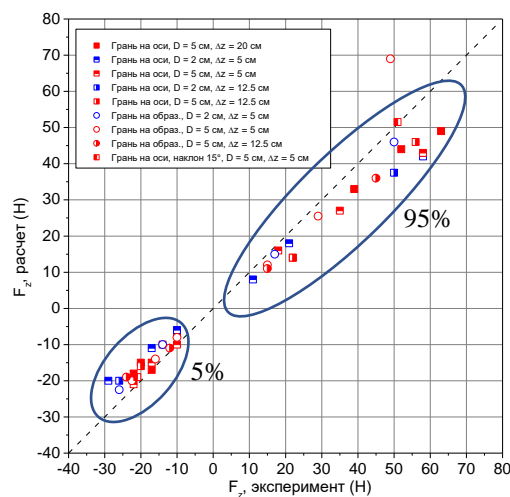


Рис. 4 Зависимость от времени горизонтальной компонент силы  $F_y$ , действующей на обтекаемое тело кубической формы. Горизонтальные линии: среднее значение силы среднеквадратичные отклонения



(а)



(б)

Рис. 5 Диаграммы соответствия для средней вертикальной силы  $F_z$  с диапазоном неопределенности (а), амплитудные значения силы  $F_z$  (б)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные эксперименты и численные расчеты позволили установить основные закономерности воздействия газожидкостной струи на погруженное в поток тело, находящееся в ближней зоне от сопла. Силы воздействия являются существенно нестационарными и квазипериодическими, что обусловлено особенностями формирующейся струи как совокупности дискретных газовых объемов. Полученные в расчетах силовые и моментные характеристики воздействия струи на тело кубической формы хорошо согласуются с экспериментов в части амплитуды воздействия, средних значений и главной частоты воздействия. Эти результаты свидетельствуют о том, что вычислительная модель двухфазного течения, включающая метод VOF для отслеживания межфазной границы и модель турбулентности LES, способна описывать данный класс течений с приемлемой для инженерных приложений точностью.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Автор выражает глубокую благодарность сотрудникам ИПМех РАН Н.С. Сивакову, В.А. Усанову, И.Л. Ермолову, Ф.М. Бельченко, М.М. Князькову, Г.Н. Нагайцеву, Е.В. Новикову, П.П. Острикову, Е.А. Семенову, А.Н. Суханову, М.К. Ермакову, И.А. Крюкову за вклад в решение экспериментальных и численных задач и проведение валидационных исследований в рамках настоящей работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gong Z., Lu C., Li J., Cao J.* The gas jet behavior in submerged Laval nozzle flow // *J. Hydrodyn.* 2017. V. 29 P. 1035–1043.
2. *Zhang X., Li S., Yang B., Wang N.* Flow structures of over-expanded supersonic gaseous jets for deep-water propulsion // *Ocean Eng.* 2020. V. 213. P. 107611.
3. *Abe Y., Fujiwara K., Saito S., Yuasa T., Kaneko A.* Bubble dynamics with aerosol during pool scrubbing // *Nucl. Eng. Des.* 2018. V. 337(12). P. 96–107.
4. *Liao Y., Li J., Lucas D.* Investigation on pool-scrubbing hydrodynamics with VOF interface-capturing method // *Nucl. Eng. Des.* 2022. V. 390. P. 111713.
5. *Li S., Apanasevich P., Lucas D., Liao Y.* Euler-Euler CFD simulation of high velocity gas injection at pool scrubbing conditions // *Exp. Comput. Multiph. Flow.* 2023. V. 5(4). P. 365–380.
6. *Zhao Y., Zhang X., Fan X., Wang H.* Analysis of atomization characteristics in submerged top-blowing with a swirling spray lance // *Physics of Fluids.* 2024. V. 36. P. 125172.
7. *Olsen J. E., Skjetne P.* Current understanding of subsea gas release: A review // *Can. J. Chem. Eng.* 2016. V. 94(2). P. 209–219.
8. *Olsen J. E., Skjetne P.* Summarizing an Eulerian–Lagrangian model for subsea gas release and comparing release of CO<sub>2</sub> with CH<sub>4</sub> // *Appl. Math. Model.* 2020. V. 79. P. 672–684.
9. *Tryggvason G., Scardovelli R., Zaleski S.* Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flow. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2011.
10. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012. 468 с.
11. OpenFOAM. The open source CFD toolbox. 2012. URL: <https://www.openfoam.com>

Якуш Сергей Евгеньевич, yakush@ipmnet.ru



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ СЛОТОВ НА ПЛАСТИНЕ НА РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

*А.А. Яцких\*, В.И. Лысенко, Б.В. Смородский, Л.В. Афанасьев,*

*Г.Л. Колосов, А.Д. Косинов*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск*

*yatskikh@itam.nsc.ru*

Турбулизация пограничного слоя при малом уровне возмущений набегающего потока связана с неустойчивостью течения. Одним из возможных способов влияния на устойчивость течения в пограничном слое является микропрофилирование поверхности, при которой изменение глобальной картины обтекания незначительно, тогда как течение

внутри пограничного слоя модифицируется. В исследованиях при высоких скоростях потока в последнее время уделяется особое внимание возможности использования слотов (канавок малой глубины) на положение ламинарно-турбулентного перехода. При сверхзвуковых скоростях, когда доминирующую роль в переходе к турбулентности играют возмущения первой моды Мэка, в экспериментах на пластине с продольными слотами была обнаружена стабилизация роста естественных и контролируемых пульсаций пограничного слоя [1, 2]. С помощью численного моделирования развития локализованных возмущений малой амплитуды было подтверждено стабилизирующее влияние продольных слотов на пограничный слой [3]. Также было обнаружено, что слоты приводят к смещению диапазона неустойчивых волн в область более высоких частот, по сравнению со случаем гладкой пластины. В работе [4] проведены расчеты по устойчивости пограничного слоя в рамках линейной теории, которые также показали стабилизацию роста малых возмущений слотами и смещение области частот неустойчивых волн.

На поздних стадиях ламинарно-турбулентного перехода, когда возмущения имеют немалую амплитуду, происходит их нелинейное развитие. В данной работе впервые представляются данные численного моделирования по влиянию продольных слотов на поверхности пластины на нелинейное развитие локализованных возмущений в пограничном слое при числе Маха потока  $M=2$ . Рассматривается нарастание возмущений малой и большой (нелинейное развитие) амплитуды как для случая пластины со слотами, так и для случая гладкой поверхности. Данные численного моделирования сравниваются с результатами, полученными по расчетам в рамках линейной теории устойчивости. Исследования проведены для продольных слотов глубиной близкой к толщине пограничного слоя ( $Re_h \approx 1800$ ), период расположения слотов в трансверсальном направлении в 5-10 раз меньше по сравнению с длиной волны неустойчивости.

Анализ данных для возмущений малой амплитуды подтвердил полученные ранее результаты – продольные слоты в рассматриваемой конфигурации приводят к увеличению частоты наиболее неустойчивых волн. В течении над слотами нарастание возмущений меньше по сравнению со случаем гладкой пластины. При увеличении амплитуды возмущения наблюдается значительное увеличение интенсивности роста возмущений вниз по потоку (рис.1). При этом, в пограничном слое над пластиной со слотами рост высокоамплитудных возмущений значительно меньше, по сравнению со случаем гладкой поверхности.

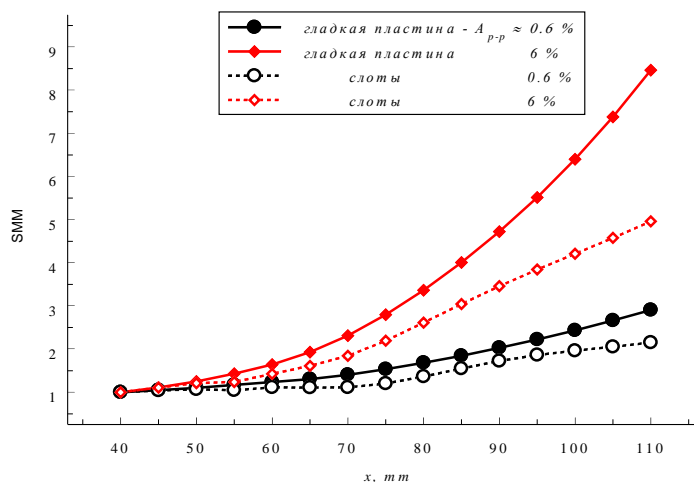


Рис. 1. Рост возмущений различной амплитуды в пограничном слое пластины на гладкой поверхности и с продольными слотами.

Проведен частотно-волновой анализ развития возмущений (рис. 2). Обнаружено, что как в пограничном слое над слотами, так и над гладкой поверхностью при малой амплитуде возмущений вдали от источника частотно-волновая структура соответствует результатам линейной теории – выделяется один пик, соответствующий волнам с наклоненным к потоку фронтом. При большой амплитуде в структуре возмущений наблюдается формирование второго пика с уменьшенной вдвое частотой и увеличенным волновым числом. Формирование такой структуры возмущения может быть объяснено взаимодействием волн по типу субгармонического резонанса. Это подтверждается проверкой на выполнение условий параметрического резонанса.

