

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук
(ИПМех РАН)

«Утверждаю»
Директор ИПМех РАН
Д.ф.-м.н.
С.Е. Якуш



« 28 » сентября 2018 г.

Рабочая программа учебной дисциплины (РПУД)
«Устойчивость динамических систем»

Направление подготовки 01.06.01 Математика и механика
Специальность 01.02.01 Теоретическая механика

Форма подготовки (очная)
Отдел аспирантуры ИПМех РАН

Курс 1

Всего часов – 144, всего зачетных единиц – 4

Аудиторных часов – 144, в том числе:

лекции – 72 часа

семинары – 72 часа

Формы аттестации:

Семестр	Форма контроля	Часы
1	<i>Дифференциальный зачет</i>	72
2	<i>Экзамен</i>	72

Рабочая программа составлена в соответствии с Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 30 июля 2014 г. № 866 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации)".

Составители: зав. лаб., д.ф.-м.н., проф. Ананьевский И.М.
с.н.с., д.ф.-м.н. Костин Г.В.

Заведующий отделом аспирантуры: Щелчкова И.Н.

1. Аннотация

Дисциплина «Устойчивость динамических систем» предназначена для аспирантов, обучающихся по образовательной программе 01.02.01 Теоретическая механика, и входит в вариативную часть учебного плана.

При разработке рабочей программы учебной дисциплины использованы Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, учебный план подготовки аспирантов по специальности 01.02.01 Теоретическая механика.

2. Цели и задачи

Цель дисциплины: изучение основ теории устойчивости движения и овладение методами исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений и развитие умения применять эти методы для исследования устойчивости механических систем.

Задачи дисциплины:

- овладение основами теоретических знаний в области устойчивости решений дифференциальных уравнений;
- овладение методами исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений;
- развитие умения применять методы теории устойчивости для исследования устойчивости механических систем.

3. Место дисциплины

3.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы аспирантуры

Дисциплина «Устойчивость динамических систем» включает в себя разделы, которые могут быть отнесены к вариативным частям программы подготовки аспирантов по направлению 01.06.01, в том числе направленные на подготовку к сдаче кандидатского экзамена.

3.2. Дисциплина базируется на дисциплинах:

1. Общая физика
2. Математический анализ
3. Дифференциальные уравнения
4. Теоретическая механика
5. Вариационные методы в теоретической механике

3.3. Дисциплина предшествует изучению дисциплин:

1. Оптимальное управление динамическими системами
2. Механика робототехнических систем

4. Результаты обучения

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

Знать:

- основные понятия и определения теории устойчивости решений дифференциальных уравнений;
- основные методы исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений;
- особенности применения методов теории устойчивости к исследованию устойчивости механических систем.

Уметь:

- применять математический аппарат теории устойчивости движения к задачам исследования устойчивости механических систем;
- выбирать наиболее эффективный метод исследования устойчивости в зависимости от конкретной постановки задачи;
- давать физическую интерпретацию полученных результатов решения исследуемой задачи.

Владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и исследования физических задач;
- навыками решения типовых задач и задач повышенной трудности с использованием методов теоретической механики и теории устойчивости движения;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

Компетенции выпускника, формируемые в результате изучения дисциплины

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих универсальных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций аспиранта:

Универсальные компетенции:

- УК–1. Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
- УК–3. Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
- УК–5. Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития

Общепрофессиональные компетенции:

- ОПК–1. Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
- ОПК–2. Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования

Профессиональные компетенции:

- ПК–1. Способность применять аналитические, вычислительные и системно-аналитические методы для решения прикладных задач в области управления объектами и системами объектов техники;
- ПК–2. Способность самостоятельно применять методы аналитической механики и вычислительной математики, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования к постановке и решению начально-краевых задач движения механических систем и задач управления их движением;
- ПК–3. Умение использовать системный подход к исследованию технических систем и выработке стратегии научной деятельности в процессе реализации научных и технологических инноваций.

- ПК–4. Способность использовать знания в области математики и теоретической механики для дальнейшего освоения дисциплин в соответствии с профилем подготовки.