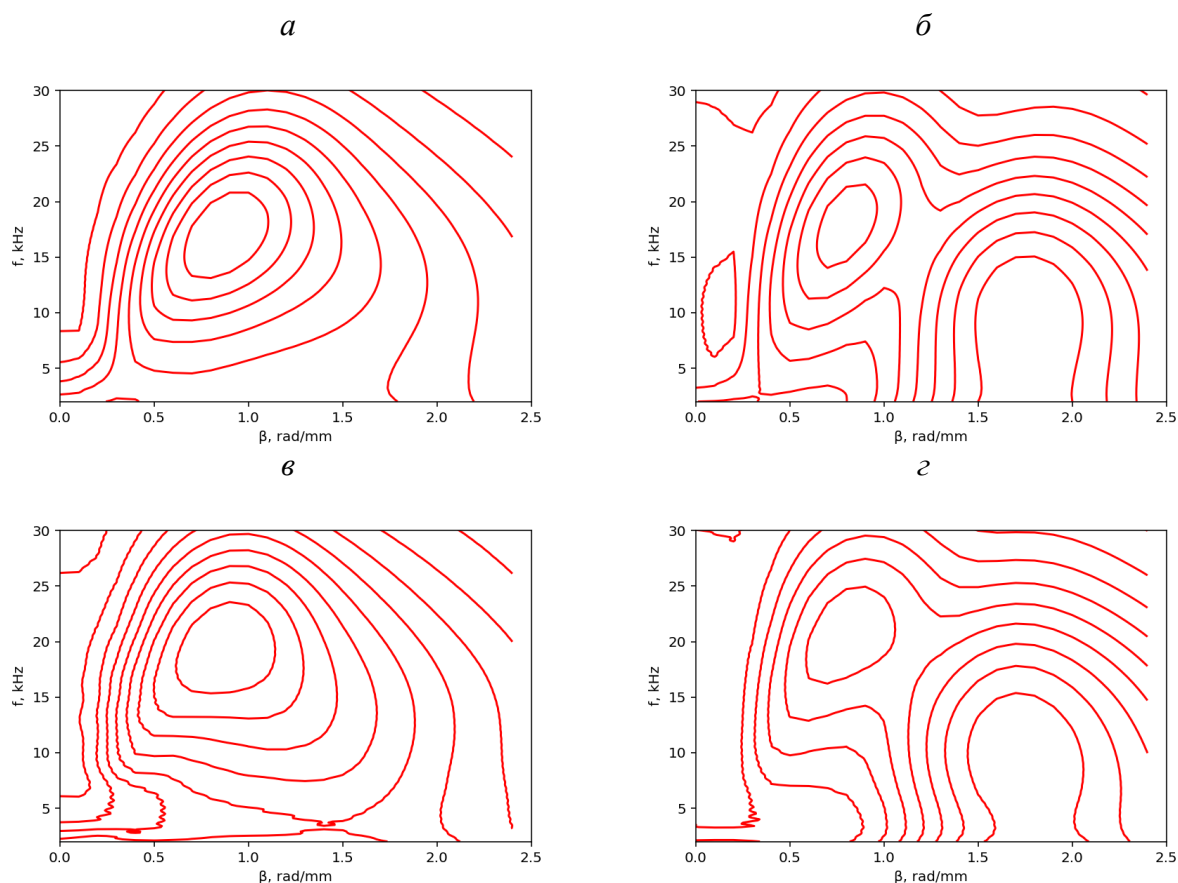


Рис. 2. Частотно-волновая структура возмущений.  
 а - гладкая пластина, амплитуда возмущения  $A_{p-p} \approx 0,6 \%$ ; б -  $A_{p-p} \approx 6 \%$ ;  
 в – пластина со слотами,  $A_{p-p} \approx 0,6 \%$ ; г -  $A_{p-p} \approx 6 \%$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ № 23-79-10167, <https://rscf.ru/project/23-79-10167/>). Работа выполнена на базе ЦКП «Механика» ИТПМ СО РАН. Численное моделирование проведено в программном комплексе FlowVision (ООО «ТЕСИС», <https://flowvision.ru/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лысенко В.И., Смородский Б.В., Косинов А.Д., Яцких А.А. Влияние глубины слотов на стабилизацию сверхзвукового пограничного слоя // Теплофизика и аэромеханика. 2024. Т. 31. №1. С. 77-85.

2. Лысенко В.И., Смородский Б.В., Косинов А.Д., Яцких А.А., Афанасьев Л.В. Стабилизация слотами контролируемых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. 2024. Т. 31. №6. С. 1071-1076.
3. Yatskikh A. A., Lysenko V. I., Smorodsky B. V., Afanasev L. V. Numerical simulation of the growth of localized disturbances in a supersonic boundary layer over a plate with longitudinal slots // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2025. Vol. 12. No. 1. P. 31–42.
4. Лысенко В.И., Смородский Б.В., Косинов А.Д., Яцких А.А., Колосов Г.Л., Юзенас А.Д. Расчет характеристик устойчивости сверхзвукового пограничного слоя на модели плоской пластины с продольными слотами различной глубины // Прикладная механика и техническая физика. 2025. Online First.

Яцких Алексей Анатольевич, yatskikh@itam.nsc.ru  
 Лысенко Владимир Иванович, vl@itam.nsc.ru  
 Смородский Борис Владимирович, smorodsk@itam.nsc.ru  
 Афанасьев Леонид Владимирович, l.afanasev@itam.nsc.ru  
 Колосов Глеб Леонидович, kolosov@itam.nsc.ru  
 Косинов Александр Дмитриевич, kosinov@itam.nsc.ru



## MULTIPHASE FLOW ANALYSIS OF FALLING DROPLETS AND BINARY COALESCENCE USING EXPERIMENTAL AND NUMERICAL APPROACHES

*B. Djoudar\*, M. Abdelouahab*

*Laboratoire de physique des matériaux et des fluides (LPMF), Département de Physique  
Énergétique, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf USTO-  
MB, Oran, Algeria  
bochra.djoudar@univ-usto.dz*

This study investigates the behavior of chlorobenzene droplets as they fall into water, combining experimental observations with numerical simulations. In the experimental stage, key parameters such as the time-dependent velocity  $u(t)$ , terminal velocity  $U_T$ , and equivalent diameter  $d_{eq}$  of each droplet were accurately measured. For the numerical approach, Computational Fluid Dynamics (CFD) methods were applied, employing the finite volume technique to solve the Navier–Stokes equations, along with the Volume of Fluid (VOF) model to capture the liquid–liquid interface. The experimental velocity–time data served as a basis for validating the simulations through curve fitting and regression analysis, revealing a strong correlation between the experimental and numerical outcomes. Additionally, the study explored the coalescence dynamics of two identical droplets positioned side by side in water. Results showed that a smaller initial distance between the droplets notably hastens the coalescence process, especially during direct, head-on collisions. Similarly, the results show that a decrease in water–chlorobenzene interfacial tension leads to a longer coalescence time, with the effect being much more pronounced at low interfacial tension values.

The motion of liquid droplets in multiphase systems plays a key role in many industrial and natural processes. Understanding droplet dynamics, particularly their deformation, descent, and coalescence help improve applications such as liquid–liquid extraction, combustion, CO<sub>2</sub> absorption, and meteorology. In this study, we investigate the free fall of isolated chlorobenzene and aniline droplets in still water, focusing on their velocity, terminal velocity, and equivalent

diameter. We also perform numerical simulations to analyze coalescence behavior in immiscible liquids. Numerical and experimental results for the fall of a single droplet are compared with the reference data of Krishna et al [1]. and with the theoretical predictions of Abdelouahab and Gatignol [2], showing strong agreement and confirming the reliability of our approach.

## EXPERIMENTAL SETUP

An experimental study was carried out to investigate the motion of droplets in a quiescent continuous medium. The test bench consisted of a rectangular glass tube, with tap water serving as the continuous phase. The dispersed phase was composed of droplets of chlorobenzene. The liquids were initially stored in a glass beaker and then drawn into a syringe. A syringe was connected to the upper end of a cylindrical glass tube, which was vertically immersed in the test section at a short distance below the water surface. The liquid was injected into the tube through the syringe, and by gradually applying pressure on the syringe plunger, the liquid accumulated at the lower tip of the tube until gravitational forces exceeded surface tension, leading in droplet detachment. This method enabled the reproducible formation of relatively large droplets. The droplet size was controlled by adjusting both the injected volume and the applied pressure. In addition, droplet production was also performed using a 100 mL graduated pipette, from which droplets were released directly into the water following the same principle. A camera recorded the motion of the droplets as they descended through the water, while a second camera captured still images. Data acquisition was carried out using a device connected to data processing software. For each droplet, key parameters such as terminal velocity ( $U_T$ ), equivalent diameter ( $d_{eq}$ ), and drop velocity ( $u(t)$ ) were determined.

## NUMERICAL SIMULATION

The numerical simulation of droplet motion was carried out using FLUENT version 16.2, an industrial computational fluid dynamics (CFD) software that includes various multi-phase models. Among these, the Volume of Fluid (VOF) model was employed to simulate the interaction between immiscible phases. In this study, the simulation focuses on the descent of a single liquid droplet in a cylindrical tube filled with water. To optimize computational efficiency, the problem was modeled in 2D, as shown in Fig. 1(a).

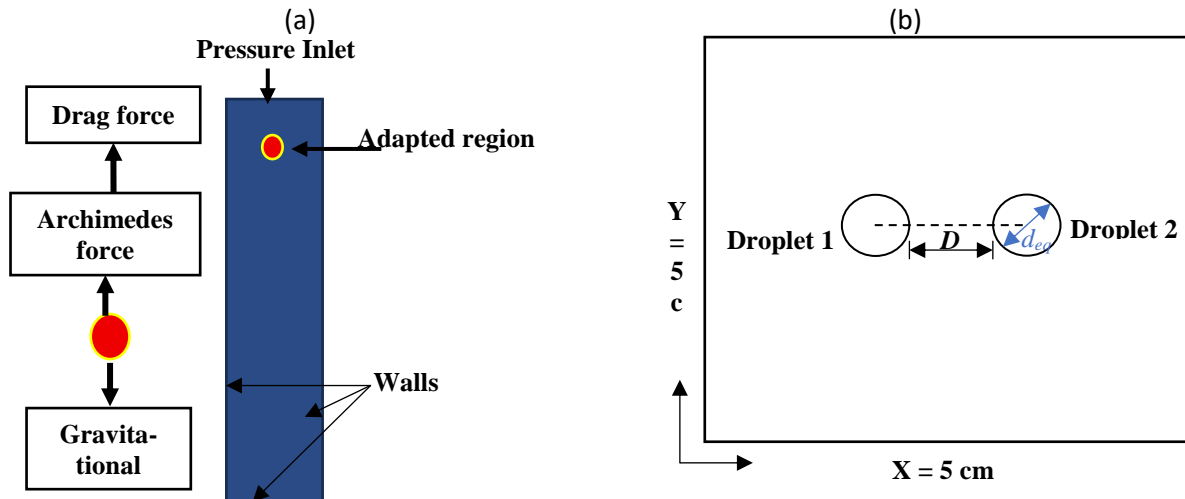


Fig. 1. (a) Boundary Conditions used in the Simulation and the Forces Acting on the Droplet, (b) Computational domain, Configuration with droplets aligned horizontally (head-on collision)

The simulation geometry consists of a simplified vertical cylinder, designed to represent the experimental setup while not exactly replicating its dimensions in order to reduce calculation time during iterations. The cylinder is 0.5 meters in height and 0.1 meters in diameter, open at the top and exposed to atmospheric pressure. Water is used as the continuous phase, while immiscible liquids serve as the dispersed phase (droplets). Fig. 2(b) illustrates a schematic of chlorobenzene liquid droplets immersed in water, used to simulate binary coalescence. The configuration consists of a pair of identical droplets, each with an equivalent diameter  $d_{eq}$ , initially at rest and falling freely under the influence of gravity. The computational domain is a two-dimensional (2D) rectangular region in the X–Y plane, with dimensions of 5 cm  $\times$  5 cm. In this arrangement, the droplets are positioned side by side, aligned along the same horizontal axis, and separated by a distance  $D$ . All outer boundaries of the domain are treated as stationary, no-slip walls.

## RESULTS AND DISCUSSION

The graphs in Fig.2 indicates the free-falling velocities of chlorobenzene droplets suspended in water for various droplet diameters, as obtained experimentally. As observed, the drop velocity increases until it reaches an average value around which it fluctuates. This average value corresponds to the terminal velocity  $U_T$ . It is equal to 9.50 cm/s for chlorobenzene with an equivalent diameter of  $d_{eq} = 0.44$  cm, and 6.14 cm/s for aniline with an equivalent diameter of  $d_{eq} = 0.71$  cm. All the velocity time curves for the two tested liquids exhibit the same overall trend. The observations are all similar for the various droplet sizes: the velocity is low and constant at the beginning for the first few seconds due to inertial resistance, then rapidly accelerates to reach a stable terminal velocity. this phenomenon confirms the classical balance between gravitational, drag, and buoyant forces, as noted in early work (Clift and al) [3]. One of the significant experimental results is positive relationship between terminal velocity and drop size. Larger drops have higher terminal velocities because gravitational force will dominate drag force. This creates a resulting acceleration that persists until force balance is achieved. The laboratory results thus validate the theoretical prediction that the behavior of the droplet is regulated by the interaction between these competing forces. The red curve represents the adjusted data obtained using the following equation:

$$u(t) = a(1 - e^{-bt}) \quad (3)$$

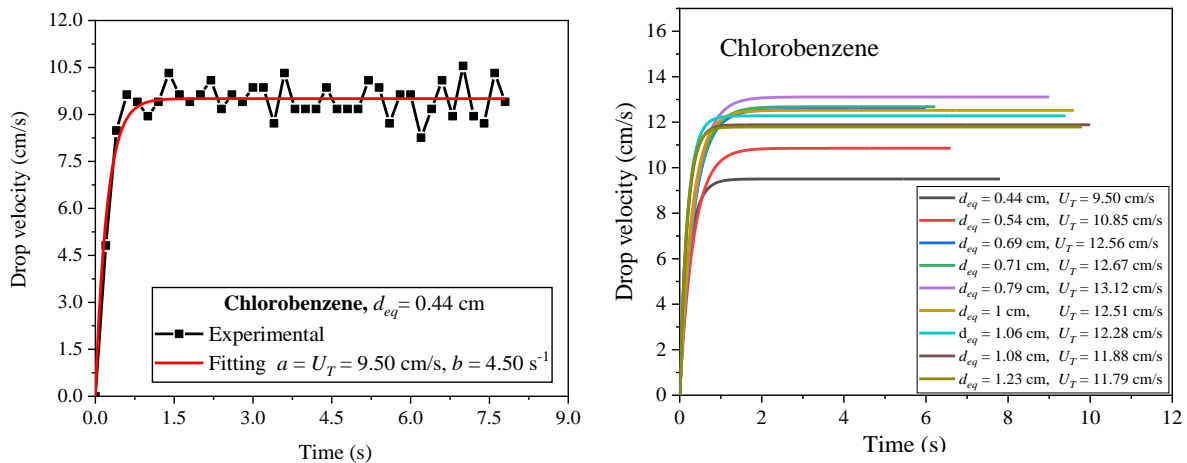


Fig. 2. Experimental Velocity for different droplet sizes of Chlorobenzene liquid.



The values of the parameter "*a*" are similar to those of the terminal velocity. The parameter "*b*" ( $s^{-1}$ ) represents the rate of evolution and is inversely proportional to a characteristic timescale. It governs the rate at which the droplet's velocity converges to its terminal value.

*Evolution of terminal velocity as a function of equivalent diameter.* As shown in Fig. 3, the numerical results obtained from simulations show good agreement with the experimental data, confirming the observed trend and supporting the identification of the optimal droplet size for maximum terminal velocity. It is observed that as the equivalent diameter increases, the terminal velocity also increases until it reaches a maximum (peak) value  $U_T = 13.12$  cm/s for a diameter of  $d_{eq} = 0.79$  cm in the case of chlorobenzene, and  $U_T = 6.14$  cm/s for  $d_{eq} = 0.71$  cm for aniline. Beyond this point, the terminal velocity decreases slightly and then stabilizes, regardless of further increases in droplet diameter. It is noteworthy that the droplet with an equivalent diameter of 0.79 cm for chlorobenzene and 0.71 cm for aniline neither the smallest nor the largest achieves the highest terminal velocity. This droplet can be considered the "optimal droplet" for which the terminal velocity is maximized. Among all the values presented, it is the only one that exhibits the highest terminal velocity. It can be concluded that, for each liquid studied, there is a unique droplet diameter for which the terminal velocity reaches its maximum value.

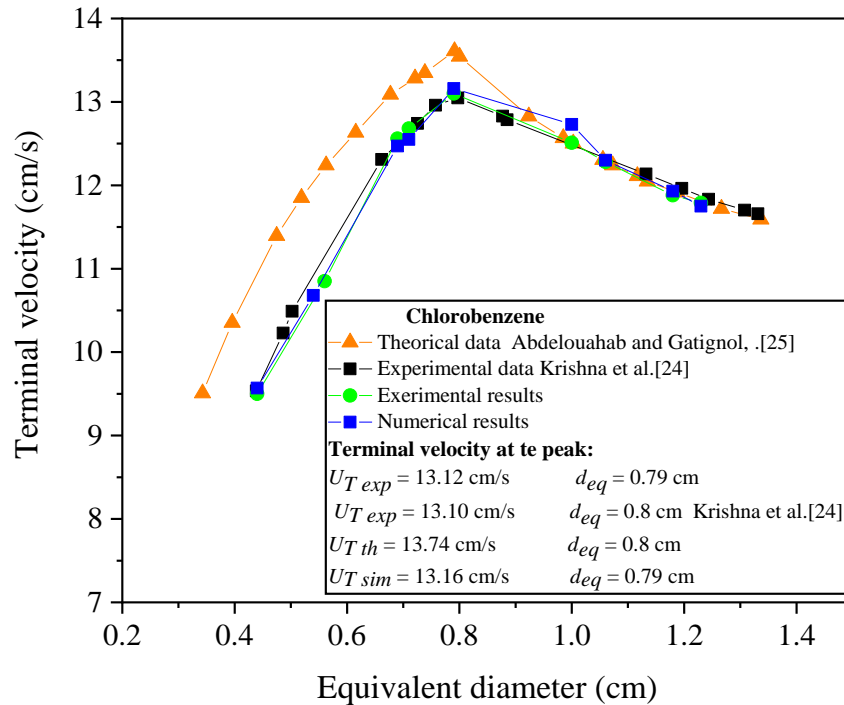


Fig. 3. Comparison between experimental results, theoretical predictions and numerical simulation of the terminal velocity of chlorobenzene and aniline droplets in water as a function of equivalent diameter.