5. Темы и Разделы

Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам и разделам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий:

№	Темы дисциплины	Семестр	Лекции	Практич. (семинар.) задания
		<i>(№ семестра)</i>	<i>(часы)</i>	<i>(часы)</i>
1	Устойчивость по Ляпунову. Определения устойчивости, (глобальной) асимптотической устойчивости.	1	6	4
2	Линейные системы. Свойства решений. Теоремы о связи между устойчивостью и ограниченностью решений однородных и неоднородных систем.	1	6	8
3	Устойчивость линейных однородных систем с постоянными коэффициентами. Теорема Гурвица. Критерий Михайлова	1	8	8
4	Устойчивость линейных неавтономных систем.	1	8	8
5	Системы с периодическими коэффициентами. Устойчивость и мультипликаторы. Параметрический резонанс.	1	8	8
6	Теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для автономных и неавтономных систем.	2	8	8
7	Построение функций Ляпунова для линейных систем. Устойчивость по первому приближению.	2	6	4
8	Устойчивость равновесия механических систем. Теорема Лагранжа–Дирихле.	2	6	8
9	Устойчивость стационарных вращений твердого тела. Волчок Лагранжа.	2	6	4
10	Стабилизация положения равновесия с помощью диссипативных и гироскопических сил.	2	6	8

11	Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.	2	4	4
	Итого (часов)	144	72	72

Разделы:

1. **Устойчивость по Ляпунову. Определения устойчивости, (глобальной) асимптотической устойчивости.**
 - 1.1. Основные свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.
 - 1.2. Определения устойчивости, (глобальной) асимптотической устойчивости.
2. **Линейные системы. Свойства решений. Теоремы о связи между устойчивостью и ограниченностью решений однородных и неоднородных систем.**
 - 2.1. Линейные системы.
 - 2.2. Свойства решений.
 - 2.3. Фундаментальная матрица.
 - 2.4. Теоремы о связи между устойчивостью и ограниченностью решений однородных и неоднородных систем.
3. **Устойчивость линейных однородных систем с постоянными коэффициентами. Теорема Гурвица. Критерий Михайлова.**
 - 3.1. Подобные матрицы.
 - 3.2. Свойства подобных матриц.
 - 3.3. Жорданова (каноническая) форма матрицы.
 - 3.4. Устойчивость линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.
 - 3.5. Маятник с гармоническим возбуждением.
 - 3.6. Гурвицевы полиномы.
 - 3.7. Присоединенные полиномы и их свойства.
 - 3.8. Теорема (критерий) Гурвица.
 - 3.9. Критерий Михайлова.
4. **Устойчивость линейных неавтономных систем.**
 - 4.1. Лемма Гронуолла–Беллмана.
 - 4.2. Неравенство Важевского.
 - 4.3. Теорема об устойчивости линейных неавтономных систем.
 - 4.4. Пример неустойчивой линейной неавтономной системы $x' = A(t)x$, у которой собственные числа матрицы $A(t)$ при любом t отрицательны.
 - 4.5. Пример асимптотически устойчивой линейной неавтономной системы, у которой матрица $A(t)$ при любом t имеет положительное собственное число.
 - 4.6. Устойчивость линейных неавтономных систем с почти постоянной матрицей.
5. **Системы с периодическими коэффициентами. Устойчивость и мультипликаторы. Параметрический резонанс.**
 - 5.1. Системы с периодическими коэффициентами.
 - 5.2. Теорема Флоке.
 - 5.3. Теорема Ляпунова о приводимости.
 - 5.4. Устойчивость и мультипликаторы.
 - 5.5. Параметрический резонанс.
6. **Теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для автономных и неавтономных систем.**
 - 6.1. Теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для автономных систем.
 - 6.2. Равномерная устойчивость и асимптотическая устойчивость.
 - 6.3. Теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для неавтономных систем.
 - 6.4. Контрпример Массера.