#### Numerical results

In Fig. 4, the free-fall velocity profiles reveal the contrasting dynamic behaviors of small and large droplets. Smaller droplets ranging from (0.33 cm to 0.59 cm) exhibit smooth, stable curves with minimal oscillations. This stability arises primarily from two factors. First, surface tension dominates over inertial forces, allowing the droplets to maintain a near-spherical shape. Second, their limited size suppresses wake instability and vortex shedding, leading to steadier drag forces and more predictable terminal velocities. In contrast, larger droplets ranging from 0.69 cm to 1.23 cm show significant deviations and oscillations in their velocity profiles. This behavior is due to several interconnected phenomena. As droplet size increases, surface tension

becomes insufficient to counteract inertial forces, resulting in noticeable deformation into oblate or unstable shapes, Gupta and Kumar [4]. Additionally, larger droplets tend to generate unstable wakes and alternating vortex shedding, which cause periodic fluctuations in drag force and vertical velocity, Jing and Xu [5]. Overall, the comparison of the velocity curves clearly demonstrates that droplet dynamic stability decreases with increasing diameter, in agreement with established findings on unsteady droplet motion in viscous media.

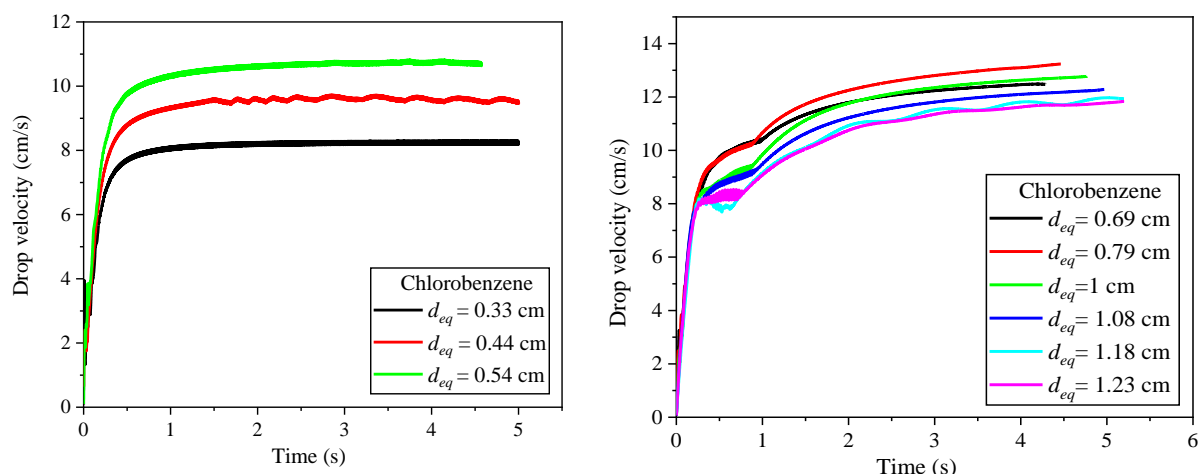


Fig. 4. Simulated velocity of a Chlorobenzene and Aniline droplet for small and big diameter.

*Effect of distance parameter on coalescence time.* The simulation results presented in Fig. 5 show that increasing the initial separation distance between droplets leads to a longer coalescence time. In the absence of initial velocity, the droplets move toward each other solely due to their mutual interactions. As the separation distance increases, the efficiency of the merging process decreases, resulting in a longer time required for coalescence. For all tested a critical separation distance was identified beyond which no coalescence occurs. This threshold is attributed to the repulsive forces generated by the drainage of the water film, which prevent the droplets from approaching closely enough to merge. The critical non-coalescence distances were found to be 2.2 mm. These limits are strongly influenced by the physicochemical properties of the studied systems particularly the viscosity of the organic liquid, the interfacial tension with water, and the hydrodynamic interactions within the continuous phase (water).

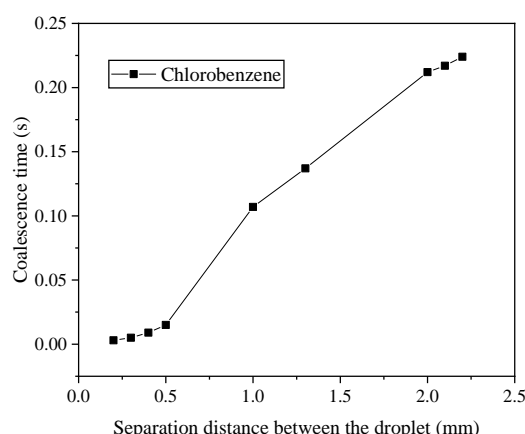


Fig. 5. Effect of the Initial Distance Between the liquids Droplets on the Coalescence Time

Table 1: Effect of the Initial Distance Between Chlorobenzene Droplets on the Coalescence Rate.

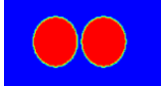
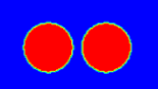
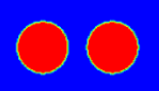
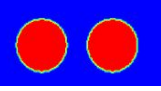
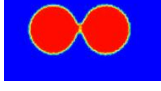
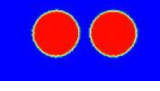
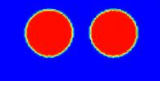
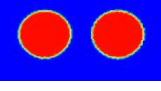
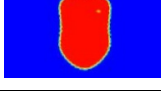
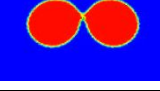
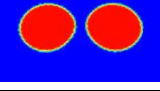
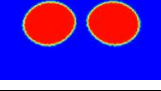
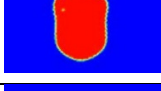

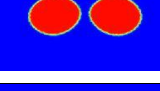
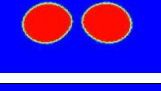
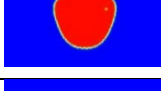
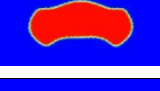
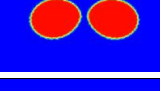
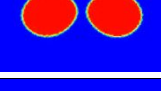
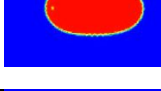
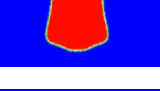



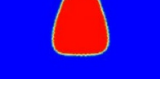
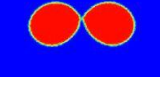
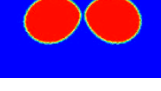
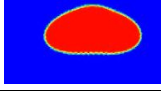
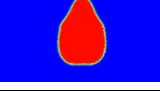
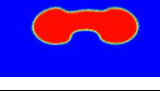
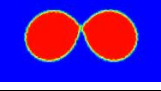
	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3	Simulation 4
$D$	0.5mm	1.3 mm	2 mm	2.2 mm
$t$				
0 s				
0.017 s				
0.136 s				
0.143 s				
0.158 s				
0.199 s				
0.212 s				
0.224 s				

Table 1 outlines the various stages of the binary coalescence process of chlorobenzene droplets, based on simulations performed with four different initial separation distances. The results shown in figures of table 1 indicate that increasing the initial distance between the droplets leads to a longer coalescence time. Since the droplets start from rest, they approach each other solely through mutual interactions. As the separation distance increases, these interactions become less effective, reducing the likelihood of successful merging and consequently extending the time required for coalescence to take place. It is observed that at 0.136 s, for  $D$  values of 2 mm and 2.2 mm, the moving droplet has not yet reached the other droplet, whereas for the two other  $D$  values, coalescence has already occurred at the same instant.

#### *The effect of water–chlorobenzene interfacial tension.*

In our case study, coalescence is analyzed for two chlorobenzene droplets immersed in still water, with no initial velocity. This configuration makes it possible to isolate the effect of interfacial tension on the coalescence dynamics, independently of the influence of gravity or external flow. The results show that decreasing the water–chlorobenzene interfacial tension increases the coalescence time, with this effect being more pronounced at low interfacial tension values and becoming less significant as the interfacial tension increases. This behavior can be explained by the fact that lower interfacial tension enhances droplet deformation and increases the stability of the liquid film separating the two interfaces before complete rupture. Five simulations were carried out to investigate the effects of water–chlorobenzene interfacial tension on coalescence time, using five different interfacial tension values: 32, 34, 36, 38, and

40 mN/m, for a system composed of two water droplets in stagnant oil, as illustrated in Fig. 2a. The simulation results are presented in Fig. 6. It is clearly observed that a decrease in interfacial tension potentially due to the presence of natural emulsifiers prolongs the coalescence time. However, this effect is much more pronounced at low interfacial tension values and becomes less significant at higher values.

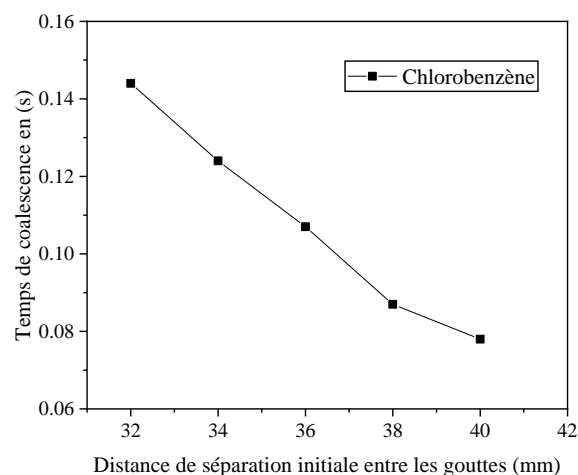


Figure 2: Effect of water–chlorobenzene interfacial tension on coalescence time.

Table 2: Effect of water– chlorobenzene interfacial tension sur la vitesse de coalescence.

	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3	Simulation 4	Simulation 5
$\sigma$ $t$	0.032 N/m	0.034 N/m	0.036 N/m	0.038 N/m	0.04 N/m
0 s					
0.077 s					
0.089 s					
0.107 s					
0.126 s					
0.145 s					

Table 2 displays the snapshots of the simulation results of five different values of water–oil interfacial tension. The influence of interfacial tension can be implied by comparing the coalescence progress at the same time (in each row of the table). For example, at the time of 0.107 s, with interfacial tension value of 0.036 N/m, the droplets have begun to coalesce, while with lower values of interfacial tension (0.032 and 0.034 N/m), they have not reached each other yet and with the larger values (0.038 and 0.04 N/m) they have passed the coalescence stage.

## CONCLUSION

The present study focuses on the motion of liquid droplets in water, with the objective of numerically determining the instantaneous velocity as a function of time and the terminal velocity as a function of the equivalent diameter. The following is a summary of the primary conclusions reached:

1. For isolated droplets, the comparison between simulation results, experimental data, and values reported in the literature demonstrated very good agreement.
2. The equivalent diameter increases, the terminal velocity also increases until it reaches a maximum (peak) value  $U_T=13.12$  cm/s for a diameter of  $d_{eq}=0.79$  cm in the case of chlorobenzene, and  $U_T=6.14$  cm/s for  $d_{eq}=0.71$  cm for aniline.
3. An increase in the initial separation distance between droplets results in a longer coalescence time. As the droplets begin from a stationary state, their movement toward one another is driven exclusively by mutual interactions. When this distance becomes larger, the strength and effectiveness of these interactions are significantly reduced, thereby decreasing the likelihood of successful coalescence and increasing the duration required for the droplets to merge.
4. Moreover, the results show that decreasing the water–chlorobenzene interfacial tension increases the coalescence time, with the effect being more pronounced at low interfacial tension values and becoming less significant as the interfacial tension increases. This behavior is attributed to the enhanced droplet deformation and the increased stability of the thin liquid film separating the two interfaces before rupture. This work remains a modest contribution to the understanding of droplet dynamics and the characterization of related physical parameters. It opens up several perspectives that would be valuable to explore in future research.

## REFERENCES

1. Krishna, P. M., Venkateswarlu, D., & Narasimhamurty, G. S. R. (1959). Fall of Liquid Drops in Water. Drag Coefficients, Peak Velocities, and Maximum Drop Sizes. *Journal of Chemical and Engineering Data*, 4(4), 340-343. <https://doi.org/10.1021/jc60004a016>
2. Abdelouahab, M., & Gatignol, R. (2011). A new approach for computation of drop terminal velocity in stagnant medium. *Chemical engineering science*, 66(8), 1523-1535. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2011.01.034>
3. Clift, R., Grace, J. R., & Weber, M. E. (2005). Bubbles, drops, and particles.
4. Gupta, A., & Kumar, R. (2010). Effect of geometry on droplet formation in the squeezing regime in a microfluidic T-junction. *Microfluidics and Nanofluidics*, 8(6), 799-812. DOI :10.1007/s10404-009-0513-7
5. Jing, L., & Xu, X. (2010). Direct numerical simulation of secondary breakup of liquid drops. *Chinese Journal of Aeronautics*, 23(2), 153-161. DOI : 10.1016/S1000-9361(09)60199-0

Bochra Djoudar, bochra.djoudar@univ-usto.dz  
 Mohamed Abdelouahab, Abdelouahab.moha@gmail.com

— ♦ ♦ ♦ —

# ALEXEEV HYDRODYNAMIC EQUATIONS AND ANALYTICAL SOLUTION FOR TURBULENT FLOW IN CHANNEL

*Alexander Fedoseyev*  
*Ultra Quantum Inc., Huntsville, Alabama, USA*  
*af@ultraquantum.com*

The Alexeev Hydrodynamic Equations were first derived in 1994 [1, 2]. These equations were subsequently used by Fedoseyev [3] to obtain an analytical solution for turbulent channel flow, describing the mean turbulent velocity as a superposition of parabolic and superexponential functions representing the laminar and turbulent flow components, respectively. The superposition coefficients were determined through a minimization principle based on minimum viscous dissipation [4]. The resulting analytical solutions showed excellent agreement with experimental measurements of turbulent flows for Reynolds numbers ranging from 2,970 to 970,000. An improved analytical solution for the turbulent transverse velocity component in turbulent channel flow was later presented in [5].

This study examines the key distinctions between the Alexeev Hydrodynamic Equations and the Navier-Stokes equations for both laminar and turbulent flows [6, 7], and presents an improved approximation of the analytical solution for turbulent channel flow [8], extending the validated range to Reynolds numbers as high as 35,000,000.

## REFERENCES

1. *Alexeev B.V.* 1994 The generalized Boltzmann equation, generalized hydrodynamic equations and their applications. *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A.* 349 (1994), 417-443.
2. *Alexeev B.V.* 2004 Generalized Boltzmann Physical Kinetics, Elsevier.
3. *Fedoseyev A.* 2023 Approximate Analytical Solution for Turbulent Flow in Channel, *J. Phys.: Conf. Ser.* 2675 012011.
4. *Fedoseyev A.* 2024 Minimization Principle for Analytical Solution of Turbulent Flow in Channel, *J. Phys.: Conf. Ser.* 2024; 2910 012012.
5. *Fedoseyev A.* 2024 Analytical Solution for Transverse Velocity of Turbulent Flow in Channel, *J. Phys.: Conf. Ser.* 2024; 2910 012013.
6. *Fedoseyev A.I., Alexeev, B.V.* 2010 Simulation of viscous flows with boundary layers within multiscale model using generalized hydrodynamics equations, *Procedia Computer Science*, 1, 665-672.
7. *Fedoseyev A., Alexeev B.V.* 2012 Generalized hydrodynamic equations for viscous flows-simulation versus experimental data, *American Institute of Physics, AIP CP* 1487, 241-247.
8. *Fedoseyev A.* 2025 Improved Analytical Solution for Turbulent Flow in Channel and Circular Pipe, 2025 *J. Phys.: Conf. Ser.* 3145 012011

Alexander Fedoseyev, af@ultraquantum.com

— ♦ ♦ ♦ —

# ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ F0141A С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

В.М. Зубарев

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
zubarev@ipmnet.ru

В работе численно моделировалось движение несжимаемой жидкости в пограничном слое на гладкой стенке плоского диффузора при сильном неблагоприятном градиенте давления (НГД) (эксперимент F0141A, Samuel–Joubert [1,2]). Приведены результаты расчетов безотрывного течения в пограничном слое с использованием пристеночной  $k$ – $\varepsilon$  модели турбулентности. Получено сравнение основных характеристик потока с результатами эксперимента и аналитическими решениями.

Система уравнений для осредненных по Рейнольдсу характеристик квазистационарного двумерного турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости дана в системе координат  $\xi, \zeta$ , нормально связанной с поверхностью тела [3,4]. Записана с учетом обычных предположений теории пограничного слоя и в пренебрежении членами с нормальными напряжениями Рейнольдса. Использовалась гипотеза Буссинеска с введением турбулентной вязкости  $\nu_t$ .

Для замыкания системы уравнений движения применяется  $k$ – $\varepsilon$  модель для низких чисел Рейнольдса. Турбулентная модель содержит два уравнения переноса турбулентной кинетической энергии  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ . Обзор модифицированных пристеночных  $k$ – $\varepsilon$  моделей турбулентности, которые используются при малых числах Рейнольдса и для описания течения вблизи жесткой границы сделан в работе [5].

В настоящих расчетах использовалась пристеночная модель турбулентности  $k$ – $\varepsilon$ , учитывающая влияние малых турбулентных чисел Рейнольдса и демпфирующий эффект стенки из работы [6]. Ранее модель успешно применялась в [3] при исследовании влияния параметров турбулентности набегающего потока на ламинарно–турбулентный переход в пограничном слое. В рамках этой модели, записанной для полной скорости диссипации  $\varepsilon$ , получается точное асимптотическое поведение основных турбулентных величин вблизи стенки.