- 6.5. Предельные множества траекторий автономных систем.
- 6.6. Свойства предельных множеств.
- 6.7. Теорема Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости.
7. **Построение функций Ляпунова для линейных систем. Устойчивость по первому приближению.**
 - 7.1. Кронекеровские произведения матриц и их свойства.
 - 7.2. Решение матричного уравнения $AX + XB = C$.
 - 7.3. Построение функций Ляпунова для линейных систем.
 - 7.4. Теоремы об устойчивости по первому приближению.
 - 7.5. Асимптотическая устойчивость в целом.
8. **Устойчивость равновесия механических систем. Теорема Лагранжа–Дирихле.**
 - 8.1. Уравнения Лагранжа.
 - 8.2. Полная энергия.
 - 8.3. Диссипация.
 - 8.4. Теорема Лагранжа–Дирихле.
9. **Устойчивость стационарных вращений твердого тела. Волчок Лагранжа.**
 - 9.1. Оператор инерции твердого тела.
 - 9.2. Динамические уравнения Эйлера.
 - 9.3. Устойчивость стационарных вращений твердого тела.
 - 9.4. Волчок Лагранжа.
10. **Стабилизация положения равновесия с помощью диссипативных и гироскопических сил.**
 - 10.1. Энергетические и неэнергетические силы.
 - 10.2. Стабилизация положения равновесия с помощью диссипативных и гироскопических сил.
11. **Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.**
 - 11.1. Понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).
- Необходимое программное обеспечение: программный комплекс *Maple*.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение

7.1. Основная литература:

1. Демидович Б.П. Лекции по теории устойчивости. Москва, Наука, 1967. 472 с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. РХД 2007 г. 592 с.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
4. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. РХД, 2000. 176 с.

7.2. Дополнительная литература:

5. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. Москва, Физматлит, 2006. 328 с.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955.
7. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

7.3. Учебно-методическая литература:

8. Александров А.Ю., Александрова Е.Б., Екимов А.В., Смирнов Н.В. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости. СПб.: ООО «Соло», 2003. 162 с.

7.4. Перечень ресурсов сети интернет:

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека МФТИ
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/> – электронная библиотека портала Eqworld.
5. <http://teormech.fizteh.ru> – Сайт кафедры теоретической механики МФТИ.

9. Методические указания

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, семинаров, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и проверка самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

10. Фонд оценочных средств

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Порядок проведения контрольных работ/тестов:

Во время проведения контрольных работ/тестов обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, калькуляторами.

Порядок проведения дифференцированного зачета:

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости: по результатам контрольных, самостоятельных работ/тестов по каждой теме.

Порядок проведения устного экзамена:

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена при подготовке ответов на билеты обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций, семинаров и любой другой литературой.

Во время проведения экзамена при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и семинаров и любой другой литературой.

**Перечень типовых контрольных заданий,
используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме дифференциального зачета (устного), итоговая аттестация – в форме экзамена (устного).

Текущий контроль осуществляется в форме самостоятельных работ или тестов в письменной форме по каждой теме. Каждое задание в самостоятельных и тестовых работах оценивается определенным количеством баллов в конце условия каждого задания. По итогам набранных баллов выставляется оценка.

Примеры экзаменационных билетов (заданий, тестов и др. материалов, используемых для проведения зачета, экзамена):

Примеры тестовых вопросов к дифференциальному зачету:

Вариант 1

I. Основные свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Определения устойчивости, (глобальной) асимптотической устойчивости.

II. С помощью второго метода Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = -x$$

Вариант 2

I. Линейные системы. Теоремы о связи между устойчивостью и ограниченностью решений однородных и неоднородных систем.

II. С помощью второго метода Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = 1 - \cos^4 x$$

Вариант 3

I. Устойчивость линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.

II. Построить функцию Ляпунова для системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1^2 - x_2^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 + x_2^2$$

Вариант 4

I. Маятник с гармоническим возбуждением.

II. Вывести условие устойчивости системы

$$\dot{x} = -x + \alpha y$$

$$\dot{y} = \beta x - y + \alpha z$$

$$\dot{z} = \beta y - z$$

Вариант 5

I. Гурвицевы полиномы. Присоединенные полиномы и их свойства. Теорема (критерий) Гурвица.

II. С помощью второго метода Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = (1 - e^x)(x^2 + 2)$$

Вариант 6

I. Лемма Гронуолла - Беллмана. Неравенство Важевского. Теорема об устойчивости линейных неавтономных систем.

II. Построить функцию Ляпунова для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2^4$$

$$\dot{x}_2 = x_1^4 x_2$$

Вариант 7

I. Устойчивость линейных неавтономных систем с почти постоянной матрицей.

II. Построить функцию Ляпунова для системы

$$\dot{x}_1 = x_1^5 + x_2^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^4 x_2$$

Вариант 8

I. Системы с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке. Теорема Ляпунова о приводимости. Устойчивость и мультипликаторы.