Кинематический коэффициент турбулентной вязкости определяется второй формулой Прайдтля–Колмогорова с демпфирующей функцией  $f_\mu$

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Значения констант и функций модели турбулентности были следующими:

$$f_\mu = \left(1 + \frac{3.45}{\text{Re}_t^{1/2}}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\zeta^+}{70}\right)\right), \quad f_1 = 1,$$

$$f_2 = \left[1 - \frac{2}{9} \exp\left(-\left(\frac{\text{Re}_t}{6}\right)^2\right)\right] \left(1 - \exp\left(-\frac{\zeta^+}{5}\right)\right)^2,$$

$$\text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, \quad \zeta^+ = \frac{u \zeta}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{u_*}, \quad u_* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}},$$

$$(C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon) = (0.09; 1.4; 1.8; 1.4; 1.3)$$



На поверхности диффузора граничные условия таковы

$$\zeta = 0 : u = v = 0, k^w = 0, \varepsilon^w = \nu \partial^2 k / (\partial \zeta)^2 w$$

$$u_e \frac{\partial k_e}{\partial \zeta} = -\varepsilon_e,$$

$$u_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \zeta} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_e^2}{k_e}$$

На внешней границе пограничного слоя условия принимались такими

$$\zeta \rightarrow \infty : u \rightarrow u_e(\xi), k \rightarrow k_e(\xi), \varepsilon \rightarrow \varepsilon_e(\xi)$$

Функции  $k_e(\xi)$ ,  $\varepsilon_e(\xi)$  находятся после расчета из системы уравнений для невязкой жидкости, где  $u_e(\xi) \neq 0$

### ДАННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В эксперименте наблюдается безотрывное плоское течение в пограничном слое, развивающееся на гладкой стенке диффузора под действием сильного положительного НГД. Действительно на всем протяжении измерений  $dp/d\xi > 0$ , и почти всюду  $d^2p/(d\xi)^2 > 0$ . Определяющими параметрами при расчетах были:  $D = 1$  м (как в эксперименте), модуль скорости потока в бесконечности  $V_\infty = 0.2226 \cdot 10^2$  м/с, число Рейнольдса в входном сечении  $Re_\infty = V_\infty D / \nu = 1.76 \cdot 10^6$ . Измерения проводились в рабочей области диффузора от 1.04 м до 3.40 м. Начальные данные взяты из эксперимента:

- 1) Начальный профиль средней скорости  $u_0(\zeta)$  при  $\zeta = 1.04$  м, (приводится на рис. 1 в координатах закона стенки) измерялся в 201 точке. Он интерполирован в работе из профилей при  $\zeta = 0.855$  м и 1.16 м.
- 2) Профиль скорости диссипации кинетической энергии турбулентности при  $\zeta = 1.04$  м, приводится в 201 точке. Вязкая диссипация кинетической энергии жидкости вычислялась из условия локального равновесия.
- 3) Профиль кинетической энергии турбулентности вычислялся по результатам измерений среднеквадратичных пульсаций:  $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ ,  $\sqrt{\langle w'^2 \rangle}$ ,  $\sqrt{\langle v'^2 \rangle}$ , которые получены в 201 точке поперек слоя.
- 4) Скорость на внешней границе пограничного слоя  $u_e(\zeta)$  и давление  $p(\zeta)$  даны в 101 точке вдоль потока.
- 5) Измерения проводились в различных сечениях вниз по потоку при  $\zeta = 0.855$  м, 1.04 м, 1.10 м, 1.16 м, 1.44 м, 1.76 м, 1.79 м, 2.10 м, 2.26 м, 2.38 м, 2.40 м, 2.56 м, 2.72 м, 2.87 м, 2.89 м, 3.04 м, 3.39 м, 3.40 м.

### РИСУНКИ

На рис.1 даны профили средней скорости  $u^+(\zeta^+)$  в переменных закона стенки в пяти сечениях пограничного слоя при  $\zeta = 1.04$  м, 2.26 м; 2.72 м; 3.04 м; 3.40 м. Здесь же приведены для сравнения линейная зависимость  $u^+ = \zeta^+$ , универсальный логарифмический закон (формула Клаузера для плоской пластины) :  $u^+ = 2.5 \ln(\zeta^+) + 5.1$  и экспериментальные точки (помечены красными кружочками).

Видно, что средняя скорость в пограничном слое с сильным градиентом давления не соответствуют классическому логарифмическому закону Клаузера.

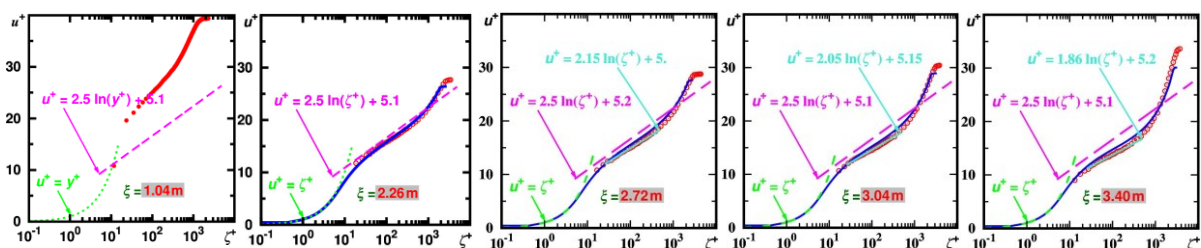


Рис. 1. Профиль продольной компоненты средней скорости  $u^+(\zeta^+)$  в переменных закона стенки при  $\xi = 1.04$  м, 2.26 м; 2.72 м; 3.04 м; 3.40 м. Расчет – синие кривые, эксперимент красные кружочки. Приведены новые логарифмические законы для скорости  $u^+(\zeta^+)$ , отмечены салатовым цветом.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Эксперимент F0141A взят из AFOSR–STANFORD 1980–81 базовой библиотеки измерений турбулентных течений (Collaborative Testing of Turbulence Models), проводился в диффузоре с рабочей секцией шириной 1 м и высотой 0.36 м с прямой гладкой стенкой [1,2], где создавался сильно увеличивающийся НГД. Измерения осуществлялись в диапазоне от 0.8 м до 3.8 м. В эксперименте F0141A отрыва от стенок диффузора не происходит, течение контролируется и остается двухмерным

В работе численно изучено течение в пограничном слое несжимаемой жидкости на плоской, непроницаемой поверхности диффузора при наличии сильного положительного градиента давления  $dp/d\xi > 0$ . Представленные результаты показывают, что использование пристеночной низкорейнольдсовой  $k$ – $\varepsilon$  модели турбулентности (полученной для полной скорости диссипации энергии турбулентности) позволило получить численные результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. В случае значительного положительного градиента давления наблюдаются серьезные изменения профиля средней скорости. Универсальный логарифмический закон (формула Клаузера для плоской пластины  $u^+ = 2.5 \ln(\zeta^+) + 5.1$ , константа Кармана  $\kappa = 0.4$ ) изменяется с ростом градиента давления. В экспериментальной работе [7] также получено, что профиль скорости  $u^+$  в логарифмической области смещается ниже классического закона логарифма в пограничных слоях с увеличивающимся НГД. В работе [8] проведено сравнение эксперимента и результатов прямого численного моделирования (DNS) турбулентного пограничного слоя вдоль плоской пластины при том же числе Рейнольдса  $Re_\theta < 1600$ . Согласно моделированию профиль  $u^+$  в буферной зоне и в логарифмической области смещается вверх при благоприятном градиенте давления и вниз при неблагоприятном градиенте.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме госзадания № 124012500440-9.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Samuel A.E., Joubert P.N. The 1980–81 AFOSR HTTM Stanford Conference on Complex Turbulent Flows: Comparison of Computation and Experiment (S.J. Kline, B.J. Cantwell, G.M. Lilley, eds.). Vol. 1. Proc. of the 1980 Conference Stanford Univ., Stanford, California, Sept. 3–6, 1980. Mech. Eng. Dept. Stanford University. 1981. Tech. Rep. AFOSR TR 83–1001. Pp. 259–261.
2. Samuel A.E., Joubert P.N. A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 66. Pt 3. P. 481–505. DOI:10.1017/S0022112074000322.

3. *Зубарев В.М.* Влияние параметров сильно турбулизированного потока жидкости на пристенные переходные течения в пограничном слое // Уч. зап. Казан. ун. Сер. Физ.-мат. науки. Изд. Казанский (Приволжский) фед. унив. (Казань), 2020. Т. 162. № 1. С. 38–51. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.1.38-51.
4. *Зубарев В.М.* Численное моделирование турбулентного несжимаемого течения с увеличивающимся положительным градиентом давления // ИФЖ. 2019. Т. 92. № 3. С. 654–663.
5. *Пейтел В.К., Роду Р., Шойерер Г.* Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса. Обзор // Аэрокосмич. техн. 1986. № 2. С. 183–197.
6. *Myong H.K., Kasagi N.* Prediction of anisotropy of the near wall turbulence with anisotropic low Reynolds number  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1990. Vol. 112. No. 12. P. 521–524. DOI: 10.1115/1.2909437.
7. *Nagano Y., Tsuj T., Houra T.* Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient // Int. J. Heat and Fluid Flow. 1998. Vol. 19. P. 563–572. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10013-9
8. *Spalart P.R., Watmuff J.H.* Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 249. P. 337–371. DOI: 10.1017/S002211209300120X.

Зубарев Вячеслав Михайлович, zubarev@ipmnet.ru



## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Агеев А.И., Осипцов А.Н., Смирнов К.В.</i> Гидравлические прыжки в пленочных течениях на супергидрофобных поверхностях .....	6
<i>Аллилуева А.И.</i> Коротковолновые асимптотики для волнового уравнения с локализованной неоднородностью .....	9
<i>Ананич А.Н., Краков М.С.</i> Управление вынужденной конвекцией в магнитной жидкости в плоском канале с помощью индуцированного магнитного поля .....	10
<i>Андросенко В.Н., Котов М.А., Соловьев Н.Г., Торчик М.В., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю.</i> Стабилизация импульсно-периодического лазерного пробоя в скрещенных лучах .....	13
<i>Ахметов А.Т., Гималтдинов И.К., Мухаметзянов А.Ф., Гизатуллин Р.Ф.</i> Особенности прохождения последовательности ударно-волновых импульсов в песке .....	16
<i>Ашуров Д.А.</i> Отклик затопленной струи на распределенное гармоническое воздействие .....	19
<i>Байдулов В.Г.</i> Моделирование движения стаи рыб одиночным движущимся источником.....	21
<i>Белоножко Д.Ф.</i> О реализации условий максимального демпфирования капиллярно-гравитационных волн пленкой ПАВ.....	24
<i>Бельченко Ф.М., Князьков М.М., Нагайцев Г.Н., Остриков П.П., Семенов Е.А., Суханов А.Н.</i> Исследования вакуумного захватного устройства, используемого в роботах вертикального перемещения при работе в водной среде.....	26
<i>Бердюгин Д.А., Листратов Я.И.</i> Высокоамплитудные пульсации температуры ртути в круглой трубе при больших тепловых нагрузках в сильных магнитных полях .....	29
<i>Булатов В.В.</i> Линейные волновые возмущения на границе ледяного покрова и однородной жидкости конечной глубины.....	32
<i>Булатов В.В.</i> Внутренние гравитационные волны в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями: модовая структура решений.....	36
<i>Булатов В.В.</i> Внутренние гравитационные волны в стратифицированной вязкой среде со сдвиговыми течениями при критических режимах генерации.....	39
<i>Буров Н.А.</i> Моделирование растекания капли на поверхности с помощью системы фазового поля.....	42
<i>Верезуб Н.А., Гандилян Д.В., Лисовенко Д.С., Пантюшов В.В., Простомолотов А.И.</i> Волновой кровотока в аорте с аневризмой.....	45
<i>Вин Ко Ко, Темнов А.Н.</i> Об устойчивости нелинейных колебаний механической системы с двумя жидкостями в различных случаях движения твердого тела .....	48
<i>Гайдуков Р.К.</i> О критерии отрыва пограничного слоя при обтекании малых неровностей в рамках двухпалубной модели .....	51
<i>Гандилян Д.В., Лисовенко Д.С.</i> Влияние волнового кровотока на деформацию аорты с аневризмой .....	55
<i>Герасимов В.В., Зацепин А.Г.</i> Лабораторное исследование возникновения ступенчатой структуры в стратифицированной жидкости под влиянием однородного механического перемешивания .....	57
<i>Демченко Я.В.</i> Влияние длины цилиндра на крутильные аэроупругие колебания.....	59
<i>Дмитренко А.В., Зинченко Д.В., Белов Д.А., Зуброва Д.И., Пенюшкин Н.О., Конюхов А.В., Челмакин А.В.</i> Расчет характеристик течения азеотропных теплоносителей на основе стохастической теории турбулентности.....	61
<i>Дмитренко А.В., Белов Д.А.</i> Результаты расчетов гидравлических потерь в трубах с глубоким профилированием на базе стохастической теории .....	64

<i>Елкин Д.Н., Зацепин А.Г.</i> Образование антициклонических вихревых линз от постоянного источника массы над наклонным дном в двуслойной вращающейся жидкости под действием топографического бета-эффекта .....	67
<i>Епифанов В.П., Гусева Е.К.</i> Волновой метаморфизм льда при не вполне упругом ударе.....	71
<i>Ермаков М.К.</i> Компьютерная лаборатория процессов конвективного тепло- и массообмена: использование матричных методов.....	74
<i>Ермолов И.Л., Бельченко Ф.М., Князьков М.М., Нагайцев Г.Н., Новиков Е.В., Остриков П.П., Семенов Е.А., Суханов А.Н.</i> Экспериментальное исследование вертикальной газожидкостной струи и ее взаимодействия с погруженными телами .....	77
<i>Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.</i> Влияние случайных флуктуаций скорости вращения на Линейную и нелинейную устойчивость течений.....	80
<i>Житников К.Р., Цыпкин Г.Г.</i> Устойчивость фронта кипения при инъекции воды в горную породу при высоких давлениях и температурах .....	84
<i>Заринов Р.Р.</i> Распространение акустических волн в многофракционных полидисперсных парогазокапельных смесях с учетом движения смеси.....	87
<i>Зацепин А.Г., Подымов О.И., Мысленкова К.П., Мурзакова Ю.В.</i> Эволюция верхнего квазиоднородного слоя в Черном море в теплый период года по данным многолетних измерений на акватории полигона «Геленджик» .....	88
<i>Зубарев Н.М., Зубарева О.В.</i> Упругое взаимодействие встречных уединенных 3D волн на поверхности диэлектрической жидкости в сильном горизонтальном электрическом поле .....	91
<i>Ивочкин Ю.П., Юдин С.М.</i> Экспериментальное исследование импульсов давления при маломасштабных паровых взрывах .....	94
<i>Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д.</i> Механизмы переноса вещества капли суспензии в различных режимах слияния .....	97
<i>Ильиных А.Ю.</i> Погружающиеся и всплывающие вихревые структуры в картине слияния свободно падающей капли.....	100
<i>Ильиных А.Ю., Хайирбеков Ш.Х.</i> Волновые и неволновые компоненты периодических течений в процессах слияния капли.....	103
<i>Калинин С.Д., Закиров М.Н., Козлов Н.О., Малиновская Е.А.</i> Об идентификации конвективных структур в приповерхностном слое атмосферы .....	107
<i>Калиниченко В.А.</i> Регуляризация низшей моды волн Фарадея слоем плавающих частиц.....	110
<i>Ко Ко Пью, Байдулов В.Г.</i> О распространении собственных колебаний в тело стержня с периодической системой сингулярных дефектов .....	112
<i>Коваль К.А., Сухоруков А.Л.</i> Численный метод определения волновой нагрузки на выдвижные устройства подводного объекта .....	116
<i>Кожурина П.И.</i> Линейная устойчивость фильтрации газа и двух несмешивающихся жидкостей в приближении Форхгеймера.....	119
<i>Козлов Н.О., Калинин С.Д., Малиновская Е.А.</i> Структуры корреляционных связей при конвективном выносе пылевого аэрозоля .....	122
<i>Колбнева Н.Ю.</i> Влияние релаксационных эффектов на капиллярные осцилляции излучающей заряженной капли вязкой проводящей жидкости .....	125
<i>Колбнева Н.Ю.</i> Акустическое излучение парогазового пузыря, колеблющегося в идеальной сжимаемой диэлектрической жидкости.....	129
<i>Корняков И.А., Пузина Ю.Ю.</i> Колебания межфазной поверхности пар – сверхтекучий гелий в прямом вертикальном канале.....	132
<i>Креузов А.С., Куличков С.Н., Попов О.Е., Зайцева Д.В., Люлюкин В.С., Кузнецов Д.Д.</i> Применение сети микробарографов для анализа когерентных возмущений в устойчиво стратифицированном АПС.....	135
<i>Кривоносова О.Э., Андреев Г.И., Жиленко Д.Ю.</i> Подавление неустойчивости течений внешним	