II. Построить функцию Ляпунова для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 - x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 x_2$$

Вариант 9

- I. Параметрический резонанс.
- II. Доказать равносильность двух определений функции, допускающей бесконечно малый высший предел.

Вариант 10

- I. Теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для автономных систем.
- II. Привести пример асимптотически устойчивой линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, у которой матрица $A(t)$ при любом t имеет положительное собственное число.

Вариант 11

- I. Равномерная устойчивость и асимптотическая устойчивость.
- II. Привести пример неустойчивой линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, у которой собственные числа матрицы $A(t)$ при любом t отрицательны.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1

- I. Предельные множества траекторий автономных систем. Свойства предельных множеств. Теорема Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости.
- II. Убедиться, что при $n = 2$ гурвицевость полинома эквивалентна тому, что коэффициенты полинома имеют один знак, а при $n = 3$ - нет. Вывести условие устойчивости для полинома $f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r$.

Билет 2

- I. Теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для неавтономных систем.
- II. Контрпример Массера.

Билет 3

- I. Кронекеровские произведения матриц и их свойства. Решение матричного уравнения $AX + XB = C$. Построение функций Ляпунова для линейных систем.
- II. С помощью второго метода Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = -xe^{-t}$$

Билет 4

- I. Теоремы об устойчивости по первому приближению.
- II. Исследовать устойчивость положения равновесия нелинейного маятника с трением.

Билет 5

I. Асимптотическая устойчивость в целом.

II. Для системы

$$\dot{x} = A(t)x$$

доказать формулу Лиувилля

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Sp} A(\tau) d\tau},$$

где $W(t) = \det X(t)$. Показать, что для устойчивости системы необходимо, чтобы интеграл

$$\int_{t_0}^t \text{Sp} A(\tau) d\tau$$

был ограничен сверху при $t \geq t_0$, а для асимптотической устойчивости необходимо

$$\int_{t_0}^t \text{Sp} A(\tau) d\tau \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Билет 6

I. Устойчивость равновесия механических систем. Теорема Лагранжа - Дирихле.

II. Исследовать устойчивость уравнения

$$\ddot{x} + p(t)x = 0$$

где $p(t)$ - 2π -периодическая функция, $p(t) = a^2$ при $t \in [0, \pi)$, $p(t) = b^2$ при $t \in [\pi, 2\pi)$ для следующих значений параметров: $a = 0.5$, $b = 0$.

Билет 7

I. Оператор инерции твердого тела. Динамические уравнения Эйлера. Устойчивость стационарных вращений твердого тела.

II. Исследовать устойчивость уравнения

$$\ddot{x} + p(t)x = 0$$

где $p(t)$ - 2π -периодическая функция, $p(t) = a^2$ при $t \in [0, \pi)$, $p(t) = b^2$ при $t \in [\pi, 2\pi)$ для следующих значений параметров: $a = 0.75$, $b = 0$.

Билет 8

I. Волчок Лагранжа.

II. Исследовать устойчивость верхнего и нижнего положений равновесия нелинейного маятника двумя способами: по первому приближению и с помощью второго метода Ляпунова.

Билет 9

I. Стабилизация положения равновесия с помощью диссипативных и гироскопических сил.

II. Исследовать устойчивость системы с помощью критериев Михайлова или Рауса–Гурвица

$$y''' + y'' + y' + 2y = 0$$

Билет 10

I. Теорема Персидского о существовании функции Ляпунова.

II. Исследовать устойчивость уравнения

$$x' + p(t)x = 0$$

где $p(t)$ - 2π -периодическая функция, $p(t) = a^2$ при $t \in [0, \pi)$, $p(t) = b^2$ при $t \in [\pi, 2\pi)$ для следующих значений параметров: $a = 0.5$, $b = 1$.

Билет 11

I. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

II. Исследовать устойчивость системы с помощью критериев Михайлова или Рауса II. Гурвица

$$y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$$

Критерии оценивания

- **оценка «отлично (10)»** выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «отлично (9)»** выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «отлично (8)»** выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «хорошо (7)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- **оценка «хорошо (6)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;
- **оценка «хорошо (5)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;
- **оценка «удовлетворительно (4)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;
- **оценка «удовлетворительно (3)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- **оценка «неудовлетворительно (2-1)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета, он показал что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.