шумом.....	137
Кумакиев С.А. Течения вязкой жидкости в плоском диффузоре с большим углом раствора .....	140
Лаврентьев С.Ю., Соловьев Н.Г., Якимов М.Ю. Экспериментальное сравнение многолучевых схем поддержания оптического разряда .....	143
Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. О критических скоростях движения нагрузки по ледяному покрову в условиях равномерного сжатия.....	146
Мамыкин А.Д. Режимы вихревых течений жидкого металла в Т-образной цилиндрической ячейке под действием встречно-вращающихся магнитных полей.....	149
Маркин А.Н., Рулева Л.Б. Управление течением жидкостей перфузионного насоса .....	152
Матюшин П.В. Генерация внутренних гравитационных волн движением пластины с нулевым углом атаки в стратифицированной вязкой жидкости (плоская задача) .....	155
Матюшин П.В. Математическое определение вихря в течениях жидкости и газа .....	169
Михайлов Е.А., Степанова А.П., Тепляков И.О., Поздеева И.Г. Аналитическое и численное решение задачи о течениях в геометрии с тремя электродами.....	172
Мустайкин М.С., Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Численное моделирование дозвуковых течений между двумя вращающимися цилиндрами .....	174
Мухутдинова А.А. О нелинейности колебаний расхода аномально термовязкой жидкости..	175
Никулин А.С., Мелихов В.И. Валидация теплогидравлического кода STEG-IATE на экспериментальных данных .....	176
Овсянников В.М. Трусделл - Седов – Куликовский .....	179
Овсянников В.М. Теория шаровой молнии Петра Леонидовича Капицы-Леонарда Эйлера....	181
Огородников Л.Л., Вергелес С.С. Теоретическое исследование процесса формирования песчаных структур на поверхности дна в периодическом течении.....	185
Очиров А.А. Методика построения полных дисперсионных соотношений для двумерных плоских течений вязкой гетерогенной жидкости.....	186
Очиров А.А., Головкин В.В. Течения, индуцированные диффузией в стратифицированных средах .....	189
Очиров А.А., Трифонова У.О. Построение асимптотических аналитических решений для кольцевых периодических течений.....	191
Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. Волны и лигаменты в неизотермических гетерогенных сжимаемых жидкостях.....	195
Очиров А.А., Чернов А.С. Численное моделирование течений индуцированных диффузией .	198
Пескова Е.Е., Снытников В.Н., Мустайкин М.С. Программный инструментарий для решения задач каталитической термохимии .....	201
Поляков П.И. Исследование формы поверхности раздела двух жидких металлов, к которым приложены электрический ток и внешнее магнитное поле, в цилиндрическом сосуде.....	202
Привалов Л.Ю. Конвективная ПЦР в микропробирке: влияние угла наклона на температурное распределение.....	204
Прохоров В.Е. Объемные осцилляции и акустическое излучений газового пузыря изменяющейся формы .....	207
Проценко А.А., Шкапов П.М. Анализ зависимости частот кавитационных автоколебаний от подачи и кавитационного запаса центробежного насоса с боковым подводом .....	210
Руденко А.И. Некоторое дополнение к теории поверхностных гравитационных волн.....	212
Рулева Л.Б., Солодовников С.И. Экспериментальные исследования влияния среды на тлеющий разряд.....	214
Рысин К.Ю., Субботин С.В. Режимы течений, возбуждаемые прецессией диска во вращающемся цилиндре с коническим дном.....	217

<i>Сиваков Н.С.</i> Численное исследование взаимодействия капель расплава олова в воде .....	220
<i>Ситников В.О., Некрут Е.О., Гатапова Е.Я.</i> Применение машинного обучения для исследования динамики пузырей в растекающейся по перегретой поверхности капле жидкости.....	223
<i>Слюняев А.В., Кокорина А.В.</i> Групповая структура волн на поверхности воды и ее отражение в статистических характеристиках вариаций донного давления.....	224
<i>Снытников В.Н., Пескова Е.Е.</i> Волновая динамика радикалов в газопылевой среде при каталитической конверсии углеводов .....	227
<i>Соболева Е.Б.</i> О переменной вязкости в естественно-конвективных течениях многокомпонентных жидкостей в пористой среде.....	228
<i>Сыродой С.В., Замалтдинов Р.Р.</i> Диспергирование капель водоугольного топлива при ударе о плоскую движущуюся пластину .....	231
<i>Теньков А.Н.</i> Анализ алгоритма расчета многофазных течений в OpenFOAM методом MP-PIС .....	234
<i>Торчик М.В., Андросенко В.Н., Котов М.А., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю.</i> Об исследовании параметров конвективного факела непрерывного оптического разряда в герметичной камере .....	237
<i>Тукмаков Д.А.</i> Численное моделирование вдува капельного потока в поток запыленной среды.....	239
<i>Урманчиев С.Ф.</i> Анализ уравнений математической модели течения жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры .....	242
<i>Усанов В.А., Сиваков Н.С.</i> Визуализация и численный расчет поля скорости вертикальной газожидкостной струи .....	245
<i>Уточкин В.Ю.</i> Нелинейная динамика режимов конвекции во вращающемся реакторе Хелешоу.....	249
<i>Федюшкин А.И.</i> Колебательная конвекция жидкости при малых и больших числах Прандтля .....	252
<i>Филиппов Ф.В., Чаплыгин А.В., Котов М.А., Соловьев Н.Г., Глебов В.Н., Дуброва Г.А., Малютин А.М.</i> Об измерениях тепловых потоков термоэлектрическим детектором на высокочастотном индукционном плазмотроне ВГУ-4 .....	255
<i>Хазанов Г.Е., Ермаков С.А.</i> Погружение плавучей полиэтиленовой пленки под воздействием крутых волн. Численное моделирование .....	257
<i>Хайирбеков Ш.Х., Ильиных А.Ю.</i> Оценка распространения капиллярных волн в различных средах .....	261
<i>Чашечкин Ю.Д.</i> Наблюдательные, логические и математические основы теории течений гетерогенных жидкостей .....	264
<i>Чашечкин Ю.Д.</i> Эволюция капельных течений в гравитационном и электростатическом полях.....	269
<i>Черепанов И.Н., Смородин Б.Л.</i> Биоконвективные волновые течения суспензии гавитактических микроорганизмов.....	278
<i>Чернышов М.В.</i> Новые точные решения задач теории интерференции газодинамических разрывов. Обобщенный критерий фон Неймана.....	281
<i>Широков И.А.</i> Сверхзвуковое обтекание осесимметричного тела под большим углом атаки: вихревые зоны и ударные волны .....	283
<i>Шмакова Н.Д., Спицына А.А.</i> Квазидвумерное течение пены в ячейке сквозь каналы различной геометрии .....	286
<i>Щеглов А.С., Гайфуллин А.М.</i> Закрученные пристенные струи несжимаемой жидкости .....	288
<i>Язовцева О.С.</i> Многомасштабное моделирование выжига коксовых отложений из слоя катализатора .....	291



<i>Якуш С.Е.</i> Газожидкостные подводные струи: эксперименты и моделирование .....	292
<i>Яцких А.А., Лысенко В.И., Смородский Б.В., Афанасьев Л.В., Колосов Г.Л., Косинов А.Д.</i> Численное моделирование влияния продольных слотов на пластине на развитие возмущений различной амплитуды в сверхзвуковом пограничном слое .....	297
<i>Djoudar B., Abdelouahab M.</i> Multiphase flow analysis of falling droplets and binary coalescence using experimental and numerical approaches .....	300
<i>Fedoseyev A. Alexeev</i> Hydrodynamic equations and analytical solution for turbulent flow in channel .....	308
<i>Зубарев В.М.</i> Турбулентное течение в эксперименте F0141A с градиентом давления.....	311
Содержание.....	313



**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН –  
ведущая научная организация Российской Федерации в области механики.**

**Исследования Института затрагивают практически весь спектр актуальных проблем механики жидкостей, газа и плазмы, механики деформируемого твердого тела, общей механики, геомеханики, трибологии и теории управления. Проблематика Института направлена на решение фундаментальных задач, лежащих в основе новой техники и технологий.**

Институт располагает научными кадрами высшей квалификации и уникальным научным оборудованием, что позволяет проводить исследования мирового уровня. Основные научные направления деятельности:

- Общая механика, навигационные системы, динамика космических тел и управляемых аппаратов;
- Робототехника и мехатроника;
- Теория и методы управления динамическими системами;
- Механика жидкости, газа и плазмы, многофазных сред;
- Аэротермодинамика летательных аппаратов;
- Механика горения и взрыва;
- Физическая механика газовых разрядов и лазерных технологий;
- Механика деформирования и разрушения твердых тел и конструкций;
- Механика композиционных и наноматериалов;
- Трибология;
- Механика природных процессов;
- Геомеханика;
- Биомеханика;
- Постановка и обработка результатов космических экспериментов в области механики и материаловедения.

Научные результаты, полученные по направлениям *«Механика жидкости, газа и плазмы многофазных и неидеальных сред, механика горения, детонации и взрыва»*, *«Механика деформирования и разрушения материалов, сред, изделий, конструкций, сооружений и триботехнических систем при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред»*, *«Общая механика, навигационные системы, динамика космических тел, транспортных сред и управляемых аппаратов, механика живых систем»*, *«Механика природных процессов»*, *«Триботехника и износостойкость высоконагруженных элементов машин»* и *«Общая теория систем управления и информационно-управляющих систем, методы и средства коммуникационно-сетевого управления многоуровневыми и распределенными динамическими системами в условиях неполной информации»* являются выдающимися на мировом уровне. Создаваемые в Институте новые знания представлены в многочисленных публикациях в ведущих отечественных и зарубежных научных изданиях, а также на конгрессах и конференциях. В 2025 году Указом Президента РФ коллектив Института награждён орденом Почёта.

**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)**



**Адрес: 119526, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, к. 1**

**Тел.: +7-495-434-00-17 (канцелярия)**

**+7-495-434-32-38 (приемная)**

**Факс: +7-499-739-95-31**

**E-mail: [ipm@ipmnet.ru](mailto:ipm@ipmnet.ru)**

**Сайт: [www.ipmnet.ru](http://www.ipmnet.ru)**

16-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ –  
ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ  
Москва, Россия, 02 – 05 декабря 2025 г.

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ ШКОЛЫ

ISBN 978-5-91741-299-3



Подписано к печати 15.12.2025 Тираж 300 экз.

119034, Москва, Лопухинский пер., д. 3, стр. 2.  
Отпечатано в ООО фирма «ИСПО-ПРИНТ»